

Listas de Exercícios – Cálculo II

Mariana Tiemi Yoshioka

2025

Sumário

1	Lista 1	2
2	Lista 2	2
3	Lista 3	12
3.1	Parte 1 (computacional)	12
3.2	Parte 2 (teórico)	18
4	Lista 4	28
4.1	Parte 1	28

Introdução

Este documento reúne as soluções da graduanda Mariana Tiemi Yoshioka das listas de exercícios do curso de Cálculo II, IMPA Tech, no ano de 2025, ministrado pela professora Asla Medeiros e Sá.

1 Lista 1

2 Lista 2

Exercício 1. Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

- a) $\alpha(t) = (3 \cosh 2t, 3 \sinh 2t, 6t)$, $t \in [0, \pi]$.
b) Catenária: $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, a partir do ponto $(0, 1)$.

Solução

Definição 2.1 (Comprimento de arco). O comprimento de arco de uma curva regular do ponto $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ é dado por:

$$\mathcal{L}_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Assim, para calcular o comprimento de arco das curvas, basta derivá-la, tirar sua norma e aplicar a integral.

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha'(t) &= ((3 \cosh 2t)', (3 \sinh 2t)', (6t)') = (3 \cdot 2 \sinh 2t, 3 \cdot 2 \cosh 2t, 6) \\ \Rightarrow \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(6 \sinh 2t)^2 + (6 \cosh 2t)^2 + 6^2} = 6 \cdot \sqrt{\sinh^2(2t) + \cosh^2(2t) + 1} \\ \Rightarrow \|\alpha'(t)\| &= 6 \cdot \sqrt{\sinh^2(2t) + \cosh^2(2t) - \sinh^2(2t) + \cosh^2(2t)} \\ \Rightarrow \|\alpha'(t)\| &= 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{\cosh^2(2t)} = 6\sqrt{2} \cdot \cosh(2t) \\ \Rightarrow \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt &= \int_a^b 6\sqrt{2} \cdot \cosh(2t) dt \\ \Rightarrow \mathcal{L}_0^\pi(\alpha) &= 6\sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cosh u du = 3\sqrt{2} \cdot (\sinh(2\pi) - \sinh(0)) = 3\sqrt{2} \cdot (\sinh(2\pi) - 0) \\ \Rightarrow \mathcal{L}_0^\pi(\alpha) &= 3\sqrt{2} \cdot \sinh(2\pi) \end{aligned}$$

$$\text{b) No ponto } (0, 1), \text{ temos: } (0, 1) = (t, \cosh(t)) \Rightarrow t = 0$$

Com isso, podemos calcular o comprimento de arco de $t = 0$ até um certo ponto $t = b$.

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (t', (\cosh(t))') = (1, \sinh(t)) \\ \Rightarrow \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t) \\ \Rightarrow \mathcal{L}_0^b(\gamma) &= \int_0^b \cosh(t) dt = \sinh(b) - \sinh(0) = \sinh(b) \end{aligned}$$

Exercício 3. Mudanças de parâmetro:

- a) Demonstrar que $s(\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2+1}$ é uma mudança de parâmetro diferenciável que transforma o intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0, 1)$.

- b) *Mostrar que a função $\lambda : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty)$, definida por $\lambda(t) := \tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ é uma mudança de parâmetro.*
- c) *Provar que qualquer curva pode ser reparametrizada de forma tal que o domínio da reparametrização seja um intervalo de extremos 0 e 1.*

Solução

Definição 2.2 (Mudança de parâmetro). Duas funções vetoriais de uma variável real $f(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(s) : I_0 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dizem equivalentes quando possuem o mesmo gráfico (traço).

Uma função real bijetora $u(t) : I_0 \rightarrow I$, derivável, e que a derivada não se anula, tal que

$$g(t) = f(u(t))$$

define uma mudança de parâmetro.

- a) Para demonstrar que $s(\theta)$ é uma mudança de parâmetro diferenciável tal que $s : (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$, queremos provar que:
- i) s é derivável em todo ponto em $(0, \infty)$, tal que ela nunca se anula;
 - ii) s é bijetiva;
 - iii) s leva $(0, \infty) \rightarrow (0, 1)$

Prova de i).

Teorema 2.1 (Teorema 4.1; Calculus; Tom M. Apostol; p. 164). *Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo comum. Se cada ponto onde f e g têm uma derivada, o mesmo é verdadeiro para [...] o quociente f/g . (Para f/g nós precisamos da condição extra de que g é diferente de zero nesse ponto.) [...].*

Por esse teorema, temos que, como $f(\theta) = \theta^2$ e $g(\theta) = \theta^2 + 1$ são polinômios do segundo grau, eles são diferenciáveis em $(0, \infty)$. Em particular, também temos que $g(\theta) \neq 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

$$\theta^2 + 1 = 0 \Rightarrow \theta = \sqrt{-1} \Rightarrow \theta \notin \mathbb{R}$$

Logo, s é derivável em todo o ponto em $(0, \infty)$.

Além disso, note que

$$s'(\theta) = \frac{2\theta(\theta^2+1)-\theta^2(2\theta)}{(\theta^2+1)^2} = \frac{2\theta}{(\theta^2+1)^2}$$

$$s'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

Assim $s'(\theta) \neq 0, \forall \theta \in (0, \infty)$.

□

Prova de ii) e iii). Por definição, s é bijetiva se, e somente se, s é injetiva e sobrejetiva.

Tome dois números arbitrários $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq y$. Sem perda de generalidade, assumamos que $x > y$.

$$\begin{aligned} x > y &\Rightarrow x^2 + 1 > y^2 + 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2+1} > -\frac{1}{y^2+1} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2+1} &> 1 - \frac{1}{y^2+1} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} > \frac{y^2}{y^2+1} \Rightarrow s(x) > s(y) \\ \therefore x > y &\Rightarrow s(x) > s(y) \end{aligned}$$

Assim, temos s estritamente crescente e, portanto, injetiva.

Além disso, podemos tomar o limite da função nos extremos do domínio e verificar sua sobrejetividade, devido ao fato de s ser contínua, bem como a propriedade iii).

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2}{\theta^2+1} &= \frac{\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \theta^2}{\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \theta^2+1} = \frac{0}{1} = 0 \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\theta^2}{\theta^2+1} &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{2\theta}{2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

Pela propriedade estritamente crescente de s , temos que a imagem de s é $(0, 1)$, que é igual ao contradomínio e, portanto, verifica a sobrejetividade de s . Em outras palavras, temos que s leva $(0, \infty) \rightarrow (0, 1)$.

□

Portanto, demonstramos que s é uma mudança de parâmetro diferenciável, que transforma o intervalo $(0, \infty)$ no intervalo $(0, 1)$.

b) Para demonstrar que λ é uma mudança de parâmetro, queremos provar que:

- i) λ é derivável em todo ponto em $(-1, 1)$;
- ii) $\lambda'(t) \neq 0, \forall t \in (-1, 1)$;
- iii) λ é bijetiva.

