Modelo depredador-presa: León, Ñu y Cebra.

CARLOS RIOLO 735124
CARLOS_RIOLO@ITESO.MX
MARIANNE TRUJILLO 740694
MARIANNE.TRUJILLO@ITESO.MX
ÚRSULA VARGAS 740388
URSULA.VARGAS@ITESO.MX

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

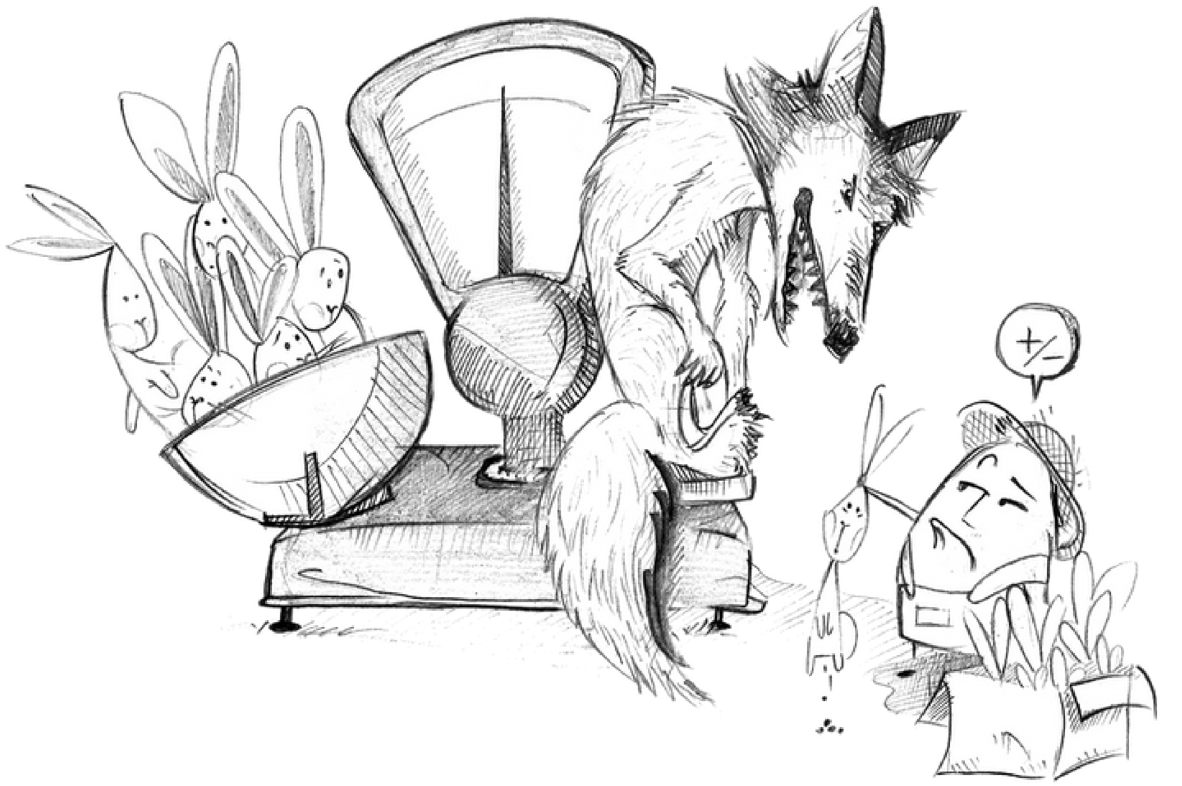
Simulación matemática | 2023

TABLA DE CONTENIDO

LODKA-VOLTERRA

¿QUÉ ES EL MODELO DEPREDADOR-PRESA?

El modelo utiliza las ecuaciones de Lotka-Volterra para describir la dinámica de sistemas biológicos en los que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador. Por ejemplo una población formada por lobos y conejos.



¿CÓMO SE DESCRIBE Y RESUELVE ESTE MODELO?

Tenemos dos poblaciones cuya evolución depende del **tiempo** y de las **interacciones** entre las mismas. La modelización de esta situación requiere de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas.

Denotando por $L(t)$ el número de lobos y por $C(t)$ el número de conejos, las ecuaciones propuestas por Lotka y Volterra que representan el modelo matemáticamente son:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} & = \alpha C - \beta L \cdot C, \\ \frac{dL}{dt} & = \delta L \cdot C - \gamma L. \end{cases}$$

1° Ec. Nos indica que los conejos aumentan de modo proporcional a su número, pero disminuyen de forma proporcional a la cantidad de encuentros entre las dos especies porque los **lobos** se **comen** a los **conejos**

α, β, δ y γ son números positivos y representan las interacciones de las dos especies.

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \alpha C - \beta L \cdot C, \\ \dfrac{dL}{dt} = \delta L \cdot C - \gamma L. \end{cases}$$

***suponemos que los conejos no tienen dificultad para encontrar comida independientemente de cuántos haya

α, β, δ y γ son números positivos y representan las interacciones de las dos especies.

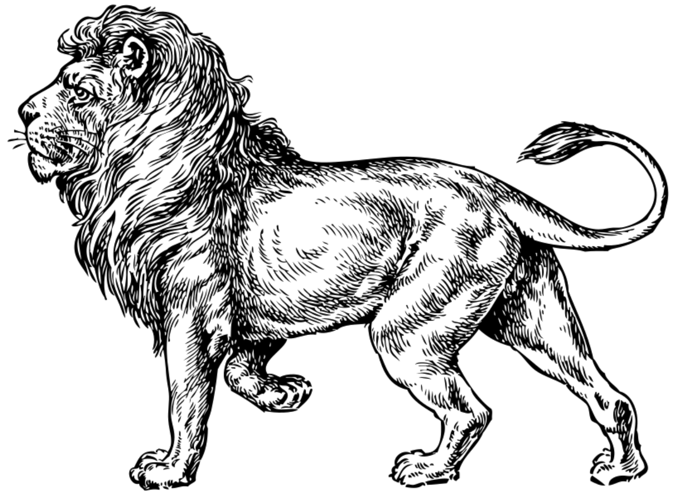
$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} & = \alpha C - \beta L \cdot C, \\ \dfrac{dL}{dt} & = \delta L \cdot C - \gamma L. \end{cases}$$

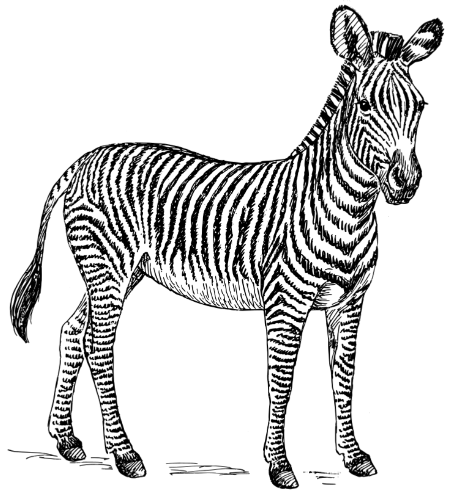
2° Ec. La cantidad de lobos aumenta de modo proporcional a las interacciones entre las dos especies, pero disminuye de modo proporcional a la cantidad de lobos.
(+ lobos = - disponibilidad de alimento)

OBJETIVOS

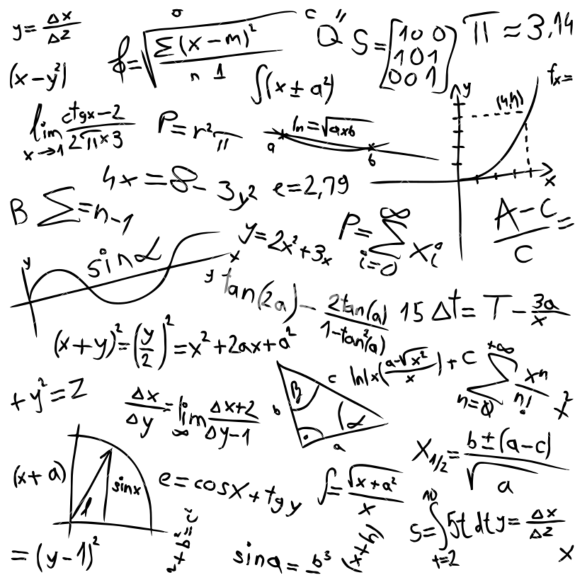
GENERAL

Simular un modelo de depredador-presa para Leones, Ñus y Cebras mediante el uso de ecuaciones diferenciales.





