Series de Tiempo. Actividad nº2

Mariana Vargas V.

November 6, 2017

1 Primer problema

El proceso AR(1) está dado por la siguiente ecuación

$$X_t = 2 + 0.9X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

Es decir que $C = 2$ y $\phi = 0.9$.

(a) Si el proceso es estacionario tenemos

$$\mu = C + \phi\mu$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{C}{1-\phi} \\ &= \frac{2}{1-0.9} \\ &= 20\end{aligned}$$

La función de varianza será

$$\begin{aligned}Var(X_t) &= Var(2 + 0.9X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= 0.9^2 Var(X_{t-1}) + 4\end{aligned}$$

en donde

$$Var(X_{t-1}) = \frac{4^2}{1-0.9^2}$$

Para calcular la autocovarianza multiplicamos ambos miembros de la ecuación (1) por X_{t+k} y tomamos esperanza:

$$\begin{aligned}E(X_t X_{t+k}) &= E(CX_{t+k} + \phi X_t X_{t+k} + \varepsilon X_{t+k}) \\ \gamma_k &= CE(X_{t+k}) + \phi E(X_t X_{t+k}) + E(\varepsilon)E(X_{t+k}) \text{ , (notar que } \varepsilon \text{ y } X_{t+k} \text{ son independientes)} \\ &= C\mu + \phi\gamma_{k-1} \\ &= \frac{C^2}{1-\phi} + \phi^k \gamma_0\end{aligned}$$

(b) En cuanto al proceso en sí, el valor de $\phi = 0.9 < |1|$ indica que es estacionario.

(c) La autocorrelación simple está dada por

$$\begin{aligned}\rho_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\ &= \frac{\frac{C^2}{1-\phi} + \phi^k \gamma_0}{\gamma_0} \\ &= \frac{C^2}{(1-\phi)\gamma_0} + \phi^k\end{aligned}$$

La autocorrelación parcial π_k será nula para todo $k > 1$ dado que el proceso es un AR(1). Por otro lado, sabemos que $\pi_1 = \rho_1$, por lo tanto,

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{C^2}{(1-\phi)\gamma_0} + \phi^k & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

2 Segundo problema

El modelo MA(1) con $\theta = 0.5$ tiene la forma

$$X_t = A_t + 0.5A_{t-1}$$

La autocorrelación teórica de orden 1 está dada por

$$\begin{aligned}\rho_1(X_t) &= \frac{\theta}{1+\theta^2} && (2) \\ &= \frac{0.5}{1.5} && (3) \\ &= 0.4 && (4)\end{aligned}$$

Para muestras grandes el estimador de la autocorrelación, $\hat{\rho_1}$ sigue una distribución normal con media ρ_1 y varianza $C_{1,1} = (1 - 3\rho_1^2 + 4\rho_1^4)/n$, en donde asumimos $n = 1000$. Es decir,

$$\hat{\rho_1} \sim \mathcal{N}(0.4, 0.0006224) \tag{5}$$

Para verificar esto simulamos diez mil procesos MA(1) en R con los parámetros arriba detallados y calculamos las autocorrelaciones de orden 1. Esto nos da como resultado un arreglo de tamaño 10000 (llamado `corrs` en nuestro código) que tiene guardadas cada una de los $\hat{\rho}_1$ de los procesos simulados. Calculamos entonces su media y varianza:

```
> mean(corrs)
[1] 0.3983755
> var(corrs)
[1] 0.0006095137
```

Observar que coinciden aproximadamente con las media y varianza de la distribución normal descripta en la ecuación (5).

3 Tercer Problema

Analizamos a continuación tres series de tiempo dadas. En la figura 1 podemos ver el gráfico de la primera.

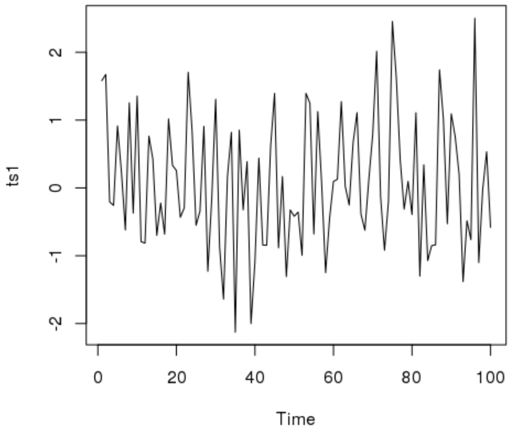


Figure 1: Primera serie de tiempo.

