Lupașcu Marian

-331-

TEMA 4

-CN-

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Deoarece $a_{31} = 0$ vom aplica doar $R^{(12)}(\theta)$ matricei A. În acest sens calculăm:

$$\begin{cases} s = \dfrac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ c = \dfrac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$R^{(12)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicând matricea de rotație $R^{(12)}$ matricei A se obține:

$$A \leftarrow R^{(13)} A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Urmează să aplicăm $R^{(23)}$ matricei A, de la ultimul pas.
În mod analog calculăm

$$\begin{cases} s = \dfrac{a_{32}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\dfrac{1}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ c = \dfrac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1^2}} = -\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{\sqrt{\frac{2}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\sqrt{\dfrac{2 \cdot 2}{4 \cdot 3}} \end{cases}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$R^{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Matricea finală după ce aplicăm rotația $R^{(32)}$ este:

$$A \leftarrow R^{(23)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{12}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{12}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & +\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} := R$$

Matricea Q^T se calculează după formula

$$Q^T = R^{(23)} R^{(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Vectorul b se transformă astfel:

$$b \leftarrow Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{9\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

In urma rezolvarii sistemului $Rx=b$ se obtine:

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ 3\frac{\sqrt{6}}{6}x_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}x_3 = 9\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow x_2 = 2 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}x_3 = -2\sqrt{3} \Rightarrow x_3 = 3 \end{cases}$$

3). $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Fie λ o valoare proprie a matricii $A \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

a.i. $Av = \lambda v$

$Av - \lambda v = 0$

$(A - \lambda I_n)v = 0$ sistem omogen (1)

Daca $\det(A-\lambda I_n) \neq 0$ atunci sistemul (1) admite doar solutia banala $v = (0,0,0)^T$ (fiind compatibil determinat)

Dar cum am presupus $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci

$\det(A - \lambda I_n) = 0.$

$|A - \lambda I_n| = 0$

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^3 + 2 - 3(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2) + 2 - 9 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 27 - 18\lambda + 3\lambda^2 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 9 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 24\lambda - 20) = 0 = -(x-5)(x-2)^2$$

$P_3'(\lambda) = -3\lambda^2 - 18\lambda + 24$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{36}}{-6} = \frac{-18 \pm 6}{-6} = 3 \pm 1 = 2 \text{ sau } 4.$$

$P_3'(2) = 0$ (2)

λ	$-\infty$		2		4		5		∞
$P_n(\lambda)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$P_n'(\lambda)$		$-$	0	$+$			0	$-$	

(3)

Din (2) și (3) avem că $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 5.$

5), λ_i valori proprii ale lui $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\underset{i=\overline{1,n}}{\Rightarrow}$

$P_n(\lambda_i) = 0 \ (\forall)\ i = \overline{1,n}$

$|A - \lambda I_n| = 0$

Pt $\lambda = 0$ avem $P_n(0) = |A|$ (1)

$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_0$

Din relațiile lui Viète avem că

$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n \frac{C_0}{(-1)^n} = C_0.$

Din (1) avem că $P_n(0) = |A| = C_0$ $\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|.$

6) $A \in M_n(\mathbb{R})$ nesingulară $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$A^T A$ pozitiv definită.

$A^T A$ pozitiv definită $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $x^T A^T A x > 0.$

$(x^T A^T) A x = (Ax)^T A x = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$ (1)

Cum $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow x \neq 0$

A nesingulară $\Rightarrow \det(A) \neq 0.$

Presupun că $Ax = 0 \Rightarrow 0$ valoare proprie

Dar $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 0$

Dar $\det(A) \neq 0$ (ipoteza) $\Rightarrow$?

$$\left.\begin{matrix} Ax \neq 0 \\ (1) \end{matrix}\right| \Rightarrow \underbrace{\|Ax\|^2}_{x^T A^T A x} > 0$$

$x^T A^T A x > 0 \Rightarrow A^T A$ pozitiv definită

7) λ valoare proprie pt $A \in M_n(\mathbb{R})$

$x \neq 0$ vector propriu asociat lui λ.

a). $A^T - \lambda I_n = (A - \lambda I_n)^T$

$\det(A^T - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

Deci $\det(A^T - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0 \Rightarrow$

λ valoare proprie pt A^T.

b). Inducție după k:

$P(1)$: λ este valoare proprie pentru A (se verifică, deoarece este chiar ipoteza).

Pp. $P(k)$: adevărată

Dem: $P(k) \rightarrow P(k+1)$:

$$A^{k+1} x = A^k (Ax) = A^k \lambda x = \lambda A^k x \overset{\text{ipoteza}}{\underset{\text{de inducție}}{=}} \lambda \cdot \lambda^k x$$

$= \lambda^{k+1} x \Rightarrow \lambda^{k+1}$ este valoare proprie pt A^{k+1} cu vectorul propriu x.

Cf. Principiului Inducției matematice avem că

λ^n valoare proprie pt A^n $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$ cu vectorul propriu x

c) A nesingulară $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$Ax = \lambda x \quad | \cdot A^{-1}$ (*)

$x = A^{-1}\lambda x.$

$A^{-1}\lambda x = x.$

$\lambda A^{-1}x = x. \quad | \cdot \frac{1}{\lambda}$ (**)

$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x. \Rightarrow$ avem că $\frac{1}{\lambda}$ valoare proprie pentru A^{-1} cu vectorul propriu x!

(*) observație: pot înmulți la stânga cu A^{-1} deoarece A nesingulară ($\Rightarrow \exists A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$)

(**) observație: Pot înmulți cu $\frac{1}{\lambda}$ deoarece $\lambda \neq 0$ (altfel (dacă $\lambda = 0$) avem că $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det(A) \Leftrightarrow 0 = \det(A)$, dar A nesingulară ⨳).