

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

POTAHOVÁ PLOCHA KONŠTRUOVANÁ NAD
SFÉRAMI
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019

Bc. MARIÁN FABIAN

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

POTAHOVÁ PLOCHA KONŠTRUOVANÁ NAD
SFÉRAMI
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Počítačová grafika a geometria
Študijný odbor: Matematika
Školiace pracovisko: Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Školiteľ: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Bc. Marián Fabian
Študijný program: počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický
- Názov:** Poťahová plocha konštruovaná nad sférami
Skinning of spheres
- Anotácia:** Poťahovanie plochami je jedna z častých operácií v geometrickom modelovaní. Ojavuje sa budť v súvislosti s diskretizáciou mediálnej osi nejakého geometrického útvaru alebo ako čiastková úloha pri konštrukciach rôznych obalových plôch. V záujme nevypadnúť z triedy plôch reprezentovateľných čiastkovo racionálnymi splajnami ani pri počítaní ekvidištánt, sa obvykle kladie požiadavka poťahovať plochami, ktoré takúto vlastnosť majú. Sústredíme sa na niektoré prípady poťahovania diskrétnej množiny guľových plôch.
- Ciel:** Naštudovanie konštrukcií na vytvorenie poťahovej plochy generovanej diskrétnou množinou guľových plôch v trojrozmernom priestore. Vytvorenie konštrukcie pre prípad sfér, ktorých stredy sú koplanárne a tvoria mnohouholník. Diskutovať závislosť na polomeroch. Pomocné krivky/plochy na konštrukciu poťahovej plochy konštruujeme z triedy plôch s racionálnymi ekvidištántami.
- Literatúra:** Hoschek, Lasser: Fundamentals of CAGD, AK Peters, 1993
- Kľúčové slová:** poťahové plochy, krivky a plochy s racionálnymi ekvidištántami
- Vedúci:** doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
Katedra: FMFI.KAGDM - Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.
- Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:**
prípustná pre vlastnú VŠ
- Dátum zadania:** 14.12.2016
- Dátum schválenia:** 14.12.2016 prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie: Čestne vyhlasujem, že som samostatne vypracoval túto diplomovú prácu, usmernený radami, poznámkami a odporúčaniami môjho školiteľa s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, máj, 2019

.....

Pod'akovanie: Chcel by som sa v prvom rade pod'akovať môjmu školiteľovi pánovi doc. RNDr. Pavlovi Chalmovianskému, PhD., za jeho vedenie a veľmi cenné rady, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. V neposlednom rade patrí moja vd'aka aj pánovi doc. RNDr. Andrejovi Ferkovi, PhD., za inšpiratívne hodiny diplomového semináru, ktoré takisto prispeli k tejto práci.

Abstrakt

V tejto práci sa budeme zaoberať obalovacími plochami množiny sfér, ktorých stredy sú koplanárne. Vo všeobecnosti je to náročnejší problém, ktorého riešením sa zaoberajú mnohí odborníci v oblasti geometrického modelovania. S ich prístupmi sa tiež oboznáime a vysvetlíme ich základné princípy. Ďalej navrhнемe metódy, pre náš prípad, a aplikujeme ich na niekoľko príkladov. Implementujeme algoritmy v softvéri, ktorým možno vizualizovať a modifikovať vlastné konfigurácie sfér.

Abstract

In this thesis, we will deal with the envelopes of a set of spheres, whose centers are coplanar. In general, it is more difficult problem, which is dealt with by many experts in the field of geometric modelling. We also discuss their approaches and explain their basic principles. After that, we propose methods, for our case, and apply them to a few examples. We implement our algorithms within a software that can visualize and modify custom configurations of spheres.

Obsah

Úvod	1
1 Doterajšia práca	3
1.1 Základné definície	3
1.2 Poťahovanie sfér s pomocou PDEs	6
1.3 Poťahová plocha odvodená od metódy pre 2D prípad	7
1.4 Poťahová plocha konštruovaná pomocou RE plôch	10
2 Návrh riešenia	13
2.1 Konštrukcia rozvetvenej poťahovej plochy	13
2.1.1 Konštrukcia hornej časti plochy	14
2.1.2 Konštrukcia dolnej časti plochy	19
2.1.3 Konštrukcia bočnej časti plochy	19
2.2 Konštrukcia tubulárnej poťahovej plochy	24
2.2.1 Určenie dotykových kružníc	24
2.2.2 Konštrukcia i-teho segmentu	25
2.3 Konštrukcia pomocou homotópie	28
2.3.1 Konštrukcia hornej a dolnej časti plochy	28
2.3.2 Konštrukcia bočnej časti plochy	31
3 Implementácia	35
3.1 Aplikácia na konkrétnych dátach	35
3.2 Modifikácie našich metód	43
Záver	45
Literatúra	49

Zoznam obrázkov

1.1	Vstupná množina sfér a výstupná poťahová plocha podľa algoritmu [BLK17].	5
1.2	Počiatočná konfigurácia a výstupná poťahová plocha podľa [SRW ⁺ 10].	7
1.3	Nájdené kružnice, ktoré riešia Apolloniovu úlohu a dotykové body na kružnici c'_i v postupe konštrukcie [KH10].	8
1.4	Výpočet dĺžok dotyčníc, ktoré spolu so zodpovedajúcimi bodmi vytvárajú Hermitovu kubiku [KH10].	9
1.5	Vstupná množina sfér a výsledná poťahová plocha pomocou metódy [KH10].	10
1.6	Postup konštrukcie v [BLK17].	11
2.1	Prierez rovinou α , kde a) dvojica gúľ je disjunktná, b) dvojica gúľ má neprázny prienik.	15
2.2	Výpočet váhových funkcií $\omega_i(u, v)$	16
2.3	Konštrukcia hornej časti poťahovej plochy $\mathbf{S}(u, v)$	18
2.4	Konštrukcia i -teho segmentu bočnej časti rozvetvenej poťahovej plochy.	22
2.5	Sivou: množina \mathbf{M} pre nekonvexný vstupný mnohouholník.	23
2.6	Výpočet normálových vektorov $\vec{\mathbf{n}}_i$	25
2.7	Konštrukcia krivky $\mathbf{P}^i(u)$	27
2.8	Vstupná množina sfér v čase $t = 1$ a $t = 0$	34
2.9	Príklad plochy vytvorennej pomocou homotópie v rôznych časoch t	34
3.1	Príklad rozvetvenej poťahovej plochy pre dve sféry našimi metódami. .	36
3.2	Vstupné množiny sfér a) pre príklad v obr. 3.3, b) pre príklad v obr. 3.4.	36
3.3	Príklad rozvetvenej poťahovej plochy štyroch sfér našimi metódami. .	37
3.4	Príklad zložitejšej rozvetvenej poťahovej plochy 12-tich sfér našimi metódami pre nekonvexný vstupný mnohouholník.	37
3.5	Príklad kombinácie tubulárnej a rozvetvenej poťahovej plochy 9-tich sfér a) vstup a b) výstup z [BLK17], c) vstup a d) výstup našej metódy posúvania v normálovom smere.	38

3.6 Výstupná rozvetvená poťahová plocha troch sfér a) metódou [BLK17], b) metódou posúvania v normálovom smere a c) metódou založenou na homotópii.	39
3.7 Výstupná tubulárna poťahová plocha 7-mich sfér a) metódou [KH10], b) metódou [SRW ⁺ 10], c) našou metódou a d) po úprave rožných vektorov \vec{n}_3 a \vec{n}_5	40
3.8 Príklad prispôsobenia parametrov δ a η pre vstupné sféry.	41
3.9 Príklad prispôsobenia parametrov τ_{ij} pre vstupné sféry.	42
3.10 Príklad zmeny vektorov \vec{n}_i v tubulárnej konštrukcii.	42

Zoznam tabuľiek

3.1 Doba výpočtu našich metód na konkrétnych príkladoch.	38
--	----

Úvod

Obaľovanie gúľ plochami sa v najnovšej dobe stáva čoraz populárnejšou témuou. V reálnom svete, keby sme chceli zabaliť napríklad jablká, tak jednoducho prehodíme cez ne nejakú látku (šatku, obrúsok, a pod.) a ovinieme ju okolo nich. Z matematického pohľadu to ale častokrát býva neľahká úloha. Nejeden pekný príklad môžeme nájsť aj v prírode, strapce hrozna, alebo doma, keď po umývaní rúk mydlové bubliny pripomínajú zhluk gúľ, ktoré sú jedna na druhej, a vytvárajú súvislú plochu, alebo aj niektoré druhy činiek môžu pripomínať dve sféry, ktoré sú na seba napojené. V podstate je našou snahou skonštruovať takúto látku, ktorá by bola „hladká“, dotýkala sa každej sféry a zároveň ju nepretínala. Takéto plochy majú potom veľký význam z matematického hľadiska v počítačovej grafike, pri vytváraní rôznych modelov, dizajnérstve, pri rôznych fyzikálnych simuláciách, v molekulárnej biológii či medicíne.

Formálne sa problém dá zapísať nasledovne. Nech je daná konečná neprázdna množina sfér $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, kde $S_i \subset E^3$ je sféra so stredom $\mathbf{C}_i \subset E^3$ a polomerom $r_i \in \mathbb{R}^+$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ daná rovnicou $S_i : \|\mathbf{x} - \mathbf{C}_i\|^2 - r_i^2 = 0$. Jednotlivé gule, dané týmito sférami, sa môžu, ale aj nemusia prekrývať a platí $D_i \not\subseteq \bigcup_{j=1, j \neq i}^n D_j$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kde D_i je guľa daná sférou S_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Hľadáme plochu $\mathbf{S}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset E^2$, ktorá bude aspoň G^1 spojité a v spoločných bodech dotyku, t.j. s každou sférou, bude mať rovnakú dotykovú rovinu.

V tejto práci sa budeme zaoberať prípadom sfér, ktorých stredy sú koplanárne a tvoria mnohouholník, ale oboznámime sa v prvej kapitole aj s konštrukciami trochu všeobecnejšieho charakteru. V ďalšej kapitole predstavíme návrh riešenia pre našu situáciu, ďalej si rozoberieme riešenie nášho prípadu, priblížime softvérové dielo vytvorené pre účely tejto práce, aplikujeme naše metódy na konkrétnych príkladoch a porovnáme ich výstupy. Na niekoľkých vstupných dátach porovnáme naše metódy s doterajšími výsledkami v tejto oblasti. Na záver si zhrnieme prístup a naznačíme ďalšie myšlienky do budúcej práce.

Kapitola 1

Doterajšia práca

V tejto kapitole sa budeme najprv venovať základným pojmom a definíciám. V jej druhej časti sa pozrieme na vybrané doterajšie výskumy svetovo známych odborníkov, ktorých poznatky boli uverejnené v mnohých vedeckých a odborných časopisoch ako napríklad Computer-Aided Design, Computer Aided Geometric Design či Graphical Models.

1.1 Základné definície

V tejto časti uvedieme základné pojmy, ktoré budú potrebné pre ďalšie časti tejto práce. Prvým pojmom, ktorý je treba definovať, je priestor, v ktorom budeme pracovať, a tým je 3-rozmerný Euklidovský priestor E^3 . Nasledujúci pojem, ktorý budeme ďalej spomínať, je Minkowského priestor (časopriestor).

Definícia 1. (n -rozmerný Euklidovský priestor)

Pod Euklidovským n -rozmerným priestorom rozumieme metrický priestor (\mathbb{R}^n, ρ) , kde ρ je štandardná euklidovská metrika $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ Označujeme ho } E^n.$$

Definícia 2. (Minkowského priestor)

Pod Minkowského priestorom rozumieme pseudoeuklidovský priestor $\mathbb{R}^{3,1}$ s Minkowského pseudo-skalárnym súčinom η , kde body z $\mathbb{R}^{3,1}$ označujeme $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$,

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Prvé 3 súradnice bodu $\bar{\mathbf{x}}$ sa chápú ako pozícia bodu v priestore a posledná ako čas, v ktorom nastala udalosť v danom bode (v našom prípade budeme uvažovať prvé 3 súradnice ako stred sféry a poslednú ako polomer danej sféry), a η je daný nasledovným predpisom $\eta(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$, kde $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ sú vektory z $V(\mathbb{R}^4)$.

Pri zostavovaní ľubovoľnej plochy je potrebné si najprv určiť, akou formou bude výsledná plocha reprezentovaná. V našom prípade je zrejme najvhodnejšie použiť parametrické vyjadrenie, ktoré je jedným z najpoužívanejších, vďaka ľahkému výpočtu bodov danej plochy, výpočtu dotykovej roviny v danom bode, ľahkej implementácii, výpočtu ekvidištánt a mnohým ďalším aspektom. Parametrické vyjadrenie, alebo tiež parametrizáciu, plochy zadávame pomocou bodovej funkcie.

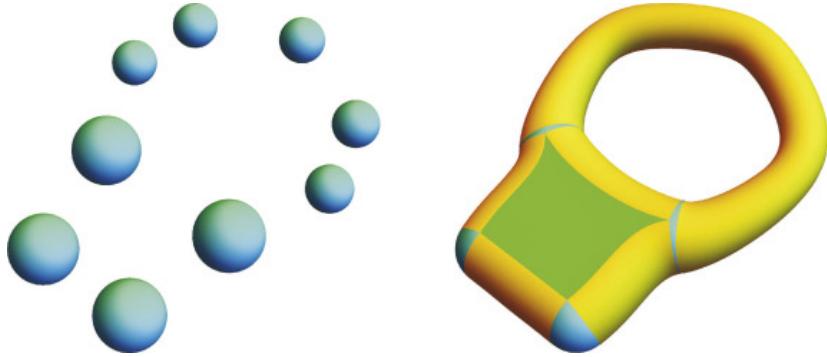
Definícia 3. (Parametrické vyjadrenie plochy prostredníctvom bodovej funkcie)

Nech D je oblasť v \mathbb{R}^2 . Potom zobrazenie $\mathbf{S} : D \rightarrow E^3$, $(u, v) \mapsto \mathbf{S}(u, v)$ sa nazýva *bodová funkcia dvoch premenných*, kde $\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$, $(u, v) \in D$ je *parametrické vyjadrenie* súradníc bodov plochy. Funkcie $x(u, v)$, $y(u, v)$ a $z(u, v)$ sú číselnými funkciemi, t.j. zobrazujú množinu D do \mathbb{R} . Čísla u a v sa nazývajú *parametrami*.

Ďalší dôležitý objekt v geometrickom modelovaní predstavujú ekvidištanty (ang. offsets), ktoré majú významné využitie, či už v dizajnérstve, alebo automobilovom a strojárenskom priemysle.

Definícia 4. (Ekvidištanta)

Nech $\mathbf{X} : D \rightarrow E^3$, $\mathbf{X}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ je daná regulárna parametrizácia plochy a $d \in \mathbb{R}$ je daná vzdialenosť. Potom zobrazenie $\mathbf{X}_d : D \rightarrow E^3$, $\mathbf{X}_d(u, v) = \mathbf{X}(u, v) + d\vec{\mathbf{n}}(u, v)$ sa nazýva *ekvidištanta* k pôvodnej (základnej) ploche, kde $\vec{\mathbf{n}}(u, v) = \frac{\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)}{\|\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)\|}$ je jednotkový normálový vektor plochy v bode $\mathbf{X}(u, v)$, $(u, v) \in D$ a $\mathbf{X}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{X}(u, v)}{\partial u}$, $\mathbf{X}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{X}(u, v)}{\partial v}$.



Obr. 1.1: Vľavo vstupná množina sfér, vpravo výstupná plocha podľa algoritmu [BLK17].

Definícia 5. (Kanálová plocha)

Nech $I = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$, a nech je daná jedno-parametrická množina sfér rovnicou $F(t) :$

$$\|\mathbf{m}(t) - \mathbf{x}\|^2 - r(t)^2 = 0, t \in I, \text{ kde } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \text{ Potom obálku } S \text{ tejto množiny sfér}$$

nazývame *kanálovou plochou*, funkciu $\mathbf{m}(t)$, ktorá vytvára v priestore krivku, zloženú so stredov sfér, nazývame *kostrovou krivkou* (ang. *spine curve*) a $r(t)$ *funkcia polomerov* (ang. *radius function*).

Definícia 6. (Homotópia)

Nech \mathbf{X}, \mathbf{Y} sú topologické priestory a $f, g : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ spojité zobrazenia medzi nimi. *Homotópia* medzi f a g je spojité zobrazenie $F : \mathbf{X} \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbf{Y}$ také, že $F(x, 0) = f(x)$ a $F(x, 1) = g(x)$. Zobrazenia f a g sa nazývajú *homotopické* a označujeme ich $f \sim g$.

Obaľovanie sfér plochou môže byť chápane viacerými spôsobmi. Jedným z nich je usporiadať danú množinu sfér a následne vytvoriť tubulárnu plochu, ktorá by sa každej sfére dotýkala pozdĺž dotykovej kružnice a v každom bode tejto kružnice by mali rovnakú dotykovú rovinu (obr. 1.1 vpravo). Iným spôsobom je, keď má byť spojená prostredníctvom plochy nejaká sféra s viac ako dvomi inými sférami (rozvetvená poľahová plocha), ako to môžeme tiež vidieť na obr. 1.1. Prípadne spôsob, ktorý kombinuje tubulárnu a rozvetvenú poľahovú plochu, tým že ich napojí na seba na konkrétnych sférach, je tiež možným riešením. Tieto prístupy boli rozobrané vo viacerých článkoch, napríklad [SRW⁺10], [KH10], [BKL15] či [BLK17].

1.2 Potahovanie sfér s pomocou PDEs

V práci [SRW⁺10], bola prezentovaná metóda výpočtu interpolačnej plochy usporiadanej množiny sfér, s využitím PDEs (Partial differential equations). Jej hlavným cieľom bolo vytvoriť optimálnu obalovú plochu z hľadiska minimalizácie jej plošného obsahu, priemernej krivosti, alebo kombinácie oboch tak, aby bola C^1 spojitá. Predpokladom sú usporiadane sféry, ktoré môžu mať rôzne polomery a môžu sa prekrývať. Ich metóda vytvára tubulárnu plochu, ktorá sa dotýka každej sféry v jednej z jej hlavných kružník, t.j. v kružnici, ktorá je prienikom danej sféry a roviny prechádzajúcej cez jej stred.

$$\text{Parametrizáciou jednotkovej kružnice } \mathbf{q}(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, u \in \langle 0, 2\pi \rangle \text{ v rovine } z = 0,$$

jej následnou transformáciou na dotykovú kružnicu i -tej sféry dostaneme jej parametrizáciu $\mathbf{p}^i(u) = \mathbf{c}^i + r^i R^i \mathbf{q}(u)$, kde r^i je polomer i -tej sféry a $R^i = R^i(\theta^i, \phi^i)$ je rotačná matica určená normálovým vektorom $\vec{\mathbf{n}}^i = \vec{\mathbf{n}}^i(\theta^i, \phi^i)$ roviny, v ktorej leží dotyková kružnica. Tento normálový vektor je zároveň dotykový vektor ku i -tej sfére na kružnici $\mathbf{p}^i(u)$. Interpolačná plocha $\mathbf{S}(u, v)$ je zložená zo segmentov $\mathbf{S}^i(u, v)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, kde n je počet sfér. Ide o splajnové plochy, ktoré spájajú susedné sféry. Každý segment má tvar: $\mathbf{S}^i(u, v) = \mathbf{A}^i(u)v^3 + \mathbf{B}^i(u)v^2 + \mathbf{C}^i(u)v + \mathbf{D}^i(u)$, kde $\mathbf{A}^i(u), \mathbf{B}^i(u), \mathbf{C}^i(u)$ a $\mathbf{D}^i(u)$ sú reálne funkcie a $v \in \langle 0, 1 \rangle$. Z okrajových podmienok a pre zachovanie C^1 spojnosti, pre $i = 1, 2, \dots, n-1$, musia platiť nasledujúce podmienky:

$$1. \quad \mathbf{S}^i(u, 0) = \mathbf{p}^i(u),$$

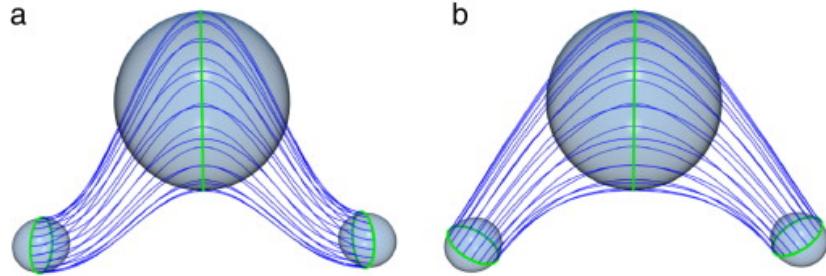
$$2. \quad \mathbf{S}^i(u, 1) = \mathbf{p}^{i+1}(u),$$

$$3. \quad \frac{\partial \mathbf{S}^i(u, 0)}{\partial v} = t^i \vec{\mathbf{n}}^i,$$

$$4. \quad \frac{\partial \mathbf{S}^i(u, 1)}{\partial v} = t^{i+1} \vec{\mathbf{n}}^{i+1},$$

kde t^i a t^{i+1} sú koeficienty, ktoré určujú veľkosťi dotykových vektorov. V tejto práci bol pre každé i tento koeficient nastavený na polovičnú vzdialenosť stredov predchádzajúcej a nasledujúcej sféry, v prípade prvej a poslednej sféry, to bola vzdialenosť stredu sféry a stredu susednej. Po dosadení do predpisu pre i -ty segment a jeho parciálnych derivácií dostali systém 4 rovníc o 4 neznámych, ktorých vyriešením získali daný segment.