En los gráficos de la figura 2 podemos ver cómo tanto la autocorrelación como la autocorrelación parcial están dentro del umbral según el cual podemos decidir si una serie de tiempo es ruido blanco, en nuestro caso $2/\sqrt{60} \simeq 0.25$. Luego la serie `ts1` fue generada por un proceso de ruido blanco.

(a) Autocorrelación.

(b) Autocorrelación parcial.

Figure 2: Autocorrelaciones de la primera serie.

La siguiente serie, `ts2` , luce como en la figura 3.

Las autocorrelación decae mientras que la correlación parcial se anula a partir del 2. Esto implica que el proceso fue generado por un modelo AR(1).

Por último, en la figura 5 podemos ver la forma de la tercera serie propuesta.

Las autocorrelaciones común y parcial son nulas, sugiriendo que al igual que la primera serie `ts3` fue gerada por un modelo de ruido blanco.

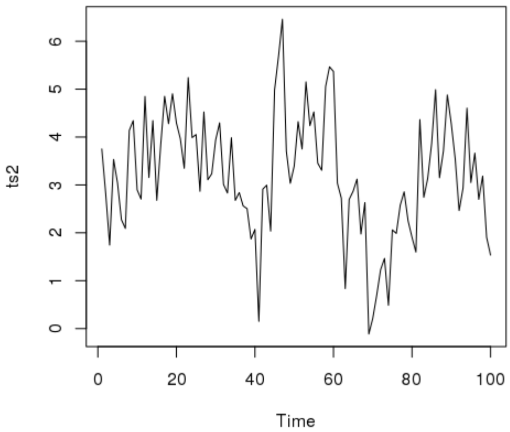
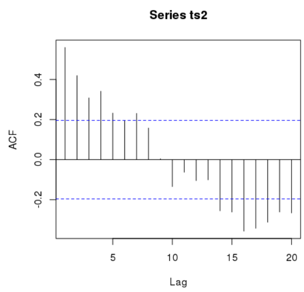
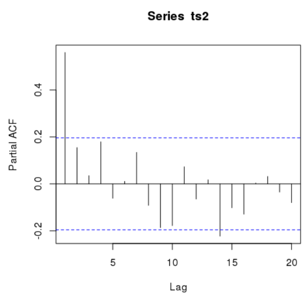


Figure 3: Segunda serie de tiempo.



(a) Autocorrelación.



(b) Autocorrelación parcial.

Figure 4: Autocorrelaciones de la segunda serie.

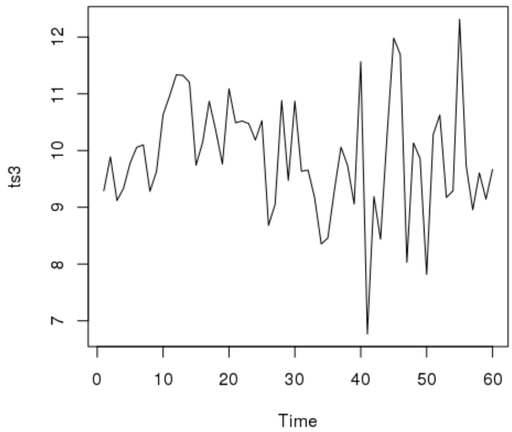
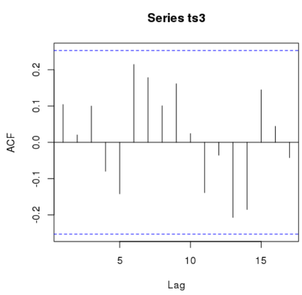
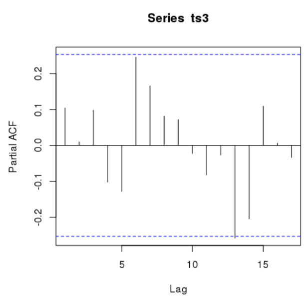


Figure 5: Tercera serie de tiempo.



(a) Autocorrelación.



(b) Autocorrelación parcial.

Figure 6: Autocorrelaciones de la tercera serie.

4 Cuarto Problema

Observar que la autocorrelación oscila y decae, lo que sugiere que fue un modelo autorregresivo el que generó la serie. En cuanto a la autocorrelación parcial, podemos ver que se anula a partir del tercer “lag”, por lo tanto el proceso es de orden 2.