Programación Dinámica

Mariano Crosetti

Rosario, Argentina
Universidad Nacional de Rosario

Resuelvo problemas a cambio de comida

Contenidos I

1. Conceptos básicos
   - Introducción
   - Top-Down y Bottom-Up
   - Reconstruyendo la solución
   - K - ésima reconstrucción
   - Reducir una dimensión de memoria
   - Agregando una flag
   - Recuperando un parámetro
2. Dinámicas comunes
   - Dinámica en rangos
   - Dinámica en de máscara de bits
   - Dinámica en prefijos de números
   - Dinámica en frentes
   - Iterando en subconjuntos
3. Conceptos avanzados

Contenidos II

- DP en árboles con mochila
- Knuth DP optimization trick
- D&C optimization trick

4 Fin

Contenidos

Sucesión de Fibonacci

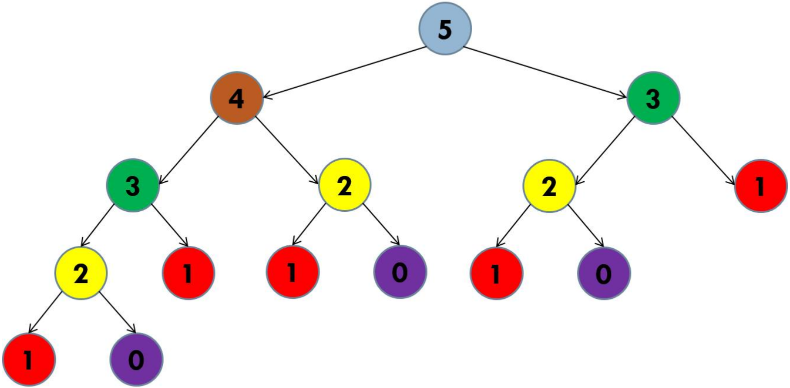
Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci se define como $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ para todo $n \geq 0$

- ¿Cómo podemos computar el término 100 de la sucesión de Fibonacci?

```
int fib(int n)
{
    if(n<=1)
        return 1;
    else
        return fib(n-2)+fib(n-1);
}
```

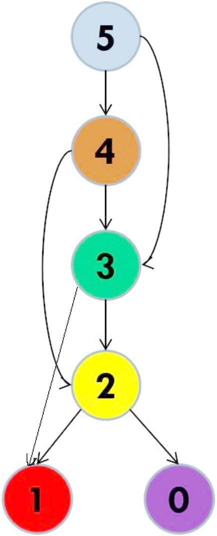
Explicación gráfica de lo que hace el Algoritmo



- Llamamos muchas veces a la misma función con los mismos parámetros
- Tenemos "problemas de memoria", pues volvemos a calcular algo que ya hemos calculado previamente.

Ahora con Programación Dinámica

```
int fib[100];
int calcFib(int n)
{
    if(fib[n]!=-1)
        return fib[n];
    fib[n] = calcFib(n-2)+calcFib(
        n-1);
    return fib[n];
}
int main()
{
    for(int i=0;i<100;i++)
        fib[i] = -1;
    fib[0] = 1;
    fib[1] = 1;
    int fib50 = calcFib(50);
}
```



Contenidos

Viaje óptimo en matriz

Enunciado

Dada una matriz de $n \times m$, con números positivos, y queremos encontrar el camino de la esquina **superior-izquierda**, a la esquina **inferior-derecha**, que minimize la suma de las casillas recorridas. El camino está restringido a utilizar únicamente movimientos de tipo **derecha** y **abajo**.

Viaje óptimo en matriz

1	7	9	2
8	6	3	2
1	6	7	8
2	9	8	2

Minimum Cost Path: 29

Viaje óptimo en matriz

Enunciado

Dada una matriz de $n \times m$, con números enteros, y queremos encontrar el camino de la esquina **superior-izquierda**, a la esquina **inferior-derecha**, que minimize la suma de las casillas recorridas. El camino está restringido a utilizar únicamente movimientos de tipo **derecha** y **abajo**.

¿Podríamos encontrar una función que devuelva el camino mínimo de una posición a la esquina inferior derecha?