Následne minimalizovali plošný obsah plochy $J^a = \iint \sqrt{EG - F^2} dudv$, kde E, F, G sú koeficienty prvej základnej formy. Ďalej ich snahou bolo minimalizovať priemernú krivosť $H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$, kde e, f, g sú koeficienty druhej základnej formy. Na výpočet bola použitá energetická funkcia $J^a = \iint H^2 dudv$.



Obr. 1.2: (a) vstupná konfigurácia, (b) výstupná plocha podľa [SRW⁺10].

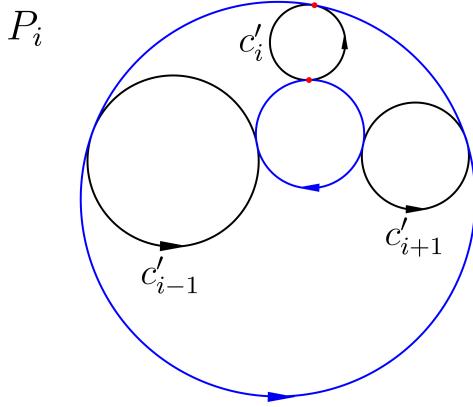
Konvexnou kombináciou $J = (1 - k) J^a + k J^c$, kde k bola zvolená konštantá a vypočítaním príslušných parciálnych derivácií, dostali systém diferenciálnych rovníc, ktoré použili v procedúre na optimalizáciu plochy pomocou úpravy natočenia rovín, v ktorých sú dotykové kružnice. Postupnou iteráciou, kde v každom kroku bolo upravené natočenie každej roviny v zápornom smere násobku gradientu, dostali optimálnu plochu.

Veľkou nevýhodou je, že nie vždy bude výsledná plocha obaľovať sféry. Môže sa totiž stať, že časť plochy bude prechádzať cez nejakú sféru, teda časť sféry sa nebude nachádzať vo vnútri obalovej plochy. Takýto príklad môžeme vidieť na obr. 1.2. Ďalšou nevýhodou tejto metódy je, že je iteratívna, a teda nehodí sa pre real-time rendering, pretože môže trvať dlho. Naopak, výsledok ich metódy sa dá napríklad použiť na modelovanie krvných ciev a následnú simuláciu prúdenia krvi v nej, prípadne iných fyzikálnych dejov.

1.3 Potahová plocha odvodená od metódy pre 2D prípad

Inú metódu ponúkla práca [KH10], ktorá nie je založená na iteráciách. Obalová plocha sfér sa konštruuje pomocou metódy pre 2D prípad hľadania obalovej krivky množiny kruhov. Na jej nájdenie sa používa metóda cyklografie a riešenie Apolloniovej úlohy (nájdenie dotykových kružníck ku trom daným kružniciam). Označme D_i pre každé $i = 1, 2, \dots, n$, uzavretú guľu definovanú sférou S_i so stredom v bode \mathbf{o}_i a polomerom r_i . Predpokladom pre tento algoritmus je prípustná konfigurácia množiny sfér $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}, n \in \mathbb{N}$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky

1. $D_i \not\subseteq \bigcup_{j=1, j \neq i}^n D_j, i = 1, 2, \dots, n,$
2. $D_i \cap D_j = \emptyset, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\},$
3. ak $D_{i-1} \cap D_{i+1} \neq \emptyset$, potom $D_{i-1} \cap D_{i+1} \subseteq D_i, i = 2, 3, \dots, n-1.$

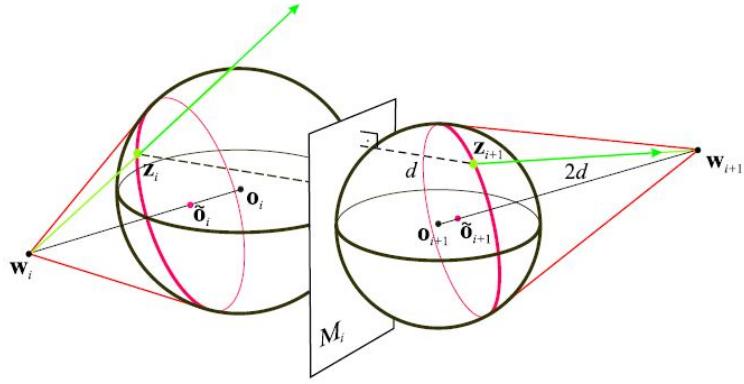


Obr. 1.3: Modrou: nájdené kružnice, ktoré riešia Apolloniovu úlohu. Červenou: dotykové body na kružnici c'_i .

Cieľom je nájsť G^1 spojité plochy $\mathbf{S}(u, v)$, ktorá bude mať so sférou $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ spoločné dotykové kružnice c_i (nie nutne hlavnú kružnicu), so stredom v bode \tilde{o}_i a polomerom \tilde{r}_i . V každom bode kružnice c_i budú mať rovnakú dotykovú rovinu a navyše musí platiť: $c_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n D_j, i = 1, 2, \dots, n$. Plocha $\mathbf{S}(u, v)$ sa skladá zo segmentov $\mathbf{S}^i(u, v), i = 1, 2, \dots, n - 1$, ktoré spájajú sféry S_i a S_{i+1} . Postup pre konštrukciu $\mathbf{S}^i(u, v)$ je zložený z niekoľkých krokov.

1. Nájsť dotykové kružnice c_i a c_{i+1} .
2. Definovať zodpovedajúce si body $z_i(u), u \in (0, 2\pi)$ na c_i a c_{i+1} .
3. Vypočítať smer a veľkosť dotykových vektorov izoparametrických kriviek.
4. Samotná konštrukcia segmentu Hermitovou interpoláciou.

Nech teraz $i = 2, 3, \dots, n - 1$, uvažujme sféry S_{i-1}, S_i a S_{i+1} a rovinu P_i definovanú stredmi týchto sfér. Prienikom tejto roviny P_i a sfér S_{i-1}, S_i a S_{i+1} dostaneme tri kružnice c'_{i-1}, c'_i a c'_{i+1} . Nájdením dotykových kružníck ku týmto troma kružniciam v rovine P_i dostaneme dva dotykové body na kružnici c'_i . Na obr. 1.3 môžeme vidieť v rovine P_i nájdené dotykové kružnice a body na c'_i . Pre každé tri kružnice c'_{i-1}, c'_i a c'_{i+1} existujú práve dve dotykové kružnice, ktoré sa ich dotýkajú buď obe zvnútra, alebo obe zvonku, alebo jedna zvnútra a druhá zvonku. Tieto dotykové kružnice a body na c'_i sa dajú nájsť pomocou cyklografie. Ďalej, existuje jediná rovina T_i , prechádzajúca týmto dotykovými bodmi, ktorá je kolmá na rovinu P_i . Hľadaná dotyková kružnica na sfére S_i je prienikom roviny T_i s danou sférou. Dotykovú kružnicu na prvej sfére nájdeme pomocou dotykového kužeľa, ktorý spája prvé dve sféry. Dotyková kružnica kužeľa s prvoj sférou je zároveň hľadanou dotykovou kružnicou c_1 . Analogický nájdeme poslednú dotykovú kružnicu na sfére S_n .



Obr. 1.4: Výpočet dĺžok dotyčníc, ktoré spolu so zodpovedajúcimi bodmi vytvárajú Hermitovu kubiku [KH10].

Na vytvorenie zodpovedajúcich si bodov $\mathbf{z}_i(u)$ a $\mathbf{z}_{i+1}(u)$ treba definovať začiatočné body $\mathbf{z}_i = \mathbf{S}^i(0, 0)$ a $\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{S}^i(0, 1)$. Ich následnou rotáciou pozdĺž príslušných kružník o uhol $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ dostaneme hľadané dvojice bodov. Kľúčové je teda nájsť začiatočné body. Nech teraz $s : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ a $p : S \rightarrow \{-1, 1\}$ sú funkcie definované predpismi

$$s(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x \geq 0, \end{cases}$$

$$p(S_i) = \begin{cases} s\left(\left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i\|} \right\rangle\right) & , i \neq n, \\ s\left(\left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}}{\|\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}\|} \right\rangle\right) & , i = n, \end{cases}$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je štandardný euklidovský skalárny súčin a bod \mathbf{w}_i je pólom roviny dotykovej kružnice vzhľadom na sféru S_i , cez ktorý prechádzajú všetky dotyčnice. Funkcia s je skoro identická s funkciou sgn , líšia sa iba pre $x = 0$ ($sgn(0) = 0$, $s(0) = 1$). Ďalej treba definovať pomocný vektor $\vec{\mathbf{e}}$, ktorý nie je rovnobežný so žiadnym z vektorov $\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i$.

Autori zvolili $\vec{\mathbf{e}} = (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i) \times (\mathbf{w}_{i+1} - \tilde{\mathbf{o}}_{i+1})$ a pomocou funkcií s a p definujú začiatočné body

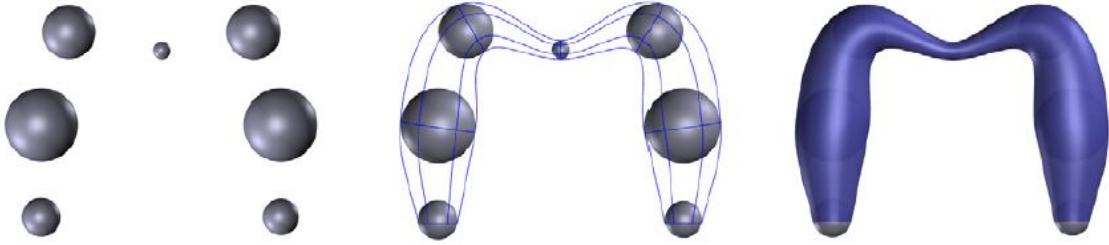
$$\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{o}}_i + \tilde{r}_i \frac{\vec{\mathbf{e}} \times (p(S_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))}{\|\vec{\mathbf{e}} \times (p(S_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Rotáciou \mathbf{z}_i okolo priamky prechádzajúcej stredom $\tilde{\mathbf{o}}_i$, ktorá má smer $p(S_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i)$ o uhol $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ dostaneme hľadané zodpovedajúce body $\mathbf{z}_i(u)$.

Výsledná parametrizácia i -teho segmentu má nasledujúci predpis

$$\mathbf{S}^i(u, v) = H_0^3(v) \mathbf{z}_i(u) + H_1^3(v) \mathbf{z}_{i+1}(u) + H_2^3(v) 2\rho(M_i, \mathbf{z}_i(u)) \vec{\mathbf{m}}_i(u)$$

$$+ H_3^3(v) 2\rho(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(u)) \vec{\mathbf{m}}_{i+1}(u), \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \langle 0, 1 \rangle, i = 1, 2, \dots, n-1,$$



Obr. 1.5: Naľavo vstupná množina sfér, v strede izoparametrické krivky plochy spolu s dotykovými kružnicami, napravo výsledná plocha pomocou metódy [KH10].

kde ρ je štandardná euklidovská metrika v E^3 a pre vektor $\vec{m}_i(u)$ platí

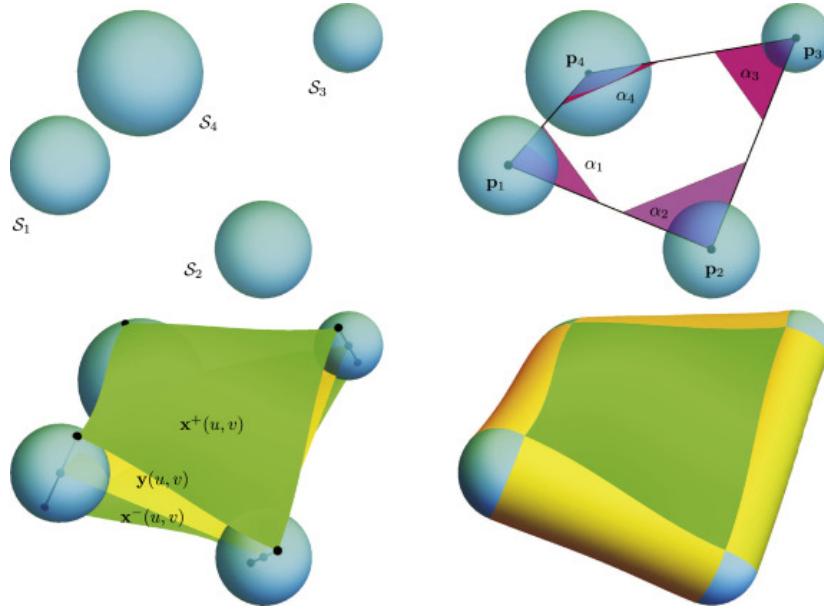
$$\vec{m}_i(u) = p(S_i) \cdot \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(u)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(u)\|}, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

1.4 Poťahová plocha konštruovaná pomocou RE plôch

Komplexnejšie riešenie predstavili páni Bizzarri, Lávička a Kosinka v práci [BLK17]. Ich hlavným cieľom bola konštrukcia, ktorá riešila zložitejšie obaľovanie množiny sfér (rozvetvené poťahové plochy), kedy bolo treba nájsť spojenie medzi viac ako dvomi sférami, za pomoci racionálnych obálkových/obaľových plôch (*RE surfaces*). Ich metódu využili/aplikovali aj na hladké spájanie kužeľov a valcov. Ak bolo treba vytvárať tubulárnu poťahovú plochu, použili algoritmus z práce [BL13]. Tento algoritmus je založený na racionálnych kontúrových krivkách kanálových plôch. Výsledkom ich práce je efektívny algoritmus pre G^1 hladkú interpoláciu pomocou RE plôch. Príklad môžeme vidieť na obrázku 1.1, kde spájajú rozvetvenú poťahovú plochu s tubulárnou.

Myšlienkou ich algoritmu je previesť problém nájdenia obálky 2-parametrickej skupiny sfér do $\mathbb{R}^{3,1}$ a vytvorenie RE plochy prechádzajúcej danými bodmi s danými dotykovými rovinami v $\mathbb{R}^{3,1}$. Prislúchajúca obálková plocha v \mathbb{R}^3 potom vedie na hornú a dolnú časť poťahovej plochy.

Ich predpokladom je postupnosť sfér S_i , dané bodmi $\bar{\mathbf{p}}_i = (\mathbf{p}_i, r_i) \in \mathbb{R}^{3,1}$, pre $i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}$, kde \mathbf{p}_i je stred i -tej sféry a r_i je jej polomer. Najprv zvolili dotykové roviny $\bar{\alpha}_i$ v bodech $\bar{\mathbf{p}}_i$ ako roviny dané bodmi $\bar{\mathbf{p}}_{i-1}, \bar{\mathbf{p}}_i$ a $\bar{\mathbf{p}}_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n$ a $\bar{\mathbf{p}}_0 = \bar{\mathbf{p}}_n$ a $\bar{\mathbf{p}}_{n+1} = \bar{\mathbf{p}}_1$ s dotykovými vektormi $\bar{\mathbf{t}}_{i1} = \lambda_{i1}(\bar{\mathbf{p}}_{i-1} - \bar{\mathbf{p}}_i) = (\mathbf{t}_{i1}, \tau_{i1}), \bar{\mathbf{t}}_{i2} = \lambda_{i2}(\bar{\mathbf{p}}_{i+1} - \bar{\mathbf{p}}_i) = (\mathbf{t}_{i2}, \tau_{i2}), \lambda_{i1}, \lambda_{i2} \in \mathbb{R}$. Na obrázku 1.6 môžeme vidieť postup ich konštrukcie.



Obr. 1.6: Postup konštrukcie v [BLK17].

Ked' zhrnieme ich algoritmus, najprv skonštruujujú polynomickú vrchnú obálkovú plochu $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}^+(u, v)$, vypočítajú funkciu $f(u, v)$, ktorou ju zdvihnú/prevedú do $\mathbb{R}^{3,1}$ a následne vypočítajú MS (*Medial Surface*) $\mathbf{y}(u, v)$. Dolnú časť poťahovej plochy $\mathbf{x}^-(u, v)$ vypočítajú nasledovne

$$\mathbf{x}^-(u, v) = \mathbf{x}^+ + 2f \frac{(\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2} (\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v).$$

Celá poťahová plocha sa potom skladá z hornej a dolnej časti $\mathbf{x}^\pm(u, v)$ a n kanálových plôch, ktoré vzniknú rotáciou bodov hraničných kriviek $\mathbf{x}_i(u)$ plochy $\mathbf{x}(u, v)$ okolo príslušných dotyčník k hraničnej krivke $\mathbf{y}_i(u)$ plochy $\mathbf{y}(u, v)$.

Konkrétnejšie, treba najprv spomenúť, čo je *Medial Surface* $\mathbf{y}(u, v)$ priestorovej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Ide o parametrizáciu stredov maximálnych vpísaných gúľ v Ω . Ďalej treba spomenúť aj MST (*Medial Surface Transform*) oblasti Ω . MST získame pripojením príslušného polomeru sféry $r(u, v)$ ku MS, t.j. dostaneme body $\bar{\mathbf{y}}(u, v) = (\mathbf{y}(u, v), r(u, v)) \in \mathbb{R}^{3,1}$. Príslušná obálka oblasti Ω je daná predpisom

$$\mathbf{x}^\pm = \mathbf{y} - r\mathbf{n}^\pm,$$

pričom

$$\mathbf{n}^\pm = \frac{(r_u G - r_v F) \mathbf{y}_u + (r_v E - r_u F) \mathbf{y}_v}{EG - F^2} \pm \frac{(\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v) \sqrt{EG - F^2}}{EG - F^2},$$

kde E, G a F sú koeficienty prvej základnej formy plochy $\mathbf{y}(u, v)$ a \bar{E}, \bar{G} a \bar{F} sú koeficienty prvej základnej formy plochy $\bar{\mathbf{y}}(u, v)$, ktoré sú vypočítané pomocou Minkowského pseudo-skalárneho súčinu.

