Théorie du Chaos

Dorothée Bertin, Marianne Rentchler, Claire Blais

June 10, 2016

Contents

1 Introduction.

Nous avons tous entendu parler de la théorie du chaos, ou plus populairement appelé l'effet papillon. C'est l'une des seules théorie mathématique à être aussi connue.
Cette théorie a été découverte pour la première fois lors d'une conférence donnée en 1972 par Edward Lorenz, qui est le "père" de la théorie du chaos. Elle est intitulée : «Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ?».
L'une des caractéristiques de cette théorie, c'est qu'elle est totalement transversale dans tous les domaines scientifiques, que ce soit la physique, l'astronomie, la biologie, l'économie ou les sciences sociales. Partout se trouvent ces systèmes dynamiques trop difficilement prévisibles : croissance ou décroissance de populations animales, répartition de capitaux et flux financiers, systèmes stellaires et planétaires.
Elle est aussi complètement redevable au développement de l'informatique. À la fois parce que les ordinateurs ont permis de visualiser simplement ces états «chaotiques» et qu'ils ont permis, grâce à leur puissance de calcul, d'expliquer certains phénomènes naturels sur lesquels les chercheurs s'arrachaient les cheveux et qui ont été «résolus» par la théorie du chaos. Un système chaotique n'est pas forcément complexe : un pendule ou une balançoire peuvent ainsi parfois montrer des comportements chaotiques.

2 La théorie du chaos.

2.1 Un peu d'histoire.

Pour certains physiciens, le XX^{eme} siècle se résume en trois découvertes majeures : la relativité, la mécanique quantique et le chaos. La théorie de la relativité faite par Einstein a fait changer les croyances des physiciens à propos de l'espace et du temps, et la mécanique quantique a démontré la théorie de Newton selon laquelle tout était mesurable. La théorie du chaos a quant à elle démontré qu'on ne peut pas tout prévoir.

Pierre-Simon de Laplace a postulé, en 1812, que si, à un moment donné, on connaissait la position et la vitesse de tous les objets de l'Univers ainsi que les forces qui s'exercent sur eux, on pourrait alors calculer leur devenir pour tous les moments à venir. Or la théorie du chaos prouve qu'il y a des processus que l'on ne peut pas complètement prédire. Toutefois, un système chaotique n'est pas un système sauvage qui fait n'importe quoi n'importe comment. Sous son désordre apparent, se cache un ordre très strict : il obéit aux principes physiques qui s'appliquent à tous les autres systèmes. Mais il est d'une part impossible de prévoir son comportement sur le long terme et, d'autre part, de savoir quel était précisément son état dans le passé. On parle pour cela de sensibilité aux conditions initiales ou aussi appelé ≪l'effet papillon≫.
C'est Edward Lorenz, professeur de mathématiques au MIT (Massachusetts Institut of Technologie), qui est le père officiel de la théorie du chaos. Il l'a découverte à la suite de calculs qu'il destinait à prévoir les phénomènes météorologiques. En effet, ces prévisions nécessitent énormément de calculs (dus aux lois de Newton, aux trajectoires des corps...) et donc d'équations différentielles très complexes car il y a énormément de variables qui entrent en jeu.
Pour simplifier le plus possible les équations, Lorenz a obtenu un système de trois équations à trois inconnues, que l'on verra plus tard, cependant les calculs restaient impossibles à faire à la main. Lorenz utilisa un des premiers ordinateurs : le royal McBee LGP-300.

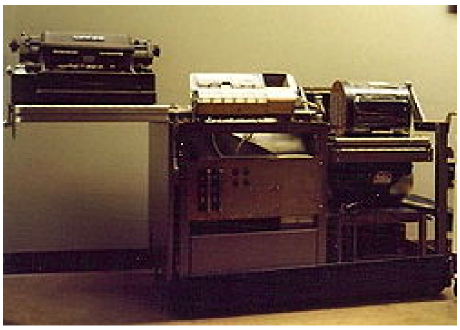


Figure 1: Un royal McBee LGP-300.
Source :
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/84/LGP30.agr.jpg/250px-LGP30.agr.jpg

Lorsque l'ordinateur imprima les résultats des équations, Lorenz décida de refaire les calculs mais au lieu de garder six chiffres après la virgule, il décida de n'en garder que trois pour gagner du temps. Pour lui et pour beaucoup des mathématiciens de son époque, une faible variation dans les variables à la base d'un calcul aussi complexe aurait une incidence du même ordre de grandeur sur le résultat final. Lorsqu'il eut les deux résultats et qu'il les représenta graphiquement à l'aide de son ordinateur, il vit que les résultats étaient totalement différents. En effet, au début les résultats se ressemblent mais après ils divergent très vite (le premier pouvait représenter une tempête et l'autre une sécheresse). La divergence des résultats ne pouvait s'expliquer que par la présence de termes non linéaires dans les équations du modèle. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des systèmes totalement différents. Il comprit alors qu'il ne serait jamais possible de prédire la météo à moyen ou à long terme, et cela a remis en causes les certitudes de la physique de l'époque. Grâce à la courbe d'évolution des deux résultats, il remarqua que, si les premières valeurs se ressemblaient, ensuite les courbes divergeaient. Cependant ce n'était pas une divergence quelconque, cela ressemblait à des ailes de papillons déployées. Il eu beau refaire les équations de nombreuses fois, il eu toujours le même résultat. Il décide d'appeler sa découverte les attracteurs étranges.