Prova de i). Podemos escrever λ como $\lambda(t) = f(g(t))$, tal que $g(t) = \frac{\pi t}{2}$ e $f(t) = \tan(t)$. Note que g é derivável e, por ser um polinômio de primeiro grau crescente, ao considerar o domínio $(-1, 1)$, temos que sua imagem é $(g(-1), g(1)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Por definição, a função tangente tem como domínio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e como imagem $(-\infty, +\infty)$, e também é derivável. Assim, pela regra da cadeia, temos que λ é derivável em todo ponto em $(-1, 1)$. □

Prova de ii). Pela regra da cadeia, temos que $\lambda'(t) = (\tan(\frac{\pi t}{2}))' = \frac{\pi}{2} \cdot \sec(\frac{\pi t}{2})$. Note que a função secante, por definição, é o inverso do cosseno e, portanto, nunca se iguala a zero. dessa forma, $\lambda'(t) \neq 0, \forall t \in (-1, 1)$. □

Prova de iii). Note que, pelos argumentos i) e ii), a imagem de λ é \mathbb{R} , fazendo dela sobrejetiva; e $\lambda'(t) \neq 0$ em todo o domínio, ou seja, λ é monótona e, portanto, injetiva. Logo, temos λ bijetiva. □

c) *Proof.* Vamos analisar três casos:

Caso 1: Seja I_0 um intervalo fechado ou aberto, com extremos a e b , tal que $a \neq b$, que é o domínio de uma parametrização f . Podemos definir uma função de reparametrização φ , com domínio de extremos 0 e 1, tal que

$$\varphi(s) = a + (b - a)s$$

Note que $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$. Além disso, por ser uma função do primeiro grau, ela é bijetiva, diferenciável e sua derivada é não nula. Assim, a nova parametrização g pode ser definida como $g(t) := f(\varphi(t))$, onde o domínio de g é um intervalo de extremos 0 e 1 e, ao mesmo tempo, descreve a mesma curva que f .

Caso 2: Seja $I_0 = (a, \infty)$ o domínio de uma parametrização f . Pelo item a), a função s é bijetiva e, portanto, possui uma função inversa $s^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$. Com isso, podemos definir uma nova parametrização g , sendo s^{-1} a função de reparametrização, tal que $g(t) := f(s^{-1}(t + a))$ possui domínio de extremos 0 e 1. Para $I_0 = (-\infty, b)$, basta definir $a := -b$, e uma função de reparametrização r , tal que $r(t) := -s^{-1}(t)$.

Caso 3: Seja $I_0 = (-\infty, +\infty)$ o domínio de uma parametrização f . Dada a função λ do item b), defina $\lambda_1(t) := \lambda(2t - 1)$. Note que o domínio de λ_1 pode ser definido por $(\lambda_1(-1), \lambda_1(1)) = (\frac{-1+1}{2}, \frac{1+1}{2}) = (0, 1)$, e sua imagem é a mesma de λ , $(-\infty, +\infty)$. Com isso, podemos definir uma nova parametrização g , sendo λ_1 a função de reparametrização, tal que $g(t) := f(\lambda_1(t))$ possui domínio de extremos 0 e 1.

□

Exercício 6. Reproduza, no ambiente computacional de sua preferência, os vetores α' e α'' para uma curva α de sua preferência com duas parametrizações distintas, sendo uma a parametrização por comprimento de arco. Observe que para a parametrização por comprimento de arco o ângulo entre α' e α'' é um ângulo reto, o que não ocorre em uma parametrização arbitrária.

Solução

A curva escolhida foi a hélice circular, dada por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.
Note que

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

Logo, essa parametrização arbitrária da hélice circular não é unit-speed. Para parametrizá-la com um novo β , podemos definir uma função de reparametrização $\varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$. Assim, temos

$$\beta(t) = \alpha(\varphi(t)) = \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \beta'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \|\beta'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2} \sin^2(t) + \frac{1}{2} \cos^2(t) + \frac{1}{2}} = 1$$

Assim, temos escolhidas duas parametrizações distintas, α e β , tal que uma delas (β) é parametrizada por comprimento de arco. As figuras 1 e 2 mostram essas parametrizações plotadas.

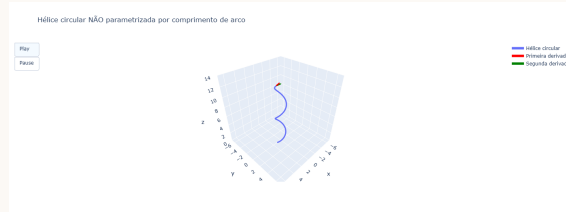


Figure 1: Hélice não parametrizada

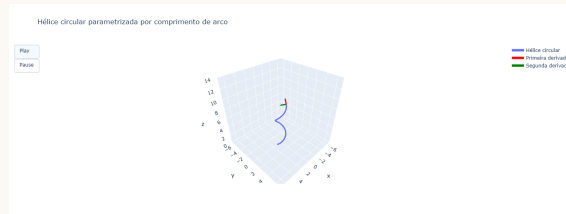


Figure 2: Hélice parametrizada

Exercício 7. Verifique a regularidade e calcule o comprimento de arco e a curvatura das seguintes curvas, quando possível:

- (retas) $\alpha(t) = (a + ct, b + dt)$, $t \in \mathbb{R}$;
- $\alpha(t) = (t, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$;
- (círculos) $\alpha(s) = (a + r \cdot \cos(\frac{s}{r}), b + r \cdot \sin(\frac{s}{r}))$, $s \in \mathbb{R}$, $r > 0$;
- (cardióide) $\alpha(t) = (\cos(t) \cdot (2 \cos(t) - 1), \sin(t) \cdot (2 \cos(t) - 1))$, $t \in \mathbb{R}$;
- (catenária) $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução

• Retas

- **Regularidade:** como $\alpha(t) = (a + ct, b + dt) \Rightarrow \alpha'(t) = (c, d)$, e $c, d \neq 0 \Rightarrow \alpha'(t) \neq (0, 0)$, então temos uma curva regular, pois a derivada não se anula.
- **Comprimento de arco:** $\mathcal{L}_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 + d^2} dt = \sqrt{c^2 + d^2} \cdot (t_2 - t_1)$
- **Curvatura:** note que $\alpha''(t) = (0, 0)$. Assim, $k_\alpha(t) = \frac{\det[(c, d), (0, 0)]}{\|(c, d)\|^3} = 0$

- (t, t^4)

- **Regularidade:** $\alpha(t) = (t, t^4) \Rightarrow \alpha'(t) = (1, 4t^3) \Rightarrow \alpha'(t) \neq (0, 0), \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha$ é regular.
- **Comprimento de arco:** $\mathcal{L}_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1^2 + (4t^3)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + 16t^6} dt$
- **Curvatura:** note que $\alpha''(t) = (0, 12t^2)$. Assim,

$$k_\alpha(t) = \frac{\det \left[\begin{pmatrix} 1, 4t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, 12t^2 \end{pmatrix} \right]}{\| \begin{pmatrix} 1, 4t^3 \end{pmatrix} \|^3} = \frac{12t^2}{(1+16t^6)^{\frac{3}{2}}}$$

- **Círculos**

- **Regularidade:** $\alpha(s) = (a + r \cdot \cos(\frac{s}{r}), b + r \cdot \sin(\frac{s}{r})) \Rightarrow \alpha'(t) = (-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}))$
 Note que $-\sin(\theta) = \cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = \arctan(-1)$. Como $\arctan(-1) \neq 0$, temos que
 $\alpha'(t) \neq (0, 0), \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha$ é regular.
- **Comprimento de arco:** $\mathcal{L}_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(-\sin(\frac{s}{r}))^2 + (\cos(\frac{s}{r}))^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1} dt = t_2 - t_1$
- **Curvatura:** note que $\alpha''(t) = (-\frac{1}{r} \cdot \cos(\frac{s}{r}), -\frac{1}{r} \cdot \sin(\frac{s}{r}))$. Assim,

$$k_\alpha(t) = \frac{\det \left[\begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \cdot \cos(\frac{s}{r}), -\frac{1}{r} \cdot \sin(\frac{s}{r}) \end{pmatrix} \right]}{\| \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}) \end{pmatrix} \|^3} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \sin^2(\frac{s}{r}) + \frac{1}{r} \cdot \cos^2(\frac{s}{r})}{1^3} = \frac{1}{r}$$

 Outra forma de pensar é que, como $\|\alpha'(t)\| = 1$, a curva é unit-speed e temos
 $|k_\alpha(t)| = \|\alpha''(t)\| = \frac{1}{r}$