OBJETIVOS



ESPECÍFICOS

- *Definir* nuestras condiciones iniciales para los leones, ñus y cebras.
- *Plantear* y *resolver* las ecuaciones diferenciales que representan el modelo.
- *Representar* la solución de forma gráfica.

PLANTEAMIENTO

USO DE MODELO LODKA-VOLTERRA

Se busca modelar a través de ecuaciones diferenciales el comportamiento de las 3 especies (Ñus, Leones y Cebras) en una dinámica donde éstas conviven y los Leones desempeñan la función de depredador, mientras que los Ñus y las Cebras lo hacen de presas.

MODELO QUE REPRESENTA AL PROBLEMA

ENFOQUE SIMPLISTA CON MUTUALISMO

Modelo que describe el comportamiento de las 3 especies (Búfalos, Leones y Zebras, respectivamente):

$$\frac{dx}{dt} = 0.405x - 0.81xy + 0.015xz$$

$$\frac{dy}{dt} = -1.5y + 0.125(0.81xy + 0.75yz)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.34z - 0.75yz + 0.02xz$$

- En el Enfoque Simplista, los parámetros de **0.81** y **0.75** son el ratio de muerte por interacción con Leones, los Leones comen más Ñus que Cebras (28% vs. 19%)
- Los términos *xz* se refieren al mutualismo entre Ñus y Cebras

MODELO QUE REPRESENTA AL PROBLEMA

ENFOQUE LOGÍSTICO

- Se introduce el crecimiento Logístico de las Cebras y los Ñus

$$\frac{dx}{dt} = 0.405x(1 - \frac{x}{12}) - 0.81xy + 0.015xz$$

$$\frac{dy}{dt} = -1.5y + 0.125(xy + yz)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.34z(1 - \frac{z}{12}) - 0.75yz + 0.02xz$$

MODELO QUE REPRESENTA AL PROBLEMA

ENFOQUE LOGÍSTICO

- Se introduce el crecimiento Logístico de las Cebras y los Ñus

$$\frac{dx}{dt} = 0.405x(1 - \frac{x}{12}) - 0.81xy + 0.015xz$$

$$\frac{dy}{dt} = -1.5y + 0.125(xy + yz)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.34z(1 - \frac{z}{12}) - 0.75yz + 0.02xz$$

¿QUÉ SE SIMULA Y QUÉ LIMITACIONES TIENE EL MODELO?

Simula tres poblaciones cuya evolución depende del tiempo y de las interacciones entre las mismas.

A pesar de ser una buena aproximación, las limitaciones recaen en que se omiten muchos factores que interactúan en el ecosistema y se asumen constantes, lo que hace que no sea un modelo exacto y por lo mismo no es tan relevante.

