Ejercicio 1. Sea $p_k(x) = \mathbb{P}(y = k \mid x)$ con

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right).$$

(1) Calcula $p_k(x)$ suponiendo homogeneidad.

(2) Sea $K = 2$ y $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$. Verifica que la frontera de decisión se encuentra en

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}.$$

1)

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}$$

$$p_k(x) = P(y=k \mid x)$$

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_k \, p_k(x)$$

Por homogeneidad, $p_1(x) = p_2(x) = \dots = p_k(x)$

$p_k(x)$ es igual $\forall k \in \mathbb{R}$

Por bayes

$$p_k(x) = P(x \mid y=k) \cdot P(y=k)$$

y $f_k(x) = 1$

$$\Rightarrow p_k(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma_k}\right)^2\right)$$

2) $$\log\left(\frac{f_1(x)\pi_1}{f_2(x)\pi_2}\right) = \log\left(\frac{e^{-1/2(x-\mu_1)^t \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)}}{e^{-1/2(x-\mu_2)^t \Sigma_1^{-1}(x-\mu_2)}}\right)$$

Consideramos que $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$

$$p(C_1 \mid x) = \frac{p(x \mid C_1)P(C_1)}{p(x)}$$

$$\log\left(\frac{p(C_1 \mid x)}{p(C_2 \mid x)}\right) = \log\left(\frac{p(x \mid C_1)P(C_1)/p(x)}{p(x \mid C_2)P(C_2)/p(x)}\right)$$

$$= \log\left(\frac{p(x \mid C_1)}{p(x \mid C_2)} \; \frac{P(C_1)}{P(C_2)}\right)$$

entonces si $P(C_1) = P(C_2)$

$$\log\left(\frac{f_1(x)\pi_1}{f_2(x)\pi_2}\right) = 0$$

En f. de densidad gaussianas, cuando 2 clases ($K=2$) son simétricas respecto a su media, la frontera de decisión se encuentra en el PM entre las 2 medias

$$\Rightarrow \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

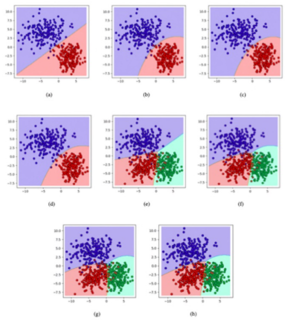
Ejercicio 2. Sean

$$\mu_1 = (-4, 4), \qquad \mu_2 = (3, -3), \qquad \mu_3 = (-3, 3)$$

y

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1.5 \\ 1.5 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes gráficas representan las fronteras de decisión?



Teniendo $\mu_1 = (-4, 4)$ $\mu_2 = (3, -3)$ $\mu_3 = (-3, 3)$

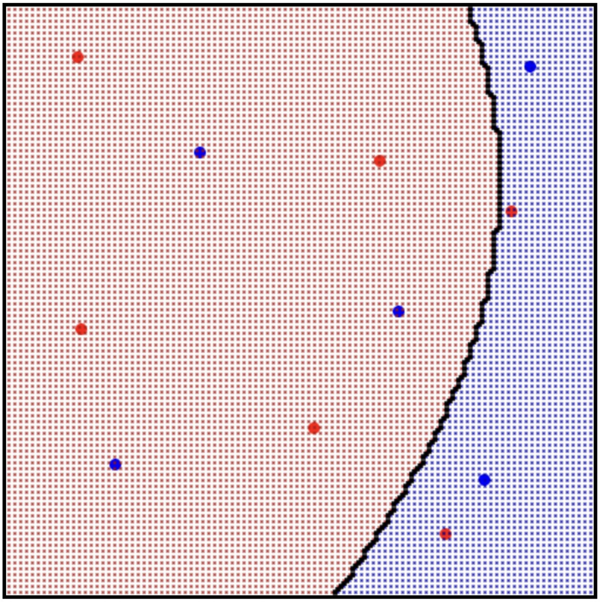
y $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1.5 \\ 1.5 & 4 \end{pmatrix}$

Notemos que al tener covarianzas distintas, se trataría del modelo QDA, pues acepta cov. diferentes. Por lo que eliminamos las opciones a y e.

También, por éste hecho, podemos suponer que entre las clases no habrá una superposición en la gráfica debido a que se modela una la distribución de cada clase con una distribución normal multivariada con su propia matriz de covarianza, por lo que eliminamos las opciones a, b, c, d.

La grafica representativa sería f, g o h.

Ejercicio 3. Toma 5 puntos al azar de color rojo y 5 puntos al azar de color azul. Grafica las distintas gráficas de Voronoi con sus fronteras usando la siguiente applet: https://www.ccom.ucsd.edu/ cdeotte/programs/classify.html Explica cómo funciona la applet.



La applet es una machine learning, entonces se va modificando con cada punto añadido, no toma en cuenta el producto final, si no todo el proceso desde el primer punto.

Podemos ver que la frontera de la clase 1 (roja) es más grande, ésto debido a que los puntos azules, en general, fueron los "primeros" añadidos