1 Avaliação 1

Exercício 1. [1 ponto] Indique se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique (o que vale a note é a justificativa):

- (V | F) A aplicação $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma curva regular.
- (V | F) Para curvas $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametrizadas por comprimento de arco, os vetores $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são ortogonais.

Solução

- Falsa.

$$\begin{aligned} \alpha(t) = (t^3, t^2) &\Rightarrow \alpha'(t) = (3t^2, 2t) \\ &\Rightarrow \alpha'(0) = (0, 0) \end{aligned}$$

  Logo, como $\exists t \in \mathbb{R}, \alpha'(t) = (0, 0)$, então α não é regular.

- Verdadeira. Note que, como α é parametrizada por comprimento de arco, $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| = 1 &\Rightarrow \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1 \\ &\Rightarrow (\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle)' = 0 \\ &\Rightarrow \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \alpha''(t) \perp \alpha'(t) \end{aligned}$$

  Logo, os vetores $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são ortogonais $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. [1 ponto] Considere a curva

$$\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), -1 < s < 1$$

1. Provar que β é parametrizada por comprimento de arco.
2. Provar que $\tau = \kappa$

Solução

1. Devemos verificar que $\|\beta'(s)\| = 1, \forall s \in (-1, 1)$.

$$\beta'(s) = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(1+s)^{\frac{1}{2}}\cdot(1), \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(1-s)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\Rightarrow \beta'(s) = \left(\frac{(1+s)^{\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\Rightarrow \|\beta'(s)\| = \left(\frac{(1+s)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\Rightarrow \|\beta'(s)\| = \left(\frac{1+s}{4}\right) + \left(\frac{1-s}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Assim, β é parametrizada por comprimento de arco.

2. Primeiro, vamos calcular β', β'', β''' e $\beta' \wedge \beta''$.

- Como calculado em 2.1, $\beta'(s) = \left(\frac{(1+s)^{\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $\beta''(s) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}}}{2}\cdot 1, -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-s)^{-\frac{1}{2}}}{2}\cdot(-1), 0\right) = \left(\frac{1}{4(1+s)^{-1/2}}, \frac{1}{4(1-s)^{1/2}}, 0\right)$
- $\beta'''(s) = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4(1+s)^{3/2}}, -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4(1-s)^{3/2}}\cdot(-1), 0\right) = \left(-\frac{1}{8(1+s)^{3/2}}, \frac{1}{8(1-s)^{3/2}}, 0\right)$
- Segue o cálculo do produto vetorial entre $\beta'(s)$ e $\beta''(s)$

$$\begin{aligned}
&\beta'(s) \wedge \beta''(s)\\
&= \left(\det\begin{bmatrix} -\frac{(1-s)^{1/2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4(1-s)^{1/2}} & 0 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} \frac{(1+s)^{1/2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4(1+s)^{1/2}} & 0 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} \frac{(1+s)^{1/2}}{2} & -\frac{(1-s)^{1/2}}{2} \\ \frac{1}{4(1+s)^{1/2}} & \frac{1}{4(1-s)^{1/2}} \end{bmatrix}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}(1-s)^{1/2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}(1+s)^{1/2}}, \frac{(1+s)^{1/2}}{8(1-s)^{1/2}} + \frac{(1-s)^{1/2}}{8(1+s)^{1/2}}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}(1-s)^{1/2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}(1+s)^{1/2}}, \frac{(1+s)+(1-s)}{8(1-s^2)^{1/2}}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}(1-s)^{1/2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}(1+s)^{1/2}}, \frac{1}{4(1-s^2)^{1/2}}\right)
\end{aligned}$$

A curvatura é dada por $\kappa_\beta(s) = \frac{\|\beta'(s)\wedge\beta''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3}$. No entanto, como provado em