Viaje óptimo en matriz

Enunciado

Dada una matriz de $n \times m$, con números enteros, y queremos encontrar el camino de la esquina **superior-izquierda**, a la esquina **inferior-derecha**, que minimize la suma de las casillas recorridas. El camino está restringido a utilizar únicamente movimientos de tipo **derecha** y **abajo**.

¿Podríamos encontrar una función que devuelva el camino mínimo de una posición a la esquina inferior derecha?

- $f(N-1, M-1) = T_{N-1,M-1}$
- $f(i, M-1) = T_{i,M-1} + f(i+1, M-1))$
- $f(N-1, j) = T_{N-1,j} + f(N-1, j+1))$
- $f(i, j) = T_{i,j} + min(f(i+1, j), f(i, j+1))$

Llevándolo a Programación Dinámica

```
int tab[1010][1010], M, N, dp[1010][1010];
int f(int i, int j)
{
    int &r = dp[i][j];
    if (r != -1) return r;
    if (i == M-1 && j == N-1) return r = T[M-1][N-1];
    r = INF;
    if (i < M-1) r = min(r, T[i][j] + f(i+1,j));
    if (j < N-1) r = min(r, T[i][j] + f(i,j+1));
    return r;
}
...
    memset(dp,-1,sizeof(dp));
    cout << f(0,0) << endl;
```

Para los que no se llevan con la recursión...

```
for (int i = M - 1 ; i >= 0 ; i--) {
    for (int j = N - 1 ; j >= 0 ; j--) {
        int &r = dp[i][j];
        if (i == M - 1 && j == N - 1) r = T[M - 1][N - 1];
        else {
            r = INF;
            if (i < M - 1) r = min(r, T[i][j] + dp[i+1][j]);
            if (j < N - 1) r = min(r, T[i][j] + dp[i][j+1]);
        }
    }
}
cout << dp[0][0] << endl;
```

Top-Down vs Bottom-Up

La primera versión se conoce con el nombre de Top-Down, mientras que la segunda se le dice Bottom-Up.

- Top-Down es una recursión con memoria (se la llama memorización también).
- Top-Down es más fácil de escribir a partir de una función matemática recursiva.
- Bottom-Up construye la solución partiendo de los casos bases "hacia arriba"
- Bottom-Up es más rápida (la recursión tiene costes de tiempo y memoria) si se utilizan la mayoría de las entradas de la tabla.
- Top-Down es mejor en casos que hay muchos estados no visitados.
- Podemos pasar de Top-Down a Bottom-Up copiando y pegando el contenido de la función recursiva y recorriendo los estados de algún modo que nos asegure tener los subproblemas calculados.

Contenidos

Reconstruyendo cualquier cosa!

Enunciado

Reconstruir el camino como una cadena de ”A” (Abajo) y ”D” (Derecha).

```
int tab[1010][1010], M, N, dp[1010][1010];
int f(int i, int j)
{
    int &r = dp[i][j];
    if (r != -1) return r;
    if (i == M - 1 && j == N - 1) return r = T[M - 1][N - 1];
    r = INF;
    if (i < M - 1) r = min(r, T[i][j] + f(i+1,j));
    if (j < N - 1) r = min(r, T[i][j] + f(i,j+1));
    return r;
}
```

Reconstruyendo cualquier cosa!

```
string reconstruccion;
void bt(int i, int j)
{
    if (i == M - 1 && j == N - 1) return;
    if (i < M - 1 && f(i,j) == T[i][j] + f(i+1,j)) {
        reconstruccion.push_back('A');
        bt(i+1,j);
        return;
    }
    if (j < N - 1 && f(i,j) == T[i][j] + f(i,j+1)) {
        reconstruccion.push_back('D');
        bt(i,j+1);
        return;
    }
}
...
```

Receta para reconstruir

Podemos resolver los problemas que requieren reconstruir solución con la siguiente receta:

- Realizar la formulación matemática y programar la recursión.
- Agregar memorization. Tenemos una Top-Down!
- Hacer un backtracking copiando el cuerpo de la función y en cada transición chequear si es óptima, hacer la transición.
- **No se olviden los return!** no queremos recorrer todos los caminos!!

