S3: Časticové systémy, rovnice pohybu prvého rádu, integračné metódy na výpočet rýchlosti a pozície, stavový vektor systému, vonkajšie sily, obmedzujúce podmienky – constraints, sily odozvy, kolízie častica - rovina.

Ráchelová M.,Bodišová M.

1 Časticové systémy

Časticové systémy (ďalej ČS) sú technika renderovania, ktorá sa používa na simuláciu objektov a látok, ktoré nemajú presne definovaný povrch a hrany, sú dynamické, plynné alebo kvapalné. Sem spadá napríklad oheň, dym, voda, tráva, dážď, padajúci sneh, oblaky, hejná vtákov a mnohé iné.

Systém častíc pozostáva z jednej alebo viacerých jednotlivých častíc, ktoré sa riadia Newtonovými pohybovými zákonmi. Každá z týchto častíc má atribúty, ktoré priamo alebo nepriamo ovplyvňujú správanie častíc alebo v konečnom dôsledku ako, kedy a kde sa častice vykresľujú. Častice sú často grafické primitivy, ako sú napríklad body alebo čiary. Ďalšou spoločnou charakteristikou všetkých systémov častíc je zavedenie nejakého typu náhodného prvku. Tento náhodný prvok sa dá použiť na riadenie atribútov častíc, ako je napríklad poloha, rýchlosť a farba. Zvyčajne je náhodný prvok riadený určitým typom preddefinovaných stochastických obmedzení, ako sú hranice, rozptyl alebo typ distribúcie. Z týchto vlastností plynú nasledujúce výhody, že komplexné systémy vedia byť vytvorené jednoducho, a že úroveň detailu je ľahko prispôsobiteľná. To znamená, že ak je objekt tvorený ČS a je v diaľke, môže sa na modelovanie použiť menej častíc, ako keď je bližšie pri kamere.

ČS sa od modelovania povrchov odlišujú v týchto základných vlastnostiach:

1. Objekt nie je reprezentovaný množinou jednoduchých povrchových elementov, ale ako oblak veľmi malých častíc, ktoré vytvárajú objem objektu
2. ČS nie je statická entita, ale častice sa tvoria, menia a zanikajú
3. Objekt reprezentovaný ČS nie je deterministický - jeho tvar a forma nie sú presne špecifikované pre často využívaný náhodný jav. ČS však môžu byť využité deterministicky na vytváranie určitých objektov (napríklad hlavy)

Pre každý frame animačnej sekvencie s ČS sú vykonávané nasledujúce kroky:

1. Generovanie nových častíc
2. Každá nová častica má priradenú svoju množinu atribútov, ktoré sa môžu časom meniť

3. Zanikanie častíc po uplynutí ich životnosti (zaniknuté častice bývajú prepoužité na novovzniknuté častice)
4. Transformovanie a presunutie zostávajúcich častíc na pozíciu podľa ich dynamických atribútov
5. Renderovanie zostávajúcich častíc

Atribúty častíc v systéme sú:

1. pozícia (p) v [m]: $dp = v$
2. váha (m) v [kg]
3. vektor pohybu (rýchlosť a smer) (v) v [m/s]: $dv = a$
4. momentum (L) v [kgm/s]: $L=mv$
5. akcelerácia (a) v [$m/s2$]: $a = m^{-1}F$ - napr. gravitácia, vietor, používateľ, ...
6. sila (F) in [$kgm/s2$]: $F = ma = dL$
7. veľkosť
8. farbu
9. transparentnosť
10. tvar
11. životnosť

Počiatočná pozícia častíc v ČS je kontrolovaná podľa súradníc X,Y,Z v 3D, dvoch uhlov rotácie, ktoré určujú orientáciu častice, a podľa tvaru objektu, ktorý určuje región v okolí počiatočných súradníc, na ktorých sú častice umiestnené.

2 Rovnice pohybu prvého rádu

Obyčajné diferenciálne rovnice (ďalej ODR, známe aj ako ODE z angl. ordinary differential equation) prvého rádu sú rovnice, ktoré obsahujú funkcie jednej nezávislej premennej a jej prvú deriváciu. Cieľom je vypočítať pôvodnú (nederivovanú) funkciu. ODR môžeme riešiť analyticky - hľadáme integrál, ktorý následne vypočítame, alebo pomocou numerických metód - využitie numerických aproximácií, ktoré aproximujú riešenie ODR.