Podľa ich práce, každá RE plocha $\bar{\mathbf{y}} \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$ môže byť skonštruovaná pomocou racionálnej plochy $\mathbf{x} \subseteq \mathbb{R}^3$ a racionálnej funkcie f podľa predpisu

$$\bar{\mathbf{y}}(u, v) = (\mathbf{x} + f(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v), f \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|).$$

Použitím predpisu pre obálku dostanú zodpovedajúce dotykové body

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i - r_i \frac{(\tau_{i1}G_i - \tau_{i2}F_i)\mathbf{t}_{i1} + (\tau_{i2}E_i - \tau_{i1}F_i)\mathbf{t}_{i2}}{E_iG_i - F_i^2} \pm \frac{(\mathbf{t}_{i1} \times \mathbf{t}_{i2})\sqrt{E_i\bar{G}_i - \bar{F}_i^2}}{E_iG_i - F_i^2},$$

kde $E_i = \|\mathbf{t}_{i1}\|^2$, $G_i = \mathbf{t}_{i1} \cdot \mathbf{t}_{i2}$, $F_i = \|\mathbf{t}_{i2}\|^2$, $\bar{E}_i = \|\mathbf{t}_{i1}\|^2 - \tau_{i1}^2$, $\bar{G}_i = \mathbf{t}_{i1} \cdot \mathbf{t}_{i2} - \tau_{i1}\tau_{i2}$ a $\bar{F}_i = \|\mathbf{t}_{i2}\|^2 - \tau_{i2}^2$. Normálový vektor \mathbf{n}_i obálkovej plochy v bode \mathbf{q}_i je $\mathbf{n}_i = \lambda_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Podmienkou pre MST $\bar{\mathbf{y}}(u, v)$ je, aby interpolovala $\bar{\mathbf{p}}_i$, t.j.

$$\bar{\mathbf{y}}(u_i, v_i) = \bar{\mathbf{p}}_i,$$

z čoho vyplýva podmienka

$$f(u_i, v_i) = \frac{r_i}{\|\mathbf{n}_i\|}.$$

Ďalšou podmienkou je, aby $\bar{\mathbf{y}}(u, v)$ mala v bodech $\bar{\mathbf{p}}_i$ dotykové roviny $\bar{\alpha}_i$, čo sa dá zapísat nasledovne

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}_u(u_i, v_i) &= \beta_{i1}\bar{\mathbf{t}}_{i1} + \beta_{i2}\bar{\mathbf{t}}_{i2}, \\ \bar{\mathbf{y}}_v(u_i, v_i) &= \gamma_{i1}\bar{\mathbf{t}}_{i1} + \gamma_{i2}\bar{\mathbf{t}}_{i2}.\end{aligned}$$

Táto podmienka vytvára systém lineárnych rovníc s neznámymi $f_u(u_i, v_i)$, β_{i1} , β_{i2} a $f_v(u_i, v_i)$, γ_{i1} , γ_{i2} . Následne z tohto systému vypočítajú neznáme hodnoty a vytvoria racionálnu funkciu $f(u, v)$, ktorá splňa všetky podmienky. Plochu $\mathbf{y}(u, v)$ potom vypočítajú zo vzťahu

$$\bar{\mathbf{y}}(u, v) = (\mathbf{x} + f(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v), f \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|) = (\mathbf{y}(u, v), r(u, v)),$$

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x} + f(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v).$$

Celý tento algoritmus aplikovali na niekoľkých príkladoch, kde bolo potrebné vytvoriť plochu $\mathbf{x}(u, v)$ a funkciu $f(u, v)$. Napríklad, pre $n = 4$, autori použili na ich konštrukciu Fergusonovu záplatu.

Tento algoritmus je robustný a rieši komplexnejšie poťahovanie sfér, ako to môžeme vidieť napríklad na obr. 1.1. Ale aj táto metóda môže niekedy, bez zásahu používateľa, pre nevhodné vstupné dátu vytvoriť výstupnú plochu, ktorá prechádza cez sféry. Preto je niekedy potrebná modifikácia dotykových bodov \mathbf{q}_i prípadne dotykových vektorov \mathbf{t}_{i1} a \mathbf{t}_{i2} . Voľbu týchto bodov a vektorov je preto vhodné určiť podľa konkrétnej situácie vstupnej postupnosti sfér a používateľovho zámeru.

Kapitola 2

Návrh riešenia

V tejto kapitole rozoberieme návrhy riešenia, ktoré neskôr implementujeme do funkčného programu.

Predpokladom nášho riešenia je množina sfér $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}, n \in \mathbb{N}$, kde $S_i \subset E^3$ je sféra so stredom $\mathbf{C}_i \in E^3$ a polomerom $r_i \in \mathbb{R}^+, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ktorých stredy sú koplanárne, tvoria mnogouholník M , a pre ktoré platí

$$D_i^\delta \cap D_j^\delta = \emptyset, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j, \quad (2.1)$$

kde δ je konštanta z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a D_i^δ je guľa daná stredom \mathbf{C}_i a polomerom δr_i

$$D_i^\delta = \{(x, y, z) \in E^3 \mid (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \leq (\delta r_i)^2\}. \quad (2.2)$$

Rovinu, v ktorej ležia všetky stredy sfér, označíme α . Táto rovina je daná bodom \mathbf{O} a normálovým vektorom $\vec{\mathbf{n}}_\alpha$,

$$\alpha : (\mathbf{X} - \mathbf{O}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_\alpha = 0, \quad (2.3)$$

kde operátor \cdot je štandardný euklidovský skalárny súčin. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že ide o rovinu $\beta : z = 0$. Ak by bola α rôzna od β , tak ju vieme vhodnou transformáciou zobraziť na β , vypočítať poťahovú plochu a následne inverznou transformáciou ju zobraziť naspäť.

Ďalej, označme M mnogouholník M , spolu s oblasťou, ktorú ohraničuje. Ide o oblasť, ktorá je sivou farbou vyznačená na obr. 2.2.

2.1 Konštrukcia rozvetvenej poťahovej plochy

Pod rozvetvenou poťahovou plochou rozumieme takú plochu, prostredníctvom ktorej je spojená nejaká sféra s viac ako dvomi inými sférami, ako to môžeme napríklad vidieť na obr. 1.6 vpravo dole.

2.1.1 Konštrukcia hornej časti plochy

Nech je daná rovina $\alpha : z = 0$, normálový vektor $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a množina sfér S , ktorých stredy ležia v α a tvoria mnogouholník a ich súradnice sú $\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 0 \end{pmatrix}$. Nech sú dané vrcholy \mathbf{P}_i

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ r_i \end{pmatrix} = \mathbf{C}_i + r_i \vec{n}_\alpha, \text{ pre } i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.4)$$

a nech je daný referenčný bod $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ r^* \end{pmatrix}$, pre nejaké $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Označme α^* rovinu rovnobežnú s rovinou α , v ktorej leží referenčný bod \mathbf{P}^* . Najprv definujme parametrizáciu roviny α^* nasledovne

$$\mathbf{S}^*(u, v) = \mathbf{P}^* + (u - u^*) \vec{\mathbf{e}}_1 + (v - v^*) \vec{\mathbf{e}}_2, (u, v) \in E^2. \quad (2.5)$$

Ďalej definujme váhové funkcie $\omega_i(u, v)$ pre $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\omega_i(u, v) = \begin{cases} \delta_{ij} & , \exists j \in \{1, 2, \dots, n\}; \|(u, v) - (u_j, v_j)\| \leq \delta r_j, \\ \frac{w_i(u, v)}{\sum_{j=1}^n w_j(u, v)} & , \|(u, v) - (u_j, v_j)\| > \delta r_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{cases} \quad (2.6)$$

pričom

$$w_i(u, v) = (\|(u, v) - (u_i, v_i)\| - \delta r_i)^{-\eta}, \quad (2.7)$$

kde funkcia δ_{ij} je Kroneckerova delta funkcia, η je daná konštanta z intervalu $(1, \infty)$, konštanta δ je z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a $\|\cdot\|$ je euklidovská norma. Kvôli správnej definícii funkcií $\omega_i(u, v)$, musia byť disky

$$d_j^\delta = \{(u, v) \in E^2 \mid \|(u, v) - (u_j, v_j)\| \leq \delta r_j\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

disjunktné a navyše musí pre konštantu δ platiť

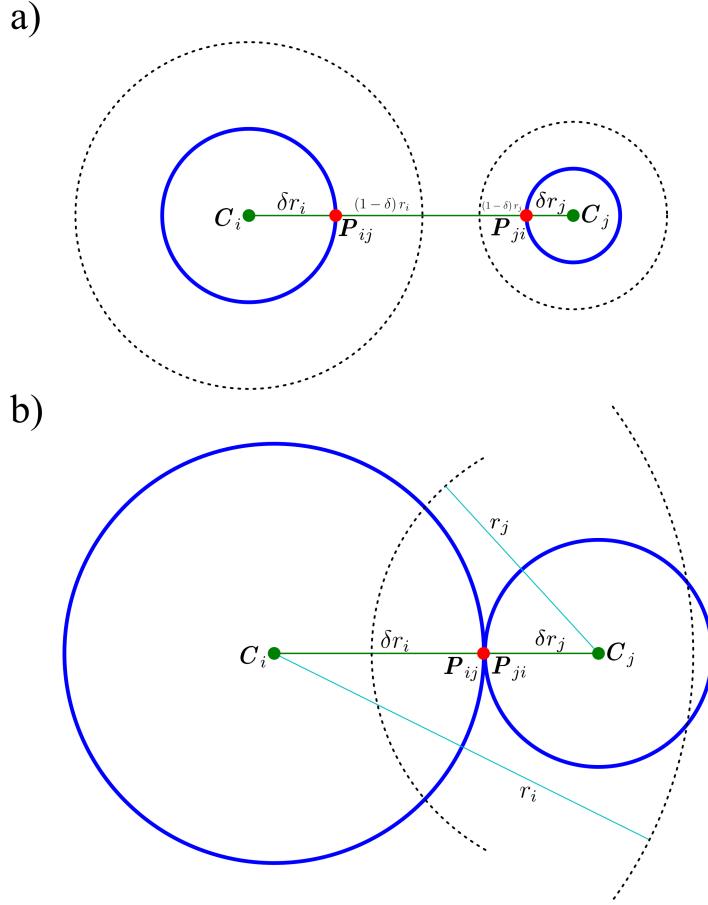
$$\delta < \min_{i \neq j} \frac{\|\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_i\|}{r_j + r_i}. \quad (2.8)$$

Označme

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{C}_i + \frac{\delta r_i}{\|\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_i\|} (\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_i), i \neq j.$$

Potom by boli $\omega_i(u, v)$ nesprávne definované, ak nastane rovnosť pre nejaké i, j , $i \neq j$:

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ji}.$$

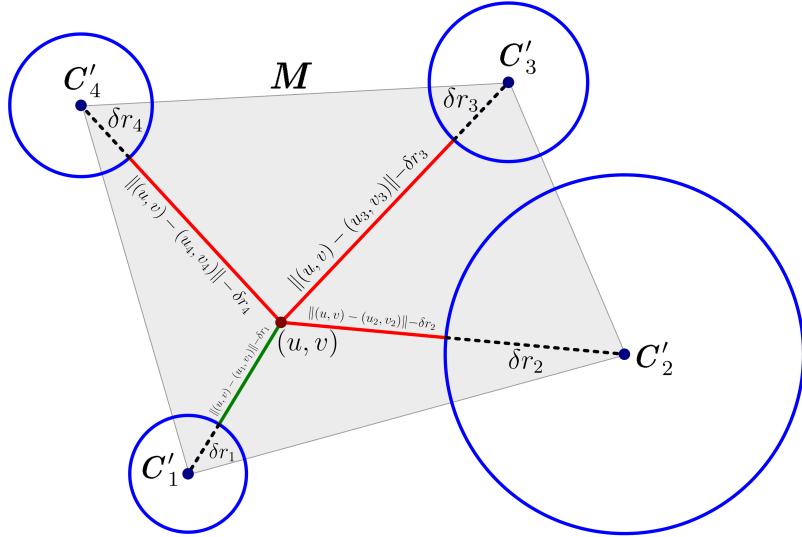


Obr. 2.1: Prierez rovinou α , kde a) dvojica gúľ je disjunktná, b) dvojica gúľ má neprázny prienik.

Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} \frac{\delta(r_j + r_i)}{\|C_j - C_i\|} (C_j - C_i) &= (C_j - C_i), \\ \frac{\delta(r_j + r_i)}{\|C_j - C_i\|} &= 1, \\ \delta &= \frac{\|C_j - C_i\|}{(r_j + r_i)}. \end{aligned}$$

Teda δ musí byť menšia ako $\frac{\|C_j - C_i\|}{(r_j + r_i)}$ pre $\forall i, j, i \neq j$, a preto musí platiť podmienka v (2.8). Za nášho predpokladu (2.1), že všetky vstupné gule sú disjunktné, je zároveň splnená podmienka (2.8), ako to môžeme vidieť na obr. 2.1 pod písmenom a) (v tomto prípade je to splnené pre $\forall \delta \in \langle 0, 1 \rangle$). Pre prípad gúľ, ktoré majú neprázdný prienik (obr. 2.1 písmeno b)), to ale nemusí platiť a pre nejaké $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$ nastane rovnosť $P_{ij} = P_{ji}$. Preto v takomto prípade musí platiť aj podmienka (2.8).



Obr. 2.2: Výpočet váhových funkcií $\omega_i(u, v)$.

Pre (u, v) také, že $\|(u, v) - (u_j, v_j)\| > \delta r_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ môžeme váhové funkcie zapísť v tvare

$$\omega_i(u, v) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\|(u, v) - (u_j, v_j)\| - \delta r_j)^\eta}{\sum_{k=1}^n \prod_{l=1, l \neq k}^n (\|(u, v) - (u_l, v_l)\| - \delta r_l)^\eta}, \quad (2.9)$$

ktorý je numericky stabilnejší, kvôli tomu, že z definície by sme museli deliť veľmi malými hodnotami (čo je z implementačného hľadiska nevhodné/neprípustné) pre (u, v) blízko hranice diskov d_j^δ , kým pri tomto výpočte takáto situácia nenastane.

Váhové funkcie (2.6) sú podobné váhovým funkciám Shepardovej metódy [Don68] popísanej napríklad aj v [BDL83] a [HL93], ktorých predpis je

$$\omega_i'(u, v) = \begin{cases} \delta_{ij} & , \exists j \in \{1, 2, \dots, n\}; (u, v) = (u_j, v_j), \\ \frac{\|(u, v) - (u_i, v_i)\|^{-\mu}}{\sum_{j=1}^n \|(u, v) - (u_j, v_j)\|^{-\mu}} & , (u, v) \neq (u_j, v_j), \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Naše váhové funkcie (2.6) a Shepardove funkcie v (2.10) sú si rovné, ak $\delta = 0$ a zároveň $\eta = \mu$. Funkcie $\omega_i(u, v)$ z (2.6) sú spojite diferencovateľné všade okrem kružníc (hraníc diskov), teda pre (u, v) také, že $\|(u, v) - (u_j, v_j)\| = \delta r_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Na obr. 2.2 môžeme vidieť ich konštrukciu.

Vlastnosti váhových funkcií $\omega_i(u, v)$

1. Nezápornosť

$$\omega_i(u, v) \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, (u, v) \in E^2.$$

2. Rozklad jednotky

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(u, v) = 1, \forall (u, v) \in E^2.$$

3. Interpolácia v diskoch d_j^δ

$$\omega_i(u, v) = \delta_{ij}, \exists j \in \{1, 2, \dots, n\}; (u, v) \in d_j^\delta.$$

4. Derivácia (mimo diskov d_j^δ)

$$\frac{\partial \omega_i(u, v)}{\partial u} = \frac{\frac{\partial w_i(u, v)}{\partial u} W(u, v) - w_i(u, v) \frac{\partial W(u, v)}{\partial u}}{W^2(u, v)},$$

$$\frac{\partial \omega_i(u, v)}{\partial v} = \frac{\frac{\partial w_i(u, v)}{\partial v} W(u, v) - w_i(u, v) \frac{\partial W(u, v)}{\partial v}}{W^2(u, v)},$$

kde

$$w_i(u, v) = (\|(u, v) - (u_i, v_i)\| - \delta r_i)^{-\eta},$$

$$\frac{\partial w_i(u, v)}{\partial u} = -\frac{\eta(u - u_i)}{\|(u, v) - (u_i, v_i)\| (\|(u, v) - (u_i, v_i)\| - \delta r_i)^{\eta+1}},$$

$$\frac{\partial w_i(u, v)}{\partial v} = -\frac{\eta(v - v_i)}{\|(u, v) - (u_i, v_i)\| (\|(u, v) - (u_i, v_i)\| - \delta r_i)^{\eta+1}},$$

$$W(u, v) = \sum_{j=1}^n w_j(u, v),$$

$$\frac{\partial W(u, v)}{\partial u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_j(u, v)}{\partial u},$$

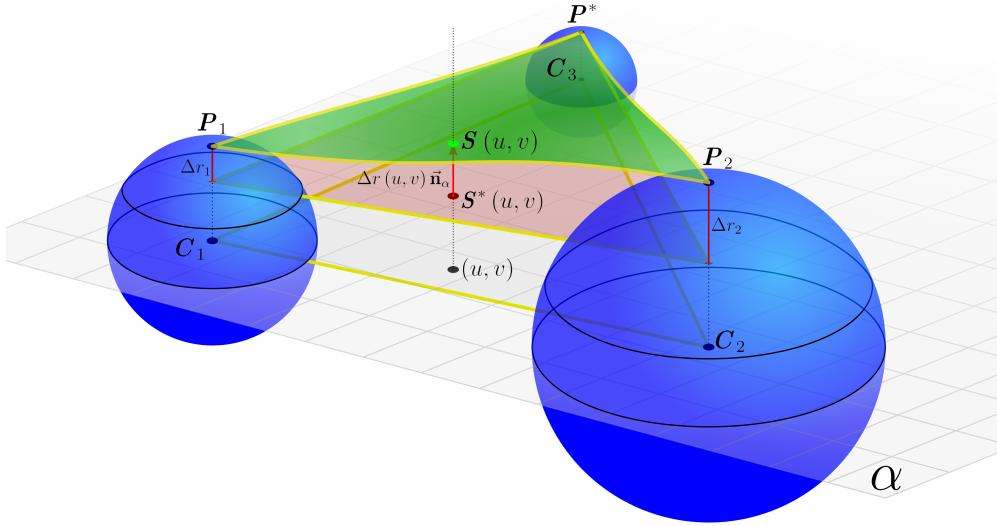
$$\frac{\partial W(u, v)}{\partial v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_j(u, v)}{\partial v}.$$

5. Spojitosť

Tieto funkcie sú C^∞ spojité pre $\delta \neq 0$ a pre $\delta = 0$ sú C^∞ spojité pre párne η a $C^{\eta-1}$ spojité pre η nepárne, všade okrem hranice diskov (kružníc), preto celkovo $\omega_i(u, v) \in C^0$.

Hlavnou myšlienkovou konštrukciu je pomocou interpolácie zmeny polomerov $\Delta r_i = r_i - r^*$ posúvať body $\mathbf{S}^*(u, v)$ pozdĺž priamky so smerovým vektorom \vec{n}_α , ktorá prechádza cez $\mathbf{S}^*(u, v)$. Túto myšlienku vieme zapísť pomocou nasledovného vzťahu

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{S}^*(u, v) + \Delta r(u, v) \vec{n}_\alpha, (u, v) \in E^2, \quad (2.11)$$



Obr. 2.3: Konštrukcia hornej časti poťahovej plochy $\mathbf{S} (u, v)$.

kde $\Delta r (u, v)$ je funkcia, ktorá interpoluje zmeny Δr_i a jej vzťah je nasledovný

$$\Delta r (u, v) = \sum_{i=1}^n \omega_i (u, v) \Delta r_i. \quad (2.12)$$

Zúžením definičného oboru parametrizácie $\mathbf{S} (u, v)$ v rovnici (2.11) na množinu \mathbf{M} , definujeme vrchnú časť poťahovej plochy. Teda $\mathbf{S} (u, v)_{/\mathbf{M}}$ je hľadaná parametrizácia vrchnej časti poťahovej plochy. Hornú časť poťahovej plochy označíme $\mathbf{S}^+ (u, v)$. Príklad konštrukcie pre tri sféry môžeme vidieť na obr. 2.3.