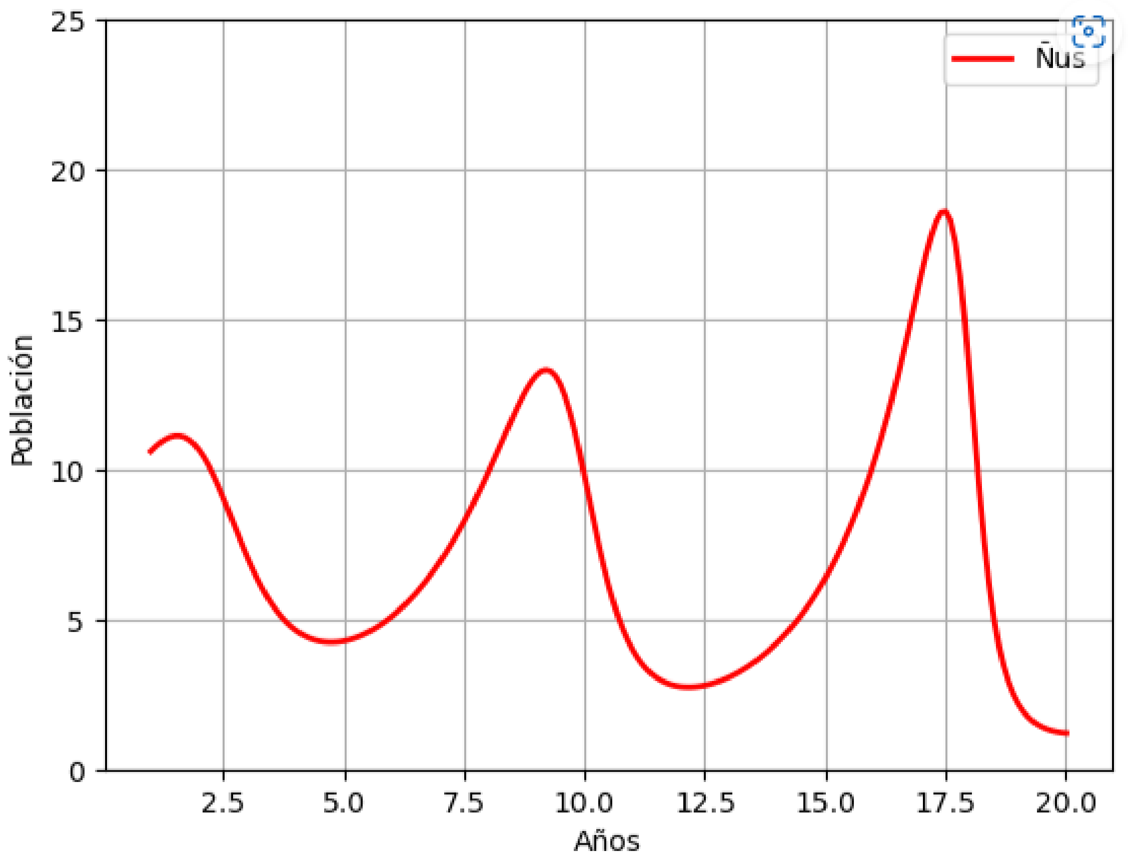
SIMULACIÓN

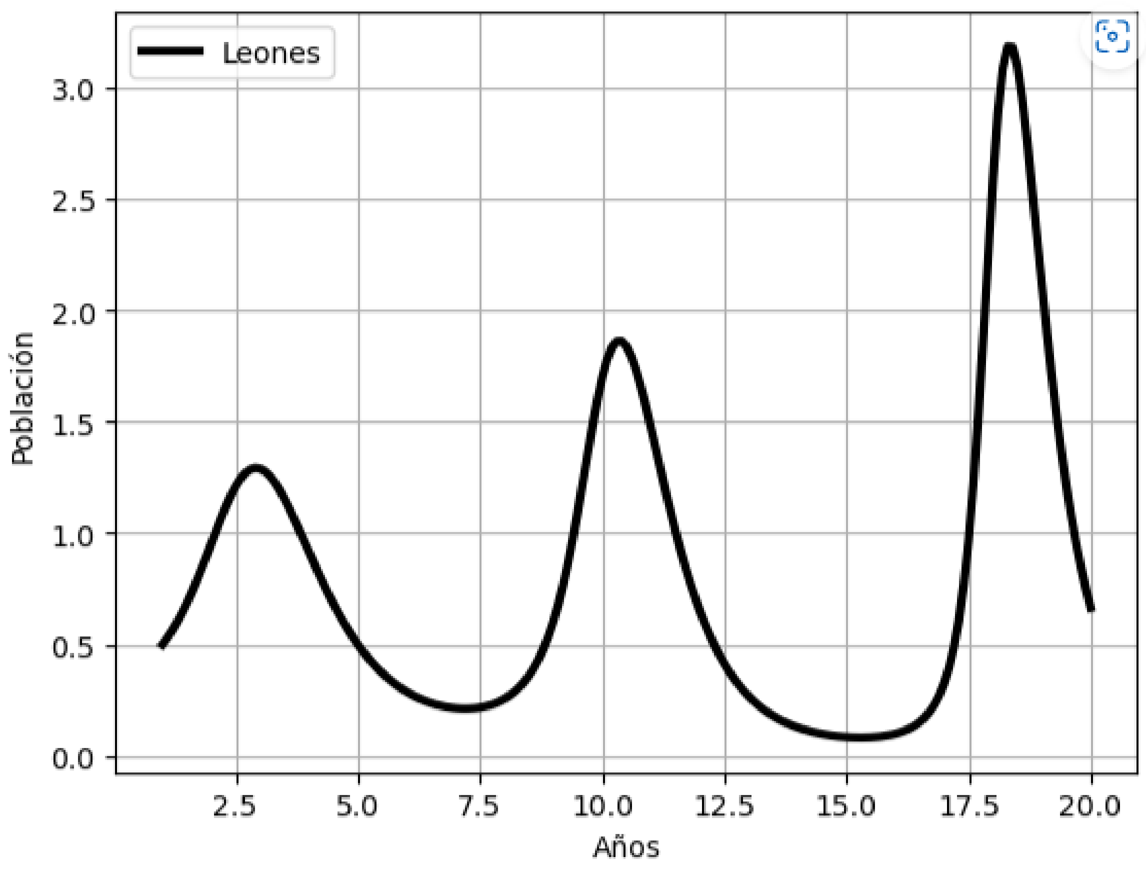
El periodo de *tiempo* es de 1 a 20 años
Condiciones iniciales: 10.6, 0.5, 10.5

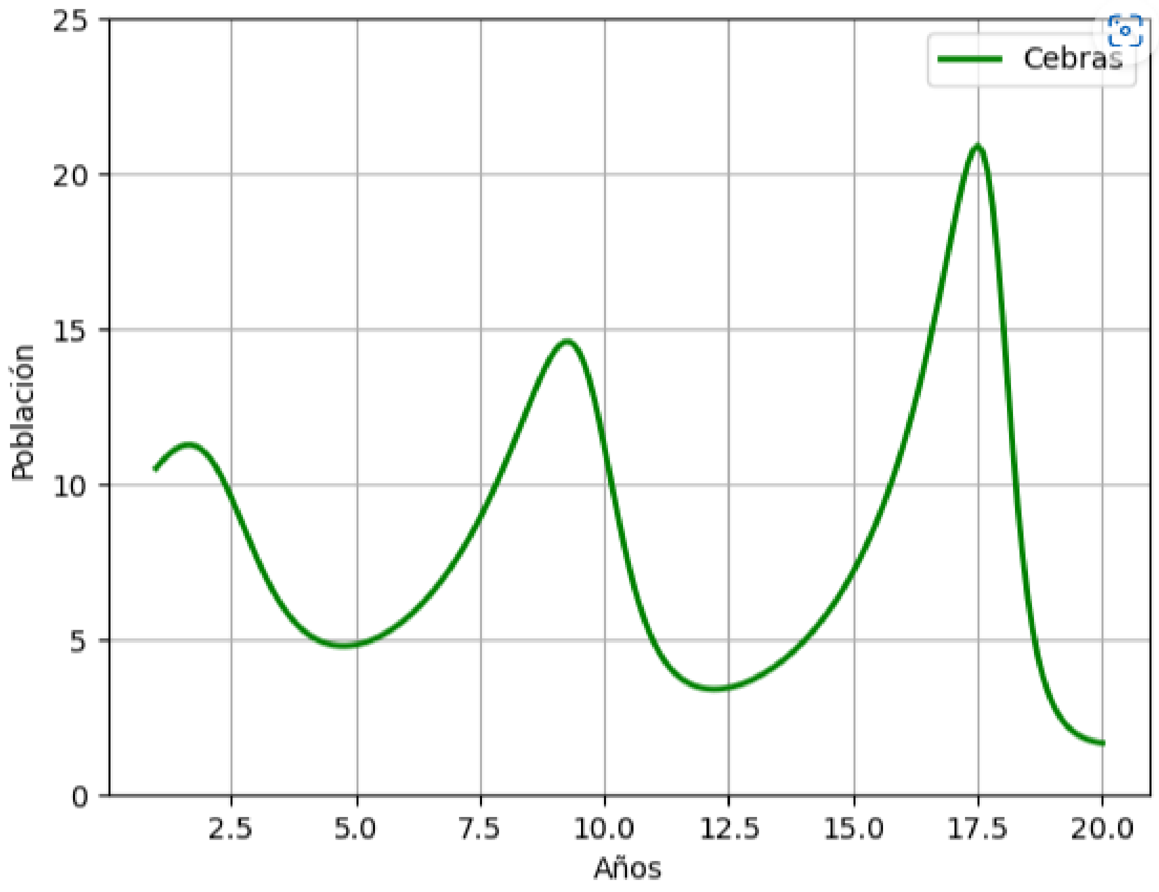
** solve_ivp que utiliza la función del modelo, el periodo de tiempo y las condiciones iniciales

