Cálculo Numérico 2017 - Exercício Programa: Integração Numérica

Entrega: 11/dez/17

1 Pêndulo Simples

O movimento de um pêndulo simples em termos do ângulo em relação à normal à superfície é determinado pelas leis de Newton e é solução para a seguinte equação de:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta. \tag{1}$$

Mostre que o período total de oscilação é dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}, \tag{2}$$

onde θ_0 é o ângulo inicial. Escreva um programa que calcule o período numericamente dados θ_0, l e g. Não utilize pacotes prontos. Compare dois métodos: Simpson e Trapézio. Faça gráficos mostrando o valor das integrais como função no numero de pontos utilizados e mostrando o valor de T em função de θ_0 e de l. Para quais amplitudes o valor do período difere de $2\pi\sqrt{l/g}$ mais do que 1%? Comente os resultados

2 Difração por um semi-plano

Ao ser difratada por um semiplano a intensidade luminosa varia com a distância x da borda de acordo com

$$I(x) = \frac{1}{2}I_0\left\{\left[C(x) + \frac{1}{2}\right]^2 + \left[S(x) + \frac{1}{2}\right]^2\right\}, \tag{3}$$

onde

$$C(x) = \int_0^x dw\cos(\pi w^2/2) \tag{4}$$

e

$$S(x) = \int_0^x dw\sin(\pi w^2/2) \tag{5}$$

são as integrais de Fresnel.

Estude a teoria da difração e verifique as expressões acima. Escreva seus próprios programas para calcular $I(x)$ utilizando o método de Romberg.

3 Capacidade térmica de um sólido

A capacidade térmica é a variação na energia interna de uma substância conforme aumenta sua temperatura. Nos sólidos a capacidade térmica aumenta com a temperatura rapidamente e satura para temperaturas altas.

Em um artigo de 1906 Einstein propôs um modelo para a capacidade térmica de um cristal assumindo que a energia seria alocada em um sólido em intervalos discretos (fonons) na forma de modos de vibração com frequência fixa definida pela substância. No modelo de Einstein a capacidade térmica molar é dada por:

$$c_V = 3nk \left(\frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{(e^{T_E/T} - 1)^2}, \tag{6}$$

onde n é o número de moles, k é a constante de Boltzmann,T a temperatura absoluta e T_E a temperatura de Einstein, específica para cada substância.

Em 1912 Peter Debye sugeriu um modelo mais realista para a capacidade térmica molar de um sólido como função da temperatura:

$$c_V = 9nkg(u), \tag{7}$$

onde $u = T_D/T$ e T_D a temperatura de Debye da substância. A função $g(u)$ é dada por:

$$g(u) = \frac{1}{u^3} \int_0^u dx \, \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \tag{8}$$

As temperaturas de Einstein e Debye estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\left(\frac{T_E}{T_D} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \tag{9}$$

Escreva seu próprio programa para calcular a capacidade de calor segundo Debye pelo método da Quadratura Gaussiana com $N = 2$ pontos, $N = 5$ pontos e com $N = 10$ pontos. Construa um gráfico comparando os resultados. Construa um gráfico comparando os modelos de Einstein e de Debye.

Referências

[1] R.P. Feynman, *Lições de Física de Feynman.*