Plocha $\mathbf{S} (u, v)$ nám môže pripomínať ekvidištantu, ale nie je to tak. Ide skôr o kvázi-ekvidištantu, s premennou hodnotou vzdialenosťi $d = d (u, v) = \Delta r (u, v)$. Naša poťahová plocha $\mathbf{S} (u, v)$ by bola ekvidištantou plochy $\mathbf{S}^* (u, v)$, ak by mali všetky sféry rovnaké polomery. Z definície ekvidištanty $\mathbf{X}_d (u, v) = \mathbf{X} (u, v) + d \vec{\mathbf{n}} (u, v)$ by základnou plochou $\mathbf{X} (u, v)$ bola rovina $\mathbf{S}^* (u, v)$, $(u, v) \in \mathbf{M}$ definovaná v (2.5) a ekvidištanta $\mathbf{X}_d (u, v) = \mathbf{S} (u, v)$. V tomto prípade by platilo: $\mathbf{S} (u, v) = \mathbf{S}^* (u, v)$, pretože konštanta d by bola rovná 0, kvôli konštrukcii funkcie $\Delta r (u, v)$ ($\Delta r_i = 0, \forall i$). Normálový vektor by preto neboli potrebný, ale pre úplnosť by preň platilo: $\vec{\mathbf{n}} (u, v) = \vec{\mathbf{n}}_\alpha = \vec{\mathbf{e}}_3$, keďže je to rovina paralelná s rovinou xy . Poznamenajme ešte, že vzdialenosť (odchýlka) od ekvidištanty v bode $\mathbf{S} (u, v)$ je $|\Delta r (u, v)|$.

2.1.2 Konštrukcia dolnej časti plochy

Spodnú časť vieme vypočítať ľahko. Jednoduchou symetriou cez rovinu α , teda transformáciou

$$T : \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E^3,$$

transformujeme body vrchnej časti potāhovej plochy. Túto plochu označíme $S^- (u, v)$.

2.1.3 Konštrukcia bočnej časti plochy

Bočnú časť plochy je potrebné vytvoriť tak, aby sme zabezpečili jej hladké G^1 napojenie na hornú, dolnú časť potāhovej plochy a zároveň na každú sféru. Táto časť bude zložená zo segmentov medzi nasledujúcimi sférami S_i a S_{i+1} pre $i = 1, 2, \dots, n-1$ a posledného segmentu medzi sférami S_n a S_1 . Na každom segmente treba vytvoriť plochu, ktorá bude interpolovať hraničné krivky podľa nasledujúcich vlastností.

1. Okraj dolnej potāhovej plochy medzi S_i a S_{i+1} daný krivkou $c_0^i (u), u \in \langle 0, 1 \rangle$.
2. Okraj hornej potāhovej plochy medzi S_i a S_{i+1} daný krivkou $c_1^i (u), u \in \langle 0, 1 \rangle$.
3. Polkružnica $d_0^i (v), v \in \langle 0, 1 \rangle$ kružnice, ktorá je prienikom sféry S_i a roviny γ_i danej bodom \mathbf{C}_i a normálkovým vektorom $\mathbf{C}_{i+1} - \mathbf{C}_i$.
4. Polkružnica $d_1^i (v), v \in \langle 0, 1 \rangle$ kružnice, ktorá je prienikom S_{i+1} a roviny γ_{i+1} paralelnej s γ_i , ktorá prechádza bodom \mathbf{C}_{i+1} .

Krivky $c_0^i (u)$ a $c_1^i (u)$ majú nasledujúce predpisy

$$c_1^i (u) = \mathbf{S}^+ (\mathbf{C}^i (u)), u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.13)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^i (u) &= \mathbf{C}'_i + u (\mathbf{C}'_{i+1} - \mathbf{C}'_i), u \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \mathbf{C}'_i &= \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \mathbf{C}'_0 &= \mathbf{C}'_n, \\ \mathbf{C}'_{n+1} &= \mathbf{C}'_1, \\ \mathbf{C}'_{n+2} &= \mathbf{C}'_2, \end{aligned}$$

ďalej

$$c_0^i (u) = T (c_1^i (u)), u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.14)$$

kde T je symetria z 2.1.2. Na vyjadrenie kriviek $d_0^i(v)$ a $d_1^i(v)$ treba nájsť prienik $S_i \cap \gamma_i$. Ten nájdeme ľahko. Parametrizáciu $S_i(\phi, \theta) \in E^3, \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ sféry S_i dosadíme do implicitnej rovnice pre rovinu γ_i a nájdeme parameter ϕ . Potom

$$S_i(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} u_i + r_i \cos \theta \cos \phi \\ v_i + r_i \cos \theta \sin \phi \\ r_i \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\gamma_i : (\mathbf{X} - \mathbf{C}_i) \cdot (\mathbf{C}_{i+1} - \mathbf{C}_i) = 0.$$

Dosadením dostaneme

$$\begin{aligned} r_i \cos \theta \cos \phi (u_{i+1} - u_i) + r_i \cos \theta \sin \phi (v_{i+1} - v_i) &= 0, \\ \cos \theta (\cos \phi (u_{i+1} - u_i) + \sin \phi (v_{i+1} - v_i)) &= 0, \end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} \cos \theta = 0 \vee \cos \phi (u_{i+1} - u_i) + \sin \phi (v_{i+1} - v_i) &= 0, \\ \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \vee \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \cos \phi (u_{i+1} - u_i) + \sin \phi (v_{i+1} - v_i) &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[u_{i+1} \neq u_i \wedge \phi = \phi_0 = \pi - \arccot \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{u_{i+1} - u_i} \right) \right] \vee \\ \left[v_{i+1} \neq v_i \wedge \phi = \phi_0 = -\arctan \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{v_{i+1} - v_i} \right) \right], \end{aligned}$$

Následne stačí dosadiť nájdený uhol ϕ_0 do $S_i(\phi, \theta)$ (treba zabezpečiť, aby ϕ_0 bol taký, že $d_0^i(v)$ bude vonkajšia polkružnica) a reparametrizovať $\theta(v) = v\pi - \frac{\pi}{2}, v \in \langle 0, 1 \rangle$. Teda polkružnica $d_0^i(v)$ bude mať tvar

$$d_0^i(v) = S_i(\phi_0, \theta(v)) = \begin{pmatrix} u_i + r_i \cos(v\pi - \frac{\pi}{2}) \cos \phi_0 \\ v_i + r_i \cos(v\pi - \frac{\pi}{2}) \sin \phi_0 \\ r_i \sin(v\pi - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, v \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.15)$$

Podobne sa dá nájsť predpis pre druhú polkružnicu $d_1^i(v)$

$$d_1^i(v) = S_{i+1}(\phi_0, \theta(v)) = \begin{pmatrix} u_{i+1} + r_{i+1} \cos(v\pi - \frac{\pi}{2}) \cos \phi_0 \\ v_{i+1} + r_{i+1} \cos(v\pi - \frac{\pi}{2}) \sin \phi_0 \\ r_{i+1} \sin(v\pi - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, v \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.16)$$

Na hladké spojenie medzi $c_0^i(u), c_1^i(u), d_0^i(v)$ a $d_1^i(v)$ použijeme bikubicky stmeľovanú Coonsovú záplatu, opísanú napríklad v [Far02]. Na jej vytvorenie potrebujeme

ešte definovať funkcie derivácií $e_j^i(u)$ a $f_j^i(v)$ pre $j = 0, 1$, ktoré predstavujú parciálne derivácie podľa v na krivkách $c_j^i(u)$ (funkcie e_j^i) a parciálne derivácie podľa u na krivkách $d_j^i(v)$ (funkcie f_j^i). Funkcie $e_j^i(u)$ definujeme nasledovne

$$e_j^i(u) = \tau_{ij} \frac{\vec{n}_S^j(C^i(u)) \times \frac{dc_j^i(u)}{du}}{\left\| \vec{n}_S^j(C^i(u)) \times \frac{dc_j^i(u)}{du} \right\|}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.17)$$

kde $\tau_{ij} \in \mathbb{R}^+$ sú kladné konštanty, ktoré určujú veľkosti vektorov $e_j^i(u)$, vektor $\vec{n}_S^1(u, v)$ je normála v bode hornej časti poťahovej plochy $S^+(u, v)$ a $\vec{n}_S^0(u, v)$ je normála v bode dolnej časti poťahovej plochy $S^-(u, v)$

$$\vec{n}_S^0(u, v) = -\frac{\partial S^-(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial S^-(u, v)}{\partial v}, \quad (2.18)$$

$$\vec{n}_S^1(u, v) = \frac{\partial S^+(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial S^+(u, v)}{\partial v}. \quad (2.19)$$

Záporné znamienko v definícii $\vec{n}_S^0(u, v)$ je kvôli smeru normály, aby bola vonkajšia vzhľadom na obalovú plochu sfér. Ďalej funkcie $f_j^i(v)$ definujeme nasledovne

$$f_j^i(v) = H_0^3(v) \frac{dc_0^i(j)}{du} + H_1^3(v) \vec{t}_{0j} + H_2^3(v) \vec{t}_{1j} + H_3^3(v) \frac{dc_1^i(j)}{du}, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.20)$$

kde \vec{t}_{kl} , $k, l = 0, 1$ sú tzv. vektory twistu, ktoré predstavujú zmiešané derivácie v rohoch $c_k^i(l) = d_l^i(k)$ a $H_m^3(u)$, $m = 0, 1, 2, 3$, sú Hermitove kubické polynómy

$$H_0^3(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1, \quad (2.21)$$

$$H_1^3(u) = u^3 - 2u^2 + u, \quad (2.22)$$

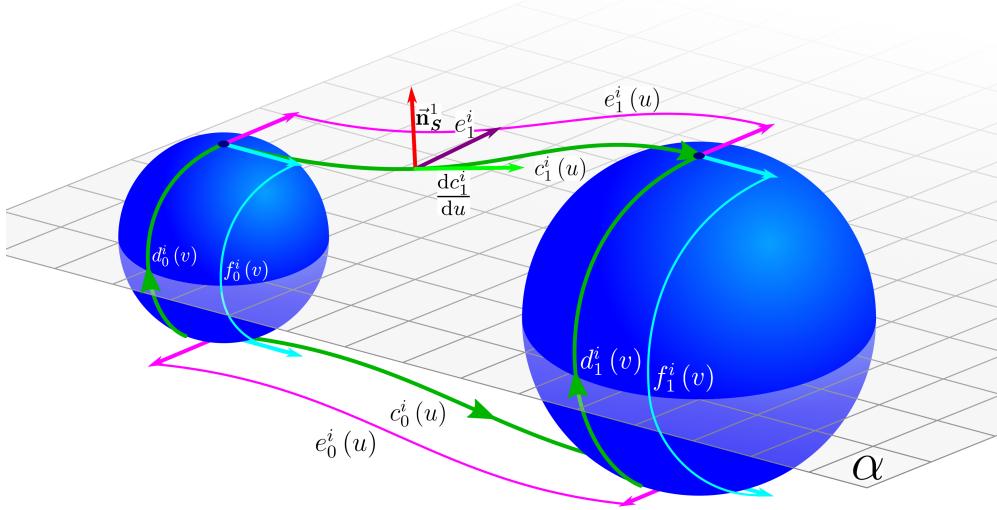
$$H_2^3(u) = u^3 - u^2, \quad (2.23)$$

$$H_3^3(u) = -2u^3 + 3u^2. \quad (2.24)$$

Funkcie $f_j^i(v)$ môžeme v prípade konvexného mnohouholníka zadať aj jednoduchšie, keďže dotykové polkružnice sú časťami hlavných kružníc sfér a stačí nám G^1 spojité napojenie na sféry. Napríklad ich môžeme definovať nasledovne

$$f_j^i(v) = f_j^i = \lambda_{ij} \frac{C_{i+1} - C_i}{\|C_{i+1} - C_i\|}, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.25)$$

kde $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}^+$ sú nejaké kladné konštanty, ktoré určujú veľkosti vektorov $f_j^i(v)$. V prípade nekonvexného mnohouholníka, ktorý tvoria stredy sfér, definujeme krivky $d_j^i(v)$ ako polkružnice kružníc, ktoré vzniknú prienikom $(i+j)$ -tej sféry a roviny danej jej



Obr. 2.4: Konštrukcia i -teho segmentu bočnej časti rozvetvenej poťahovej plochy.

stredom a jednotkovým normálovým vektorom \vec{n}_j^i , ktorý vypočítame nasledovne

$$\begin{aligned}\vec{n}_1^n &= \vec{n}_0^1 = \frac{\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_n}{\|\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_n\|}, \\ \vec{n}_j^i &= \frac{\mathbf{C}_{i+j+1} - \mathbf{C}_{i+j-1}}{\|\mathbf{C}_{i+j+1} - \mathbf{C}_{i+j-1}\|}, \quad j = 0, 1, i+j = 2, \dots, n-1, \\ \vec{n}_1^{n-1} &= \vec{n}_0^n = \frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_{n-1}}{\|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_{n-1}\|}.\end{aligned}$$

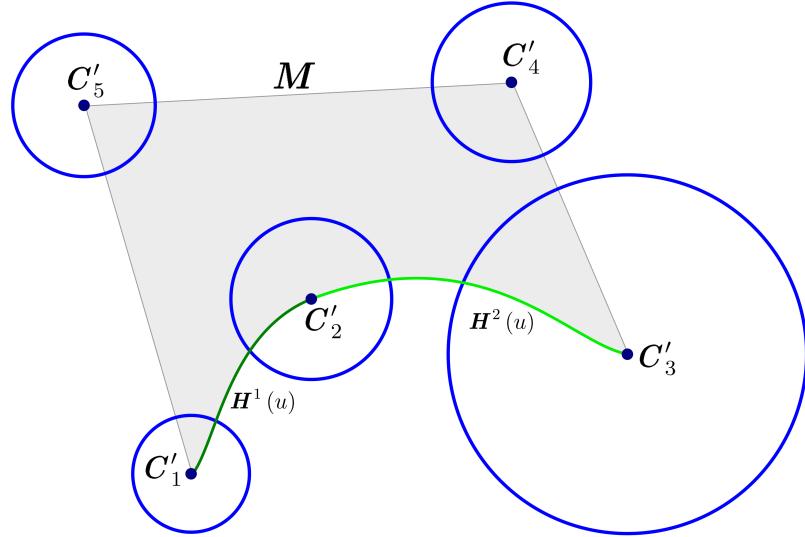
Takto vytvorené polkružnice budú iba na tých sférach, ktorých stredy majú nekonvexný vnútorný uhol v rámci daného mnohouholníka. Tento uhol vieme ľahko identifikovať podľa znamienka determinantu vektorov $\vec{t}_{i+j-1} = \mathbf{C}'_{i+j} - \mathbf{C}'_{i+j-1}$ a $\vec{t}_{i+j} = \mathbf{C}'_{i+j+1} - \mathbf{C}'_{i+j}$

$$\det(\vec{t}_{i+j-1}, \vec{t}_{i+j}) = \begin{vmatrix} u_{i+j} - u_{i+j-1} & u_{i+j+1} - u_{i+j} \\ v_{i+j} - v_{i+j-1} & v_{i+j+1} - v_{i+j} \end{vmatrix}.$$

Ak máme mnohouholník orientovaný v protismere chodu hodinových ručičiek a determinant je kladný, tak ide o konvexný uhol, a naopak, ak je záporný, tak uhol je nekonvexný. V prípade orientácie mnohouholníka v smere chodu hodinových ručičiek by to platilo naopak. V prípade nekonvexného uha vo vrchole \mathbf{C}_{i+j} , bude mať funkcia $f_j^i(v)$ predpis

$$f_j^i(v) = f_j^i = \lambda_{ij} \vec{n}_j^i, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.26)$$

Treba poznamenať, že ak $j = 0$ a uhol vo vrchole \mathbf{C}_i je nekonvexný, tak $d_0^i(v) = d_1^{i-1}(v)$, $\vec{n}_0^i = \vec{n}_1^{i-1}$ a ak $j = 1$ a uhol vo vrchole \mathbf{C}_{i+1} je nekonvexný, tak $d_1^i(v) = d_0^{i+1}(v)$

Obr. 2.5: Sivou: množina M pre nekonvexný vstupný mnogouholník.

a $\vec{n}_1^i = \vec{n}_0^{i+1}$. Ďalej, v prípade nekonvexného uhlá vo vrchole C_i treba upraviť aj výpočet okrajových kriviek $c_j^i(u)$ a okrajových kriviek predošlého segmentu $c_j^{i-1}(u)$ a rovnako príslušné funkcie derivácií $e_j^i(u)$ a $e_j^{i-1}(u)$ nasledovne

$$c_1^k(u) = S^+(\mathbf{H}^k(u)), \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad k = i-1, i, \quad (2.27)$$

$$e_j^k(u) = \tau_{kj} \frac{\vec{n}_S^j(\mathbf{H}^k(u)) \times \frac{dc_j^k(u)}{du}}{\left\| \vec{n}_S^j(\mathbf{H}^k(u)) \times \frac{dc_j^k(u)}{du} \right\|}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad j = 0, 1, \quad k = i-1, i, \quad (2.28)$$

pričom

$$\mathbf{H}^k(u) = H_0^3(u) \mathbf{C}'_k + H_1^3(u) f_0^{k'} + H_2^3(u) f_1^{k'} + H_3^3(u) \mathbf{C}'_{k+1}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad k = i-1, i,$$

a $\vec{n}_S^j(u, v)$ sú normálové vektory dolnej ($j = 0$) a hornej ($j = 1$) časti poťahovej plochy definované v (2.18) a (2.19) a $f_j^{i'} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_{ij}} \begin{pmatrix} x_{f_j^i} \\ y_{f_j^i} \end{pmatrix}$, $j = 0, 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

kde $\sigma_{ij} \in \mathbb{R}^+$ sú kladné konštanty, ktoré určujú veľkosť vektorov $f_j^{i'}$. Dolné hraničné krivky $c_0^i(u)$ a $c_0^{i-1}(u)$ vzniknú symetriou T z 2.1.2 podľa vzťahu (2.14). Je potrebné poznamenať, že množina M , na ktorej počítame hornú a dolnú časť poťahovej plochy, sa pri nekonvexnom mnogouholníku tiež zmení (obr. 2.5). Coonsova bikubická stmeľovaná záplata je potom daná predpisom

$$S^i(u, v) = S_c^i(u, v) + S_d^i(u, v) - S_{cd}^i(u, v), \quad (u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2, \quad (2.29)$$

kde

$$\mathbf{S}_c^i(u, v) = H_0^3(v) c_0^i(u) + H_1^3(v) e_0^i(u) + H_2^3(v) e_1^i(u) + H_3^3(v) c_1^i(u), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{S}_d^i(u, v) = H_0^3(u) d_0^i(v) + H_1^3(u) f_0^i(v) + H_2^3(u) f_1^i(v) + H_3^3(u) d_1^i(v), \quad (2.31)$$

$$\mathbf{S}_{cd}^i(u, v) = \begin{pmatrix} H_0^3(u) \\ H_1^3(u) \\ H_2^3(u) \\ H_3^3(u) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_0^i(0) & e_0^i(0) & e_1^i(0) & c_1^i(0) \\ f_0^i(0) & \vec{\mathbf{t}}_{00} & \vec{\mathbf{t}}_{10} & f_0^i(1) \\ f_1^i(0) & \vec{\mathbf{t}}_{01} & \vec{\mathbf{t}}_{11} & f_1^i(1) \\ c_0^i(1) & e_0^i(1) & e_1^i(1) & d_1^i(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0^3(v) \\ H_1^3(v) \\ H_2^3(v) \\ H_3^3(v) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Ilustrácia konštrukcie segmentu je znázornená na obr. 2.4, kde zelenou sú vyznačené hraničné krivky, fialovou dotykové vektory e_j^i , tyrkysovou dotykové vektory f_j^i a v bode krvky c_1^i je vyznačená trojica ortogonálnych vektorov (svetlozelenou dotyčnica ku krvke c_1^i , červenou normála ku hornej časti plochy a tmavofialovou vektor e_1^i).