VISUALIZACIÓN DE SOLUCIÓN

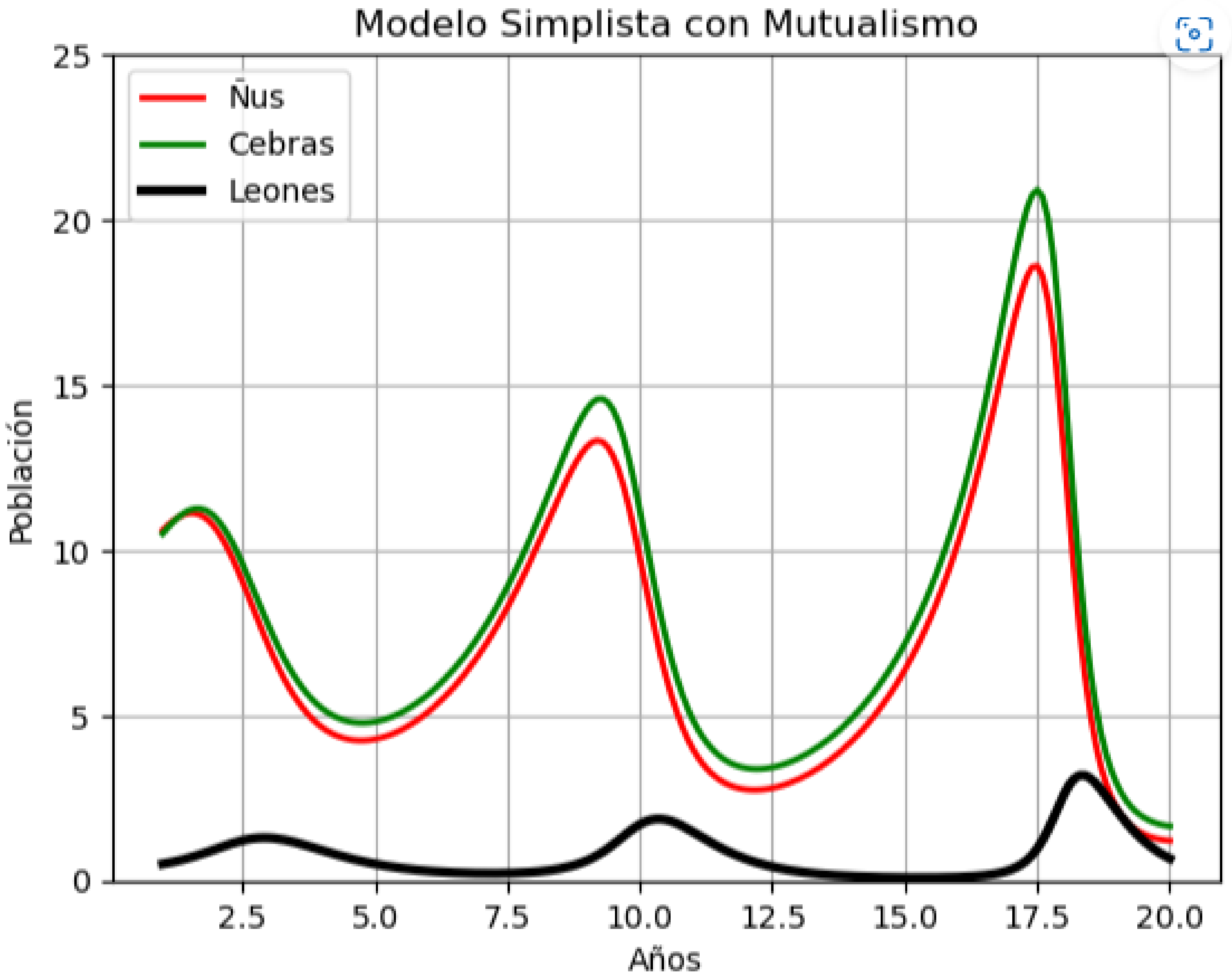
Modelo Simplista con Mutualismo





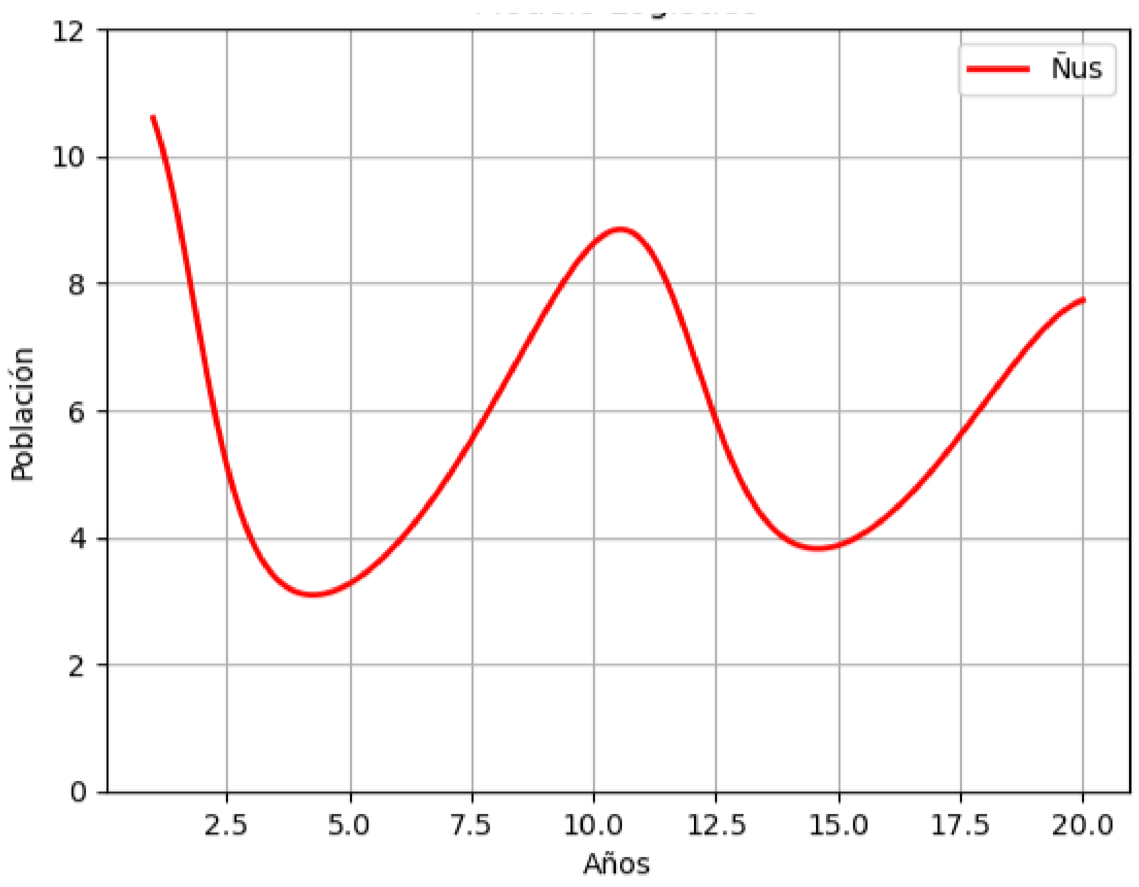


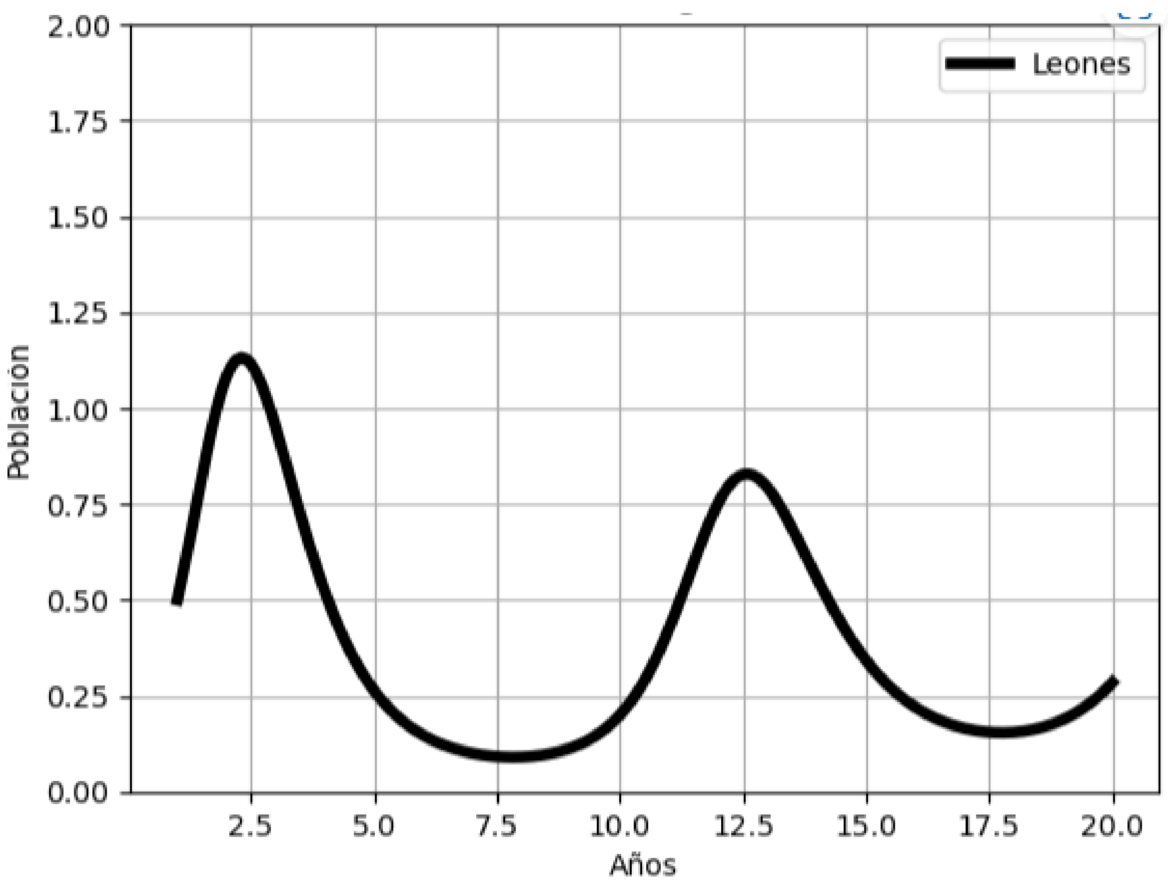
VISUALIZACIÓN DE SOLUCIÓN

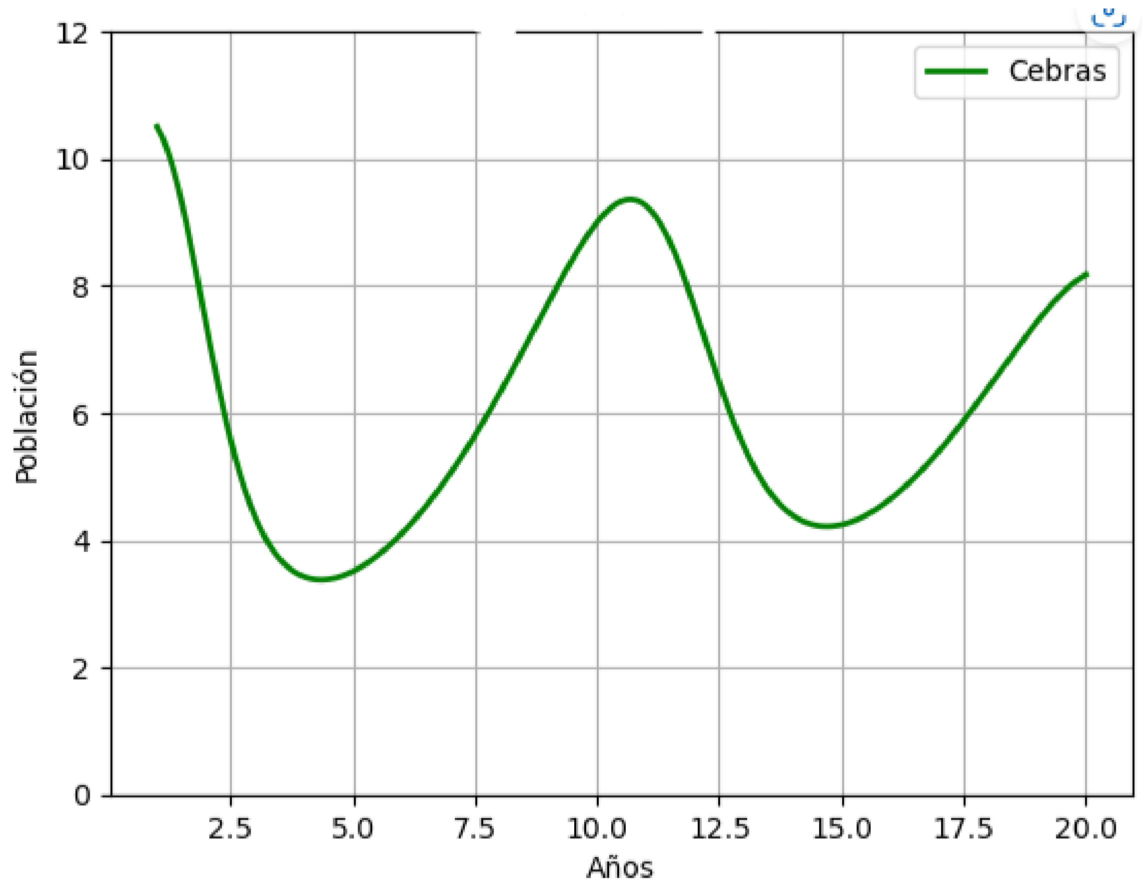


VISUALIZACIÓN DE SOLUCIÓN

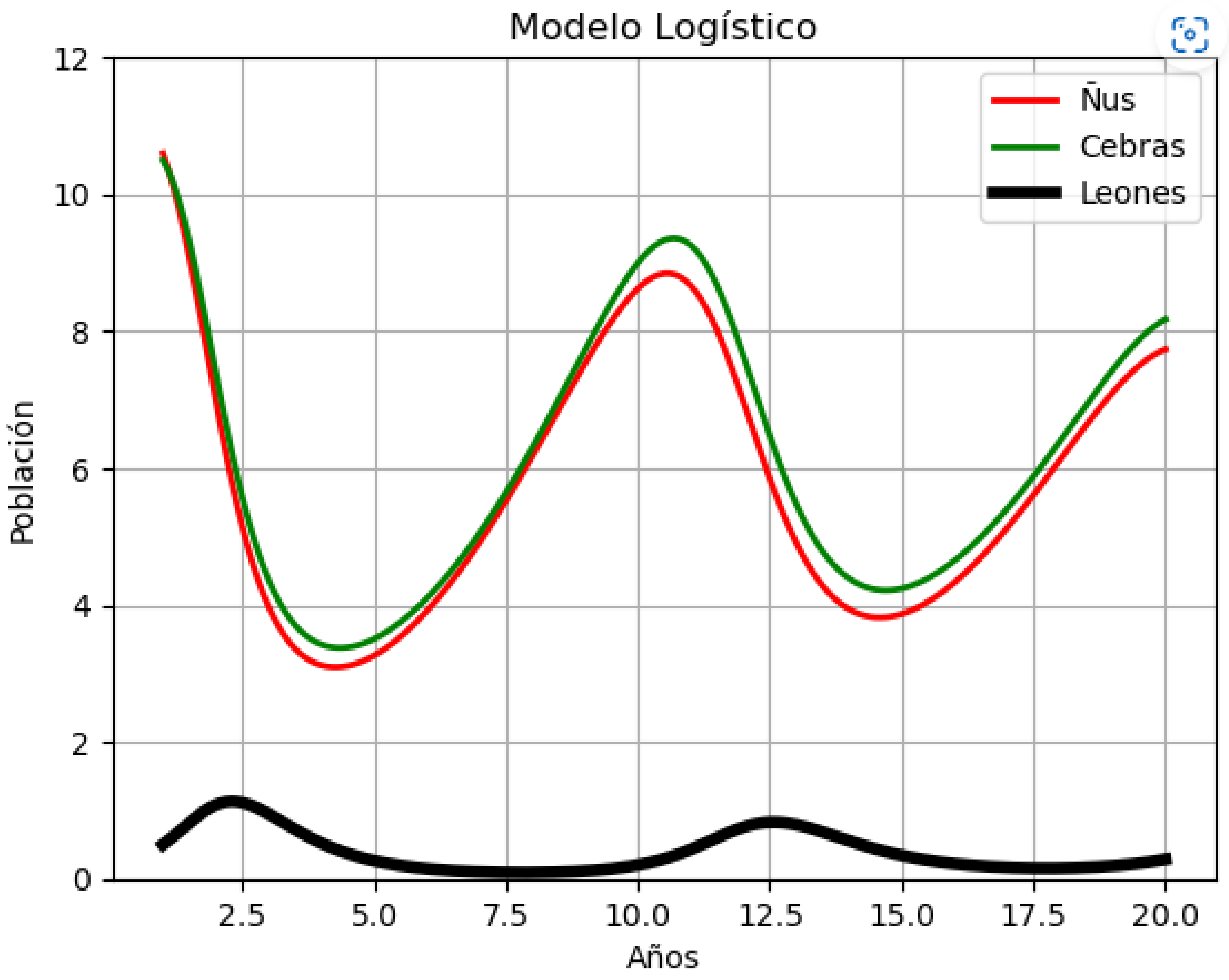
Modelo Logístico



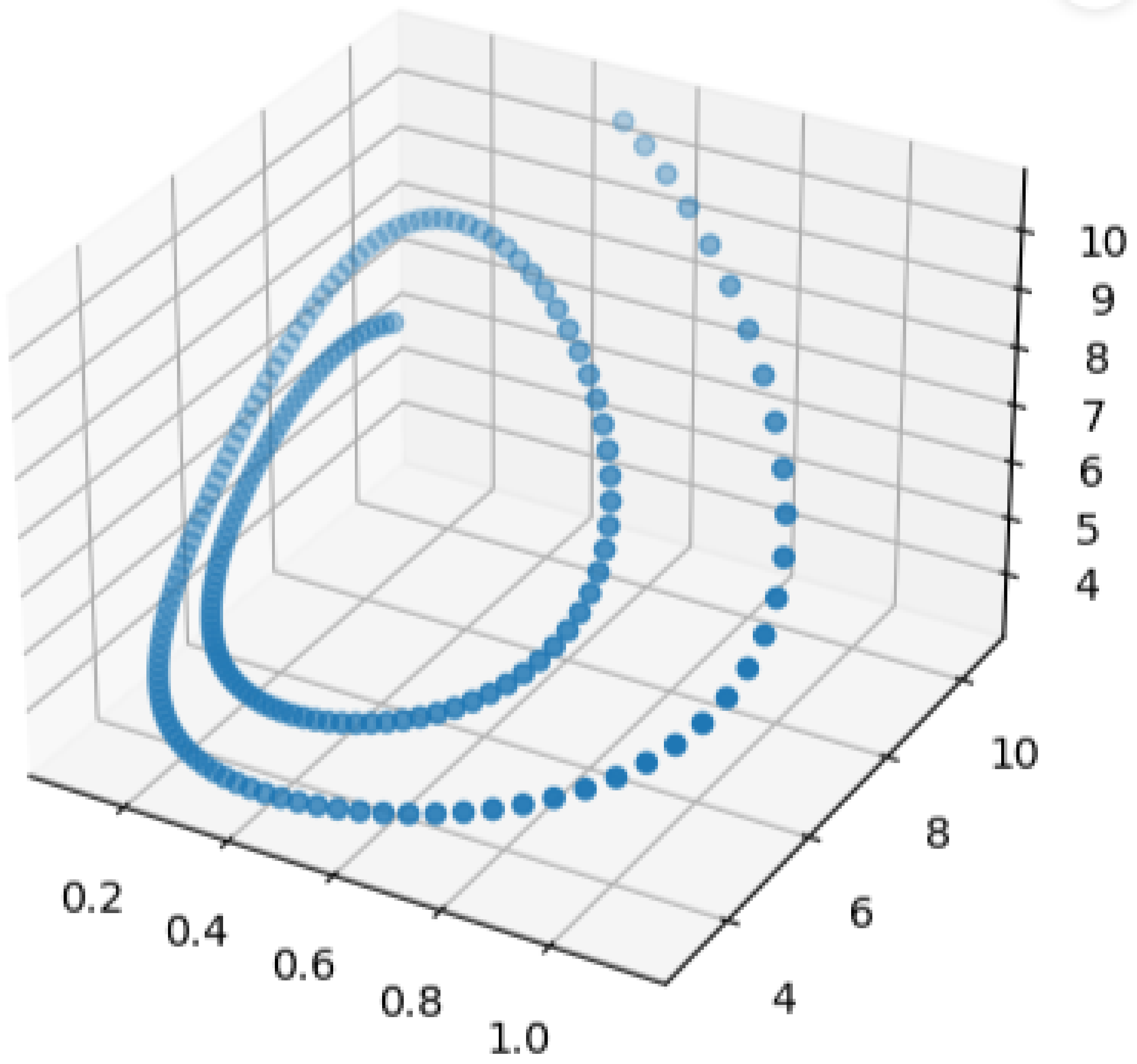




VISUALIZACIÓN DE SOLUCIÓN

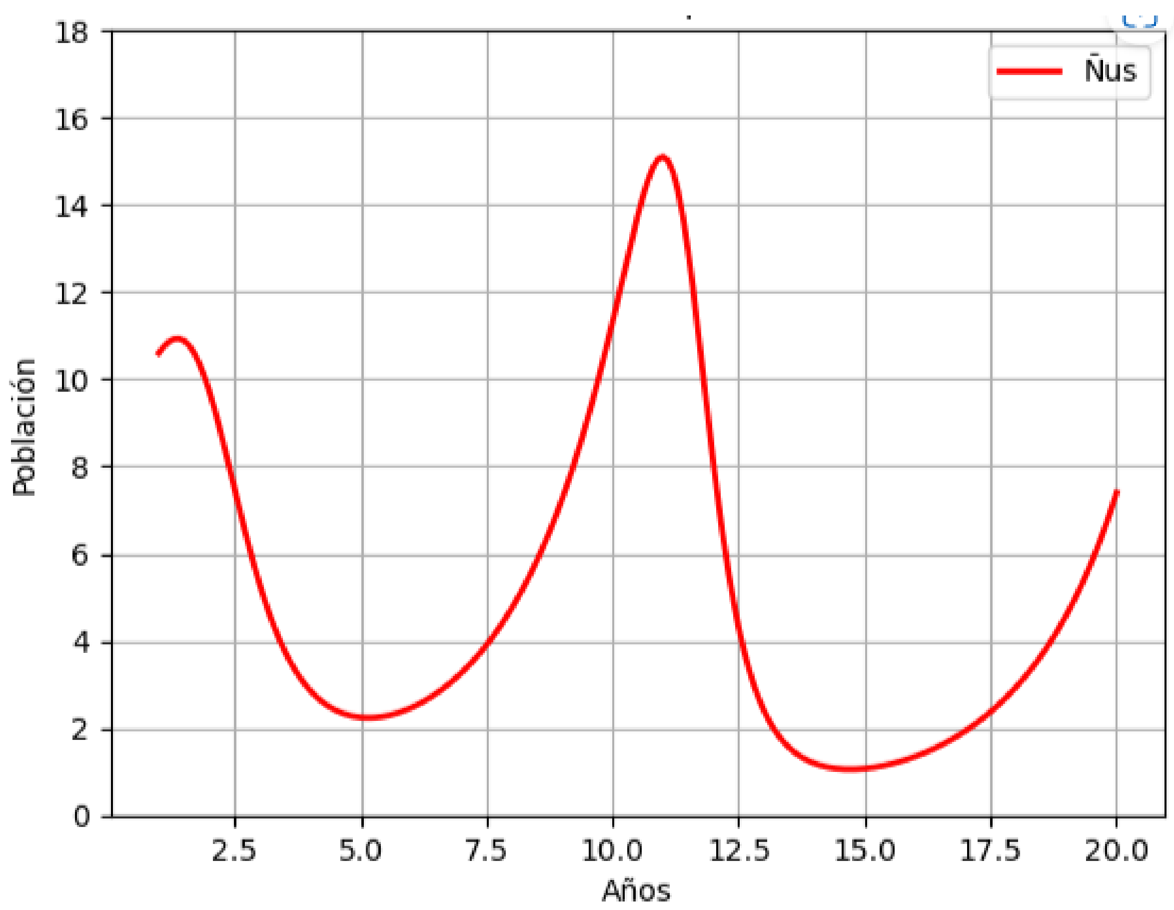