ODR pohybu prvého rádu sú rovnice, v ktorých hľadáme pozíciu častice $p(t)$ (pozíciu v čase t), keď vieme iba jej zmenu v čase $p'(t)$. Čiže ak máme rovnicu napríklad $p'(t) = ap(t)$, kde a je konštanta, tak analyticky alebo numericky hľadáme riešenie v tvare $p'(t) = F(p(t), t)$.

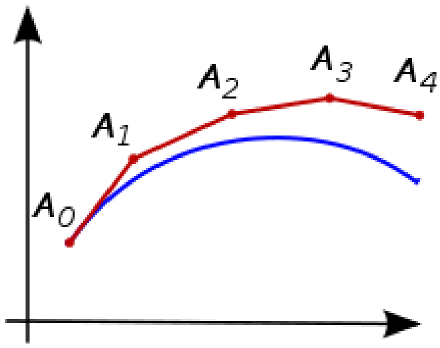
3 Integračné metódy na výpočet rýchlosti a pozície

Integračné metódy na výpočet rýchlosti a pozície poznáme dvoch typov, a to implicitné a explicitné. V explicitných metódach počítame na základe predošlého členu, zatiaľ čo implicitné sú o niečo komplikovanejšie, nakoľko majú neznámu na oboch stranách a vedú k rovniciam typu $F(x) = 0$. Implicitné metódy sú presnejšie.

Explicitné:

1. Euler: $p_{n+1} = p_n + hF(p_n, t_n)$, kde p_0 je počiatočná hodnota

   Tento vzťah sa dá odvodiť z Taylorovho rozvoju. Daná je počiatočná hodnota p(t_0) funkcie p v čase t_0 ako $p(t_0+h) = p(t_0) + hp'(t_0) + O(h^2)$; $p'(t_0) = F(p(t_0), t_0)$. Výhodou je, že je jednoduchý, rýchly a dobre sa implementuje. Chyba je však až $O(h^2)$ a môže byť nestabilný, čo znamená, že kumulovaná chyba môže narásť až na nekonečno.

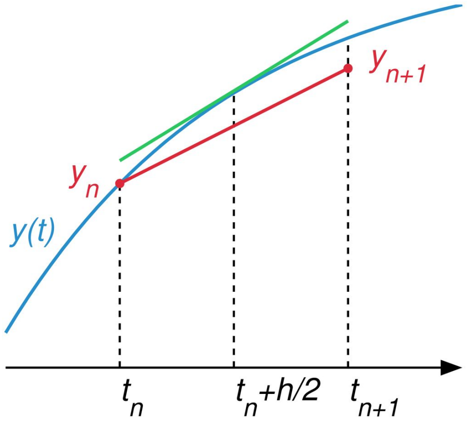


Na obrázku je modrou zaznačená pôvodná krivka a červenou jej aproximácia touto metódou.

2. Mid Point: $p_{n+1} = p_n + hF(t_n + h/2)$

   Využíva aproximáciu derivácie $p'(t + h/2)$ z $p(t)$ v čase $t+h/2$ namiesto jednoduchého $p'(t)$. Nepoznáme však funkciu $p(t)$ alebo jej deriváciu v čase $t+h/2$. Dané je $p'(t+h/2) = F(p(t+h/2), t+h/2)$ a potrebujeme určiť iba $p(t + h/2)$, na čo využijeme Taylorov rozvoj $p(t+h/2) = p(t) + (h/2)p'(t) + O(h^2)$, čím dostaneme výsledné vzťah $p(t+h) = p(t) + hF(p(t)+(h/2)p'(t), t+h/2) + O(h^3)$.

Výhodou je, že je jednoduchý, rýchly a ľahko implementovateľný. Má chybu už iba $O(h^3)$. Vyžaduje si však viac výpočtov, nakoľko F potrebuje vyhodnotiť dvakrát.



Na obrázku je modrou znázornená pôvodná krivka. Predpokladajme, že y_n sa rovná presnej hodnote $y(t_n)$. Zelená priamka je priamka derivácie v stredovom bode a červená priamka je približne paralelná k zelenej priamke. Pomocou červenej priamky vieme potom určiť bod y_{n+1}.