2.2 Konštrukcia tubulárnej poťahovej plochy

Poťahovanie sfér plochou môže byť chápané ako vytváranie tubulárnej obalovej plochy, ako to bolo rozobrané napríklad v [KH10] či [SRW⁺10]. Preto v tejto časti predstavíme metódu na konštrukciu takejto plochy, v ktorej je súčasťou využitá konštrukcia hornej časti rozvetvenej poťahovej plochy. Nech je daná postupnosť sfér $S = \{S_i\}_{i=1}^n, n \in \mathbb{N}$, ktorých stredy ležia v rovine $\alpha : z = 0$, tvoria mnogouholník a pre ktoré platí (2.1).

2.2.1 Určenie dotykových kružníc

Najskôr je potrebné definovať dotykové kružnice na jednotlivých sférach. Tie sme si zvolili, rovnako ako autori v práci [SRW⁺10], ako hlavné kružnice dané normálovými vektormi $\vec{\mathbf{n}}_i$ rovín, v ktorých ležia. Navyše, pre normálové vektory platí, že patria do $V(\alpha)$. Nech teraz $i = 2, 3, \dots, n-1$. Uvažujme tri po sebe idúce sféry S_{i-1}, S_i a S_{i+1} so stredmi $\mathbf{C}_{i-1}, \mathbf{C}_i$ a \mathbf{C}_{i+1} . Uhlopriečky medzi vektormi $\vec{\mathbf{t}}_i = (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i-1})$ a $\vec{\mathbf{t}}_{i+1} = (\mathbf{C}_{i+1} - \mathbf{C}_i)$ označme θ_i

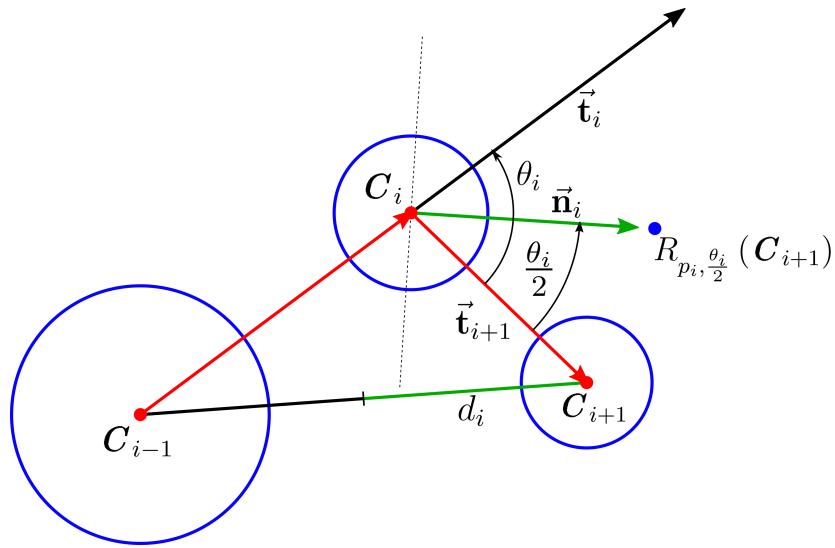
$$\cos \theta_i = \frac{\vec{\mathbf{t}}_i \cdot \vec{\mathbf{t}}_{i+1}}{\|\vec{\mathbf{t}}_i\| \|\vec{\mathbf{t}}_{i+1}\|}. \quad (2.33)$$

Potom definujeme normálový vektor i -tej roviny dotykovej kružnice nasledovne

$$\vec{\mathbf{n}}_i = \frac{d_i}{\|\vec{\mathbf{t}}_{i+1}\|} \left(R_{p_i, \frac{\theta_i}{2}}(\mathbf{C}_{i+1}) - \mathbf{C}_i \right), \quad (2.34)$$

kde d_i určuje veľkosť vektora $\vec{\mathbf{n}}_i$ a platí

$$d_i = \frac{\|\vec{\mathbf{t}}_i + \vec{\mathbf{t}}_{i+1}\|}{2}, \quad (2.35)$$

Obr. 2.6: Výpočet normálových vektorov \vec{n}_i .

a zobrazenie $R_{p_i, \frac{\theta_i}{2}} : \alpha \rightarrow \alpha$ je rotácia okolo osi p_i , ktorá je daná bodom C_i a vektorom \vec{e}_3 o uhol $\frac{\theta_i}{2}$

$$R_{p_i, \frac{\theta_i}{2}}(X) = C_i + (X - C_i) \cos \frac{\theta_i}{2} + (\vec{e}_3 \times (X - C_i)) \sin \frac{\theta_i}{2}, X \in \alpha. \quad (2.36)$$

Normálový vektor \vec{n}_i z rovnice (2.34) môžeme tiež vyjadriť aj

$$\vec{n}_i = \frac{d_i}{\|\vec{t}_{i+1}\|} R_{p_i, \frac{\theta_i}{2}}(\vec{t}_{i+1}), \quad (2.37)$$

kde

$$R_{p_i, \frac{\theta_i}{2}}(\vec{u}) = \vec{u} \cos \frac{\theta_i}{2} + (\vec{e}_3 \times \vec{u}) \sin \frac{\theta_i}{2}, \vec{u} \in V(\alpha) \quad (2.38)$$

je rotácia vo vektorovej zložke $V(\alpha)$. Na obr. 2.6 môžeme vidieť výpočet tohto normálového vektora. Začiatočný a koncový normálový vektor \vec{n}_1 a \vec{n}_n definujeme jednoducho

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{2} \vec{t}_2, \quad (2.39)$$

$$\vec{n}_n = \frac{1}{2} \vec{t}_n. \quad (2.40)$$

Konštrukcia normálových vektorov \vec{n}_i môže závisieť od danej postupnosti sfér, prípadne od používateľovho zámeru, alebo od situácie, kedy je potrebné napojiť tubulárnu plochu na rozvetvenú. Preto je niekedy vhodná ich modifikácia.

2.2.2 Konštrukcia i-teho segmentu

Našim cieľom je nájsť poťahovú plochu $\mathbf{T}(u, v)$, ktorá je zložená z $n - 1$ segmentov $\mathbf{T}^i(u, v), i = 1, 2, \dots, n - 1$. Najprv vytvoríme Hermitovu kubickú krivku $\mathbf{h}^i(u)$, ktorá

bude interpolovať stredy sfér \mathbf{C}_i a \mathbf{C}_{i+1} a vektory $\vec{\mathbf{n}}_i$ a $\vec{\mathbf{n}}_{i+1}$. Teda $\mathbf{h}^i(u)$ bude mať predpis

$$\mathbf{h}^i(u) = H_0^3(u) \mathbf{C}_i + H_1^3(u) \vec{\mathbf{n}}_i + H_2^3(u) \vec{\mathbf{n}}_{i+1} + H_3^3(u) \mathbf{C}_{i+1}, u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.41)$$

kde $H_j^3(u), u \in \langle 0, 1 \rangle, j = 0, 1, 2, 3$ sú Hermitove kubické polynómy.

Myšlienkom tejto metódy je vypočítať krivku $\mathbf{P}^i(u), u \in \langle 0, 1 \rangle$, ktorá bude hladko interpolovať body \mathbf{P}_i a \mathbf{P}_{i+1} , a následne rotáciou bodov $\mathbf{P}^i(u)$ okolo osi danej bodom $\mathbf{h}^i(u)$ a dotykovým vektorom $\frac{d\mathbf{h}^i(u)}{du}$ o uhol $2\pi v, v \in \langle 0, 1 \rangle$, vytvorí segment tubulárnej plochy $\mathbf{T}^i(u, v)$. Navyše pre krivku $\mathbf{P}^i(u)$ požadujeme splnenie

$$(\mathbf{P}^i(u) - \mathbf{h}^i(u)) \cdot \frac{d\mathbf{h}^i(u)}{du} = 0. \quad (2.42)$$

Krivku $\mathbf{P}^i(u)$ vytvoríme nasledovne. Najprv v bodoch úsečky \mathbf{C}^i medzi $\mathbf{C}'_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ a $\mathbf{C}'_{i+1} = \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}$ vypočítame body hornej poťahovej plochy $\mathbf{S}(u, v)$ zo vzťahu (2.11), ktorá je daná ale len dvomi sférami S_i a S_{i+1} . Na voľbu referenčného bodu máme len dve možnosti, tak zvolíme napríklad $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_i$. Parametrizáciu roviny $\mathbf{S}^*(u, v)$ vypočítame rovnako ako v (2.5). Ďalej interpolačná funkcia $\Delta r^i(u, v)$ bude interpolovať iba dve zmeny $\Delta r_i (= 0)$ a Δr_{i+1} , ktoré sú definované rovnako ako v časti 2.1.1.

$$\Delta r^i(u, v) = \sum_{j=i}^{i+1} \omega_j^i(u, v) \Delta r_j = \omega_{i+1}^i(u, v) \Delta r_{i+1}, \quad (2.43)$$

kde $\omega_j^i(u, v)$ je j -ta váhová funkcia na i -tom segmente definovaná podobne ako v (2.6)

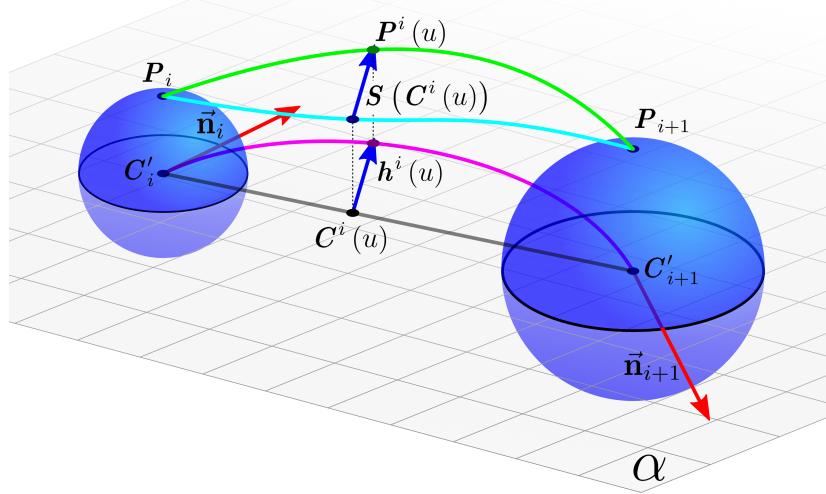
$$\omega_j^i(u, v) = \begin{cases} \delta_{jl} & , \exists l \in \{i, i+1\}; \|(u, v) - (u_l, v_l)\| \leq \delta r_l, \\ \frac{((u, v) - (u_j, v_j))(-\delta r_j)^{-\eta}}{\sum_{k=i}^{i+1} ((u, v) - (u_k, v_k))(-\delta r_k)^{-\eta}} & , \|(u, v) - (u_l, v_l)\| > \delta r_l, \forall l \in \{i, i+1\}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Teda plocha $\mathbf{S}(u, v)$ bude mať tvar

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{S}^*(u, v) + \Delta r^i(u, v) \vec{\mathbf{n}}_\alpha, (u, v) \in E^3. \quad (2.45)$$

Naša krivka $\mathbf{P}^i(u)$ bude potom daná bodom $\mathbf{S}(u, v)$, v bode úsečky \mathbf{C}^i , ktorý ešte posunieme. Predpis tejto krivky bude vyzerať nasledovne

$$\mathbf{P}^i(u) = \mathbf{S}(\mathbf{C}^i(u)) + \left(\mathbf{h}^i(u) - \begin{pmatrix} \mathbf{C}^i(u) \\ 0 \end{pmatrix} \right), u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.46)$$

Obr. 2.7: Konštrukcia krivky $\mathbf{P}^i(u)$.

kde

$$\mathbf{C}^i(u) = \mathbf{C}'_i + u(\mathbf{C}'_{i+1} - \mathbf{C}'_i), u \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.47)$$

Konštrukcia krivky $\mathbf{P}^i(u)$ je znázornená na obr. 2.7.

Na konštrukciu i -teho segmentu tubulárnej potahovej plochy ostáva už len zrotovať $\forall u \in \langle 0, 1 \rangle$ bod krivky $\mathbf{P}^i(u)$ okolo osi $p_i = p_i(u)$ danej bodom $\mathbf{h}^i(u)$ a dotykovým vektorom

$$\vec{s}_i(u) = \frac{\frac{d\mathbf{h}^i(u)}{du}}{\left\| \frac{d\mathbf{h}^i(u)}{du} \right\|}, \quad (2.48)$$

o uhol $\phi(v) = 2\pi v, v \in \langle 0, 1 \rangle$. Táto rotácia má predpis

$$R_{p_i, \phi(v)}(\mathbf{X}) = \mathbf{h}^i(u) + (\mathbf{X} - \mathbf{h}^i(u)) \cos(\phi(v)) + (\vec{s}_i(u) \times (\mathbf{X} - \mathbf{h}^i(u))) \sin(\phi(v)), \\ \mathbf{X} \in \beta_i,$$

kde $\beta_i = \beta_i(u)$ je rovina daná bodom $\mathbf{h}^i(u)$ a normálovým vektorom $\vec{s}_i(u)$, teda platí $\beta_i \perp p_i$.

Výsledná plocha vytvára i -ty segment, ktorého predpis je

$$\mathbf{T}^i(u, v) = R_{p_i, \phi(v)}(\mathbf{P}^i(u)), u \in \langle 0, 1 \rangle, v \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.49)$$

Definičný obor D celej plochy $\mathbf{T}(u, v)$ môžeme definovať pomocou rastúcej postupnosti reálnych čísel $U = \{u_i\}_{i=1}^n$ nasledovne: $D = \langle u_1, u_n \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Výsledná tubulárna plocha

má potom predpis

$$\mathbf{T}(u, v) = \begin{cases} \mathbf{T}^1\left(\frac{u-u_1}{u_2-u_1}, v\right), & u \in \langle u_1, u_2 \rangle, v \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}^i\left(\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}, v\right), & u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle, v \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}^{n-1}\left(\frac{u-u_{n-1}}{u_n-u_{n-1}}, v\right), & u \in \langle u_{n-1}, u_n \rangle, v \in \langle 0, 1 \rangle. \end{cases} \quad (2.50)$$

2.3 Konštrukcia pomocou homotópie

Ďalšou možnosťou riešenia poťahovania sfér rozvetvenou plochou je s využitím jedného z dôležitých pojmov v algebraickej topológií – homotópie. Ako z definície homotópie vyplýva, ide o spojité deformáciu $F(x, t)$ zobrazenia f na g . V čase $t = 0$ dostávame zobrazenie f a v čase $t = 1$ dostávame g . Hlavnou myšlienkou je najprv začať so sférami s rovnakými polomermi. Hodnotu tohto polomeru môžeme vybrať spomedzi daných polomerov, teda $r^* = r_j$ pre nejaké $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pričom ale stredy sfér ostanú nezmenené. Ďalej zvolíme referenčný bod $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_j$ a vytvoríme poťahovú plochu pre tieto sféry, ktorá sa bude skladať z

1. hornej časti, ktorá bude časť roviny (konkrétnie $\mathbf{S}^+(u, v) = \mathbf{S}^*(u, v)_{/\mathbf{M}}$ definovanej v (2.5)),
2. dolnej časti, ktorá vznikne symetriou hornej rovnako ako v 2.1.2,
3. a n segmentov bočnej poťahovej plochy.

Táto plocha bude predstavovať poťahovú plochu v čase $t = 0$ a následne postupným škálovaním týchto sfér na pôvodné veľkosti upraviť ("nafúknut") poťahovú plochu, ktorá bude v čase $t = 1$.

2.3.1 Konštrukcia hornej a dolnej časti plochy

Konkrétnejšie, najprv definujeme dve spojité zobrazenia pre každú sféru S_i , označíme ich \mathbf{S}_d^i , kde $d \in \{1, \frac{r_i}{r^*}\}$

$$\mathbf{S}_d^i(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_d^i \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & u_i(1-d) \\ 0 & d & 0 & v_i(1-d) \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E^3. \quad (2.51)$$

Matica \mathbf{M}_d^i predstavuje maticu uniformného škálovania s faktorom d mimo začiatku súradnicovej sústavy v bode $\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 0 \end{pmatrix}$, ktorá vznikne zložením posunutia o vektor $\mathbf{O} - \mathbf{C}_i$, škálovaním v počiatku a následným posunutím naspäť o vektor $\mathbf{C}_i - \mathbf{O}$

$$\mathbf{M}_d^i = \mathbf{T}_{\mathbf{C}_i - \mathbf{O}} \cdot \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{O} - \mathbf{C}_i}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{M}_d^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_i \\ 0 & 1 & 0 & v_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u_i \\ 0 & 1 & 0 & -v_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Medzi \mathbf{S}_1^i a $\mathbf{S}_{\frac{r_i}{r^*}}^i$ definujme zobrazenie $\mathbf{S}^i(\mathbf{x}, t)$ tak, že

$$\mathbf{S}^i(\mathbf{x}, t) = (1 - t) \mathbf{S}_1^i(\mathbf{x}) + t \mathbf{S}_{\frac{r_i}{r^*}}^i(\mathbf{x}), \quad (2.54)$$

$$\mathbf{S}^i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}^i(t) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} \in E^3, t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.55)$$

kde

$$\mathbf{M}^i(t) = (1 - t) \mathbf{M}_1^i + t \mathbf{M}_{\frac{r_i}{r^*}}^i. \quad (2.56)$$

Zobrazenie $\mathbf{S}^i(\mathbf{x}, t)$ je spojité a spĺňa definíciu homotópie, teda $\mathbf{S}^i(\mathbf{x}, t)$ je homotópia medzi \mathbf{S}_1^i a $\mathbf{S}_{\frac{r_i}{r^*}}^i$.

Všimnime si, že môžeme namiesto funkcií $(1 - t)$ a t použiť aj iné, napríklad Hermitove polynómy $H_0^3(t)$ a $H_3^3(t)$ definované v (2.21) a (2.24). Treba ešte ukázať, že matica $\mathbf{M}^i(t)$ je maticou škálovania, čo sa dá dokázať priamo.

$$\mathbf{M}^i(t) = (1 - t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{r_i}{r^*} & 0 & 0 & u_i(1 - \frac{r_i}{r^*}) \\ 0 & \frac{r_i}{r^*} & 0 & v_i(1 - \frac{r_i}{r^*}) \\ 0 & 0 & \frac{r_i}{r^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^i(t) = \begin{pmatrix} 1 - t + t \frac{r_i}{r^*} & 0 & 0 & tu_i(1 - \frac{r_i}{r^*}) \\ 0 & 1 - t + t \frac{r_i}{r^*} & 0 & tv_i(1 - \frac{r_i}{r^*}) \\ 0 & 0 & 1 - t + t \frac{r_i}{r^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - t + t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^i(t) = \begin{pmatrix} d_i(t) & 0 & 0 & u_i(1 - d_i(t)) \\ 0 & d_i(t) & 0 & v_i(1 - d_i(t)) \\ 0 & 0 & d_i(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} d_i(t) &= 1 - t + t \frac{r_i}{r^*} = t \left(\frac{r_i}{r^*} - 1 \right) + 1, \\ 1 - d_i(t) &= 1 - t \left(\frac{r_i}{r^*} - 1 \right) - 1 = t \left(1 - \frac{r_i}{r^*} \right). \end{aligned}$$

Teda $\mathbf{M}^i(t)$ je maticou škálovania v bode \mathbf{C}_i s faktorom $d_i(t) \neq 0, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle$. Pri použití Hermitových polynómov sa to dá dokázať analogicky.

Ďalej treba interpolovať v čase t matice škálovania $\mathbf{M}^i(t)$. Toto interpolačné zobrazenie bude dané maticou $\mathbf{M}(u, v, t)$

$$\mathbf{M}(u, v, t) = \sum_{i=1}^n \omega_i(u, v) \mathbf{M}^i(t), \quad (2.57)$$

kde $\omega_i(u, v)$ sú váhové funkcie, ktoré spĺňajú tri vlastnosti.