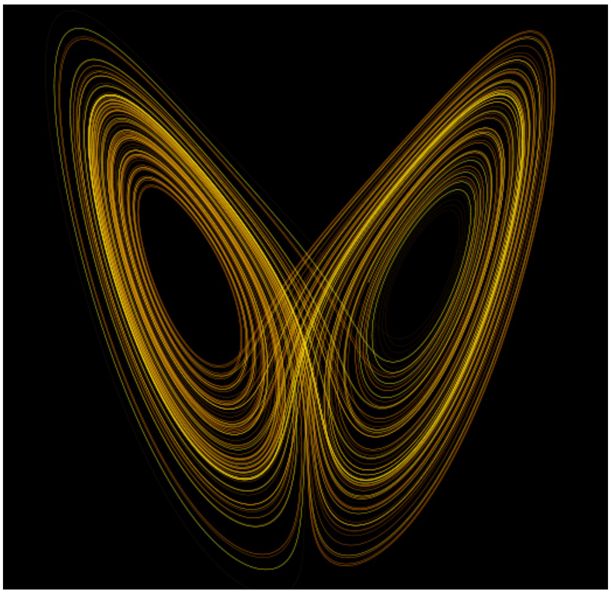


Figure 2: La représentation des attracteurs étranges.
Source : http://www.humansvillage.net/blog.php?id=106

2.2 L'effet papillon.

"*La théorie de l'effet papillon : Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, alors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régit par des lois. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. Enfin, si tout est lié dans la nature, si tous les mouvements y naissent les uns des autres quoique leurs communications secrètes échappent souvent à notre vue, nous devons être assurés qu'il n'est point de cause si petite ou si éloignée qui ne se produise quelquefois les effets les plus grands et les plus immédiats sur nous-mêmes* "

Henri Poincaré

2.2.1 Premiers travaux.

Laplace Pierre-Simon de Laplace croit fermement au déterminisme, comme il l'écrit dans l'introduction de son Essai philosophique sur les probabilités : "*Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle et l'avenir, comme le passé serait présent à ses yeux.* "
Un tel déterminisme est connu sous le nom de ≪déterminisme laplacien≫. Tout au long du 19ème siècle il fut considéré comme un élément fondamental des faits scientifiques, astronomiques, chimiques, biologiques. Il est certainement l'une des raisons principales des progrès scientifiques de ce siècle.

Poincaré Henri Poincaré travailla plus tard sur des phénomènes chaotiques, et il constata que le déterminisme absolu ne reflète qu'un état particulier du développement de la Science. Il était simple d'étudier d'abord les phénomènes les plus prévisibles (comme la chute des corps, le lever du Soleil, le retour périodique de la Pleine Lune, des saisons, des marées, etc.) et une généralisation plutôt tentante, mais trop large, conduisait à considérer que tous les phénomènes naturels devaient être déterministes.
Il présenta donc des objections à l'idée du déterminisme absolu : *Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard...Mais, alors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrons connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous dirons que le phénomène a été prévu, qu'il est régit par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi. Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes*

finaux...

Le déterminisme mathématique suit la définition : ≪ Deux expériences avec exactement les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites doivent donner exactement les mêmes résultats ≫ et le modèle mathématique d'un phénomène sera considéré comme déterministe si les conditions d'existence et d'unicité des solutions sont satisfaites, ce qui est généralement le cas pour les modèles utilisant des systèmes d'équations différentielles.

Le déterminisme physique est bien plus complexe, pour de nombreuses raisons, par exemple le mouvement des planètes: il est impossible de recommencer exactement la même expérience. Donc, une définition du déterminisme physique doit être : ≪ Deux expériences avec presque exactement les mêmes conditions initiales et presque exactement les mêmes conditions aux limites doivent donner presque exactement les mêmes résultats ≫. Cela signifie que la stabilité d'un phénomène est une condition essentielle de l'idée de déterminisme.

Est ce que cette instabilité, cet indéterminisme physique, cette sensibilité aux conditions initiales sont courants ? Henri Poincaré avait donné quelques exemples, mais il est aussi l'initiateur de ce que nous appelons aujourd'hui la théorie du chaos dont la sensibilité aux conditions initiales est l'élément essentiel, et il a reconnu que le chaos apparaît extrêmement souvent : il apparaît dans presque tous les problèmes non intégrables.

Figure 3: Henri Poincaré.
Source : http://www.nndb.com/people/358/000087097/

Von Neumann et Wiener Les deux mathématiciens, l'un et l'autre au fait de la sensibilité extrême sur le long terme de petites variations initiales, en tiraient des conclusions opposées. Pour l'un, toute prédiction à moyen terme était de ce fait inexorablement vouée à l'échec. Pour l'autre, au contraire, tout n'était que question de moyens de calculs, et lorsqu'on en aurait de suffisamment puissants, il serait possible de savoir exactement sur quelle petite cause agir pour éviter le grand effet.

2.2.2 Lorenz.

"*Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de mal à prévoir le temps avec quelque certitude ? Pourquoi les chutes de pluie, les tempêtes elles mêmes nous semblent-elles arriver par hasard, de telle sorte que pour bien des gens il semble naturels de prier pour voir la pluie ou le beau temps, alors qu'ils trouveraient ridicule de demander une éclipse par une prière ? Nous voyons que les grandes perturbations se produisent en général dans des régions ou l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas la ; et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si l'on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble du à l'intervention du hasard. Ici encore, nous retrouvons le même contraste entre cause minime, inappréciable pour l'observateur, et des effets considérables qui sont quelquefois d'épouvantables désastres.* "