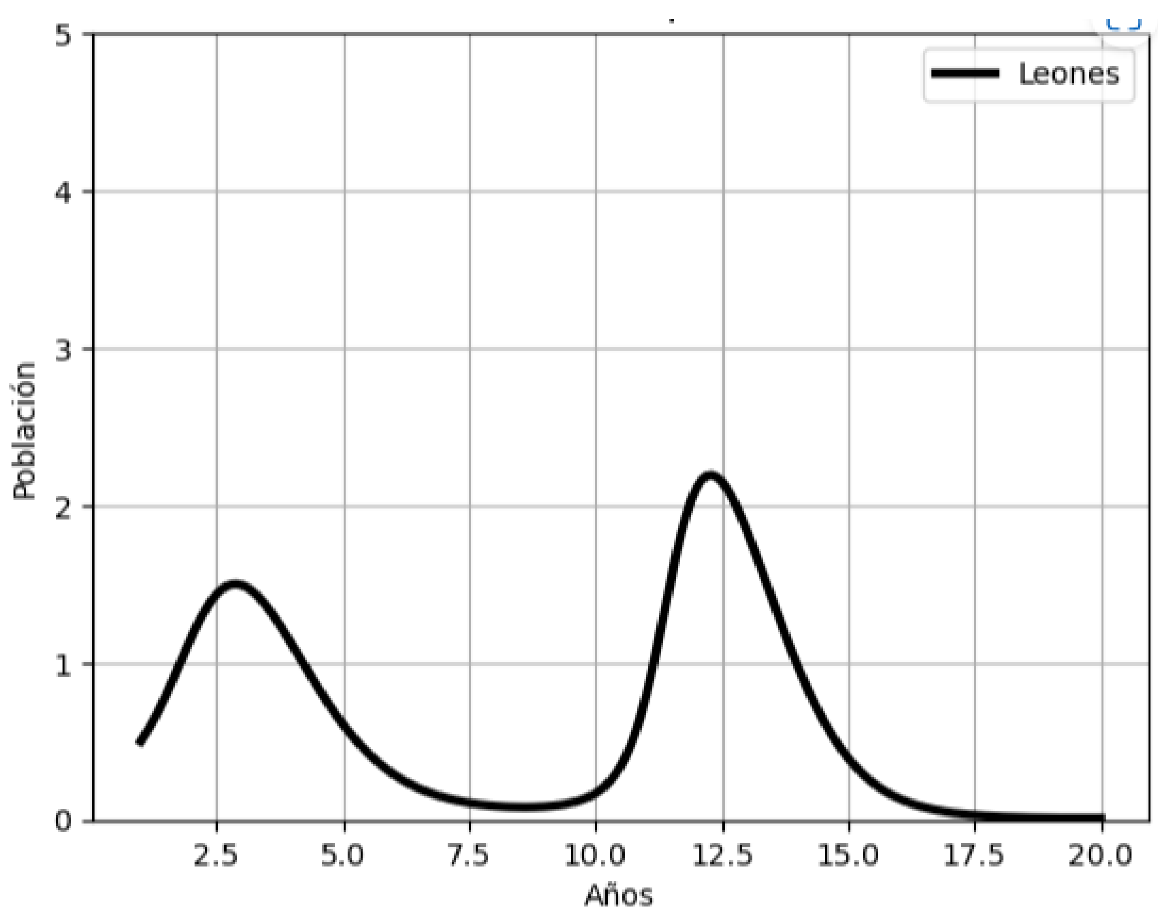
VISUALIZACIÓN DE SOLUCIÓN

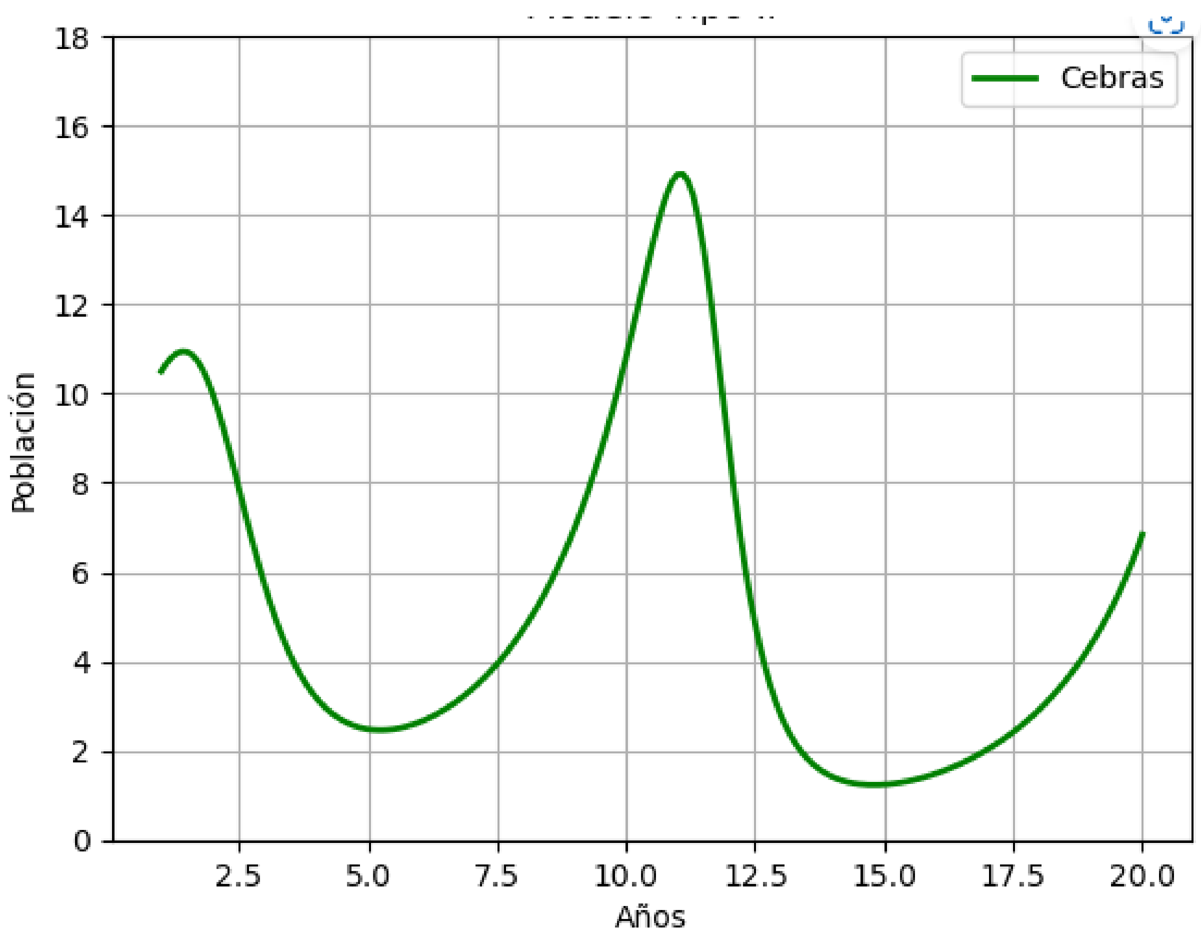


VISUALIZACIÓN DE SOLUCIÓN

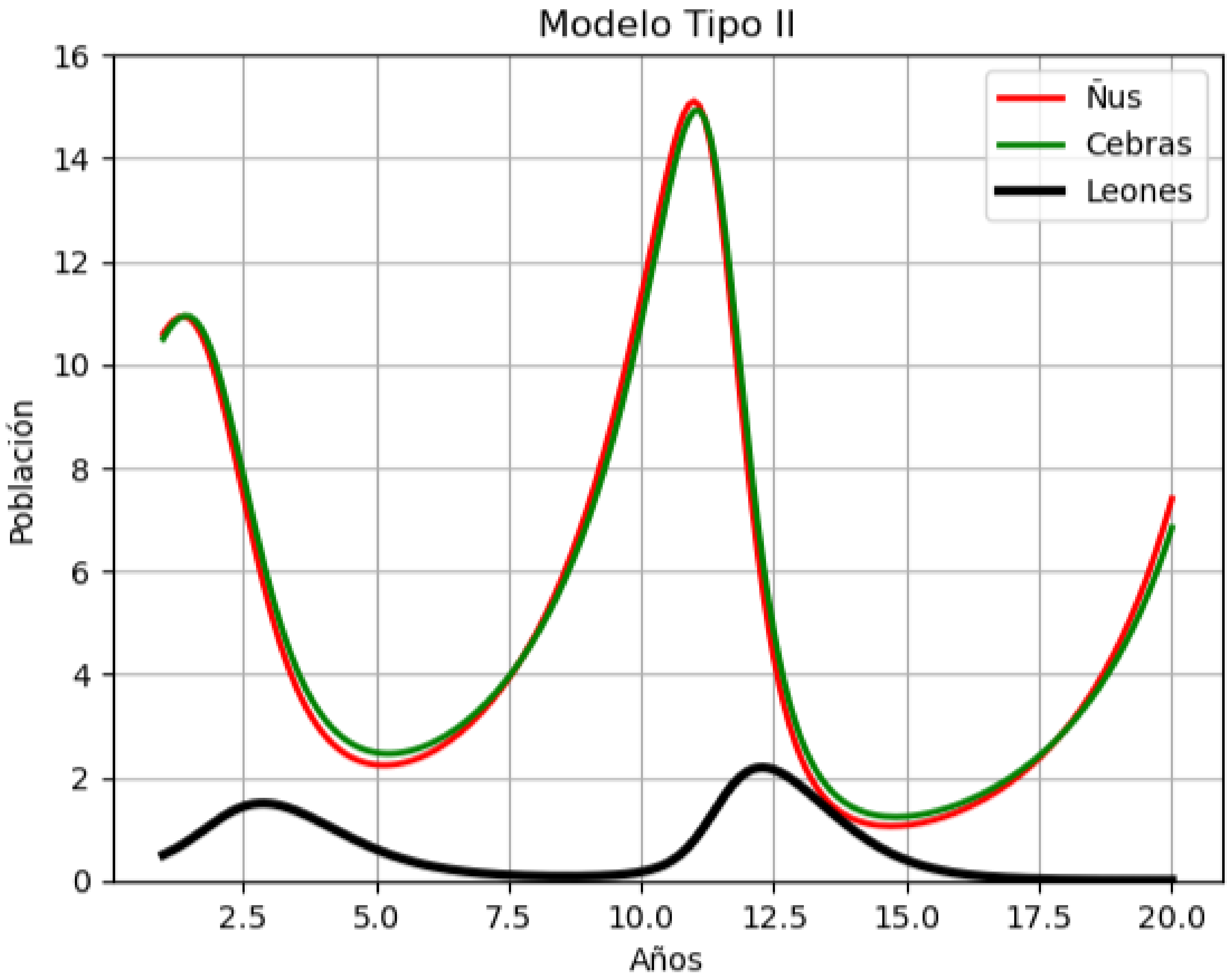
Enfoque tipo ll: Combinación





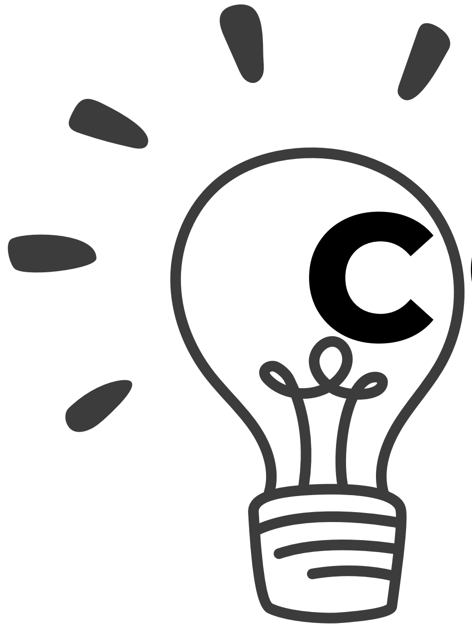


VISUALIZACIÓN DE SOLUCIÓN



INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Las simulaciones pueden ayudar a describir las interacciones, pero son muy sensibles a factores externos que normalmente presentan un grado