1 Lista 4

1.1 Parte 1

Exercício 3. *Demonstrar a propriedade operatória do limite da soma de campos vetoriais. (Baseie-se na demonstração feita no texto para o produto escalar de campos vetoriais)*

Solução

Sejam $f, g\colon S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ campos vetoriais e a ponto de acumulação de S. Seja $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Pela definição de limite da soma e pela definição da soma de funções, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x\to a}(f_1(x) \pm g_1(x), \ldots, f_m(x) \pm g_m(x)) \\
&= \lim_{x\to a}(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \pm (g_1(x), \ldots, g_m(x)) \\
&= \lim_{x\to a}(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \pm \lim_{x\to a}(g_1(x), \ldots, g_m(x)) \\
&= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)
\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b + c$

Exercício 4. *Exercícios da seção 8.5 do Apostol - Calc II, pp 282-283:*

a) (1) – resolver e ilustrar em ambiente CAS;

b) (6) – resolver e ilustrar em ambiente CAS;

c) (7)

d) (8)

Solução

a)

b) Antes de iniciar a solução, é interessante observar as seguintes definições:

Definição 1.1. Limite Sejam $f(x)\colon S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $a \in S$ um ponto de acumulação de S. Dizemos que b é o limite de $f(x)$ se, quando $\|x - a\| \to 0$, temos que $\|f(x) - b\| \to 0$ e escrevemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Definição 1.2. Continuidade Sejam $f(x)\colon S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $a \in S$ um ponto de acumulação de S. Dizemos que f é contínua em a se f é definida em a e

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Se $(x, y) \neq (0,0)$, seja $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Além disso, queremos determinar se é possível definir $f(0,0)$, de modo que f seja contínua em $(0,0)$. Assim, note que ao longo da reta $y = mx$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-m^2}{1+m^2} \\
&= \frac{1-m^2}{1+m^2}
\end{aligned}$$

Portanto, o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo da reta $y = mx$ é $\frac{1-m^2}{1+m^2}$.

No entanto, ao mesmo tempo, temos que, para a reta $x = 0$, ou seja, para o eixo y,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Analogamente, para a reta $y = 0$, ou seja, para o eixo x,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dessa forma,