- **Cardióide**

- **Regularidade:** $\alpha(t) = (\cos(t) \cdot (2 \cos(t) - 1), \sin(t) \cdot (2 \cos(t) - 1))$
 $\Rightarrow \alpha'(t) = (-\sin(t)(2 \cos(t) - 1) + \cos(t) \cdot 2(-\sin(t)), \cos(t)(2 \cos(t) - 1) + \sin(t) \cdot 2(-\sin(t)))$
 $\Rightarrow \alpha'(t) = (\sin(t) - 2 \sin(2t), 2 \cos(2t) - \cos(t))$
 $\Rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = \sin^2(t) - 4 \sin(t) \sin(2t) + 4 \sin^2(2t) + 4 \cos^2(2t) - 4 \cos(2t) \cos(t) + \cos^2(t)$
 $\Rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = 1 + 4 - 4(\sin(t) \sin(2t) + \cos(t) \cos(2t)) = 5 - 4(\cos(2t - t))$
 $\Rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 = 5 - 4 \cos(t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\|^2 \geq 5 - 4 = 1, \forall t \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \|\alpha'(t)\| \neq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha$ é regular.
- **Comprimento de arco:** $\mathcal{L}_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\|\alpha'(t)\|^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{5 - 4 \cos(t)} dt$
- **Curvatura:**
 $\alpha''(t) = (\alpha'(t))' = (\cos(t) - 4 \cos(2t), \sin(t) - 4 \sin(2t))$
 $\Rightarrow k_\alpha(t) = \frac{\det \left[\begin{pmatrix} \sin(t) - 2 \sin(2t), 2 \cos(2t) - \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) - 4 \cos(2t), \sin(t) - 4 \sin(2t) \end{pmatrix} \right]}{\| \begin{pmatrix} \sin(t) - 2 \sin(2t), 2 \cos(2t) - \cos(t) \end{pmatrix} \|^3}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow k_\alpha(t) &= \frac{\sin^2(t) - 6\sin(t)\sin(2t) + 8\sin^2(2t) + \cos^2(t) - 6\cos(t)\cos(2t) + 8\cos^2(2t)}{(5 - 4\cos(t))^{\frac{3}{2}}} \\ \Rightarrow k_\alpha(t) &= \frac{1 + 8 - 6(\sin(t)\sin(2t) + \cos(t)\cos(2t))}{(5 - 4\cos(t))^{\frac{3}{2}}} \\ \Rightarrow k_\alpha(t) &= \frac{9 - 6\cos(t)}{(5 - 4\cos(t))^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

• **Catenária**

- **Regularidade:** $\alpha(t) = (t, \cosh(t)) \Rightarrow \alpha'(t) = (1, \sinh(t)) \Rightarrow \alpha'(t) \neq (0, 0), \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha$ é regular.
- **Comprimento de arco:** $\mathcal{L}_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1^2 + (\sinh(t))^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\cosh^2(t)} dt$
 $\Rightarrow \mathcal{L}_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \sinh(t_2) - \sinh(t_1)$
- **Curvatura:** note que $\alpha''(t) = (0, \cosh(t))$. Assim,
 $k_\alpha(t) = \frac{\det[(1, \sinh(t)), (0, \cosh(t))]}{\|(1, \sinh(t))\|^3} = \frac{\cosh(t)}{(\cosh^2(t))^{\frac{3}{2}}}$
 $\Rightarrow k_\alpha(t) = \frac{\cosh(t)}{\cosh^3(t)} = (\cosh(t))^{-2} = \sinh^2(t)$

Exercício 8. Considere a elipse $\beta(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenha os valores de t onde a curvatura de β é máxima e mínima.

Solução

Derivando β , temos

- $\beta'(t) = (-a \cdot \sin(t), b \cdot \cos(t))$
- $\beta''(t) = (-a \cdot \cos(t), -b \cdot \sin(t))$

Pela definição de curvatura, temos que

$$k_\beta(t) = \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t)}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}$$

Para obter os máximos e mínimos dessa função, basta derivá-la e encontrar t , tal que $k'_\beta(t) = 0$:

$$\begin{aligned}k'_\beta(t) &= ab \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{-5/2} \cdot (2a^2 \sin(t) \cos(t) - 2b^2 \cos(t) \sin(t)) = 0 \\ \Rightarrow 2(a^2 - b^2) \sin(t) \cos(t) &= 0 \Rightarrow \sin(2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi}{2} (n \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

A última implicação ocorre porque $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$.

Derivando uma segunda vez, temos

$$\begin{aligned}k'_\beta(t) &= -\frac{3ab}{2} (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{-5/2} \cdot (a^2 - b^2) \sin(2t) \\ \Rightarrow k''_\beta(t) &= -\frac{3ab(a^2 - b^2)}{2} \left(2 \cos(2t) (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{-5/2}\right)\end{aligned}$$

$$+ \sin(2t) \left(\frac{-5}{2} \right) (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{-7/2} (a^2 - b^2) \sin(2t) \Bigg)$$

Aplicando para $t = \frac{n\pi}{2}$, quando n é ímpar,

$$\begin{aligned} k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -\frac{3ab(a^2 - b^2)}{2} \left(2 \cos(n\pi) (a^2 \sin^2(\frac{n\pi}{2}) + b^2 \cos^2(\frac{n\pi}{2}))^{-5/2} \right. \\ &\quad \left. + \sin(n\pi) \left(\frac{-5}{2} \right) (a^2 \sin^2(\frac{n\pi}{2}) + b^2 \cos^2(\frac{n\pi}{2}))^{-7/2} (a^2 - b^2) \sin(n\pi) \right) \\ \Rightarrow k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -\frac{3ab(a^2 - b^2)}{2} \left(2(-1)^n (a^2(-1)^{2n} + b^2 \cdot 0)^{-5/2} \right. \\ &\quad \left. + 0 \cdot \left(\frac{-5}{2} \right) (a^2(-1)^{2n} + b^2 \cdot 0)^{-7/2} (a^2 - b^2) \cdot 0 \right) \\ \Rightarrow k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -\frac{3ab(a^2 - b^2)}{2} \left(2(-1)^n (a^2)^{-5/2} \right) \\ \Rightarrow k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -3ab(a^2 - b^2)(-1)^n a^{-5} = \frac{3b(a^2 - b^2)}{a^4} \end{aligned}$$

Para n par, temos

$$\begin{aligned} k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -\frac{3ab(a^2 - b^2)}{2} \left(2 \cos(n\pi) (a^2 \sin^2(\frac{n\pi}{2}) + b^2 \cos^2(\frac{n\pi}{2}))^{-5/2} \right. \\ &\quad \left. + \sin(n\pi) \left(\frac{-5}{2} \right) (a^2 \sin^2(\frac{n\pi}{2}) + b^2 \cos^2(\frac{n\pi}{2}))^{-7/2} (a^2 - b^2) \sin(n\pi) \right) \\ \Rightarrow k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -\frac{3ab(a^2 - b^2)}{2} \left(2(-1)^n (a^2 \cdot 0 + b^2(-1)^{2n})^{-5/2} \right. \\ &\quad \left. + 0 \cdot \left(\frac{-5}{2} \right) (a^2 \cdot 0 + b^2(-1)^{2n})^{-7/2} (a^2 - b^2) \cdot 0 \right) \\ \Rightarrow k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -\frac{3ab(a^2 - b^2)}{2} \left(2(-1)^n (b^2)^{-5/2} \right) \\ \Rightarrow k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) &= -3ab(a^2 - b^2)(-1)^n b^{-5} = \frac{-3a(a^2 - b^2)}{b^4} \end{aligned}$$

Caso $a > b \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$, temos que

- Para n ímpar, $k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) > 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi}{2}$ é ponto de mínimo.
- Para n par, $k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) < 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi}{2}$ é ponto de máximo.