de imprevisibilidad como las sequías, plagas, intervención humana, etc. Debido a esto los modelos de hacen con supuestos que ignoran o mantienen constantes muchos de estos factores para que su simulación sea posible. Podría interpretarse como una tendencia que como un dato confiable, ya que no se aproximan lo suficiente a los censos vistos.



CONCLUSIÓN

- Hemos logrado EXITOSAMENTE simular un modelo de depredador-presa para Leones, Ñus y Cebras mediante el uso de ecuaciones diferenciales
- De igual forma, pudimos definir nuestras condiciones iniciales para los Leones, Ñus y Cebras.
- Con la información obtenida a través de la investigación, se logra plantear y resolver las ecuaciones diferenciales que representan el modelo.
- Finalmente se pudo representar la solución de forma gráfica.

REFERENCIAS

Jørgensen, S. E., & Bendoricchio, G. (2001). Fundamentals of Ecological Modelling (Vol. 482). Elsevier.

Falcó, J. (2021, 22 febrero). Simulación del Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra. Javier Falcó. https://www.uv.es/falbe/MatExp/aplicada/modelizacion/Lotka-Volterra/

Libretexts. (2022). 1.4: El modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra. LibreTexts Español. https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Matematicas_Aplicadas/Biologia_Matematica_(Chasnov)/01%3A_Din%C3%A1mica_poblacional/1.04%3A_El_modelo_de_depredador-presa_de_Lotka-Volterra