2.1, $\|\beta'(s)\| = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(s) &= \|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\| \\
&= \left(\frac{1}{32(1-s)} + \frac{1}{32(1+s)} + \frac{1}{16(1-s^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1+s+1-s+2}{32(1-s^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{8(1-s^2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-s^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Calculando, agora, a torção, temos

$$\begin{aligned}
&\tau_\beta(s) \\
&= \frac{\langle \beta'(s) \wedge \beta''(s), \beta'''(s)\rangle}{\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\|^2} \\
&= \left(\frac{1}{32\sqrt{2}(1-s)^{1/2}(1+s)^{3/2}} + \frac{1}{32\sqrt{2}(1+s)^{1/2}(1-s)^{3/2}}\right) \cdot \frac{1}{\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\|^2} \\
&= \left(\frac{(1-s)+(1+s)}{32\sqrt{2}(1-s^2)^{3/2}}\right) \cdot \left(\frac{8(1-s^2)}{1}\right) = \left(\frac{2}{32\sqrt{2}(1-s^2)^{3/2}}\right) \cdot \left(\frac{8(1-s^2)}{1}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}(1-s^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $\begin{cases} \kappa_\beta(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-s^2)^{1/2}} \\ \tau_\beta(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-s^2)^{1/2}} \end{cases} \Rightarrow \kappa_\beta(s) = \tau_\beta(s)$

Exercício 3. [1 ponto] Mostramos em sala que o vetor gradiente é ortogonal à tangente da curva de nível em um ponto dado. Esta questão visa exemplificar esse fato. Considere o campo escalar

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\ln\big(x^2+y^2\big)$$

Defina a função campo gradiente de f. Escolha ao menos duas curvas de nível, defina a tangente à curva de nível. Calcule o gradiente do campo relativos às curvas escolhidas. Mostre que são ortogonais. Esboce as informações produzidas.

Solução

Dada a função f, podemos calcular a função de seu campo gradiente.

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}{\partial x}, \frac{\partial (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}{\partial y}\right) \\
&= \left(2x\ln\big(x^2+y^2\big) + (x^2+y^2)\frac{2x}{x^2+y^2}, 2y\ln\big(x^2+y^2\big) + (x^2+y^2)\frac{2y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \Big(2x\big(1+\ln\big(x^2+y^2\big)\big), 2y\big(1+\ln\big(x^2+y^2\big)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Agora, vamos de fato ao exemplo, com as duas curvas de nível escolhidas.

1. Primeira curva de nível escolhida: $f(x,y)=0$.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = 0 &\Rightarrow (x^2+y^2)\ln\big(x^2+y^2\big) = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 0 \\ \ln(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

O primeiro caso é apenas um ponto, não tão interessante para a nossa análise. Peguemos, então, a curva γ_1 dada pela equação $x^2+y^2=1$, que pode ser parametrizada como $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)) \Rightarrow \gamma_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$.

Agora, considere p um ponto arbitrário de γ_1.

$$
\begin{aligned}
p = (x,y) \in \gamma_1 &\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x,y) = \Big(2x(1+\ln(1)), 2y(1+\ln(1)\Big) \\ \gamma_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) = (-y, x) \end{cases} \\
&\Rightarrow \langle \nabla f(x,y), \gamma_1'(x,y)\rangle = \langle (2x, 2y), (-y, x)\rangle = -2xy + 2xy = 0
\end{aligned}
$$

Assim, o gradiente do campo relativo à curva escolhida e a tangente desta mesma curva são sempre ortogonais.

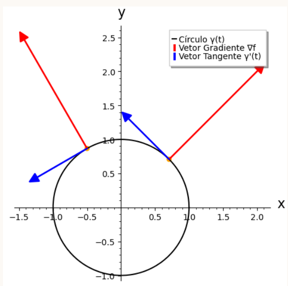

Figure 1: Exemplo do vetor gradiente e tangente na curva γ_1

2. Segunda curva de nível escolhida: $f(x,y) = 2e^2$. Uma das curvas para essa curva de nível específica é:

$$f(x,y) = 2e^2 \Rightarrow (x^2+y^2)\ln\big(x^2+y^2\big) = 2e^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = e^2 \\ \ln(x^2+y^2) = 2 \Rightarrow x^2+y^2 = e^2 \end{cases}$$

Peguemos, então, a curva γ_2 dada pela equação $x^2+y^2 = e^2$, que pode ser parametrizada como $\gamma_2(t) = (e\cos(t), e\sin(t)) \Rightarrow \gamma_2'(t) = (-e\sin(t), e\cos(t))$.