1. Nezápornosť.

$$\omega_i(u, v) \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, (u, v) \in E^2.$$

2. Rozklad jednotky.

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(u, v) = 1, \forall (u, v) \in E^2.$$

3. Interpolácia.

$$\omega_i(u_j, v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

V prípade ľubovoľného konvexného mnogouholníka môžeme použiť *mean value coordinates* definované v [HSF06], ktorých predpis je

$$\omega_i(u, v) = \begin{cases} \frac{w_i(u, v)}{\sum_{j=1}^n w_j(u, v)} & , (u, v) \notin M, \\ (1 - \mu) \delta_{i,j} + \mu \delta_{i,j+1} & , (u, v) = (1 - \mu) \mathbf{C}'_j + \mu \mathbf{C}'_{j+1} \in e_j, \\ \delta_{i,j} & , (u, v) = (u_j, v_j), \end{cases} \quad (2.58)$$

kde

$$w_i(u, v) = \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{r_i}, \quad (2.59)$$

e_j je j -ta hrana mnogouholníka M medzi \mathbf{C}'_j a \mathbf{C}'_{j+1} a $\alpha_i = \alpha_i(u, v)$ je orientovaný uhol medzi vektormi $\mathbf{C}'_i - (u, v)$ a $\mathbf{C}'_{i+1} - (u, v)$. Tieto súradnice v konvexných mnogouholníkoch majú potrebné vlastnosti a sú C^∞ spojité okrem bodov \mathbf{C}'_i , v ktorých sú len C^0 spojité. Navyše majú ďalšie vlastnosti, ktoré sú rozobrané v [HSF06]. Nevýhodou je, že na hranici mnogouholníka M sú lineárne, a teda by sa mohlo stať, že výsledná poľahová plocha by prechádzala cez niektoré sféry. Pre nekonvexné mnogouholníky môžu tieto súradnice nadobúdať aj záporné hodnoty, a preto je vhodnejšie použiť naše modifikované váhové funkcie definované v (2.6) pre $\delta = 0$.

Výsledná horná časť poľahovej plochy bude mať predpis

$$\mathbf{S}^+ (u, v, t) = \mathbf{M} (u, v, t) \cdot \mathbf{S}^+ (u, v), (u, v) \in E^2, t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.60)$$

kde $\mathbf{S}^+ (u, v)$ je horná časť pôvodnej plochy (v čase $t = 0$). Podobne vypočítame body dolnej časti s pomocou zobrazenia daného maticou $\mathbf{M} (u, v, t)$, teda

$$\mathbf{S}^- (u, v, t) = \mathbf{M} (u, v, t) \cdot \mathbf{S}^- (u, v), (u, v) \in E^2, t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.61)$$

kde $\mathbf{S}^- (u, v)$ je dolná časť pôvodnej plochy, prípadne pomocou symetrie T z časti 2.1.2.

2.3.2 Konštrukcia bočnej časti plochy

Celá bočná časť je vo všeobecnosti zložená z n segmentov $\mathbf{S}^i (u, v, t), i = 1, 2, \dots, n$, každý medzi dvoma nasledujúcimi sférami S_i a S_{i+1} . Posledný segment je medzi sférami S_n a S_1 . Na jej konštrukciu sme zvolili rovnaký prístup ako v časti 2.1.3, teda každý i -ty segment v každom čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$ bude tvorený Coonsovou bikubickou stmeľovanou záplatou, ktorá je skonštruovaná zo štyroch kriviek $c_j^i (u, t), d_j^i (v, t), j = 0, 1$ a štyroch funkcií derivácií $e_j^i (u, t), f_j^i (v, t), j = 0, 1$. Poznačme, že i -ty segment pôvodnej bočnej plochy (v čase $t = 0$), keď sú všetky sféry rovnako veľké, bude v jednoduchom prípade konvexného mnogouholníka časťou valca, ktorý má za podstavu hlavnú kružnicu sféry S_i , ktorá leží v rovine danej stredom sféry \mathbf{C}_i a normálovým vektorom $\vec{\mathbf{t}}_3^i = \mathbf{C}_{i+1} - \mathbf{C}_i$ a jeho výška je $\|\vec{\mathbf{t}}_3^i\|$. V prípade nekonvexného mnogouholníka nebudú príslušné segmenty, ktoré ovplyvňuje vrchol, v ktorom je nekonvexný uhol, časti valca ale Coonsove záplaty definované pomocou okrajových kriviek a prislúchajúcich derivácií.

Konkrétnie, najprv definujeme okrajové krivky i -teho segmentu pre konvexný mnogouholník M pre $j = 0, 1$ v čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$ nasledovne

$$c_1^i (u, t) = \mathbf{S}^+ (\mathbf{C}^i (u), t), u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.62)$$

$$c_0^i (u, t) = T (c_1^i (u, t)), u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.63)$$

$$d_j^i (v, t) = \mathbf{C}_{i+j} + r^* d_{i+j} (t) \cos \pi (v + 1) \vec{\mathbf{t}}_1^i - r^* d_{i+j} (t) \sin \pi (v + 1) \vec{\mathbf{t}}_2^i, v \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.64)$$

kde

$$\mathbf{C}^i (u) = \mathbf{C}'_i + u (\mathbf{C}'_{i+1} - \mathbf{C}'_i), u \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$d_k (t) = t \left(\frac{r_k}{r^*} - 1 \right) + 1, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

vektory $\vec{\mathbf{t}}_1^i$, $\vec{\mathbf{t}}_2^i$ a $\vec{\mathbf{t}}_3^i$ tvoria ortogonálnu trojicu a prvé dva definujeme ako

$$\vec{\mathbf{t}}_1^i = \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{t}}_2^i = \pm \frac{\vec{\mathbf{t}}_3^i \times \vec{\mathbf{t}}_1^i}{\|\vec{\mathbf{t}}_3^i \times \vec{\mathbf{t}}_1^i\|}$$

a T je symetria z časti 2.1.2. Znamienko v definícii vektora $\vec{\mathbf{t}}_2^i$ závisí od orientácie mnohouholníka. V prípade, ak je orientovaný v protismere chodu hodinových ručičiek, bude znamienko kladné a v opačnom prípade bude záporné. Príslušné funkcie derivácií budú počítané podobne ako v časti 2.1.3 podľa vzťahov

$$e_j^i(u, t) = \tau_{ij} \frac{\vec{\mathbf{n}}_S^j(C^i(u), t) \times \frac{\partial c_j^i(u, t)}{\partial u}}{\left\| \vec{\mathbf{n}}_S^j(C^i(u), t) \times \frac{\partial c_j^i(u, t)}{\partial u} \right\|}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, j = 0, 1, \quad (2.65)$$

$$f_j^i(v, t) = f_j^i = \lambda_{ij} \frac{C_{i+1} - C_i}{\|C_{i+1} - C_i\|}, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle, j = 0, 1, \quad (2.66)$$

kde vektor $\vec{\mathbf{n}}_S^1(u, v, t)$ je normála v bode hornej časti poťahovej plochy $S^+(u, v, t)$ a $\vec{\mathbf{n}}_S^0(u, v, t)$ je normála v bode dolnej časti poťahovej plochy $S^-(u, v, t)$. Obe normály sú vonkajšie vzhľadom na poťahovú plochu sfér.

V prípade nekonvexného mnohouholníka budeme postupovať podobne ako v časti 2.1.3. Najprv nájdeme vrcholy, v ktorých sú nekonvexné uhly a na príslušných sférach zostrojíme dotykové polkružnice. V prípade nekonvexného uhla vo vrchole C_i bude vzťah pre výpočet dotykovej polkružnice nasledovný

$$d_j^{i-j}(v, t) = C_i + r^* d_i(t) \cos \pi(v+1) \vec{\mathbf{e}}_3 - r^* d_i(t) \sin \pi(v+1) \vec{\mathbf{s}}_2^i, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle, j = 0, 1, \quad (2.67)$$

kde

$$\vec{\mathbf{s}}_2^i = \pm \vec{\mathbf{s}}_3^i \times \vec{\mathbf{e}}_3,$$

$$\vec{\mathbf{s}}_3^i = \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{\|C_{i+1} - C_{i-1}\|}.$$

Znamienko v definícii $\vec{\mathbf{s}}_2^i$ závisí znova od orientácie mnohouholníka rovnako ako v definícii $\vec{\mathbf{t}}_2^i$. Ďalej treba upraviť výpočet okrajových kriviek $c_j^i(u, t)$ a okrajových kriviek predošlého segmentu $c_j^{i-1}(u, t)$ a rovnako aj príslušné funkcie derivácií $e_j^i(u, t)$, $e_j^{i-1}(u, t)$

a $f_0^i(v, t)$, $f_1^{i-1}(v, t)$ nasledovne

$$c_1^k(u, t) = \mathbf{S}^+(\mathbf{H}^k(u), t), \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad k = i-1, i, \quad (2.68)$$

$$e_j^k(u, t) = \tau_{kj} \frac{\vec{\mathbf{n}}_S(\mathbf{H}^k(u), t) \times \frac{\partial c_j^k(u, t)}{\partial u}}{\left\| \vec{\mathbf{n}}_S(\mathbf{H}^k(u), t) \times \frac{\partial c_j^k(u, t)}{\partial u} \right\|}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad j = 0, 1, \quad k = i-1, i, \quad (2.69)$$

$$f_j^k(v, t) = f_j^k = \lambda_{kj} \frac{\mathbf{C}_{k+j+1} - \mathbf{C}_{k+j-1}}{\|\mathbf{C}_{k+j+1} - \mathbf{C}_{k+j-1}\|}, \quad v \in \langle 0, 1 \rangle, \quad j = 0, 1, \quad k = i-j, \quad (2.70)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^k(u) &= H_0^3(u) \mathbf{C}'_k + H_1^3(u) f_0^{k'} + H_2^3(u) f_1^{k'} + H_3^3(u) \mathbf{C}'_{k+1}, \quad u \in \langle 0, 1 \rangle, \quad k = i-1, i, \\ f_j^{k'} &= \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_{ij}} \begin{pmatrix} x_{f_j^i} \\ y_{f_j^i} \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Krivky $c_0^i(u, t)$ a $c_0^{i-1}(u, t)$ vzniknú symetriou T (z 2.1.2) príslušných horných okrajových kriviek. Treba znova uviesť, že pri takejto situácii sa zmení aj množina \mathbf{M} , na ktorej počítame hornú a dolnú časť poťahovej plochy (obr. 2.5).

Výsledný i -ty segment bočnej poťahovej plochy v čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$ vypočítame podľa predpisu

$$\mathbf{S}^i(u, v, t) = \mathbf{S}_c^i(u, v, t) + \mathbf{S}_d^i(u, v, t) - \mathbf{S}_{cd}^i(u, v, t), \quad (u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2, \quad (2.71)$$

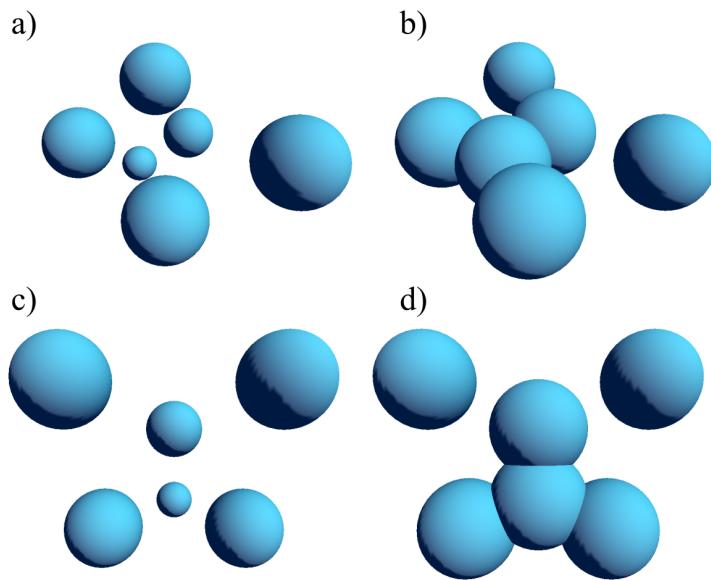
kde

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c^i(u, v, t) &= H_0^3(v) c_0^i(u, t) + H_1^3(v) e_0^i(u, t) + H_2^3(v) e_1^i(u, t) + H_3^3(v) c_1^i(u, t), \\ (2.72) \end{aligned}$$

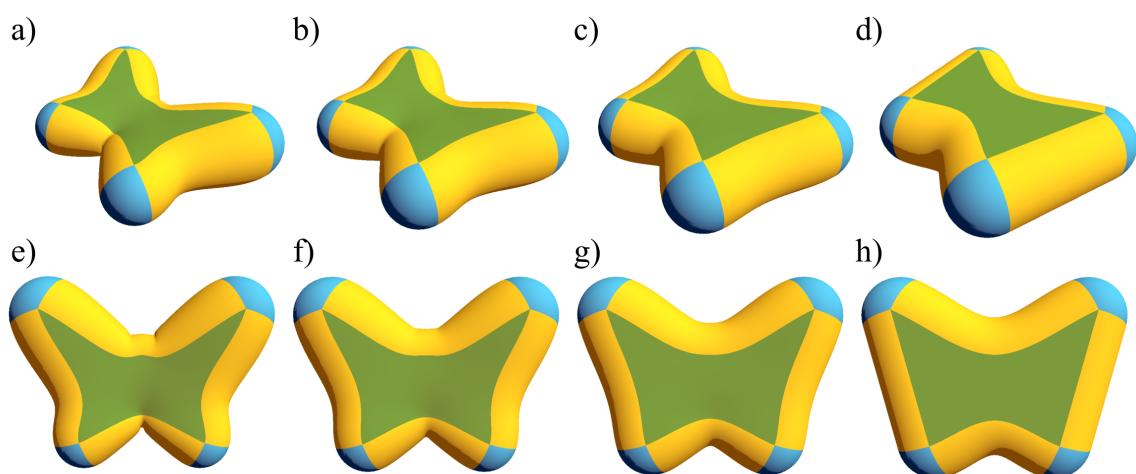
$$\mathbf{S}_d^i(u, v, t) = H_0^3(u) d_0^i(v, t) + H_1^3(u) f_0^i(v, t) + H_2^3(u) f_1^i(v, t) + H_3^3(u) d_1^i(v, t), \quad (2.73)$$

$$\mathbf{S}_{cd}^i(u, v, t) = \begin{pmatrix} H_0^3(u) \\ H_1^3(u) \\ H_2^3(u) \\ H_3^3(u) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_0^i(0, t) & e_0^i(0, t) & e_1^i(0, t) & c_1^i(0, t) \\ f_0^i(0, t) & \vec{\mathbf{t}}_{00} & \vec{\mathbf{t}}_{10} & f_0^i(1, t) \\ f_1^i(0, t) & \vec{\mathbf{t}}_{01} & \vec{\mathbf{t}}_{11} & f_1^i(1, t) \\ c_0^i(1, t) & e_0^i(1, t) & e_1^i(1, t) & d_1^i(1, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0^3(v) \\ H_1^3(v) \\ H_2^3(v) \\ H_3^3(v) \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Na obr. 2.9 môžeme vidieť príklad poťahovej plochy sfér v tvare motýľa, ktorá sa v priebehu času mení. V čase $t = 0$ sú vrchnou a spodnou poťahovou plochou časti rovín, ktoré sú rovnobežné s rovinou α .



Obr. 2.8: Vstupná množina sfér pre príklad na obr. 2.9 a) v čase $t = 1$ c) pohľad zhora a b) v čase $t = 0$ d) pohľad zhora.



Obr. 2.9: Výsledná plocha pomocou homotópie pre $\eta = 2$, $\tau_{ij} = 1.5$ a $\lambda_{ij} = 1$ v rôznych časoch a) $t = 1$, b) $t = 0.66$, c) $t = 0.33$ a d) $t = 0$. V spodnom riadku sú pohľady zhora.

Kapitola 3

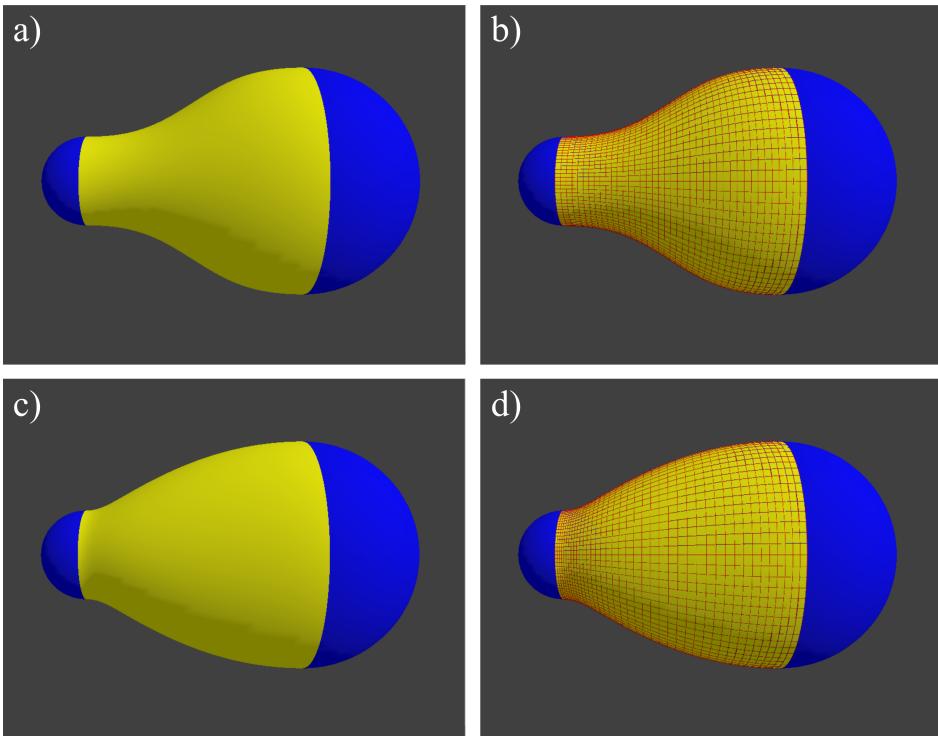
Implementácia

V nasledujúcej časti opíšeme implementáciu možností riešenia predstavených v predchádzajúcej kapitole. Náš program, MFSpheres, je napísaný v jazyku C#, vo Visual Studiu 2015 s využitím open-source knižnice OpenTK verzie 3.0.1. Tento program je vytvorený pre vizualizáciu a modifikáciu konkrétnych príkladov množín koplanárnych sfér a ich poťahových plôch (rozvetvené a tubulárne). Jeho hlavným cieľom je výpočet a vizualizácia poťahovej plochy (našich predstavených metód) používateľom vytvorených sfér, ktoré je možné modifikovať. Samozrejme je možné meniť parametre plochy a taktiež meniť pohľad na vytvorenú plochu. Navzorkovanie množiny \mathbf{M} pre výpočet hornej a dolnej plochy sme realizovali na trojuholníkoch $\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_{i+1}, \mathbf{T}$, kde \mathbf{T} je ďažisko všetkých stredov sfér. Prípadne pre nekonvexné vrcholy, stranou tohto trojuholníka medzi \mathbf{C}_i a \mathbf{C}_{i+1} je krivka $\mathbf{H}^i(u)$.

Implementácia algoritmov je priama vďaka parametrickej reprezentácii plôch a predstaveným metódam. Pracovali sme s rôznymi parametrami poťahovej plochy, ktorými sú konštanty η, δ a veľkosti τ_{ij}, λ_{ij} vektorov $e_j^i(u)$ a $f_j^i(v)$ (v prípade použitia druhej konštrukcie pomocou homotópie $e_j^i(u, t)$ a $f_j^i(v, t)$). Pri konštrukcii horných a dolných okrajových kriviek $c_j^i(u), c_j^i(u, t)$ sme vyčíslovali ich hodnotu v bodech úsečky $\mathbf{C}^i(u)$, ak uhly v oboch vrcholoch $\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_{i+1}$ boli konvexné. V prípade aspoň jedného nekonvexného uhla vo vrcholoch sme vyčíslovali hodnotu okrajových kriviek v bodech Hermitovej krivky $\mathbf{H}^i(u)$ v rovine α , kde pre konvexné vrcholy sme vybrali veľkosti $\sigma_{ij} = \|\mathbf{C}_{i+j+1} - \mathbf{C}_{i+j}\|, j = 0, 1$, vektorov $f_j^{i'}, j = 0, 1$, a pre nekonvexné vrcholy sme vybrali veľkosti $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \|\mathbf{C}_{i+j+1} - \mathbf{C}_{i+j-1}\|, j = 0, 1$.