Caso $a < b \Rightarrow a^2 - b^2 < 0$, temos que

- Para n ímpar, $k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) < 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi}{2}$ é ponto de máximo.
- Para n par, $k''_{\beta}(\frac{n\pi}{2}) > 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi}{2}$ é ponto de mínimo.

Exercício 9. Reproduza, no ambiente computacional de sua preferência, a representação gráfica da Tangente Indicatrix, conforme exemplificado no arquivo .ggb apresentado em aula. Teste com a curva de sua preferência.

Solução

A animação utilizou a curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, em que a tangente indicatrix, que está plotada à esquerda, apresenta a reta tangente $\alpha'(t)$. À direita está a curva e as tangentes propriamente ditas. Segue na figura 3 uma das imagens da animação.

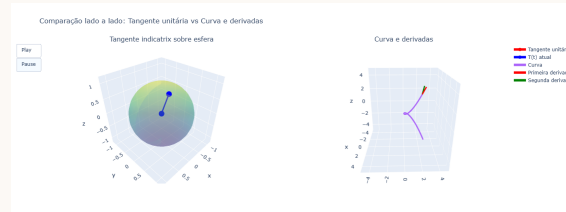


Figure 3: Tangente Indicatrix

Exercício 13. Em ambiente computacional, desenhe as seguintes curvas e produza uma animação do Triedro de Frenet de cada curva:

a) $\alpha(t) = (4 \cdot \cos(t), 5 - 5 \cdot \sin(t), -3 \cdot \cos(t)), t \in \mathbb{R}$

b) $\beta(t) = (1 - \cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$

Solução

Segue nas figuras 4 e 5 uma imagem de cada animação dos itens a) e b), respectivamente.

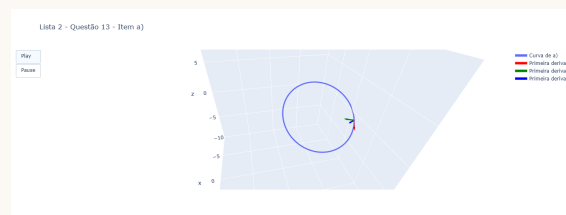


Figure 4: Questão 13 - Item a)

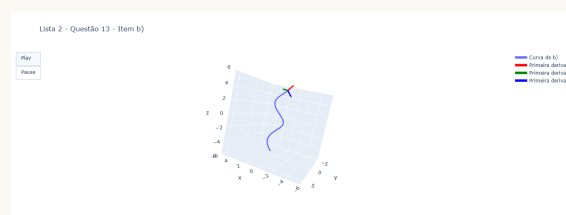


Figure 5: Questão 13 - Item b)

Exercício 14. Calcule a curvatura e a torção das seguintes curvas:

a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$

b) $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t), t \in \mathbb{R}$

Solução

a) Calculando as derivas de primeira, segunda e terceira ordem, obtemos:

- $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$
- $\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$
- $\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$

Pelas fórmulas da curvatura k e torção τ , temos

$$\begin{aligned} \bullet k_\alpha(t) &= \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \\ \Rightarrow k_\alpha(t) &= \frac{\|(\det \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ 2 & 6t \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & 3t^2 \\ 0 & 6t \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{bmatrix})\|}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}} \\ \Rightarrow k_\alpha(t) &= \frac{\|(6t^2, 6t, 2)\|}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(9t^4+9t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}} \\ \bullet \tau_\alpha(t) &= \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = \frac{\langle 2(3t^2, 3t, 1), (0, 0, 6) \rangle}{2^2 \cdot (9t^4+9t^2+1)} = \frac{12}{4 \cdot (9t^4+9t^2+1)} \\ \Rightarrow \tau_\alpha(t) &= \frac{3}{9t^4+9t^2+1} \end{aligned}$$

b) Calculando as derivas de primeira, segunda e terceira ordem, obtemos:

- $\beta'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$
- $\beta''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$
- $\beta'''(t) = (\sin(t), -\cos(t), 0)$

Pelas fórmulas da curvatura k e torção τ , temos

$$\begin{aligned} \bullet k_\beta(t) &= \frac{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} \\ k_\beta(t) &= \frac{\|(\det \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix})\|}{((-\sin(t))^2 + \cos^2(t) + 1)^{\frac{3}{2}}} \\ k_\beta(t) &= \frac{\|(\sin(t), -\cos(t), \sin^2(t) + \cos^2(t))\|}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\|(\sin(t), -\cos(t), 1)\|}{2^{\frac{3}{2}}} \\ k_\beta(t) &= \frac{\sqrt{\sin^2(t) + (-\cos(t))^2 + 1}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{-1} \\ \bullet \tau_\beta(t) &= \frac{\langle \beta'(t) \wedge \beta''(t), \beta'''(t) \rangle}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2} = \frac{\langle (\sin(t), -\cos(t), 1), (\sin(t), -\cos(t), 0) \rangle}{\sin^2(t) + (-\cos(t))^2 + 1} \\ \tau_\beta(t) &= \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 Lista 3

3.1 Parte 1 (computacional)

Exercício 1. Resolver em ambiente computacional o exercício 1 da seção 8.3 (pag 276) do livro do Apostol de Cálculo 2. Explore os recursos de plot da ferramenta computacional escolhida por você para exibir as curvas e superfícies de nível.

Solução

Nos itens a), b) e c), temos

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = e^{xy}$

c) $f(x, y) = \cos(x + y)$

Sendo todos campos escalares do tipo $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos representar as curvas de nível no plano, por meio da função "contour plot", ou na superfície, dada pelo conjunto de pontos $(x, y, f(x, y))$. Nas figuras 1 a 6 temos as imagens plotadas.

```
1      #Definindo as variaveis
2      var("x y z")
3
4      # 1. Grafico da superficie
5      superficie_plot = plot3d('equacao', (x, -3, 3)
6                               , (y, -3, 3), color='gray')
7
8      # 2. Representando as curvas de nivel na
9      superficie
10     curva_nivel_3d1 = implicit_plot3d('equacao' ==
11                                       valor1,
12                                       (x, -5, 5), (y, -5, 5), (z, -0.1, 0.1), color=
13                                       'purple', thickness=10)
14     curva_nivel_3d2 = implicit_plot3d('equacao' ==
15                                       valor2,
16                                       (x, -5, 5), (y, -5, 5), (z, 0.9, 1.1), color='
17                                       red', thickness=10)
18     curva_nivel_3d3 = implicit_plot3d('equacao' ==
19                                       valor3,
20                                       (x, -5, 5), (y, -5, 5), (z, 3.9, 4.1), color='
21                                       yellow', thickness=10)
22     curva_nivel_3d4 = implicit_plot3d('equacao' ==
23                                       valor4,
24                                       (x, -5, 5), (y, -5, 5), (z, 8.9, 9.1), color='
25                                       green', thickness=10)
26
27     # 3. Combinando os graficos
28     resultado_final = superficie_plot +
29                       curva_nivel_3d1 + curva_nivel_3d2 +
```

```

19 curva_nivel_3d3 + curva_nivel_3d4
20
21 # Exibindo o grafico combinado
22 resultado_final.show(aspect_ratio=[1,1,1],
23 title='Superficie e Curvas de Nivel no 3D')
24 contour_plot((x^2 + y^2), (x, -2, 2), (y, -2,
25 2),
contours=20, cmap='ocean', title='Curvas de
Nivel de equacao')

```

Código 1: estrutura do código da questão 1, itens a), b), c)