Agora, considere p um ponto arbitrário de γ_2.

$$p = (x,y) \in \gamma_2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = e^2 \\ x = e\cos(t) \\ y = e\sin(t) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x,y) = \Big(2x(1+\ln(e^2)), 2y(1+\ln(e^2))\Big) = (6x, 6y) \\ \gamma_2'(t) = (-e\sin(t), e\cos(t)) = (-y, x) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \langle \nabla f(x,y), \gamma_2'(x,y)\rangle = \langle (6x,6y), (-y,x)\rangle = -6xy + 6xy = 0$$

Assim, o gradiente do campo relativo à curva escolhida e a tangente desta mesma curva são sempre ortogonais.

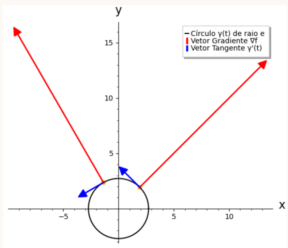

Figure 2: Exemplo do vetor gradiente e tangente na curva γ_2

Exercício 4. [1.5 ponto]

a) Encontre a aproximação linear local L, no ponto $P = (0,0)$, da função

$$f(x,y) = x\sin(y)$$

b) Calcule o erro da aproximação de f por L no ponto $Q = (0.003, 0.004)$.

Dica: Reescreva a função $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $graff\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Solução

Defina $graff\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, de tal forma que $graff(x,y) := (x,y,f(x,y)) = (x,y,x\sin(y))$. Note que, ao calcular a aproximação linear L através desse método, L será a terceira coordenada da aproximação dada pela função $graff$.

a) Calculando a sua aproximação linear L através da transformação linear J, denominada matriz jacobiana, temos

$$J = \begin{pmatrix} \nabla graff_1 \\ \nabla graff_2 \\ \nabla graff_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial x\sin(y)}{\partial x} & \frac{\partial x\sin(y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin(y) & x\cos(y) \end{pmatrix}$$

Note que, para o ponto $P = (0,0)$, temos

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin(0) & 0\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J \cdot (0,0) = (0,0,0) \Rightarrow L = 0$$

b) Pela definição de Frechet-diferenciável, temos que a ideia de transformação linear J e o erro/resto $r_P(h)$ são definidas pela igualdade

$$graff(P+h) - graff(P) = J \cdot h + r_P(h)$$

Sendo h um "desvio" pequeno do ponto P.

Assim, defina $h := Q - P = (0.003, 0.004) - (0,0) = (0.003, 0.004)$ e temos que o vetor erro $r_P(h)$ será

$$\begin{aligned} r_P(h) &= graff(P+h) - graff(P) - J \cdot h \\ &= graff(0.003, 0.004) - graff(0,0) - J \cdot (0.003, 0.004) \\ &= (0.003, 0.004, 0.003\sin(0.004)) - (0,0,0) - (0.003, 0.004, 0) \\ &= (0,0,0.003\sin(0.004)) \end{aligned}$$

Logo, o erro será a terceira coordenada, dada por $E = 0.003\sin(0.004)$.

Exercício 5. [1.5 ponto] Mostre que as superfícies descritas pelas seguintes parametrizações

$$X(u,v) = (u+v, u-v, 4uv), (u,v) \in \mathbb{R}^2$$
$$Y(s,t) = (s,t,s^2-t^2), (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

têm o mesmo traço. Para um ponto $p \in S$ de sua escolha, calcule os vetores derivadas parciais para cada uma das duas parametrizações sugeridas, bem como o plano tangente T_pS correspondente. Calcule os vetores normais e conclua que os planos tangentes coincidem.

