Lab session 4 → Filtering

Ana Lopes 98587
Mariana Ucarão 98473
Group 22

Part I

1)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Leftrightarrow Y(z)\left(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}\right) = X(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}\right)$$

transformação de variável: $z^{-n_0} Y(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(n-n_0)$

$$z^{-n_0} X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x(n-n_0)$$

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$$

Part II

Ana Lopes 98587
Mariana Moulão 98473
Group 22

8)

Matematicamente, o Laplaciano é dado pela seguinte expressão:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

com f como sendo a função que dá a intensidade do pixel (n,m) da imagem, $f(n,m)$

As derivadas parciais de 1ª ordem podem ser aproximadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(n, m+1) - f(n,m) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f(n+1, m) - f(n,m)$$

As derivadas parciais de 2ª ordem deduzem-se como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(n, m+1) - f(n,m) - (f(n,m) - f(n,m-1)) = f(n,m+1) - 2f(n,m) + f(n,m-1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(n+1,m) - f(n,m) - (f(n,m) - f(n-1,m)) = f(n+1,m) - 2f(n,m) + f(n-1,m)$$

Deste modo:

$$\nabla^2 f = f(n,m+1) - 2f(n,m) + f(n,m-1) + f(n+1,m) - 2f(n,m) + f(n-1,m) =$$
$$= -4f(n,m) + f(n,m+1) + f(n,m-1) + f(n+1,m) + f(n-1,m)$$

O operador Laplaciano 2D tem a seguinte máscara/kernel:

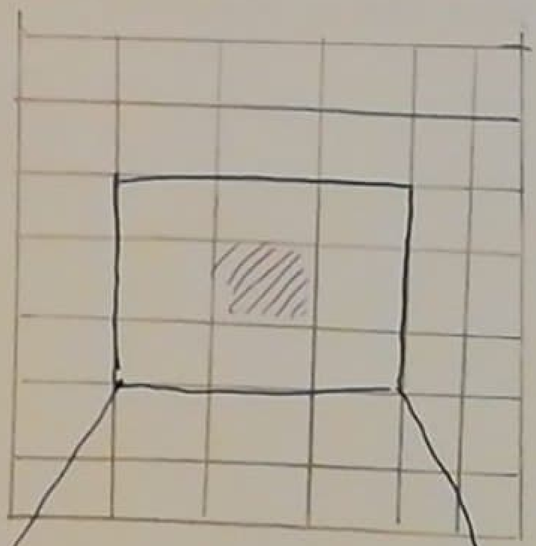
	1	
1	-4	1
	1	

Como tal, conclui-se que a máscara L_4 corresponde a um operador Laplaciano negativo, $-\nabla^2 f$, detetando fronteiras interiores.

Por outro lado, o L_8 corresponde a um outro operador Laplaciano negativo, sendo sensível a edges diagonais.

$$L_8 = -f(n-1,m-1) - f(n-1,m) - f(n-1,m+1) - f(n,m-1) - f(n,m+1) - f(n+1,m-1) -$$
$$f(n-1,m) - f(n-1,m+1) + 8f(n,m)$$

Esquematicamente, tem-se que o Laplaciano da intensidade do pixel (n,m) é calculado ao convolver-se a imagem com o kernel centrado no pixel (n,m), traduzindo-se em



$x(n-1,m-1)$	$x(n-1,m)$	$x(n-1,m+1)$			A	B	C
$x(n,m-1)$	$x(n,m)$	$x(n,m+1)$	*		D	E	F
$x(n+1,m-1)$	$x(n+1,m)$	$x(n+1,m+1)$			G	H	I

$$y(n,m) = A\,x(n-1,m-1) + B\,x(n-1,m) + C\,x(n-1,m+1) + D\,x(n,m-1) + E\,x(n,m) + F\,x(n,m+1) + G\,x(n+1,m-1) + H\,x(n+1,m) + I\,x(n+1,m+1)$$

onsiderando os kernels de L_y e L_g, tem-se que as equações às diferenças espetivas são iguais às anteriormente derivadas

cont. Part II 8).

Ana Lopes 98587
Mariana Marção 98473
Group 22