Edward N. Lorenz

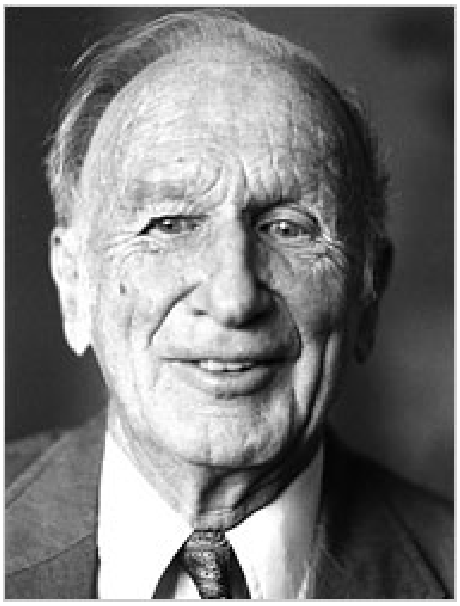


Figure 4: Edward Norton Lorenz.
Source : http://www.nytimes.com/2008/04/17/us/17lorenz.html

En 1972, lors d'une conférence sur le programme de recherche global sur l'atmosphère, Lorenz nomme son discours : « Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? »

"*Si un battement d'ailes d'un papillon peut engendrer un ouragan, la même chose est vraie pour tous les autres battements d'ailes du même papillon, mais aussi pour les battements d'ailes des millions d'autres papillons, sans parler de l'influence des activités des innombrables autres créatures plus puissantes, comme les hommes par exemple !* "

Lorenz

L'effet papillon se fait-il sentir dans la météorologie ? Lorenz ne s'engage pas sur ce point. Mais il a découvert que dans les systèmes météorologiques, une infime variation d'un élément peut s'amplifier progressivement, jusqu'à provoquer des changements énormes au bout d'un certain temps.
Son but est d'expliquer qu'un phénomène naturel, comme par exemple la météorologie, pourrait être sensible aux conditions initiales et que ceci pourrait avoir des conséquences sur l'impossibilité de prédiction météo à moyen terme.

Ensuite, il a été confirmé que l'analyse scientifique de l'évolution imprévisible des systèmes météorologiques, qui empêche la vision de leur évolution à court terme, environ 8 jours, attribuait plutôt ce fait à un comportement inhérent à ces systèmes, et non à la méconnaissance des conditions initiales. Par ailleurs, de tels systèmes, comme d'autres systèmes chaotiques, sont en fait caractérisés par l'émergence d'une stabilité à moyen et long terme (mois, années) et non d'un chaos de plus en plus grand. C'est ce qui permet d'ailleurs de décrire des climats. En effet : " *J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent* "En clair, même si le météorologue ne peut pas prévoir le temps qu'il fera à Lyon dans un mois, il devrait être possible de prévoir des moyennes, des fréquences d'événements météorologiques, avec une bonne précision, en un endroit donné, sur une longue période de temps. Bien sûr, ce type de prédiction est plus modeste, mais il est souvent tout aussi utile. Cette seconde idée de Lorenz recadre le rôle du prévisionniste.

Aujourd'hui, cette notion ne concerne pas seulement la cas particulier de la météorologie, elle a été étudiée dans différents domaines. Si on l'applique aux sociétés humaines, cela voudrait dire que des changements de comportement qui semblent insignifiants au départ peuvent déclencher des bouleversements à grande échelle. Donc si le futur est déterminé par le passé, il ne l'est peut-être pas d'une manière aussi naïve qu'on y pensait auparavant. Même si le papillon du Brésil s'avérait impuissant, il existe de nombreux autres domaines où cette idée peut s'appliquer : les planètes, la finance, l'histoire, etc...

2.3 Les équations de Lorenz.

Comme nous l'avons vu précédemment, Lorenz s'est servi d'équations simplifiées pour découvrir la théorie du chaos. Les équations qu'il a utilisées (avant de les simplifier) sont les équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes. Elles représentent mathématiquement le couplage de l'atmosphère avec l'océan. son but était d'étudier le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard.

2.3.1 Les équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes appliquées au cas général.

On a donc :
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{v}) = 0$ qui est l'équation de continuité

$\frac{\partial(\rho \overrightarrow{v})}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{v} \otimes \overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\nabla} p + \overrightarrow{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \overrightarrow{f}$ qui est l'équation de bilan de la quantité de mouvement

$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot [(\rho e + p) \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \overrightarrow{v}) + \rho \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{q}) + r$ qui est l'équation de bilan de l'énergie

Avec :

- t le temps (en secondes)
- ρ la masse volumique du fluide (en $kg.m^{-3}$)
- $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ la vitesse d'une particule fluide (en $m.s^{-1}$)
- p la pression (en Pascal)
- $\bar{\bar{\tau}} = (\tau_{i,j})_{i,j}$ le tenseurs des contraintes visqueuses (en Pascal)
- $\overrightarrow{f}$ la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide (en $N.kg^{-1}$)
- e l'énergie totale par unité de masse (en $J.kg^{-1}$)
- $\overrightarrow{q}$ le flux de chaleur perdu par conduction thermique (en $J.m^{-2}.s^{-1}$)
- r la perte de chaleur volumique due au rayonnement (en $j.m^{-3}.s^{-1}$)

2.3.2 Les équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes appliquées au couplage de l'atmosphère avec l'océan.