Contenidos

Cantidad de caminos mínimos

Enunciado

Devolver la cantidad de caminos mínimos para el problem anterior.

```
int dp2[1010][1010];
int cantMinimos(int i, int j)
{
    int &r = dp2[i][j];
    if (r != -1) return r;
    if (i == M - 1 && j == N - 1) return r = 1;
    r = 0;
    if (i < M - 1 && f(i,j) == T[i][j] + f(i+1,j))
        r += cantMinimos(i+1,j);
    if (j < N - 1 && f(i,j) == T[i][j] + f(i,j+1))
        r += cantMinimos(i,j+1);
    return r;
}
```

Receta cantidad respuestas óptimas + Yapa

- Hacer otra función recursiva que devuelva la cantidad de respuestas óptimas desde un estado.
- Utilizar la función anterior para saber si una transición es óptima.

Enunciado

De todos los caminos mínimos, devolver el k-ésimo lexicográfico (considerados como string de ”A”' y ”D”).

- Modificando sencillamante el backtracking podemos resolver el problema anterior.
- El orden lexicográfico nos dice que nos podemos inclinar de forma greedy por una transición.

K-ésimo camino mínimos

```
void bt(int i, int j, int k) {
    if (i == M - 1 && j == N - 1) return;
    if (i < M - 1 && f(i,j) == T[i][j] + f(i+1,j)) {
        if (k<cantMinimos(i+1,j)) {
            reconstruccion.push_back('A');
            bt(i+1,j,k);
            return;
        } else {
            k -= cantMinimos(i+1,j);
        }
    }
    if (j < N - 1 && f(i,j) == T[i][j] + f(i,j+1)) {
        reconstruccion.push_back('D');
        bt(i,j+1,k);
    }
}
```

Contenidos

Rompiendo el Memory Limit

Escribí la solución pero me da Memory Limit. Es necesario guardar todos los estados?

```
dp[(M - 1) % 2][N - 1] = T[M - 1][N - 1];
for (int i = M - 1 ; i >= 0 ; i--) {
    for (int j = N - 1 ; j >= 0 ; j--) {
        int &r = dp[i % 2][j];
      if (i == M - 1 && j == N - 1) r = T[M - 1][N - 1];
        else {
            r = INF;
            if (i < M - 1) r = min(r, T[i][j] + dp[(i+1) % 2][j]);
            if (j < N - 1) r = min(r, T[i][j] + dp[i % 2][j+1]);
        }
    }
}
cout << dp[0 % 2][0] << endl;
```

Rompiendo el Memory Limit - Receta

Es común tener que optimizar memoria utilizando este truco de la ”tira” que se sobreescribe.

- Es muy facil adaptar la solución Bottom-Up agregando %.
- Se generaliza a tiras de mayor anchura.
- Hay que tener cuidado que el parámetro que estemos sobreescribiendo sea el que se recorre en la iteración de menor anidación.
- Siempre es bueno hacer un dibujo e imaginarnos el orden en el cuál estamos llenando la tabla.
- No olvidarse usar % cuando extraemos el resultado.

Contenidos

Agregando una flag - reduciendo complejidad

Enunciado

Resolver el problema anterior pero podemos hacer K movimientos de alfil, pagando el costo de cada casilla que pasamos.

```
int f(int i, int j, int k) {
    int &r = dp[i][j][k]; if (r != -1) return r;
    if (i == M- 1 && j == N- 1) return r = T[M- 1][N- 1];
    r = INF;
    if (i < M- 1) r = min(r, T[i][j] + f(i+1,j));
    if (j < N- 1) r = min(r, T[i][j] + f(i,j+1));
    if (k>0) {
        int sum = T[i][j];
        for(int d = 1 ; d + i < M && d + j < N ; d ++) {
            r = min (r, f(i + d, j + d, k-1) + sum);
            sum += T[i + d][j + d];
        }
    }
    return r;
}
```

Agregando una flag - reduciendo complejidad

Enunciado

Resolver el problema anterior pero podemos hacer K movimientos de alfil, pagando el costo de cada casilla que pasamos.

```
int f(int i, int j, int k) {
    int &r = dp[i][j][k]; if (r != -1) return r;
    if (i == M - 1 && j == N - 1) return r = T[M - 1][N - 1];
    r = INF;
    if (i < M - 1) r = min(r, T[i][j] + f(i+1,j));
    if (j < N - 1) r = min(r, T[i][j] + f(i,j+1));
    if (k>0) {
        int sum = T[i][j];
        for(int d = 1 ; d + i < M && d + j < N ; d ++) {
            r = min (r, f(i + d, j + d, k-1) + sum);
            sum += T[i + d][j + d];
        }
    }
    return r;
}
```