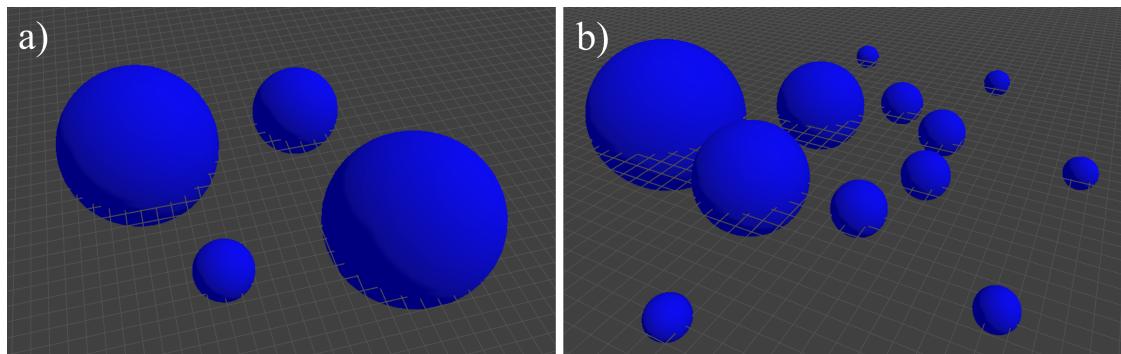
3.1 Aplikácia na konkrétnych dátach

Na nasledujúcich obrázkoch môžeme vidieť príklady aplikácie našich metód v konkrétnych situáciách. Tieto ilustrácie sú z nášho programu MFSpheres. Na obr. 3.1, 3.3 a 3.4 sú pod písmenami a) a b) poťahové plochy vytvorené prvou metódou založenou

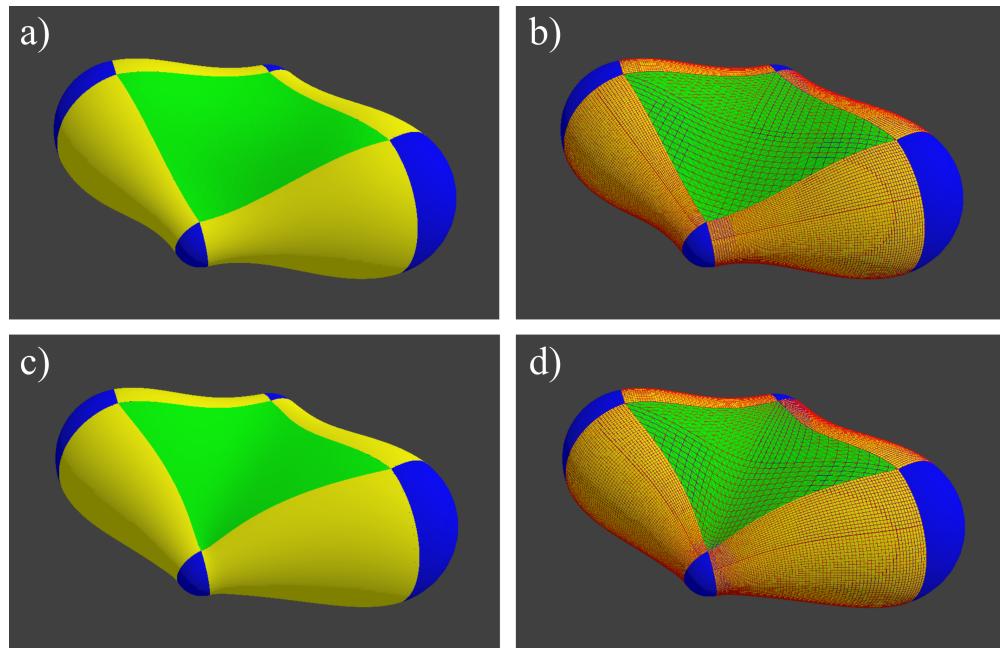


Obr. 3.1: Príklad poťahovej plochy dvoch sfér pre $\eta = 2$, $\tau_{ij} = 0.5$ a $\lambda_{ij} = 1$ a) metódou posúvania v normálovom smere pre $\delta = 0$ b) jeho drôtený model, c) metódou založenou na homotópii d) jeho drôtený model.

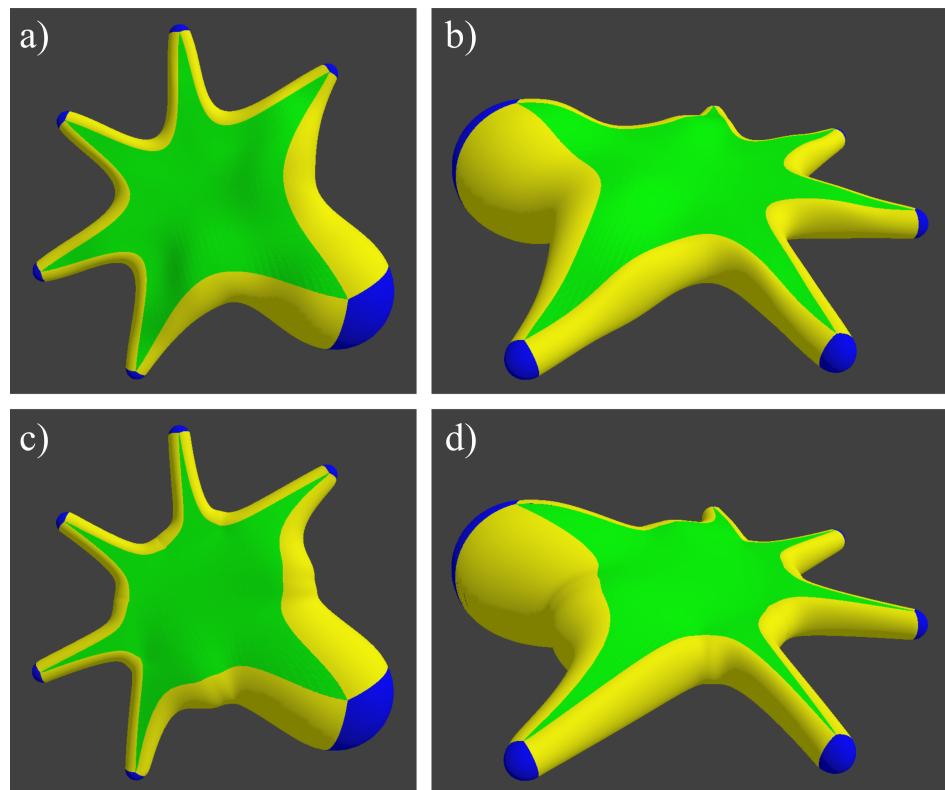
na posúvaní bodov v normálovom smere a pod písmenami c) a d) sú plochy vytvorené druhou metódou založenou na homotópii. Na obr. 3.2 môžeme vidieť vstupnú množinu sfér, ktorých stredy tvoria konvexný mnohouholník v situácii na obr. 3.3 a nekonvexný v situácii na obr. 3.4. Naše metódy zvládnu aj niektoré zložitejšie situácie nekonvexného mnohouholníka s viacerými sférami ako napríklad na obr. 3.4. Pri konštrukcii každého segmentu bočných poťahových plôch sú vektory twistu nulové, teda $\vec{t}_{ij} = \vec{0}$, $i, j = 0, 1$. Porovnania časov výpočtu príkladov ilustrovaných na obrázkoch 3.1, 3.3, 3.4, 3.6, 3.8 a 3.9 pre zvolené počty vzorkovacích vrcholov plôch sú uvedené v tabuľke 3.1.



Obr. 3.2: Vstupné množiny sfér a) pre príklad v obr. 3.3, b) pre príklad v obr. 3.4.



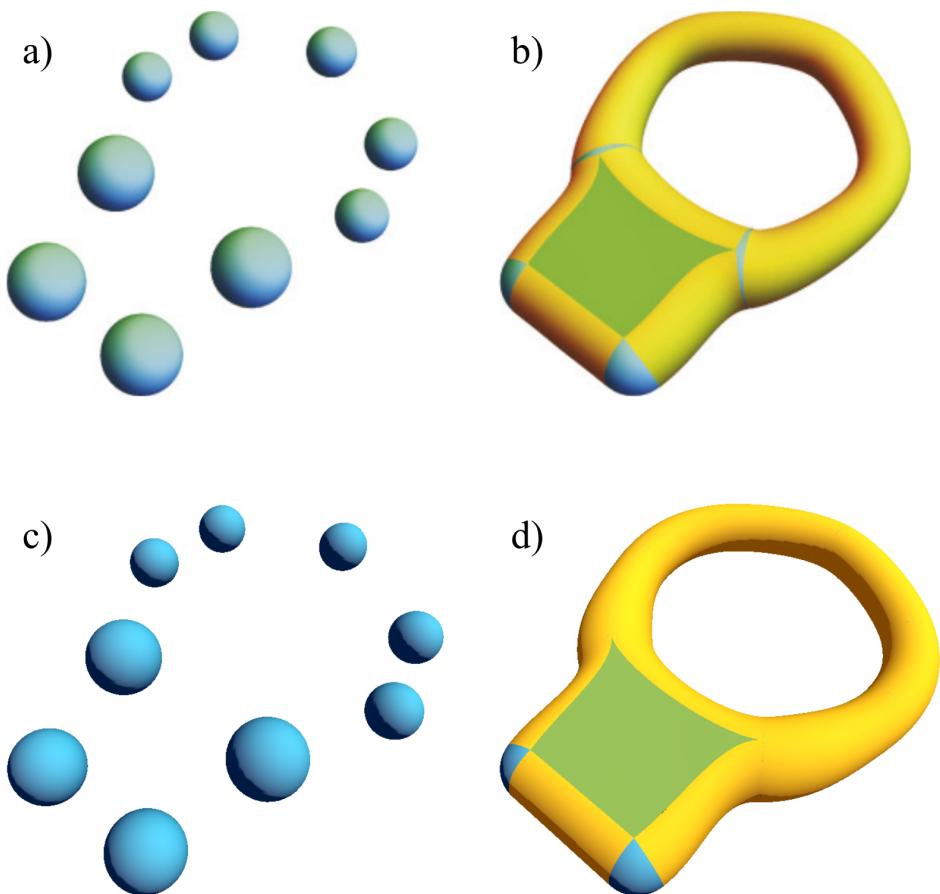
Obr. 3.3: Príklad poťahovej plochy štyroch sfér pre $\eta = 2$, $\tau_{ij} = 0.5$ a $\lambda_{ij} = 1$ a) metódou posúvania v normálovom smere pre $\delta = 0$ b) jeho drôtený model, c) metódou založenou na homotópii d) jeho drôtený model.

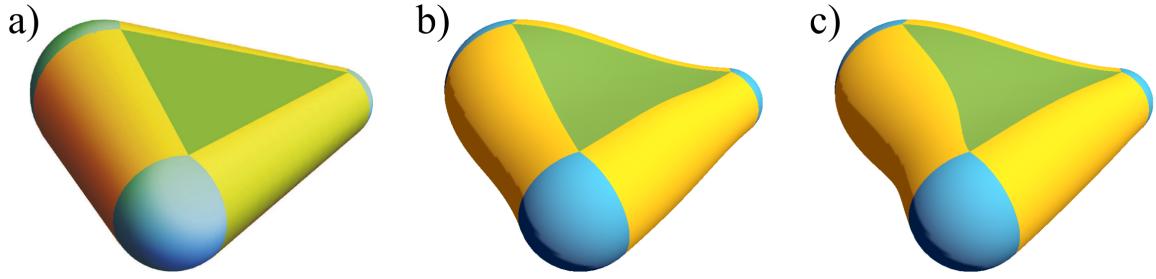


Obr. 3.4: Príklad zložitejšej poťahovej plochy 12-tich sfér a nekonvexný vstupný mnohouholník pre $\eta = 3$, $\tau_{ij} = 0.1$ a $\lambda_{ij} = 1$ metódou posúvania v normálovom smere pre $\delta = 0$ a) pohľad zhora b) pohľad z boku a c) metódou založenou na homotópii (pohľad zhora) d) pohľad z boku.

Tabuľka 3.1: Doba výpočtu našich metód na konkrétnych príkladoch.

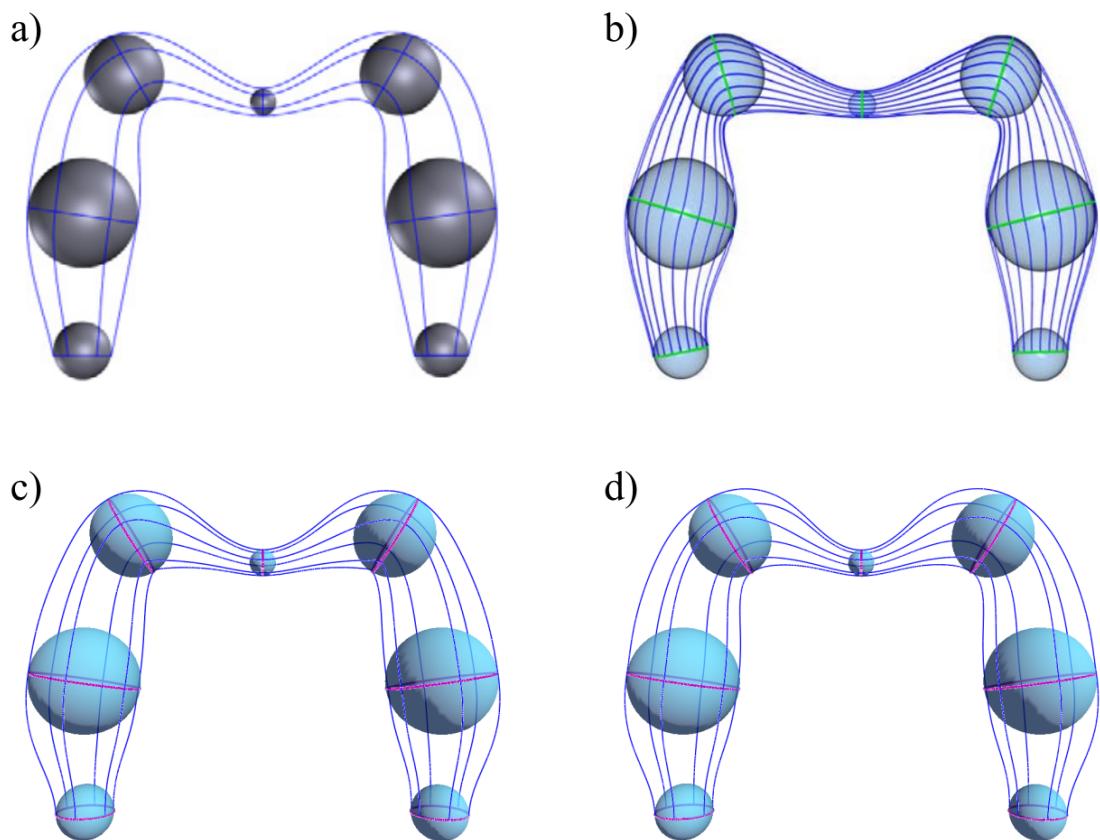
Typ metódy	obr. 3.1	obr. 3.3	obr. 3.4	obr. 3.6	obr. 3.8	obr. 3.9
Posúvanie v normálovom smere	0.401 s	7.47 s	113.425 s	3.511 s	16.855 s	46.731 s
Založená na homotópii	0.883 s	22.75 s	242.895 s	9.786 s	34.783 s	110.816 s
Počet vrcholov	3362	26484	24732	23475	64488	96732

Obr. 3.5: Príklad kombinácie tubulárnej a rozvetvenej poťahovej plochy 9-tich sfér
a) vstup a b) výstup z [BLK17], c) vstup a d) výstup našej metódy posúvania v
normálovom smere pre $\eta = 2$, $\delta = 0$, $\tau_{ij} = 0.1$ a $\lambda_{ij} = 1$.

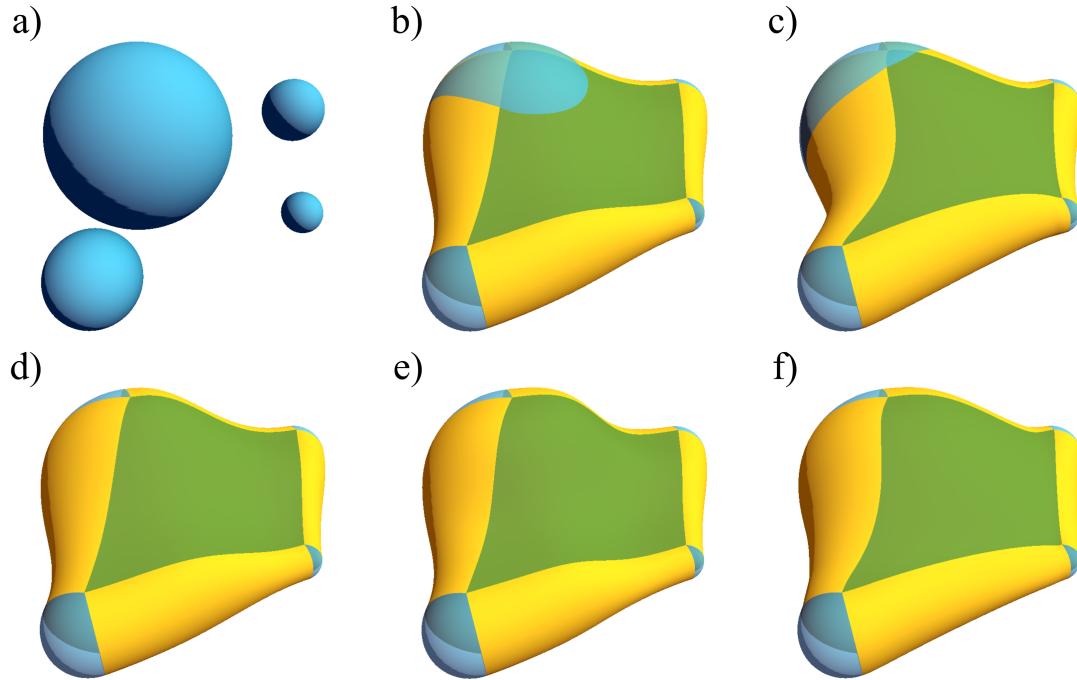


Obr. 3.6: Výstupná rozvetvená poťahová plocha troch sfér a) metódou [BLK17], b) metódou posúvania v normálovom smere pre $\delta = 0$ a c) metódou založenou na homotópii. Pre naše metódy boli použité hodnoty $\eta = 2$, $\tau_{ij} = 0.1$ a $\lambda_{ij} = 1$.

Naše metódy sme aplikovali aj na podobné vstupné dátu, ktoré boli použité v [SRW⁺10], [KH10] a [BLK17]. Kvôli tomu, že sme nemali k dispozícii presné polohy stredov a veľkostí polomerov vstupných sfér, odhadli sme tieto dátu a následne sme aplikovali naše metódy. Na obr. 3.5 pod písmenom d) sme využili metódu rozvetvenej poťahovej plochy pomocou posúvania v normálovom smere a tubulárnej konštrukcie. Príklad, ktorým sme sa inšpirovali bol použitý v práci [BLK17], ktorých výstup je pod písmenom b). Ďalej sme na podobných dátach ako v [BLK17] aplikovali naše metódy pre tri vstupné sféry, ako to môžeme vidieť na obr. 3.6. Všimnime si, že segmenty výstupnej bočnej poťahovej plochy z [BLK17], sú tvorené časťami kužeľov a vrchná a spodná plocha sú trojuholníky, ktorých vrcholy ležia na jednotlivých sférach, zatiaľ čo naše výstupné plochy sú na rozdiel od [BLK17] nelineárne (obr. 3.6 písmená b) a c)).