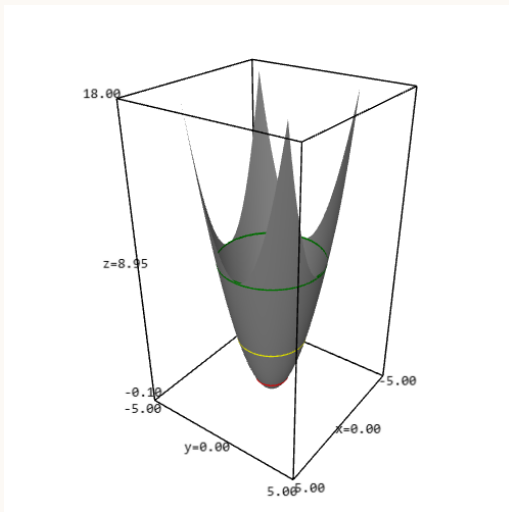


Figure 6: questão 1, item a), superfície

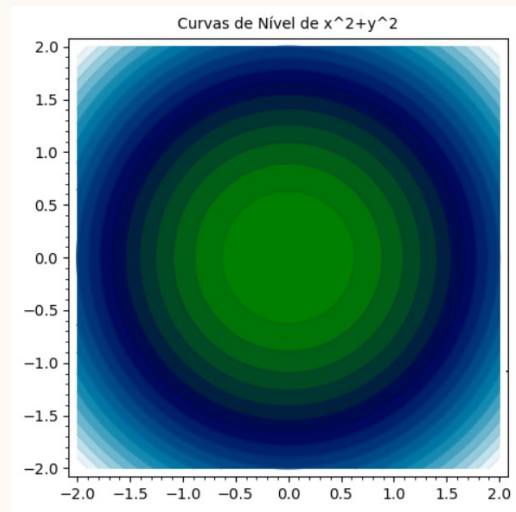


Figure 7: questão 1, item a), curvas de nível

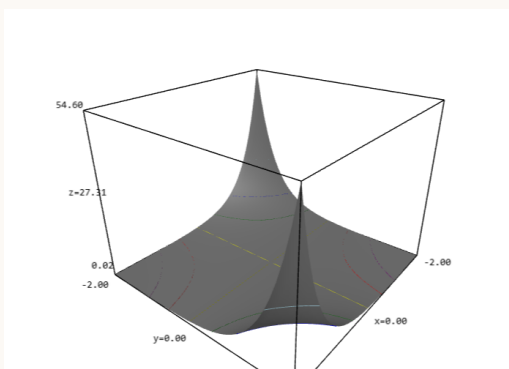


Figure 8: questão 1, item b), superfície

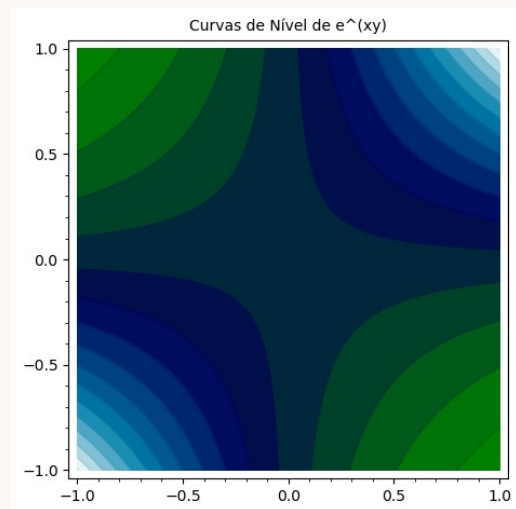


Figure 9: questão 1, item b), curvas de nível

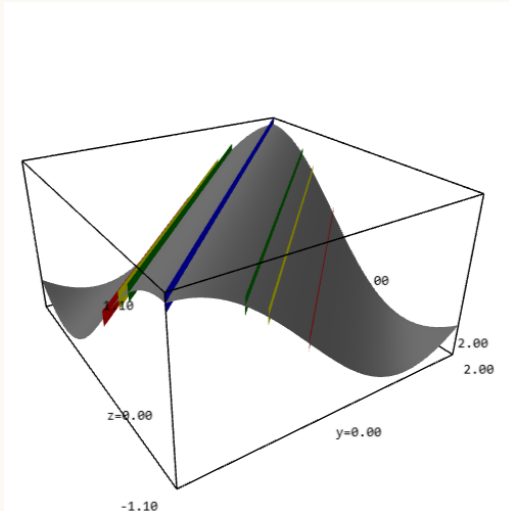


Figure 10: questão 1, item c), superfície

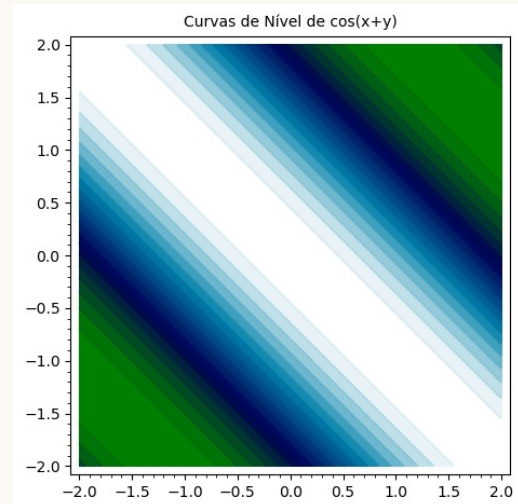


Figure 11: questão 1, item c), curvas de nível

Já nos itens d), e) e f), temos

- a) $f(x, y, z) = x + y + z$
- b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$
- c) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

Sendo todos campos escalares do tipo $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos representar as curvas de nível, por meio de superfícies no espaço. Nas figuras 7, 8 e 9 temos as imagens plotadas.

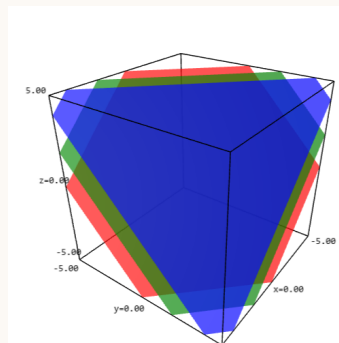


Figure 12: questão 1, item d)

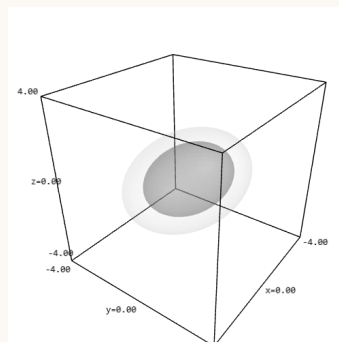


Figure 13: questão 1, item e)

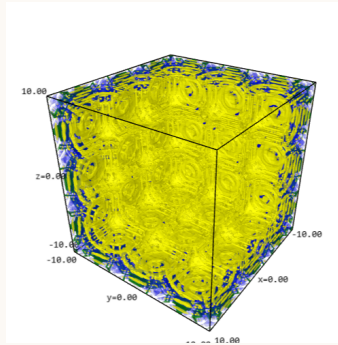


Figure 14: questão 1, item f)

```

1      # Definindo as variaveis
2      var("x y z")
3
4      # Plotando as superficies de nivel para f(x, y
5      # Cada k representa uma superficie no espaco 3
6      D
7      superficie_1 = implicit_plot3d('equacao' ==
8      valor1,
9      (x, -5, 5), (y, -5, 5), (z, -5, 5), color='red
10     ', opacity=0.7)
11     superficie_2 = implicit_plot3d('equacao' ==
12     valor2,
13     (x, -5, 5), (y, -5, 5), (z, -5, 5), color='
14     green', opacity=0.7)
15     superficie_3 = implicit_plot3d('equacao' ==
16     valor3,
17     (x, -5, 5), (y, -5, 5), (z, -5, 5), color='
18     blue', opacity=0.7)
19
20     # Combinando e exibindo as superficies em um
21     unico grafico
22     (superficie_1 + superficie_2 + superficie_3).
23     show(aspect_ratio=1,
24     title='Superficies de Nivel para f(x,y,z)=\'
25     equacao')

```

Código 2: estrutura do código da questão 1, itens a), b), c)

Exercício 2. *Desenhe em ambiente computacional as seguintes figuras, marque um ponto sobre elas e trace uma curva sobre a sua superfície.*

- *Parabolóide elíptico:* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$
- *Parabolóide hiperbólico:* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\}$

Escolha a sua descrição preferida para as superfícies (campos vetoriais), implícita ou paramétrica e justifique a sua preferência.