Agregando una flag - reduciendo complejidad

```
int f(int i, int j, int k, int b) {
    int &r = dp[i][j][k][b]; if (r != -1) return r;
    if (i == M - 1 && j == N - 1) return r = T[M - 1][N - 1];
    r = INF;
    if (i < M - 1) r = min(r, T[i][j] + f(i+1, j, k, 0));
    if (j < N - 1) r = min(r, T[i][j] + f(i, j+1, k, 0));
    if (i < M - 1 && j < N - 1 && k>0) {
        r = min(r, T[i][j] + f(i+1, j+1, k-1, 1));
    }
    if (i < M - 1 && j < N - 1 && b) {
        r = min(r, T[i][j] + f(i+1, j+1, k, 1));
    }
    return r;
}
```

Contenidos

Recuperando un parámetro

Enunciado

Dada una secuencia de enteros, se los quiere particionar en dos subsecuencias minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias de elementos consecutivos de cada subsecuencia.
Ejemplo:
27 **2** 30 **1** **2** 31 = $(27-30)^2 + (30-31)^2 + (2-1)^2 + (1-2)^2 = 12$

- Podriamos tener una función recursiva: $f_{ultimoRojo, ultimoAzul, posicionActual} = \ldots$
- Obsesrvar que $max(ultimoRojo, ultimoAzul) = posicionActual - 1$
- Una dinámica de 3 estados tendría estados que no visitaríamos.
- Si la planteamos Top-Down sólo estaríamos desperdiciando memoria (no tiempo).
- ¿Se puede evitar?

Recuperando un parámetro

```
int f(int uR, int uA) {
    int &r = dp[uR+1][uA+1]; // offset para permitir
        parametros < 0
    if (r != -1) return r;
    int i = max(uR,uA)+1;
    if (i == N) return r = 0;
    r = INF;
    r = min(r, f(i,uA) + uR == -1 ? 0 : (v[uR]-v[i])**2 );
    r = min(r, f(uR,i) + uA == -1 ? 0 : (v[uA]-v[i])**2 );
    return r;
}
// La respuesta buscada es f(-1,-1)
```

Recuperando un parámetro

No hace fala calcular el parámetro que se recupera, se puede ir llevándolo en la recursión.

```
int f(int uR, int uA, int i) {
    int &r = dp[uR+1][uA+1]; // offset para permitir parametros < 0
    if (r != -1) return r;
    if (i == N) return r = 0;
    r = INF;
    r = min(r, f(i,uA, i+1) + uR == -1 ? 0 : (v[uR]-v[i])**2 )
    r = min(r, f(uR,i, i+1) + uA == -1 ? 0 : (v[uA]-v[i])**2 )
    return r;
}
// La respuesta buscada es f(-1,-1)
```

Contenidos

Secuencias parenteseadas

Enunciado

Dada una cadena de caracteres {, }, [,] , (y) de longitud par, dar la mínima cantidad de reemplazos de caracteres que se le deben realizar a este string para dejar una secuencia “bien parenteseada”.

T es bien parenteseada si es de la forma:

- $T = \emptyset$
- $T = S_1 S_2$
- $T = (S)$
- $T = [S]$
- $T = \{S\}$

Con S, S_1, S_2 bien parenteseada.

Dinámica de rangos

- El estado es resolver el problema para los subrangos.
- Las transiciones generalmente implican reducir los extremos o partir el subrango en dos (o más subrangos).
- Suele tener ventajas trabajar con rangos [a,b)

Secuencias parenteseadas

```
// f(a,b) = respuesta para S[a,b)
int f(int a, int b) {
    int &r = dp[a][b];
    if (r != -1) return r;
    if (b - a <= 0) return r=0;
    if (b - a == 1) return r=INF;
    r = f(a+1,b-1) + costo_matchear(S[a], S[b-1]);
    for(int i = a + 1 ; i < b ; i++) {
        r = min(r, f(a,i) + f(i,b));
    }
    return r;
}
```

Secuencias parenteseadas - Bottom Up

```
for (int a = 0 ; a < N ; a++) {
    for (int b=a ; b < N ; b++) {
        int &r = dp[a][b];
        if (b - a <= 0) r=0;
        else if (b - a == 1) r=INF;
        else {
            r = f(a+1,b-1) + costo_matchear(S[a], S[b-1]);
            for(int i = a + 1 ; i < b ; i++) {
                r = min(r, f(a,i) + f(i,b));
            }
        }
    }
}
```

Contenidos

Forming Quiz Teams

UVA 10911

Dada una lista de $2N$ alumnos ($N \leq 8$) y la ubicación de sus casas en un plano 2D. Se necesitan formar equipos de a dos minimizando la suma de las distancias entre los dos miembros de cada equipo.

