LUPAȘCU
MARIAN
331

TEMA #10
-CN-

1). $f(x)=\sin(x)$

$\Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right) = (x_1, x_2, x_3)$

$S_2(x)=?$

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x), & x\in[x_1,x_2) \\ S_2(x), & x\in[x_2,x_3] \end{cases}$$

unde $S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2 \quad i=\overline{1,2}$

$$S(x)=\begin{cases} a_1+b_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+c_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \\ a_2+b_2x+c_2x^2, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Deoarece S interpolează f în cele 3 noduri $\Rightarrow$

$$\begin{cases} S(x_1)=S_1(x_1)=f(x_1)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \\ S(x_2)=S_2(x_2)=0 \\ S(x_3)=S_2(x_3)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \\ S_2(0)=0 \\ S_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=-1 \\ a_2=0 \\ a_2+\frac{\pi}{2}b_2+\frac{\pi^2}{4}c_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=-1 \\ a_2=0 \\ \frac{\pi}{2}b_2+\frac{\pi^2}{4}c_2=1 \end{cases}$$

Pe de altă parte S este continuă în $x_2=0$. $\Rightarrow$

$$S_1(x_2=0)=S_2(x_2=0)$$

$$a_1+\frac{\pi}{2}b_1+\frac{\pi^2}{4}c_1=a_2 \Leftrightarrow -1+\frac{\pi}{2}b_1+\frac{\pi^2}{4}c_1=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}b_1+\frac{\pi^2}{4}c_1=1$$

Derivatele funcțiilor S_1 și S_2 sunt.

$$S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1)$$
$$S_2'(x) = b_2 + 2c_2(x - x_2)$$

$$S'(x) = \begin{cases} b_1 + 2c_1(x - x_1) & , x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ b_2 + 2c_2(x - x_2) & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

S' continuă în x_2 deci $S_1'(x_2 = 0) = S_2'(x_2 = 0)$

$$b_1 + 2c_1 \cdot \frac{\pi}{2} = b_2.$$

Tocmai cum aveam.

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ \frac{\pi}{2} b_1 + \frac{\pi^2}{4} c_1 = 1 \\ \frac{\pi}{2} b_2 + \frac{\pi^2}{4} c_2 = 1 \\ b_1 + \pi c_1 = b_2 \end{cases}$$

Considerăm în plus satisfăcută condiția $S'(x_1) = f'(x_1)$ adică.

$S_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ de unde.

$$b_1 + 2c_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

De unde se obține că. $c_1 = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2}$.

$$b_2 = \frac{4}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{1 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi}}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

$$S(x) = \begin{cases} -1 + \frac{4}{\pi^2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 & , x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \frac{4}{\pi}(x - 0) = \frac{4}{\pi^2}(x)^2 & , x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$