Solução

Para essa questão, foram escolhidos $a = 2$ e $b = 3$. Nas figuras 10 e 11 estão as plotagens dos gráficos.

Para plotar as superfícies em questão, o mais simples é utilizar a plotagem implícita, pois o enunciado dá o valor de z em função de x e y . Assim, utilizando a função "plot3d", o parabolóide elíptico pode ser descrito por $(x, y, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})$, e o parabolóide hiperbólico pode ser descrito por $(x, y, \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9})$.

Para plotar as curvas, no entanto, podemos atribuir valores arbitrários associados a um parâmetro t a x , y e, conseqüentemente, a z . Uma substituição conveniente seria $x = 2t$ e $y = 3t$, o que implicaria $z = 2t$ e $z = 0$, no parabolóide elíptico e hiperbólico, respectivamente.

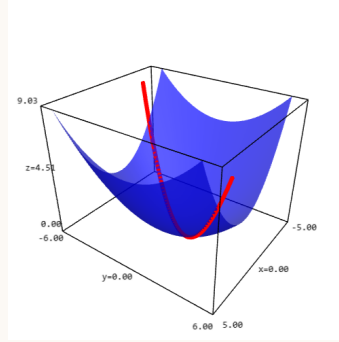


Figure 15: questão 2, parabolóide elíptico

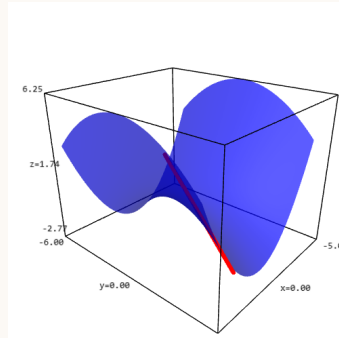


Figure 16: questão 2, parabolóide hiperbólico

Exercício 3. *Desenhe duas ou mais opções de superfícies de rotação que te pareçam interessantes. Superfícies de rotação emergem da rotação de uma curva geratriz em torno de um eixo. Considere uma curva plana contida no plano Π_{xz} da forma $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ e produza a rotação em torno do eixo vertical variando o parâmetro v da seguinte forma*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

Produza uma animação da curva geratriz com a variação do parâmetro.

Solução

As superfícies de rotação escolhidas foram:

- Esfera: $f(u) = \cos(u)$ e $g(u) = \sin(u)$
- Toro: $f(u) = \cos(u) + 5$ e $g(u) = \sin(u)$

As figuras 12 e 13 apresentam uma das imagens geradas nessas animações.

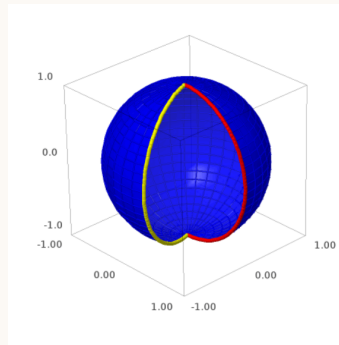


Figure 17: questão 3, esfera

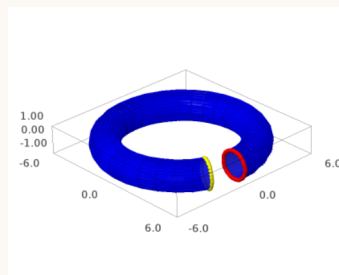


Figure 18: questão 3, toro

Exercício 4. *Escolha um conceito de física para representar computacionalmente como campo vetorial.*

Solução

O conceito de física escolhido foi a gravidade, ou seja, foi representado um campo gravitacional. AS plotagens estão nas figuras 14 e 15.

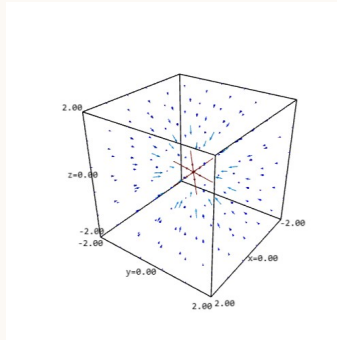


Figure 19: questão 4, campo gravitacional no espaço

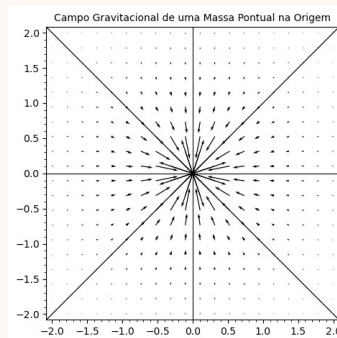


Figure 20: questão 3, campo gravitacional no plano

3.2 Parte 2 (teórico)

Exercício 1. (*Apostol Calc II sec. 8.3 (pp 276) Exercício 2*) Faça o esboço do conjunto e decida se é um conjunto aberto. O esboço pode ser feito tanto computacionalmente quanto à mão. A apresentação da demonstração é opcional.

Solução

a) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ é um conjunto aberto.

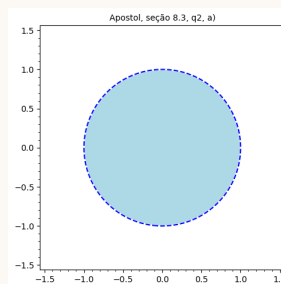


Figure 21: $x^2 + y^2 < 1$

b) $\{(x, y) \mid 3x^2 + 2y^2 < 6\}$ é um conjunto aberto.

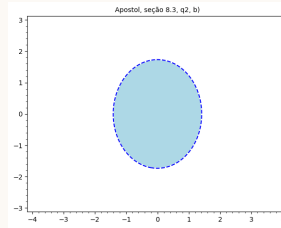


Figure 22: $3x^2 + 2y^2 < 6$

c) $\{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ é um conjunto aberto.

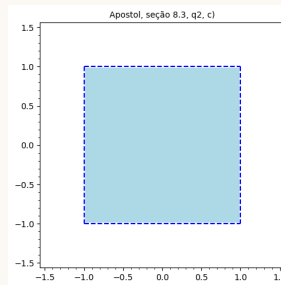


Figure 23: $|x| < 1, |y| < 1$

d) $\{(x, y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ não é um conjunto aberto.

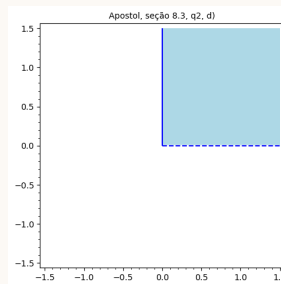


Figure 24: $x \geq 0, y > 0$

e) $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ não é um conjunto aberto.

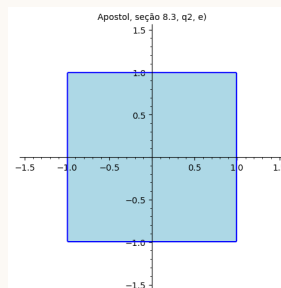


Figure 25: $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

f) $\{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$ é um conjunto aberto.

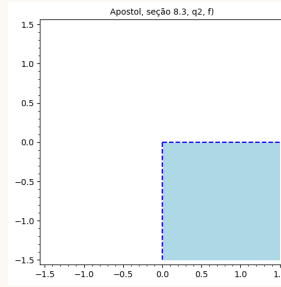


Figure 26: $x > 0, y < 0$

g) $\{(x, y) \mid xy < 1\}$ é um conjunto aberto.

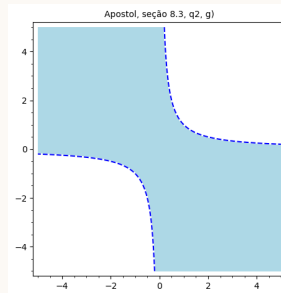


Figure 27: $xy < 1$

h) $\{(x, y) \mid x \in [1, 2], y \in (3, 4)\}$ não é um conjunto aberto.