Ces équations prennent en compte l'hypothèse de Boussinesq, l'approximation traditionnelle et l'hypothèse hydrostatique que l'on détaillera après.
Les équations sont :
$\frac{\partial U}{\partial t} - 2\Omega_z v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + F(u)$

$\frac{\partial v}{\partial t} - 2\Omega_z u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F(v)$

$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g$

$\nabla \cdot U = 0$

$\frac{\partial v}{\partial t} = F(v)$

$\rho = \rho(v)$ où $v = (T, S)$

Nous allons donc détailler les différentes hypothèses qui ont été prises en compte pour ces équations :

- L'hypothèse de Broussinesq consiste à négliger les effets de compressibilité en prenant en compte le fait que les variations de densité sont petites dans l'océan. Cela revient alors à considérer que la densité de référence ρ_0 est indépendante de z. On a alors $p_0(z) = -g\rho_0 z$. Grâce à cette hypothèse, on va remplacer la densité par ρ_0 dans toutes les équations. On a alors le système : $\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{U} & = 0 \\ \frac{D\overrightarrow{U}}{Dt} + 2\Omega \wedge \overrightarrow{U} & = \frac{\rho'}{\rho_0}\nabla\Phi - \frac{\nabla\rho'}{\rho_0} + F(\overrightarrow{U}) \\ \rho & = \rho(T, S, -g\rho_0 z) \end{cases}$

- L'approximation traditionnelle consiste à négliger les termes dynamiques associés à la composante horizontale de la rotation de la Terre. On l'applique dans la plupart des études de dynamique des fluides géophysiques. Soit $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ le vecteur de rotation angulaire de la terre. On peut alors écrire la conservation de la quantité de mouvement sur la verticale : $\frac{Dw}{Dt} + 2\Omega_x v - 2\Omega_y u = -\frac{1}{\rho}[\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho] + F(w)$
L'approximation traditionnelle revient à considérer Ω_x et Ω_y négligeables, ainsi la rotation et la gravité sont colinéaires.
Cette approximation est justifiée si l'hypothèse hydrostatique est utilisée.

- L'hypothèse hydrostatique consiste à négliger les termes d'accélération sur la verticale devant le gradient vertical de pression et la flottabilité. Cette approximation est basée sur une étude d'échelles. Soient L et H les échelles horizontales et verticales caractéristiques de l'écoulement, U la vitesse horizontale caractéristique et N la fréquence de Brunt-Vaïsala définie par $N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}$. Cette équation définie des quantités sans dimension : $\delta = \frac{H}{L}$, $Fr = \frac{U}{NH}$ qui est le nombre de Froude et $Ro = \frac{U}{2|\Omega|L}$ qui est le nombre de Rossby.
On quantifie l'importance relative de $\frac{Dw}{Dt}$ devant $g\rho'$ par $\frac{U^2}{N^2 l^2} = \delta^2 Fr^2$ et devant le gradient vertical de pression $\frac{\partial p'}{\partial z}$ par $\frac{H^2U^2}{4|\Omega|^2L^4} = \delta^2 Ro^2$.
On suppose que $\delta^2 Ro^2 \leq 1$ et que $\delta^2 Fr^2 \leq 1$ alors on a : $\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g$.

2.3.3 Les équations simplifiées de Lorenz.

Nous venons de voir les équations que Lorenz a utilisé pour découvrir la théorie du chaos. Cependant, ces équations étant trop compliquées pour les ordinateurs de l'époque, il les a simplifiées de telle sorte qu'elles décrivent les phénomènes de convection d'un fluide idéal à deux dimensions, dans un réservoir chauffé par le bas. On a donc : $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} & = Pr(y - x) \\ \frac{\partial y}{\partial t} & = rx - xz - y \\ \frac{\partial z}{\partial t} & = xy - bz \end{cases}$

Avec :

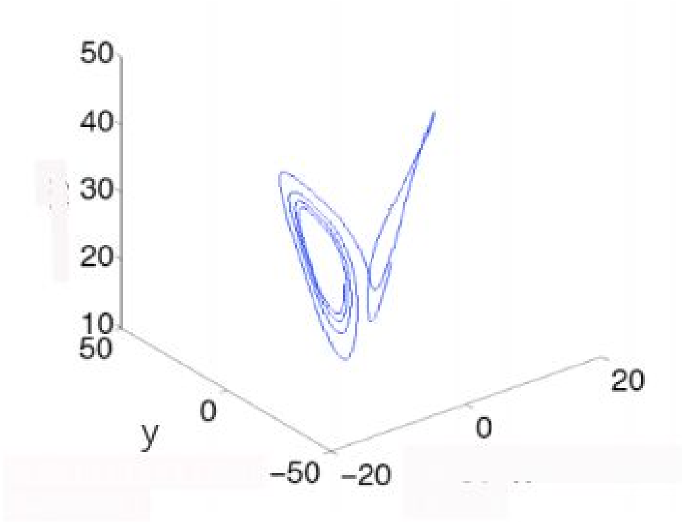
- Pr le nombre de Prandtl qui caractérise la viscosité et la conductivité thermique du fluide ($Pr \simeq 10$ pour l'air)
- r le nombre Rayleigh réduit, qui représente la différence de température entre le bas et le haut du réservoir
- $b = \frac{8}{3}$ mesure le rapport entre hauteur et largeur du système de convection
- x est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection
- y est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants
- z indique la distorsion du profil du gradient de température par rapport à la linéarité

2.4 Les attracteurs étranges.

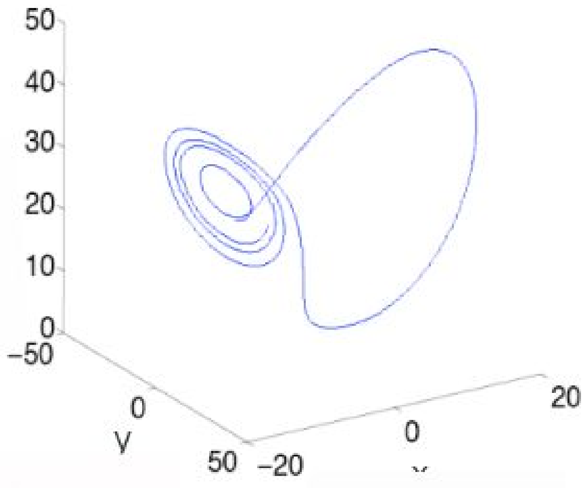
Nous allons maintenant voir comment les paramètres peuvent faire varier les résultats avec des représentations graphiques des équations de Lorenz ainsi que les attracteurs étranges.