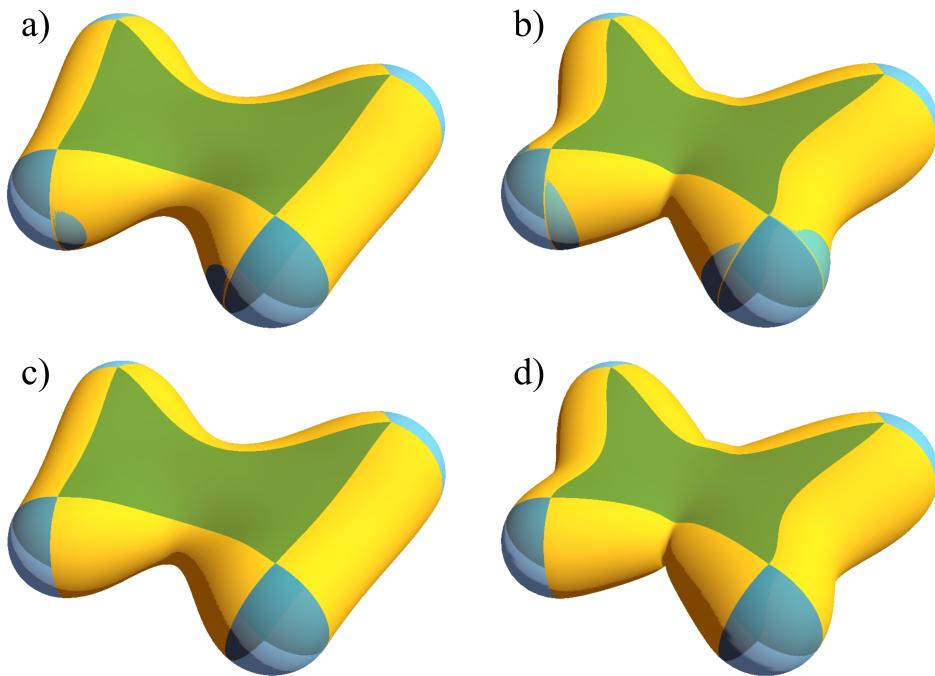
Obr. 3.7: Výstupná tubulárna poťahová plocha 7-mich sfér a) metódou [KH10], b) metódou [SRW⁺10] po 60-tich iteráciách, c) našou metódou pre $\delta = 0$, $\eta = 2$ a d) našou metódou po úprave rožných vektorov \vec{n}_3 a \vec{n}_5 .



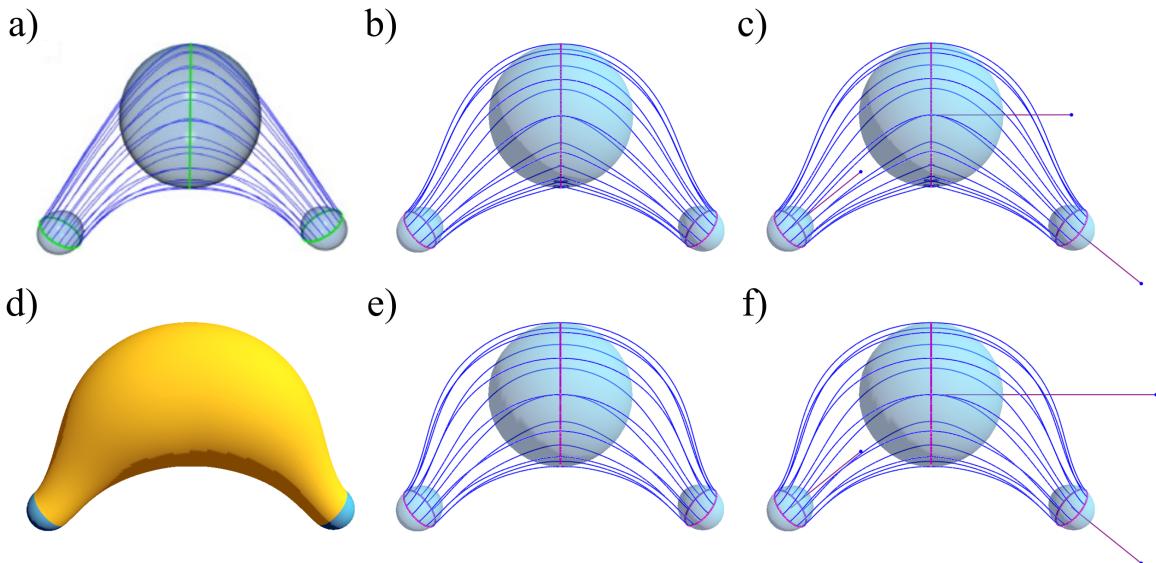
Obr. 3.8: Príklad prispôsobenia parametrov pre vstupné sféry. Parametre $\tau_{ij} = 0.8$ a $\lambda_{ij} = 1$ a) vstupná množina sfér b) výstup metódou posúvania v normálovom smere pre $\delta = 0$, $\eta = 2$ d) po úprave $\delta = 0.08$ e) a pre $\delta = 0$, $\eta = 3$ c) výstup metódou založenou na homotópii pre $\eta = 2$ a f) pre $\eta = 3$.

Ako ďalší príklad na porovnanie s inými metódami sme si vybrali situáciu siedmich sfér, ktoré vytvárajú tvar písmena M (obr. 3.7). Na týchto dátach boli aplikované konštrukcie v [SRW⁺10] aj [KH10], ktorých výsledky sú pod písmenami a) a b). Na obr. 3.7 pod písmenom c) môžeme vidieť poťahovú plochu, ktorú sme vypočítali našou tubulárnu konštrukciou, ktorá pre symetrické dátá vypočíta symetrickú poťahovú plochu. Avšak na tretej a piatej sfére dochádza k samopriesekom, preto je potrebná modifikácia vektorov na jednotlivých sférach. V tomto prípade bolo postačujúce zmeniť veľkosť vektorov \vec{n}_3 a \vec{n}_5 , vďaka čomu sme odstránili nežiadúce samoprieseky. Výsledná plocha, po úprave vektorov, je pod pímenom d).

Naše metódy nemusia pre ľubovoľné δ a η obaľovať danú množinu sfér ako to môžeme vidieť na obr. 3.8 pod písmenom b) a c). Ale pre vhodne zvolené hodnoty je to možné dosiahnuť (písmená d), e) a f)). Podobne je v niektorých situáciách potrebné pri tubulárnej konštrukcii upraviť vektorov \vec{n}_i , aby výsledná plocha nemala samoprieseky. Na obr. 3.10 pod písmenom a) môžeme vidieť výstup z [SRW⁺10], ktorý ale prechádza cez najväčšiu sféru, zatiaľ čo naša plocha po úprave vektora \vec{n}_2 obaľuje všetky sféry (písmeno d) a e)).



Obr. 3.9: Príklad prispôsobenia parametrov pre vstupné sféry. Parametre $\tau_{ij} = 0.05$, $\tau_{ij} = 1$ a $\tau_{ij} = 1.5$ a) výstup metódou posúvania v normálovom smere pre $\delta = 0$, $\eta = 2$, $\tau_{ij} = 0.05$ c) po úprave $\tau_{ij} = 1$ b) výstup metódou založenou na homotópii pre $\eta = 2$, $\tau_{ij} = 0.05$ a d) po úprave $\tau_{ij} = 1.5$.



Obr. 3.10: Príklad zmeny vektorov \vec{n}_i v tubulárnej konštrukcií pre $\delta = 0$, $\eta = 2$.
 a) výstupná plocha metódou [SRW⁺10] b) výstup našou metódou c) plocha spolu s príslušnými vektormi \vec{n}_i e) plocha po úprave vektora \vec{n}_2 najväčšej sféry f) plocha po úprave spolu s vektormi a d) celá plocha po úprave.

Pri niektorých situáciach sa môže stať, že výsledná bočná časť plochy prechádza cez niektoré sféry. Takáto situácia môže nastať pre nevhodne zvolené veľkosti τ_{ij} vektorov $e_j^i(u)$ ($e_j^i(u, t)$). Vtedy je potrebné ich zmeniť na príslušných segmentoch. Príklad takejto situácie je ilustrovaný na obr. 3.9. Tieto vstupné dátá sme použili aj v predchádzajúcej kapitole.

3.2 Modifikácie našich metód

Počas práce sme uvažovali aj nad možnými modifikáciami našich metód. Všetky tieto modifikácie zatiaľ ostali v teoretickej rovine a teda sme ich neimplementovali a neotestovali. Jednou z nich by mohla byť úprava váhových funkcií $\omega_i(u, v)$, ktoré zohrávajú dôležitú úlohu pri konštrukciách, napríklad tak, že pre $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ určíme $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, tak aby boli disky $d_j^{\delta_j}$ disjunktné, prípadne určíme aj $\eta_i \in (1, \infty)$. Takýmto spôsobom by bolo možné prispôsobiť tvar plochy konkrétnnej množine sfér a dosiahnuť požadované vlastnosti, v prípade ak naše metódy budú vytvárať plochu, ktorá používateľovi v danej situácii nevyhovuje. Ďalšou možnosťou úpravy váhových funkcií je definovať ich nasledovne

$$\omega_i(u, v) = \begin{cases} \delta_{ij} & , \exists j \in \{1, 2, \dots, n\}; \|(u, v) - (u_j, v_j)\| \leq \delta_j r_j, \\ \frac{w_i(u, v)}{\sum_{j=1}^n w_j(u, v)} & , \|(u, v) - (u_j, v_j)\| > \delta_j r_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{cases} \quad (3.1)$$

pričom

$$w_i(u, v) = \prod_{k=1, k \neq i}^n (\|(u, v) - (u_k, v_k)\|^{2\mu_k} - (\delta_k r_k)^{2\mu_k})^{\eta_k}, \quad (3.2)$$

kde $\mu_i \in \mathbb{Z}^+$. Funkcie $w_i(u, v)$ sú polynómy stupňa $2 \sum_{k=1, k \neq i}^n \mu_k \eta_k$ a teda váhové funkcie $\omega_i(u, v)$ sú racionálne polynomické funkcie. Výsledná horná a dolná časť plochy $S^\pm(u, v)$ je polynomická, stupňa

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{k=1, k \neq i}^n 2\mu_k \eta_k = \sum_{k=1, k \neq j}^n 2\mu_k \eta_k,$$

kde j je také, že

$$\mu_j \eta_j = \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \mu_i \eta_i.$$

V špeciálnom prípade, že pre $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mu_i = \mu$, $\eta_i = \eta$ by váhové funkcie $\omega_i(u, v)$ aj funkcie $w_i(u, v)$ boli stupňa $2\mu\eta(n-1)$.

Záver

V tejto práci sme sa oboznámili s vybranými doterajšími metódami [SRW⁺10], [KH10] a [BLK17] konštrukcií poťahových plôch množín sfér. Uviedli sme ich princípy a spôsoby ich konštrukcie. Ďalej sa nám podarilo vytvoriť nové konštrukcie pre výpočet rozvetvenej a tubulárnej poťahovej plochy pre naše vstupné dátá, ktorými sú sféry s koplanárnymi stredmi, ktoré tvoria mnohouholník. Neskôr sme aplikovali naše metódy na podobných vstupných množinách sfér, ako autori vo vybraných prácach. Výstupy našich metód na nich poskytujú požadované poťahové plochy (niekedy po vhodnej úprave parametrov). Takisto sme aplikovali naše metódy aj na iných príkladoch vstupných dát. Náš prístup funguje nielen pre jednoduché prípady dvoch sfér, či konvexné mnohouholníky, ktoré vytvárajú stredy sfér, ale rovnako aj pre nekonvexné mnohouholníky, čo sme demonstrovali/preukázali na niekoľkých príkladoch. Pre symetrické vstupné dátá poskytujú naše metódy symetrické poťahové plochy, ako môžeme vidieť na obr. 2.9, 3.7, alebo 3.10. Samozrejme, po zmene vektorov \vec{n}_i v tubulárnej konštrukcii, už poťahová plocha nemusí byť symetrická. Porovnania s doterajšími metódami sme realizovali zatiaľ po vizuálnej stránke (ako vyzerajú výstupy metód), kvôli absencii časov výpočtu, ktoré sme nenašli vo vybraných prácach. Toto porovnanie z hľadiska doby výpočtu, prípadne ešte iných kritérií, ostáva do budúcej práce.

Podobne ako každá metóda, ani tie naše, nie vždy poskytnú požadovanú výstupnú plochu, ktorá obaľuje všetky sféry (môže pretínať niektorú z nich, prípadne dochádza k samopriesekom v tubulárnej konštrukcii). V niektorých situáciách je ale možné dosiahnuť požadovaný výstup vhodnou zmenou parametrov δ, η plochy, ktoré ovplyvňujú najmä hornú a dolnú časť (a tým aj hraničné krivky) a parametrov bočnej časti plochy, ktoré sú vytvorené Coonsovou bikubicky stmeľovanou záplatou, ako sú veľkosti τ_{ij} a λ_{ij} funkcií derivácií e_j^i a f_j^i na hraničných krivkách a pri tubulárnej konštrukcii zmenou vektorov \vec{n}_i . Tieto situácie sme taktiež ilustrovali na konkrétnych príkladoch.

Myšlienok, ktoré sa vynorili počas vytvárania našich metód, a ktoré sme nestihli ďalej spracovať je viacero. Napríklad pri konštrukcii poťahovej plochy pomocou homotópie sme uvažovali nad tým, že by sme namiesto matíc \mathbf{M}_d^i uniformného škálovania s faktorom d mohli použiť matice neuniformného škálovania pozdĺž vektorov bázy v E^3 ($\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$), prípadne iných troch lineárne nezávislých jednotkových vektorov, ktoré by určovali smery škálovania. Princíp by bol podobný ako v predstavenej metóde. Pre

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ by sa vytvorili dve škálovania, medzi ktorými by sa následne vytvoriло homotopické zobrazenie. Interpoláciou matíc týchto zobrazení v čase t , by sme získali maticu zobrazenia, pomocou ktorej by sme vypočítali výslednú poťahovú plochu. Takýmto spôsobom, by bolo podľa nás možné vytvoriť poťahovú plochu pre rôzne naškálované sféry.

Ďalšou myšlienkovou do budúcej práce je rozšírenie našej metódy založenej na posúvaní v normálovom smere z množín sfér s koplanárnymi stredmi na množiny sfér, ktorých stredy nemusia ležať v jednej rovine. Základnou ideou je nájsť rovinu β , takú, že po premietnutí stredov sfér do nej, vznikne z ich priemetov jednoduchý mnohouholník bez samopriesekov. Následne vhodnou transformáciou tejto roviny na rovinu $\alpha : z = 0$, zobrazí danú množinu sfér. Po transformácii sfér by sme vytvorili interpolačnú hornú

$$\text{a dolnú plochu } \mathbf{S}^\pm(x, y), \text{ktoré by prechádzali bodmi } \mathbf{P}_i^\pm = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \pm r_i \end{pmatrix} = \mathbf{C}_i \pm r_i \vec{\mathbf{e}}_3,$$

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pomocou našich váhových funkcií $\omega_i(x, y)$ nasledovne

$$\mathbf{S}^\pm(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta r^\pm(x, y) \vec{\mathbf{e}}_3,$$

$$\Delta r^\pm(x, y) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) (z_i \pm r_i).$$

Podobne by bolo možné rozšíriť aj metódu založenú na homotópii pre sféry s nekoplanárnymi stredmi. Rovnako by sa našla rovina β , ktorá by sa transformovala na rovinu α spolu so sférami. Myšlienka ostáva rovnaká ako v našej metóde. Najprv by sme začali so sférami s rovnakými polomermi $r^* = r_j$ pre nejaké $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, vytvorili obaľovú plochu pre ne, ktorá by bola v čase $t = 0$ a následne ju upravili v každom čase $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Výsledná plocha by bola pre $t = 1$. Pôvodná plocha by sa dala vypočítať nasledovne

$$\mathbf{S}^\pm(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) (z_i \pm r^*) \vec{\mathbf{e}}_3,$$

ktorá by interpolovala body $\mathbf{P}_i^{*\pm} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \pm r^* \end{pmatrix} = \mathbf{C}_i \pm r^* \vec{\mathbf{e}}_3$. Pri oboch myšlienkach, by

bolo potrebné ešte spätnou transformáciou zobrazíť rovinu α na β a s ňou aj vypočítanú poťahovú plochu. Ostáva ešte otázka, či pre každú diskrétnu množinu sfér existuje takáto rovina β . Bočné segmenty by boli vypočítané podobne, ako v našich metódach, teda Coonsovou bikubicky stmeľovanou záplatou, zostavenou z príslušných hraničných kriviek a funkcií derivácií.

Z príkladov sfér, na ktoré sme aplikovali naše metódy, ktoré sú uvedené v tabuľke 3.1 vyplýva, že výpočet metódou založenou na homotópii v priemere trvá približne 2.435-krát dlhšie ako výpočet metódou posúvania v normálovom smere. Samozrejme, doba výpočtu závisí od implementácie týchto metód. Náš softvér slúži predovšetkým na vizualizáciu vygenerovaných plôch, zatiaľ čo výpočet sme neoptimalizovali a teda je možné ho v budúcej práci ďalej vylepšiť/optimalizovať, aby sa dosiahol čo najnižší čas výpočtu. Ďalej by bolo vhodné z implementačného hľadiska zmeniť vzorkovanie množiny M napríklad tak, že sa vytvorí nejaká triangulácia vstupného mnohouholníka M a na každom trojuholníku sa navzorkuje horná a dolná plocha. Z uvedených hodnôt v tabuľke 3.1 momentálne vyplýva, že naše metódy sa nehodia na real-time rendering, ale skôr na vytváranie 3D modelov, ktoré môžu ďalej slúžiť, napríklad vo filmovom, či hernom priemysle, alebo v medicíne na simuláciu dejov v cievach (tubulárna konštrukcia), prípadne iných odvetviach, ktoré využívajú 3D modely. Hľadanie poľahových plôch sfér je len jednou z častí hľadania obalových plôch rôznych iných objektov v E^3 . Hoci pokrok v oblasti konštrukcie poľahových plôch sfér v dnešnej dobe postúpil, je stále čo vylepšovať a objavovať.

Literatúra

- [BDL83] R.E. Barnhill, R.P. Dube, and F.F. Little. Properties of Shepard’s surfaces. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 13(2):365–382, 1983.
- [BKL15] Bohumír Bastl, Jiří Kosinka, and Miroslav Lávička. Simple and branched skins of systems of circles and convex shapes. *Graphical Models*, 78:1–9, 2015.
- [BL13] Michal Bizzarri and Miroslav Lávička. Parameterizing rational offset canal surfaces via rational contour curves. *Computer-Aided Design*, 45:342–350, 2013.
- [BLK17] Michal Bizzarri, Miroslav Lávička, and Jiří Kosinka. Skinning and blending with rational envelope surfaces. *Computer-Aided Design*, 87:41–51, 2017.
- [Don68] Shepard Donald. A two-dimensional interpolation for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, pages 517–524, 1968.
- [Far02] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for CAGD a practical guide, fifth edition*. Academic Press, 2002.
- [HL93] Josef Hoschek and Dieter Lasser. *Fundamentals of computer aided geometric design*. AK Peters, 1993.
- [HSF06] Kai Hormann and Michael S. Floater. Mean value coordinates for arbitrary planar polygons. *ACM Trans. Graph.*, 25:1424–1441, 10 2006.
- [KH10] R. Kunkli and M. Hoffmann. Skinning of circles and spheres. *Computer Aided Geometric Design*, 27:611–621, 2010.
- [SRW⁺10] Greg Slabaugh, Jarek Rossignac, Brian Whited, Tong Fang, and Gozde Unal. 3d ball skinning using PDEs for generation of smooth tubular surfaces. *Computer-Aided Design*, 42:18–26, 2010.