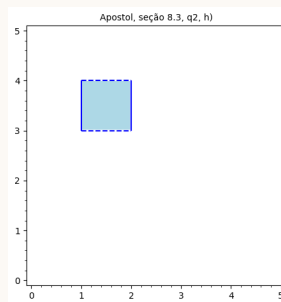


Figure 28: $x \in [1, 2], y \in (3, 4)$

i) $\{(x, y) \mid x \in (1, 2), y > 0\}$ é um conjunto aberto.

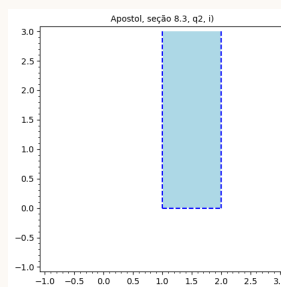


Figure 29: $x \in (1, 2), y > 0$

j) $\{(x, y) \mid x \geq y\}$ não é um conjunto aberto.

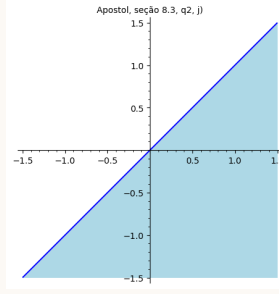


Figure 30: $x \geq y$

k) $\{(x, y) \mid x > y\}$ é um conjunto aberto.

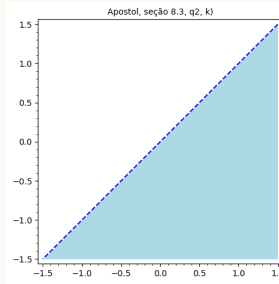


Figure 31: $x > y$

l) $\{(x, y) \mid y > x^2, |x| < 2\}$ é um conjunto aberto.

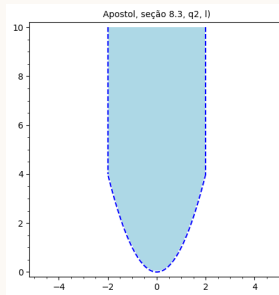


Figure 32: $y > x^2, |x| < 2$

m) $\{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0\}$ é um conjunto aberto.

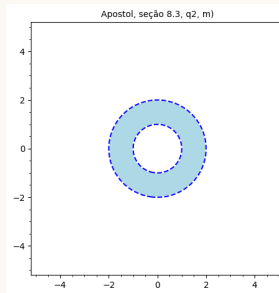


Figure 33: $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$

n) $\{(x, y) \mid (2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0\}$ é um conjunto aberto.

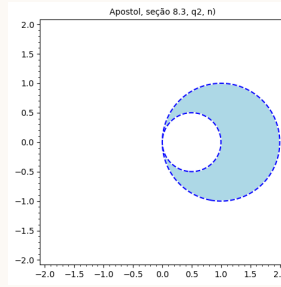


Figure 34: $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$

Exercício 2. (*Apostol Calc II sec. 8.3 (pp 276) Exercício 3*). Faça o esboço do conjunto e decida se é um conjunto aberto. O esboço pode ser feito tanto computacionalmente quanto à mão. A apresentação da demonstração é opcional.

Solução

a) $\{(x, y, z) \mid z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0\}$ é um conjunto aberto.

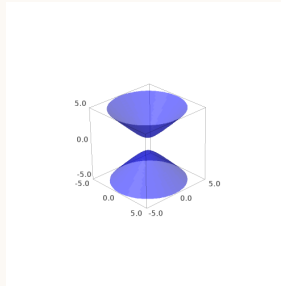


Figure 35: $z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0$

b) $\{(x, y, z) \mid |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$ é um conjunto aberto.

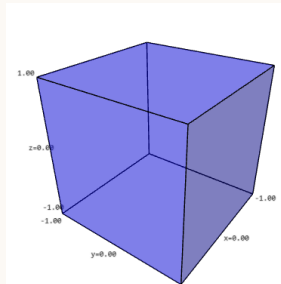


Figure 36: $|x| < 1, |y| < 1, |z| < 1$

c) $\{(x, y, z) \mid x + y + z < 1\}$ é um conjunto aberto.

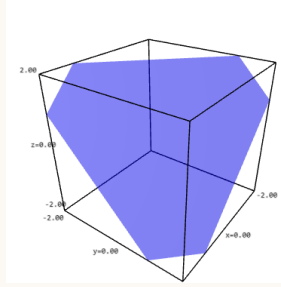


Figure 37: $x + y + z < 1$

d) $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| < 1, |z| < 1\}$ não é um conjunto aberto.

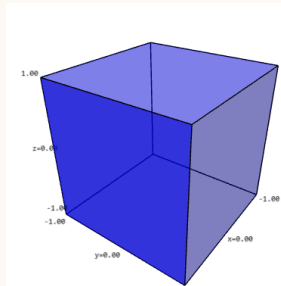


Figure 38: $|x| \leq 1, |y| < 1, |z| < 1$

e) $\{(x, y) \mid x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ é um conjunto aberto.

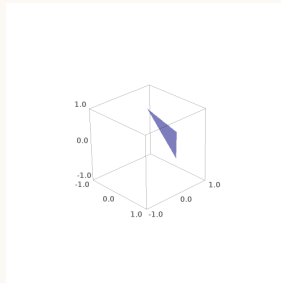


Figure 39: $x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0$

f) $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 16y + 40z + 113 > 0\}$ é um conjunto aberto.

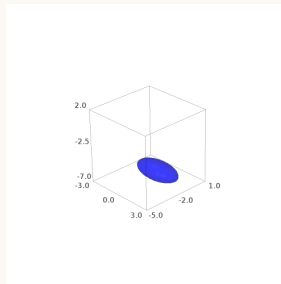


Figure 40: $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 16y + 40z + 113 > 0$

Exercício 3. (*Apostol Calc II sec. 8.3 (pp 277) Exercício 6*). Faça o esboço do conjunto e decida se é um conjunto aberto. O esboço pode ser feito tanto computacionalmente quanto à mão. Justifique o seu raciocínio.

Solução

- a) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$ é um conjunto tanto aberto e quanto fechado (o próprio \mathbb{R}^2).

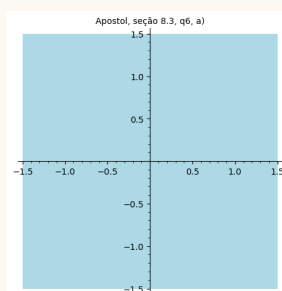


Figure 41: $x^2 + y^2 \geq 0$

- b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 0\}$ é um conjunto tanto aberto quanto fechado (vazio).

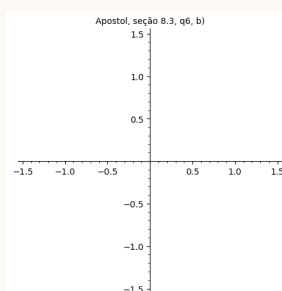


Figure 42: $x^2 + y^2 < 0$

- c) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ é um conjunto fechado apenas.

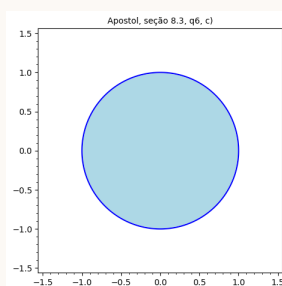


Figure 43: $x^2 + y^2 \leq 1$

- d) $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ é um conjunto aberto apenas.

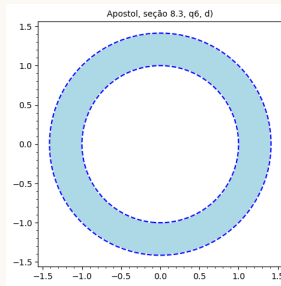


Figure 44: $1 < x^2 + y^2 < 2$

e) $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ é um conjunto fechado apenas.