2.4.1 Un exemple.

On choisit de prendre r=28, x(0)=1, y(0)=2 et z(0)=3. On va donc les modéliser et on va faire une comparaison après.



Nous allons maintenant prendre x(0)=1.1, y(0)=2.1 et z(0)=3.1.



Nous pouvons remarquer que la plus faible des variations dans les conditions initiales fait varier énormément la courbe. De plus, on peut remarquer la forme que la courbe prend telle les ailes de papillon. C'est cette forme de courbe qui est appelé attracteur étrange.

2.4.2 Qu'est que c'est un attracteur étrange ?

" Un attracteur est la limite asymptotique des solutions partant de toute condition initiale située dans un bassin d'attraction qui est un domaine de volume non nul ".
Lorsque les coordonnées, dans l'espace des phases, d'un système physique sont comprises au cours du temps dans un domaine restreint de l'espace entier, alors l'évolution du dit système a deux comportements possibles : soit le système est chaotique au sens étymologique du terme, et l'évolution de ses coordonnées se fera dans l'anarchie la plus totale (comportement aléatoire), soit il est chaotique déterministe et possède un attracteur étrange.

On distingue deux types d'attracteurs :

- celui dont le point fixe et le cercle limite qui se caractérisent par des mouvements atteignant un état stationnaire ou qui se reproduisent indéfiniment.
- l'attracteur étrange : il désigne une figure dans l'espace des phases représentant le comportement d'un système dynamique.
  Il représente un système multi-périodique si le système possède au moins deux fréquences d'oscillation indépendantes.

L'attraction des trajectoires autour de l'attracteur est liée au caractère dissipatif du système réel.

3 Systèmes dynamiques.

3.1 Définition.

Un système dynamique est un système physique qui évolue, il peut évoluer dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phase considéré. La trajectoire d'un objet en mouvement dans le temps est donc un système dynamique, ainsi que le nombre d'individu d'une population quelconque dans le temps, ou encore les valeurs d'une fonction (par exemple : y = 2x) par rapport à la valeur de x.
Quelque soit sa nature (topologique, différentiable, mesurable), un système dynamique est la donnée conjointe :

- d'un espace des phases, c'est-à-dire une structure (espace mesurable, variété différentielle, ...) correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré ;
- d'un temps , qui peut être discret (entiers naturels, entiers relatifs, groupe discret), continu (réels positifs, réels, groupe de Lie connexe)... ;
- d'une loi d'évolution.

3.1.1 Espace des phases.

L'espace des phases en mécanique analytique est un espace à 2 dimensions permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système mécanique décrit par des équations différentielles du second ordre par rapport au temps. Cet espace n'a pas la structure d'un espace vectoriel. Il est étroitement associé aux équations de Hamilton et donc au formalisme Hamiltonien. Cette représentation permet de distinguer un comportement chaotique d'un comportement aléatoire.
Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard: aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges : ils sont la signature du chaos.

3.1.2 Les lois d'évolution.

- Lois statiques:

  Loi 1 *Intégralité des parties d'un système technique : Un système technique doit avoir un élément moteur, un organe de transmission, un organe de travail et un organe de contrôle.*

  Loi 2 *Conductibilité énergétique du système : Libre passage de l'énergie entre les différents organes.*

  Loi 3 *Coordination des rythmes des parties : Coordination en fréquence, vibration, périodicité.*

- Lois cinématiques:

  Loi 4 *Augmentation du niveau d'idéalité : Le système tend vers un idéal dont le volume, le poids, la surface, le coût tendent vers zéro à iso-performance.*

  Loi 5 *Développement inégal des entités : Le développement inégal des sous-systèmes conduit à des contradictions.*

  Loi 6 *Transition vers le super système : Après avoir épuisé les possibilités d'innovation de l'objet, celles-ci apparaissent au niveau du système.*

- Lois dynamiques:

  Loi 7 *Transition vers le microniveau : Passage du macro au microniveau.*

  Loi 8 *Augmentation de la dynamisation et du niveau de contrôlabilité : tendance à augmenter les organes de contrôle.*

3.2 Les modèles de systèmes dynamiques.

On peut différencier trois sortes de systèmes dynamiques : les systèmes aléatoires (aussi appelés systèmes stochastiques), les systèmes déterministes et les systèmes chaotiques.

- Modèle déterministe:
  Les systèmes déterministes sont des systèmes régis par des lois mathématiques bien connues, on peut donc prévoir exactement l'évolution de ces systèmes dans le temps.
- Modèle aléatoire:
  Les systèmes aléatoires, aussi appelé modèle stochastique, évoluent, comme leur nom l'indique, au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régisse, sans qu'aucune prévision exacte soit possible dans le temps.
- Modèle chaotique:
  Les systèmes chaotiques ont un comportement infiniment complexe. Ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure infiniment complexe sur laquelle ils semblent errer au hasard, mais sans jamais la quitter, ni repasser deux fois par le même point. Les attracteurs qui caractérisent ces systèmes, incluent à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires, ce qui rend impossible toute prévision à long terme.

3.3 Les systèmes dynamiques et la théorie du chaos.

Des systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceau, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires, alors qu'il sont régis par des lois déterminées. Cette imprédictibilité est appelée chaos.
On appelle la branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos : la théorie du chaos.

Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme ≪ Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme, et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? ≫ ou ≪ Le comportement à long terme du système dépend-t-il des conditions initiales ? ≫.

Un objectif important est la description des points fixes, ou états stationnaires, du système : ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles elle n'évolue plus avec le temps. Certains de ces points fixes sont attractifs : ce qui veut dire que si le système parvient à leur voisinage, il va converger vers le point fixe.

3.3.1 Oscillateur amorti et point attracteur.

On appelle point fixe ou point stationnaire, tout point X de l'espace des phases tel que $f(X) = 0$.
Un point fixe $X \in \mathbb{R}^2$ est dit:

- stable si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ tel que $\mid X - X(0) \mid < \delta \Rightarrow sup_t \mid X - X(t) \mid < \epsilon$
- asymptotiquement stable, ou attractif, s'il existe un $\delta > 0$ tel que $\mid X - X(0) \mid < \delta \Rightarrow lim_{t->\infty} X(t) = X$
- instable ou répulsif s'il n'est pas stable.

3.3.2 Oscillateur entretenu et solution périodique.

Cependant, dans un système dynamique chaotique, nous avons vu que les équations qui régissent le système ne sont pas linéaires. Il faut donc linéarise l'application f au voisinage du point fixe.
Si on prend X une perturbation autour d'un point fixe. Le développement de f au premier ordre au voisinage du point fixe s'écrit, compte tenu de $f(0) = (0,0)^t$:

$$f(X) = F(0)X + o(\mid X \mid^2)$$

où $F(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de f en $(0,0)^t$.
Équation de Van der Pol:

$$\ddot{\theta} - \gamma_0 (1 - (\frac{\theta}{\theta_0})^2)\theta + \dot{\omega^2}\theta = 0$$

Prenons un exemple, on se place dans le cas ou le point fixe est répulsif ($\epsilon > 0$). Ici $\epsilon = 0,4, X_0 = (-1,3)$ puis $X_0 = (-1,0)$, d'après Van der Pol on a :

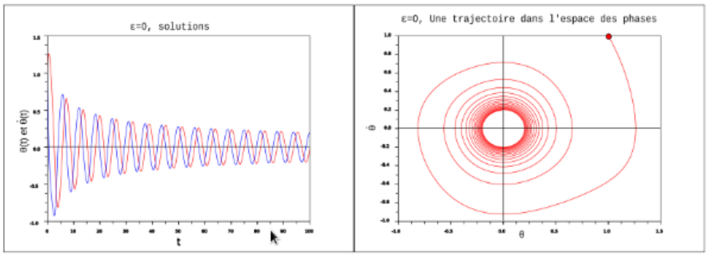


Figure 5: Equation de Van der Pol, $\epsilon = 0$

Le point fixe ne semble pas attractif mais si l'on pousse le temps de la simulation à t=1000, les solutions semble s'amortir de plus en plus pour converger vers $(0, 0)$. Afin de s'assurer que cette convergence n'est pas un simple effet numérique, il faut poursuivre les tests. Avec $-0,01 < \epsilon < 0,01$, on garde le même temps de simulation. Ainsi, pour $\epsilon = 0.01$, le point fixe est répulsif et pour $\epsilon = -0.01$ il est attractif. C'est cependant un nouveau mode d'attraction, on ne parle plus de point attractif mais de trajectoire attractive.

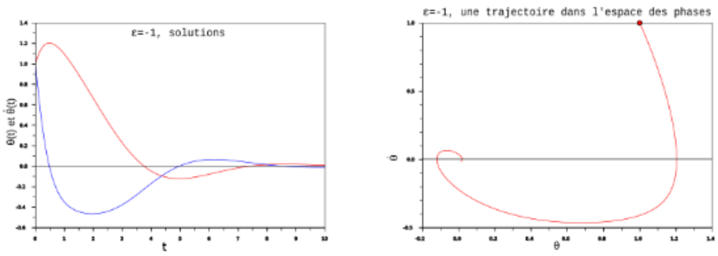


Figure 6: Equation de Van der Pol, $\epsilon = -1$

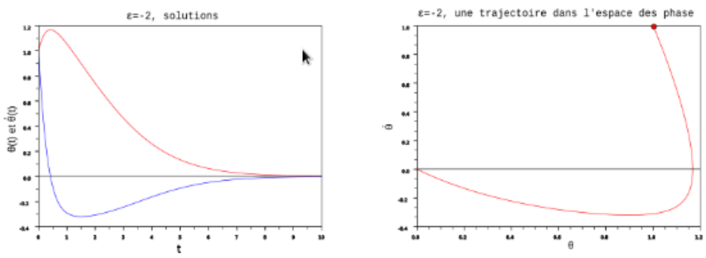


Figure 7: Equation de Van der Pol, $\epsilon = -2$

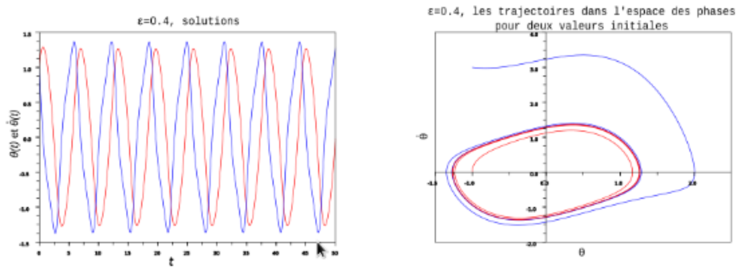


Figure 8: Equation de Van der Pol, $\epsilon = 0,4$, le point fixe (0,0) est répulsif, mais une trajectoire semble attractive

Ainsi, lorsque $\epsilon > 0$ le point fixe est répulsif. Apparaît alors une nouvelle forme de convergence, vers une solution périodique, qui est une variété d'attracteur. D'après Poincarré: si on prend $X = f(X)$ un système dynamique dans $\mathbb{R}^2$, et $X(X_0, t)$ une trajectoire bornée de ce système, alors une des alternatives suivante est réalisée:

- X est une solution périodique.
- X tend vers une solution périodique.
- X tend vers un point fixe.