3. Runge Kutta:

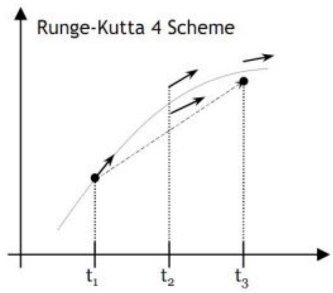
$k_1 = hF(p(t_0),t_0)$

$k_2 = hF(p(t_0) + k_1/2\ ,\ t_0 + h/2)$

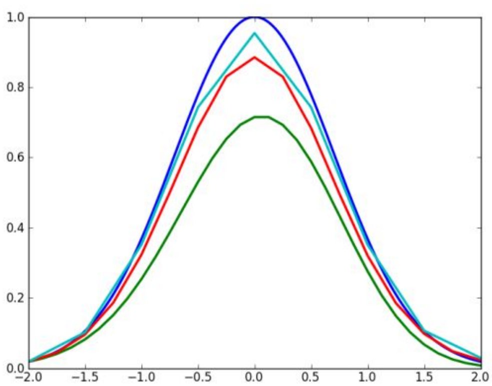
$k_3 = hF(p(t_0) + k_2/2\ ,\ t_0 + h/2)$

$k_4 = hF(p(t_0) + k_3,\ t_0 + h)$

$p(t_0+h) = p(t_0) + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6$



Runge Kutta je najpresnejšia z týchto metód s odchýlkou $O(h^5)$.



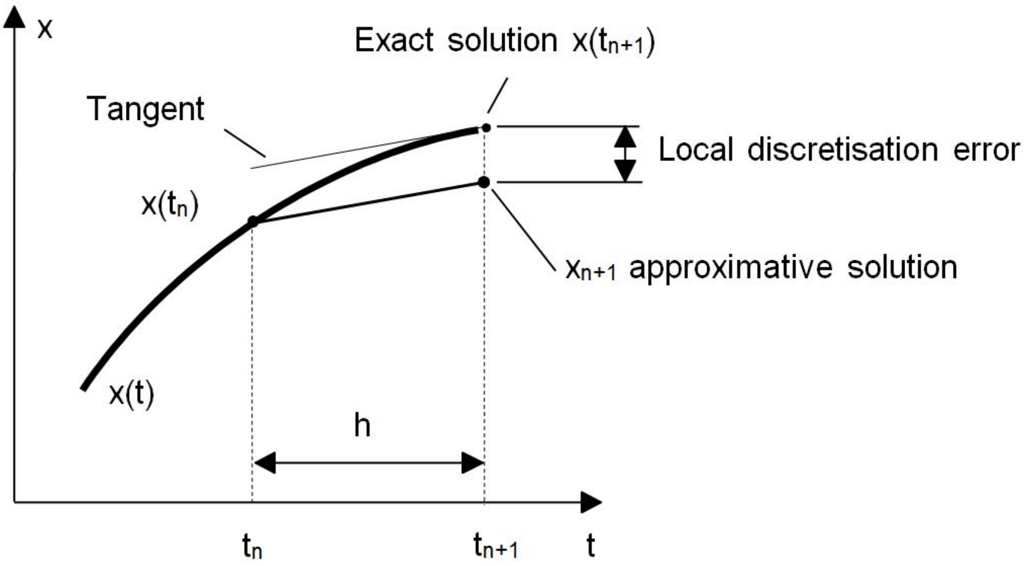
Na obrázku vľavo sa nachádza ukážkové porovnanie týchto metód. Tmavou modrou farbou je znázornená presná hodnota. Svetlou modrou je graf vytvorený pomocou Runge Kutta metódy. Červenou je vyobrazený výsledok Mid Point metódy a zelenou Eulerovej metódy.

Implicitné:

1. Euler: $p_{n+1} = p_n + hF(p_{n+1}, t_{n+1})$

   Implicitná metóda od explicitnej sa líši použitím $F(p_{n+1}, t_{n+1})$ miesto $F(p_n, t_n)$. Implicitnou sa nazýva pretože t_{n+1} sa objavuje na oboch stranách rovnice.

   Platí $p(t+h) = p(t) + hF(p(t+h),t+h) + O(h^2)$. Na riešenie môžeme použiť napríklad Jacobiho iteračnú metódu. Odchýlka tejto metódy je $O(h^2)$.



4 Stavový vektor systému

Stavový vektor je súčasťou stavového popisu systému s viacerými vstupmi a výstupmi, pre ktoré sa na vyjadrenie vzťahov medzi premennými využíva maticový zápis pomocou ODR. Je vektor, ktorého zložky sú stavové premenné. Inak povedané, stavový vektor systému určuje správanie častice v čase - jej zmenu, respektíve zmenu jej atribútov v čase.