Intentemos calcular $F(S)$ la respuesta en $S \subseteq 0..N-1$:

- $F(\emptyset) = 0$
- $F(S) = min_{x,y \in S} dist(x,y) + F(S - \{x,y\})$

La cantidad de subconjuntos es chica: $2^{16} = 65536$

Tenemos una fórmula recursiva y pocos estados! qué esperamos?

Forming Quiz Teams

```
double f(int msk) {
    double &r = dp[msk];
    if (r>=-0.5) return r;
    if (!msk) return r=0;
    int p = __builtin_ffs(msk) - 1;
    r = INF;
    for(int i=p+1 ; i<n ; i++) if ( (msk>>i)&1 ) {
        r = min( r, f(msk ^ (1<<p) ^ (1<<i)) + dist[i][j]);
    }
    return r;
}
...
forn(i,(1<<n)) dp[i]=-1;
double ans = f((1<<n)-1);
```

Funciones y operadores de bits

<table>
<tr><th>Operador</th><th>Descripcion</th></tr>
<tr><td>$>>$</td><td>shift de bits a la derecha</td></tr>
<tr><td>$<<$</td><td>shift de bits a la izquierda</td></tr>
<tr><td>^</td><td>xor de bits</td></tr>
<tr><td>&</td><td>and de bits</td></tr>
<tr><td>|</td><td>or de bits</td></tr>
<tr><td>~</td><td>not de bits</td></tr>
<tr><td>__builtin_popcount(msk)</td><td>cantidad de bits en una máscara</td></tr>
<tr><td>__builtin_ffs(msk)</td><td>posición del primer 1 desde la derecha</td></tr>
</table>

Contenidos

Números variados

Números variados

Dado $X \leq 10^{15}$ devolver la cantidad de números $0 \leq Y \leq X$ tal que Y no contenga números consecutivos en su representación en base 10.

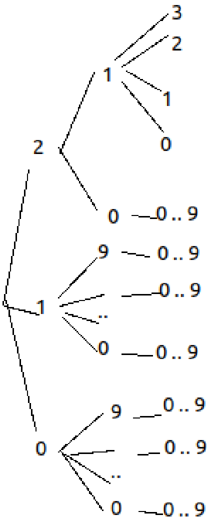
Veamos el campo de posibilidades para X = 213. Y = 0, 1 .. 213

En el problema analizaremos los posibles Y como cadenas de caracteres. Para pensar que todas tienen la misma longitud consideraremos los 0's a la izquierda no significativos. (Para Y = 73, consideraremos "073")

Con esta perspectiva hay que tener cuidado que si bien Y = 3 lo consideramos como "003" es válido pese a tener dígitos repetido (ya que los 0's no significativos pueden estar repetidos).

Números variados

Reordenémoslo un poco:



Números variados

Sólo es importante:

- La posición que estamos completando.
- El último número completado.
- Necesitamos cierta información del prefijo que ya completamos. Ej: saber si venimos "matcheando" el prefijo del número.

¿Podemos hacer DP? Abre las puertas a posibilidades como:

- Reconstruir fácil el K-ésimo!

Números variados

estado posibles:

- 0: el prefijo completado coincide con el de X
- 1: el prefijo completado es lexicograficamente menor que el de X. Además alguno de los dígitos es distinto de 0.
- 2: el prefijo completado son todos 0's.

Encontremos una fórmula para $f(pos, ultimo, estado)$.

- *pos* puede ser completado con $d \in [0.,9]$ si $estado = 1, 2$ y $d \in [0..X[pos]]$ $estado = 0$.
- si $pos > 0$ tenemos que cuidar que $ultimo \neq d$. Salvo que estemos en $estado = 2$ uy $ultimo = 0$ (son 0's no significativos).
- Debemos actualizar el estado según el estado actual y el caracter completado *d*.