De même, on s'intéresse aux points périodiques : les états du système qui se répètent au bout d'un certain nombre de pas (leur période).
Les points périodiques peuvent également être attractifs. Le théorème de Charkovski donne une contrainte sur l'ensemble des périodes possibles des points d'un système dynamique à variable réelle et fonction d'évolution continue. Notamment, s'il existe un point de période 3, il existe des points de période quelconque.

3.3.3 Oscillateur forcé et attracteur étrange.

Il est possible de quantifier l'ordre du chaos en déterminant la dimension de l'attracteur étrange, c'est à dire sa capacité à remplir une région donnée de l'espace phase. Une méthode consiste à introduire un espace des phases avec un petit nombre p de variables: si la dimension p de l'espace de construction est inférieure à celle de l'attracteur, on obtient une projection de la trajectoire. On augmente alors la dimension de l'espace de construction en ajoutant des variables. Si la dimension calculée du diagramme finit par saturer, c'est la signature d'un chaos et la valeur de saturation est la dimension fractale de l'attracteur. Si au contraire cette dimension croît avec la dimension de l'espace de construction, c'est que le système est aléatoire.

Tentons d'expliquer ceci. Prenons $X = f(X)$ et $\phi = \phi_t, t > 0$ le flot associé. Un sous ensemble $A \in \mathbb{R}^n$ de l'espace des phases est un attracteur si:

- A est compact
- A est invariant par le flot ϕ
- A est de volume nul
- A est inclus dans un domaine B de l'espace des phases, de volume non nul, appelé bassin d'attraction de A.
- Le bassin B est tel que pour $X_0 \in B$, la trajectoire passant par X_0 converge vers A au sens où la distance de A à $X(X_0, t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Ainsi, un attracteur est un ensemble compact qui attire les trajectoires.
Le bassin d'attraction de l'attracteur peut être de forme très complexe, même si l'attracteur est simple.
Maintenant que la notion d'attracteur est établie nous pouvons introduire les attracteur étranges: oscillateur forcé et amorti. Concrètement on rajoute a l'oscillateur de Van der Pol un force extérieur d'intensité variable et périodique :

$$\ddot{\theta} + \gamma\ddot{\theta} + sin\theta = Acos\omega\theta$$

L'attracteur de Lorenz est un exemple d'attracteur étrange. Le système le décrivant est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} & = \sigma(y - x) \\ \dot{y} & = rx - xz - y \\ \dot{z} & = xy - bz \end{cases}$$

avec $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ et $r \in [10; 200]$.
On a pour $r = 30$ les trajectoires qui convergent sur un attracteur étrange.(Voir figure ci-dessous)

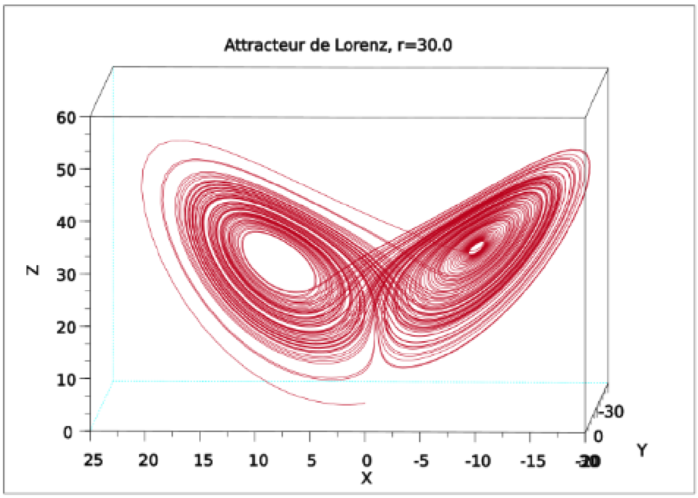


Figure 9: Attracteur de Lorenz, $r = 30$

On peut aussi identifier le chaos à sa manière d'entrer en scène. On connaît trois grands scénarios de transition vers le chaos:

- le doublement de période :
  Ce phénomène ce manifeste sur un oscillateur forcé. A mesure que la contrainte augmente, la période de l'oscillateur est multipliée par deux, puis par quatre, huit, etc. Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés, et lorsque la période est infinie le système est chaotique.

- l'intermittence :
  Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de bruit, des spots. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées deviennent de plus en plus fréquentes et finalement le chaos apparaît.

- la quasi-périodicité :
  Ce phénomène intervient quand un deuxième oscillateur perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux oscillateurs en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. L'influence des deux oscillateurs l'un sur l'autre conduit à un dérèglement de leur mouvement.

Les propriétés du chaos ne dépendent pas du système où il apparaît. Les attracteurs étranges, fragiles structures entre l'ordre et le désordre, et les nombres de Feigenbaum (deux nombres réels exprimant des rapports apparaissant dans les diagrammes de bifurcation de la théorie du chaos) sont toujours présents. On parle de structure universelle.
Le comportement chaotique de systèmes complexes n'est pas une surprise, on sait depuis longtemps que la météorologie comprend des comportements complexes et même chaotiques. La véritable surprise est plutôt la découverte de chaos dans des systèmes presque triviaux. Ainsi, la fonction logistique est un simple polynôme du second degré, pourtant le comportement de ses solutions

est chaotique.
Chaque condition initiale détermine entièrement l'évolution future car il n'y a pas de hasard : le système est déterministe. Cependant, deux conditions initiales très proches peuvent avoir des évolutions complètement différentes. L'évolution du système devient alors imprévisible car une petite erreur de mesure ou un arrondi à la 15ème décimale conduisent à des résultats complètement faux au bout d'un certain temps : c'est le chaos déterministe.
Le météorologue Lorenz a été le premier à réaliser qu'il existe un chaos déterministe. En météo, cela a pour conséquence qu'il sera toujours impossible de prévoir le temps du mois prochain.