5 Vonkajšie sily

Vonkajšie sily svojim vplyvom na ČS ovplyvňujú jednotlivé častice. Medzi vonkajšie sily patrí napríklad gravitácia alebo fúkanie vetra na vlasy alebo trávu. Sila fúkania mení správanie a pozíciu častíc vlasov. Pri silách, ako je napríklad gravitácia, nastavujeme pôsobenie sily na všetky častice. Pri programovaní vonkajších síl používame predpripravené knižnice a pri animovaní predpripravené modely.

Vonkajšie sily sa v ČS riadia Newtonovými zákonmi pohybu:

1. Zákon zotrvačnosti (prvý pohybový zákon):
   - Každý hmotný bod zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, kým nie je nútený vonkajšími silami tento svoj stav zmeniť.
   - Ak je teleso v pokoji alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiaro, nepôsobí naň žiadna sila alebo výslednica pôsobiacich síl je nulová.
2. Zákon sily (druhý pohybový zákon):
   - Časová zmena hybnosti sa rovná výslednej pôsobiacej sile
3. Zákon akcie a reakcie (tretí pohybový zákon):
   - Dva hmotné body na seba pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru, ktoré súčasne vznikajú a súčasne zanikajú

6 Obmedzujúce podmienky – constraints

Obmedzujúce podmienky možno dobre ilustrovať na modely vlasov vymodelovaných pomocou ČS. Každý prameň vlasov je tvorený pomocou častíc - ich vrcholy sú pospájané hranami do ČS. Pri modelovaní vlasov sa môžeme stretnúť s obmedzeniami, ktoré musíme brať v úvahu. Tieto obmedzenia sú dĺžka vlasov, krútenie vlasov (ktoré nám povie či sú vlasy kučeravé alebo vlnité), pružnosť vlasov (ktorá nám povie, ako sú vlasy silné) a ohýbanie vlasov (ktoré zaručí, že si vlasy držia svoj tvar).

7 Sily odozvy

Ak sila nepôsobí na každú časticu zvlášť, ale na viac častíc naraz, nazývame to spring. V týchto prípadoch používame:

1. Mass Spring Model: Každý celok je graf, ktorého vrcholmi sú častice s váhou a hranami bezváhové stringy, pričom stringy zvčajne spájajú dve častice, na ktoré pôsobia nejakou silou.
2. Hook's Spring Model: Hookovo pravidlo hovorí, že deformácia je priamo úmerná sile. To môžeme formálne zapísať ako $f = -k_s x$, kde f je zvyšková sila pôsobiaca na materiál, k_s je materiálna konštanta vyjadrujúca hustotu toho materiálu a x je posun springu od počiatočnej pozície.

8 Kolízie častica - rovina

Pri modelovaní sa často stretávame s kolíziami medzi časticou a prekážkou. Poznáme niekoľko modelov, ktoré tieto kolízie popisujú. Sú to Newtonov model, sférový model, model roviny a kapsulový model.

V tomto prípade, pri modeli roviny, sú pre nás dôležité nasledujúce informácie:

1. pozíciu častice $p = (x, y, z)$
2. bod roviny $o = (x, y, z)$
3. normálový vektor roviny $m = (x, y, z)$, pričom $m = |1|$ (je normalizovaný)
4. penetračnú hĺbku (minimálnu vzdialenosť častice od roviny): $d = m^T(p - o)$
5. dotykovú normálu (smerový vektor, pozdĺž ktorého môžeme získať častice z prekážky, a to pohybom okolo hĺbky penetrácie): $n = m$

Zdroje:

1. https://dai.fmph.uniba.sk/upload/1/1d/Ca15_lesson03.pdf
2. http://home.zcu.cz/~mikaMM/Galerie%20studentskych%20praci%20MM/2006/B%C3%A1rta-%20Casticove%20Systemy.pdf
3. https://web.cs.wpi.edu/~matt/courses/cs563/talks/psys.html
4. https://dai.fmph.uniba.sk/upload/0/0d/Ca15_lesson04.pdf
5. https://3diagramsperpage.wordpress.com/2012/01/25/comparing-the-euler-midpoint-and-runge-kutta-method/
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Midpoint_method
8. https://sk.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kon_zotrva%C4%8Dnosti
9. https://sk.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kon_sily
10. https://sk.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kon_akcie_a_reakcie
11. http://moodle.autolab.uni-pannon.hu/Mecha_tananyag/mechatronikai_modellezes_angol/ch07.html#d0e10761