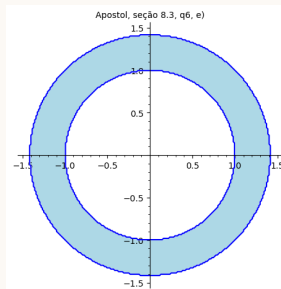


Figure 45: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$

f) $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ não é um conjunto aberto, nem fechado.

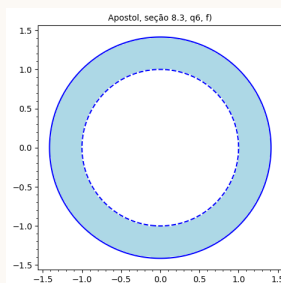


Figure 46: $1 < x^2 + y^2 \leq 2$

g) $\{(x, y) \mid x \in [1, 2], y \in [3, 4]\}$ é um conjunto fechado apenas.

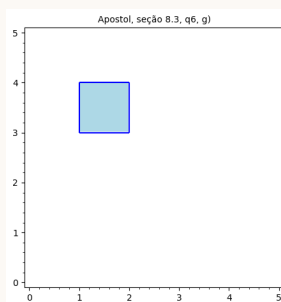


Figure 47: $x \in [1, 2], y \in [3, 4]$

h) $\{(x, y) \mid x \in [1, 2], y \in [3, 4]\}$ não é um conjunto aberto, nem fechado.

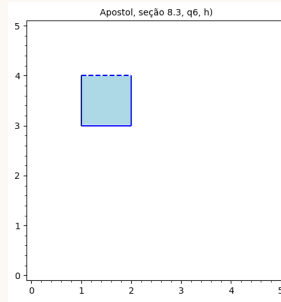


Figure 48: $x \in [1, 2], y \in [3, 4)$

i) $\{(x, y) \mid x^2 = y\}$ é um conjunto fechado apenas.

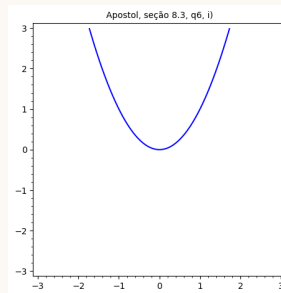


Figure 49: $x^2 = y$

j) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y\}$ é um conjunto fechado apenas.

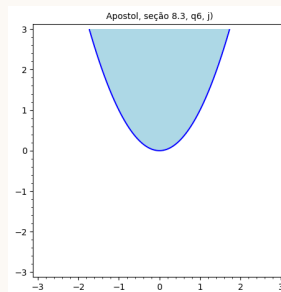


Figure 50: $x^2 \leq y$

k) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y, |x| < 2\}$ não é um conjunto aberto, nem fechado.

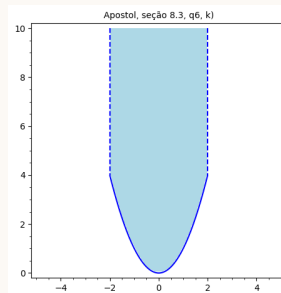


Figure 51: $x^2 \leq y, |x| < 2$

l) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y, |x| \leq 2\}$ é um conjunto fechado apenas.

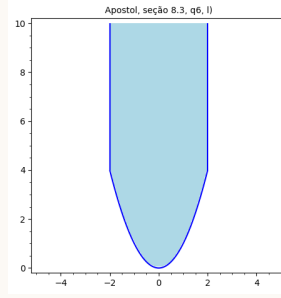


Figure 52: $x^2 \leq y, |x| \leq 2$

Exercício 7. O conjunto $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \subset \mathbb{R}$ é aberto? É fechado?

Solução

Definição 3.1 (Conjunto aberto). O conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto quando $\forall p \in U, \exists r > 0 \mid B(p, r) \subset U$, isto é, todo ponto $p \in U$ é ponto interior, isto é, $U = \text{int}(U)$

Suponha que $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ é aberto e tome $\frac{1}{k}$ arbitrário de A . Como A é aberto,

$$\exists r > 0 \mid B(\frac{1}{k}, r) \subset A$$

$$\exists r > 0 \mid x \in B(\frac{1}{k}, r) \Rightarrow x \in A$$

No entanto, note que na bola $B(\frac{1}{k}, r)$ existem infinitos números irracionais. Como o conjunto A é formado apenas por números racionais, temos que $\forall r > 0, \exists x > 0 \mid x \in B(\frac{1}{k}, r)$ e $x \notin A$.

Logo, temos uma contradição com a suposição de que A é aberto. Portanto, A não é aberto.

Definição 3.2 (Conjunto fechado). Um subconjunto S de \mathbb{R}^n é dito fechado quando o seu complementar $\mathbb{R}^n - S$ é aberto.

Suponha que $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ é fechado. Logo, A^C é aberto. Em particular, como $0 \in A^C$, temos

$$\exists r > 0 \mid B(0, r) \subset A^C$$

$$\exists r > 0 \mid x < r \Rightarrow x \in A^C$$

No entanto, note que no intervalo $(0, r)$ existem infinitos números irracionais. Como o conjunto A é formado apenas por números racionais, temos que $\forall r > 0, \exists x > 0 \mid x < r$ e $x \notin A^C$.

Logo, temos uma contradição com a suposição de que A é fechado. Portanto, A não é fechado.

Exercício 9. Prove que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

é aberto.

Solução

Tome um $(a, b) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ arbitrário. Queremos mostrar que $\exists r > 0 \mid B((a, b), r) \subset U$.

Assim, como $b > 0$, tome $r = b$. Seja $(c, d) \in B((a, b), b)$ outro ponto arbitrário.

$$\begin{aligned}(c, d) \in B((a, b), b) &\Rightarrow \|(c, d) - (a, b)\| < b \\ \Rightarrow (c - a)^2 + (d - b)^2 &< b^2 \Rightarrow (c - a)^2 < b^2 - (d - b)^2 = d(2b - d) \\ \Rightarrow 0 < (c - a)^2 &< d(2b - d) \Rightarrow 0 < d(2b - d)\end{aligned}$$

Caso $d = 0$, temos $0 < 0$ (absurdo).

Caso $d < 0$, temos $d < 0$ e $2b - d > 0 \Rightarrow d(2b - d) < 0$ (absurdo).

Logo, pela lei da tricotomia, $d > 0 \Rightarrow (c, d) \in U$.

Portanto, $(c, d) \in B((a, b), b) \Rightarrow (c, d) \in U$.

$\therefore B((a, b), b) \subset U \Rightarrow U$ é aberto.

4 Lista 4

4.1 Parte 1

Exercício 3. *Demonstrar a propriedade operatória do limite da soma de campos vetoriais. (Baseie-se na demonstração feita no texto para o produto escalar de campos vetoriais)*

Solução

Sejam $f, g: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ campos vetoriais e a ponto de acumulação de S . Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Pela definição de limite da soma e pela definição da soma de funções, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm g_1(x), \dots, f_m(x) \pm g_m(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x), \dots, f_m(x)) \pm (g_1(x), \dots, g_m(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x), \dots, f_m(x)) \pm \lim_{x \rightarrow a} (g_1(x), \dots, g_m(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$

Exercício 4. *Exercícios da seção 8.5 do Apostol - Calc II, pp 282-283:*

- a) (1) – resolver e ilustrar em ambiente CAS;
- b) (6) – resolver e ilustrar em ambiente CAS;
- c) (7)

d) (8)

Solução

- a) Se $(x, y) \neq (0, 0)$, seja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Queremos determinar o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, ao longo da reta $y = mx$. Além disso, queremos determinar se é possível definir $f(0, 0)$, de modo que f seja contínua em $(0, 0)$.