Solução

Para que as parametrizações X e Y tenham o mesmo traço, queremos provar que existe uma função de reparametrização/mudança de parâmetro entre ambas.
Defina a função $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\Phi(u,v) := (u+v, u-v)$. Para ser uma função de reparametrização, devemos provar que

- $X(u,v) = Y(\Phi(u,v))$;
- Φ é bijetora;
- Φ é diferenciável e tem derivada não nula.

Assim, seguem as provas:

- Note que

$$\begin{aligned} Y(\Phi(u,v)) &= Y(u+v, u-v) \\ &= (u+v, u-v, (u+v)^2 - (u-v)^2) \\ &= (u+v, u-v, (u+v+u-v)(u+v-u+v)) \\ &= (u+v, u-v, 2u \cdot 2v) \\ &= (u+v, u-v, 4uv) = X(u,v) \end{aligned}$$

- Note que Φ é invertível, dado que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \Phi_1 = u+v \\ \Phi_2 = u-v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2} \\ v = \frac{\Phi_1-\Phi_2}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \Phi^{-1}(s,t) = \left(\tfrac{s+t}{2}, \tfrac{s-t}{2}\right) \end{aligned}$$

  Logo, Φ é bijetiva.

- Note que Φ_1 e Φ_2 são polinômios e, portanto, diferenciáveis. Calculando a derivada, temos a seguinte matriz jacobiana

$$\Phi'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(u+v)}{\partial u} & \frac{\partial(u+v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  Assim, Φ é diferenciável e tem derivada não nula.

Dessa forma, concluímos que X e Y têm o mesmo traço.
Agora, escolhido um ponto $p = (1,1,0)$, onde os parâmetros (u,v) e (s,t) são definidos por $p_X = (1,0) \Rightarrow p_Y = \Phi(1,0) = (1,1)$, vamos calcular os vetores derivadas parciais.
Para a parametrização X, temos

- $\frac{\partial X(p_X)}{\partial u} = \frac{\partial(u+v,u-v,4uv)}{\partial u} = (1,1,4v) \Rightarrow \frac{\partial X(1,0)}{\partial u} = (1,1,0)$
- $\frac{\partial X(p_X)}{\partial v} = \frac{\partial(u+v,u-v,4uv)}{\partial v} = (1,-1,4u) \Rightarrow \frac{\partial X(1,0)}{\partial v} = (1,-1,4)$

Para a parametrização Y, temos

- $\frac{\partial Y(p_Y)}{\partial s} = \frac{\partial(s,t,s^2-t^2)}{\partial s} = (1,0,2s) \Rightarrow \frac{\partial Y(1,1)}{\partial s} = (1,0,2)$
- $\frac{\partial Y(p_Y)}{\partial t} = \frac{\partial(s,t,s^2-t^2)}{\partial t} = (0,1,-2t) \Rightarrow \frac{\partial Y(1,1)}{\partial t} = (0,1,-2)$

Para encontrar seus planos tangentes, basta encontrar os vetores normais aos planos, dados pelo produto vetorial do vetores derivadas parciais. Assim, seja n_X e n_Y os vetores normais dos planos tangentes às parametrizações X e Y, respectivamente, no ponto p.

- $n_X = (1,1,0) \wedge (1,-1,4) = (4,-4,-2)$
- $n_Y = (1,0,2) \wedge (0,1,-2) = (-2,2,1)$

Note que $(4,-4,-2) = -2 \cdot (-2,2,1) \Rightarrow n_X = -2n_Y$. Logo, os planos tangentes coincidem. Outra forma de verificar essa informação, seria calculando os planos tangentes.

- $n_X = (4,-4,-2) \Rightarrow T_pX\colon 4x - 4y - 2z = 0 \Rightarrow T_pX\colon 2x - 2y - z = 0$
- $n_Y = (-2,2,1) \Rightarrow T_pX\colon -2x + 2y + z = 0 \Rightarrow T_pX\colon 2x - 2y - z = 0$