3.4 Déterminisme et imprévisibilité d'un système chaotique.

L'hypothèse que l'avenir est déterminé par le présent est très audacieuse. Son succès n'est à priori pas évident. Pourtant, toutes les grandes théories fondamentales de la physique l'ont adoptée, à la suite de Newton.

- Déterminisme d'un système conservatif:

  Nous conviendrons de dire qu'un système physique conservatif est déterministe si et seulement si la dynamique du système associé à chaque condition initiale x_0 ait un et un seul état final $x(t)$. Il faut pour cela qu'il existe une application bijective $\Phi_t : \Gamma \to \Gamma$ de l'espace des phases sur lui-même telle que :

  $$x(t) = \Phi_t(x_0)$$

  Lorsque le temps t varie, cette bijection engendre un flot sur Γ c'est-à-dire un groupe continu à un paramètre Φ_t tel que :

  $$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$$

  Cette description correspond par exemple au flot hamiltonien de la mécanique classique, ainsi qu'au flot géodésique(modèle le plus simple de système hamiltonien).

- Cas d'un système non conservatif:

  Lorsque le système physique considéré est non conservatif, l'application Φ_t n'est pas bijective, et il existe en général un (ou plusieurs) attracteur(s) dans l'espace des phases du système, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'espace des phases invariant sous Φ_t vers lequel converge le point représentatif $x(t)$ du système lorsque le temps t tend vers l'infini, et ce pour presque toute condition initiale x_0.

" *Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.*"

Laplace

4 Conclusion.

De la météorologie à la technologie, de la médecine à la sociologie, cette idée du chaos déterministe a des conséquences universelles et inattendues. À cause d'elle, un phénomène a priori bien connu peut prendre une tournure tout à fait imprévisible : la météo sera à tout jamais incapable de prédire le temps à plus de cinq jours à l'avance. À l'opposé, un phénomène très complexe et attribué au seul hasard peut, grâce au chaos, se révéler compréhensible. Le chaos est resté pendant longtemps synonyme de désordre, de confusion et s'opposait à l'ordre et à la méthode.
Nietzsche sera un des premiers penseurs à réhabiliter la notion de désordre. De nombreux chercheurs en sciences dites « dures » (telles que les mathématiques ou la physique) se sont intéressés aux mouvements dit chaotiques. Ils ont confirmé que, contrairement à la pensée déterministe, le courant de pensées dominant actuellement, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y ait de l'équilibre dans le déséquilibre, de l'organisation dans la désorganisation.
Le non-équilibre aboutit à une nouvelle cohérence, un nouvel état avec des propriétés nouvelles. Le système transforme lui-même ses relations et crée ainsi de nouvelles propriétés lui permettant de réguler son état. C'est ainsi que l'on peut considérer ces systèmes comme capables de s'auto-organiser. La théorie du chaos aurait donc en son sein cette capacité d'auto-organisation ?

" *Le préjugé foncier est de croire que l'ordre la clarté la méthode doivent tenir à l'être vrai des choses, alors qu'au contraire, le désordre, le chaos, l'imprévu, n'apparaissent que dans un monde faux ou insuffisamment connu, –bref, sont une erreur ; c'est là un préjugé moral, qui vient de ce que l'homme sincère, digne de confiance, est un homme d'ordre de principes, et a coutume d'être somme toute, un être prévisible et pédantesque. Mais il est tout à fait impossible de démontrer que "l'en soi" des choses se comporte selon cette définition du fonctionnaire modèle* "

F. Nietzsche, la volonté puissance, tome 1, p 89 Gallimard.

References

[1] Définition de l'effet papillon. alliancespirite.org, 2005.

[2] L'attracteur étrange de Lorenz. bcev.nfrance.com.

[3] Attracteurs étranges et chaos. Cédric Arnoux.

[4] Eric Goncalvès Da Silva. Introduction aux systèmes dynamiques et chaos. 2004.

[5] L'effet papillon dialogus2.org.

[6] Qu'est-ce qu'un attracteur étrange ? Faber Sperber, 2008.

[7] La volonté de puissance. F.Nietzsche, 1901.

[8] Espace des phases. futura sciences.com, 2015.

[9] Pourquoi parle-t-on de la théorie du chaos ? Jean-Luc Nothias, 2009.

[10] La théorie du chaos. just.loic.free.fr, 2005.

[11] Florian Lemarié. *Algorithmes de Schwarz et couplage océan-atmosphère.* PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2008.

[12] Henri Poincaré invente le chaos déterministe. matierevolution.fr, 2008.

[13] M.Laforest and Application des mathématiques : Le chaos dans les équations . A.Saucier.

[14] La théorie du chaos. passion meteo.net.

[15] Quelques éléments sur la théorie du chaos. Philippe Etchecopar.

[16] Le non-hydrostatisme pour les débutants. Pierre Benard, 2000.

[17] L'effet papillon. Pierre Lazuly, 2005.

[18] Jeux numériques avec le chaos. Pierre Puiseux.

[19] L'effet papillon dans l'effet papillon ! Stéphane Jourdan, 2007.