Lab Session 3 → Spectral Analysis and DFT

Ana Lopes 98587
Mariana Marcão 98473
Group 22

Part II

2) De forma a explicar o modo como obtivemos o espectro na alínea anterior, tendo em consideração os limites de banda do sinal, temos que:

O sinal obtido com a função criada chirpTone é caracterizado por:

$$x(n) = \sin(2\pi f(n)\, t(n)), \text{ em que } 2\pi f(n) T(n) = \varphi$$

com $f(n) = f_1 + (f_2 - f_1)\, t(n)$ e com $0 < T(n) < 1$

De modo a calcular a frequência instantânea, temos que:

$$f(t(n)) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{\partial f(n)}{\partial t}\, t(n) + f(n)$$

$$= (f_2 - f_1)\, T(n) + f_1 + (f_2 - f_1)\, t(n) =$$

$$= \boxed{2(f_2 - f_1)\, t(n) + f_1}$$

Tendo em consideração os limites de frequência do sinal, em que f_1 (mínimo) $= 200$ Hz e f_2 (máximo) $= 1000$ Hz, podemos dizer que:

$$f(\tau(n)) = 2(1000 - 200)\, \tau(n) + 200$$

$$= 1600\, t(n) + 200$$

Substituindo $t(n)$, também pelo máximo (1) e pelo mínimo (0):

$$\left.\begin{aligned} t(n) = 0 &\rightarrow f(0) = 1600 \times 0 + 200 = 200 \text{ Hz} \\ t(n) = 1 &\rightarrow f(1) = 1600 \times 1 + 200 = 1800 \text{ Hz} \end{aligned}\right\}$$

com isto podemos concluir que entre 0 Hz e 200 Hz e entre 1800 Hz e 2000 Hz (f_s), a DFT é considerada nula

Part II

4) De modo a comparar os espectros dos sinais $f(t)$ e $g(t)$, decidimos analisar a função $g(t)$, com os valores de f_1 e f_2 dados, que correspondem a 1000 Hz e a 1500 Hz, respetivamente.

Então:

$$g(t) = \sin(2\pi \times f_1 \cdot t) \times \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

Substituindo f_1 e f_2 por 1000 e 1500 Hz, obtemos:

$$g(t) = \sin(2\pi \cdot 1000\, t) \times \sin(2\pi \times 1500\, t)$$

Sendo que $g(t)$ pode ser decomposto em:

$$g(t) = \left(\frac{e^{2\pi \times 1000 \times t} - e^{-2\pi \times 1000 \times t}}{2i}\right) \times \left(\frac{e^{2\pi \times 1500 \times t} - e^{-2\pi \times 1500 \times t}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{e^{2\pi\, 2500 t} - e^{-2\pi 500 t} - e^{2\pi 500 t} + e^{-2\pi\, 2500 t}}{-4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2\pi\, 2500 t} + e^{-2\pi 2500 t} - \left(e^{2\pi 500 t} + e^{-2\pi\, 500 t}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos(2\pi\, 2500 t) + \cos(2\pi\, 500\, t)\right)$$

Podemos concluir que $g(t)$ é equivalente à soma de 2 sinusóides mas com frequências diferentes de f_1 e f_2, em que f_2 é superior à frequência de Nyquist ($2500 > fs/2$), logo ocorre aliasing.

Ana Lopes 98587
Mariana Moura 98473
Group 22

Part III

2) De modo a encontrar uma relação entre os espectros de $x(t)$ com $x_{am}(t)$, caracterizamos x_{am} como:

$$x_{am}(t) = (1 + \alpha\, x(t))\, c(t)$$

onde $x(t) = \sin(2\pi f t)$ e $c(t) = \cos(2\pi f_0)$

Podemos designar x_{am} como:

$$x_{am}(t) = (1 + \alpha \sin(2\pi f t)) \cos(2\pi f_0 t) =$$

$$= \left(1 + \alpha \left(\frac{e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}}{2i}\right)\right) \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right) =$$

$$= \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} + \frac{\alpha}{4i}\left(e^{j2\pi(f+f_0)t} - e^{j2\pi(f_0-f)t} + e^{j2\pi(f_0-f)t} - e^{-j2\pi(f_0+f)t}\right)$$

$$= \cos(2\pi f_0 t) + \frac{\alpha}{2}\left(\sin(2\pi(f+f_0)t) + \sin(2\pi(f_0-f)t)\right) =$$

$$= \cos(2\pi\, 1000 t) + \frac{\alpha}{2}\left(\sin(2\pi(1100 t) + \sin(2\pi\, 900 t)\right)$$

em que consideramos $f = 100\,Hz$ e $f_0 = 1000\,Hz$.

Ana Lopes 98587
Mariana Marcos 98473
Grup 22

Part III

3) considerando o sinal $\cos(2\pi f_0(1+\alpha\, x(t)\, t)$ em que

$2\pi f_0(1+\alpha\, x(t)\, t \Rightarrow \varphi = 2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \alpha\, x(t)\, t$

tendo em conta que a frequência instantânea do sinal é dada por:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f_0 + f_0\alpha\left(\frac{\partial x}{\partial t}t + x(t)\right)$$

em que $x(t) = \sin(2\pi f t)$

então, substituindo, obtemos:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f_0 + f_0\alpha\left(2\pi f\cos(2\pi f t)t + \sin(2\pi f t)\right)$$

se temos $f_0 = 1000\,Hz$ e $f = 100\,Hz$, adquirimos um resultado como:

-> caso $t=0$, a frequência instantânea $= 1000\,Hz$

-> caso $t=1$, a frequência instantânea, tem de ter em conta o valor do α:

⇒ caso $\alpha = 0{,}1$, a frequência instantânea $= 63\,831{,}85\,Hz$

⇒ caso $\alpha = 1$, a frequência instantânea $= 629318{,}53\,Hz$

valores obtidos a partir de:

$$\underset{1000}{f_0} + \underset{1000}{f_0}\,\underset{0{,}1 \,;\, 1}{\alpha}\left(2\pi \underset{100}{f}\cos(2\pi \underset{\times}{f}\underset{1}{t})t + \sin(2\pi \underset{100}{f}\underset{1}{t})\right)$$

Ana Lopes 98587
Mariana Morais 98473
Group 22