Números variados

```
int f(int p, int u, int b) {
    int &r = dp[p][u][b]; if (r!=-1) return r;
    if (p==sz(U)) return r = 1;
    r = 0;
    int L = (b==0 ? U[p]-'0' : 9) + 1 ;
    forn(x,L) if ( x!=u || p==0 || (u==0 && b==2) ) {
        int nb;
        if (b==0) {
            if (x == U[p]-'0') {
                nb = 0;
            } else if (x==0 && p==0) {
                nb = 2;
            } else {
                nb = 1;
            }
        } else if (b==1) {
            nb = 1;
        } else {
            if (x==0) {
                nb = 2;
            } else {
                nb = 1;
            }
        }
        r += f(p+1,x,nb);
    }
    return r;
}
```

Contenidos

Tablero disperso

Enunciado (A006506)

Calcular la cantidad de tableros cuadrados de tamaño $N \leq 16$, con 1 ó 0 en sus casillas tal que no existan dos 1 adyacentes (por lado).

Una fuerza bruta sería $O(2^{N^2})$. Pero en realidad sólo necesitamos:

- La última "capa" completada.
- La posición que estamos completando.

1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1		

Tablero disperso

Enunciado (A006506)

Calcular la cantidad de tableros cuadrados de tamaño $N \leq 16$, con 1 ó 0 en sus casillas tal que no existan dos 1 adyacentes (por lado).

Una fuerza bruta sería $O(2^{N^2})$. Pero en realidad sólo necesitamos:

- La última "capa" completada.
- La posición que estamos completando.

1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1		

Tablero disperso

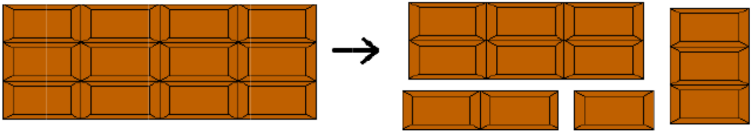
```
long long f(int msk, int i, int j) {
    long long &r = dp[msk][i][j];
    if ( r!=-1) return r;
    if ( i == N ) return r = 1;
    r = 0;
    int nmsk, ni = i + (j==N-1), nj = (j+1)%N;
    if ( ( j==0 || ((msk >>(j-1))&1)==0 ) && ((msk >>j)&1)==0
        ) {
        nmsk = msk | (1<<j) ;
        r += f(nmsk, ni, nj);
    }
    nmsk = msk & ~(1<<j) ;
    r += f(nmsk, ni, nj);
    return r;
}
```

Contenidos

Sharing chocolate - WF 2010

Sharing chocolate - WF 2010

Tenemos una pieza de chocolate de w x h bloques ($w, h \leq 100$).
Y n amigos ($n \leq 15$) que cada uno quiere **exactamente** v_1, v_2 ... v_n bloques.
Podemos partir a traves de una fila o columna entera, en dos trozos.
Podemos partir sucesivas veces.
Queremos saber si es posible partirlo para satisfacer a los amigos **sin que sobre**.



Sharing chocolate - WF 2010

Ejemplos:

```
4
3 4
6 3 2 1
Rta: "YES"
2
2 3
1 5
Rta: "NO
```

Sharing chocolate - WF 2010

Ejemplos:

```
4
3 4
6 3 2 1
Rta: "YES"
2
2 3
1 5
Rta: "NO
```

- Podemos tener $f(w, h, S)$ la respuesta para el subconjunto de amigos S teniendo un chocolate de w x h.

Sharing chocolate - WF 2010

Ejemplos:

```
4
3 4
6 3 2 1
Rta: "YES"
2
2 3
1 5
Rta: "NO
```

- Podemos tener $f(w, h, S)$ la respuesta para el subconjunto de amigos S teniendo un chocolate de w x h.
- Para esto iteramos en todos los subconjuntos $T \subset S$.

Sharing chocolate - WF 2010

Ejemplos:

```
4
3 4
6 3 2 1
Rta: "YES"
2
2 3
1 5
Rta: "NO
```

- Podemos tener $f(w, h, S)$ la respuesta para el subconjunto de amigos S teniendo un chocolate de w x h.
- Para esto iteramos en todos los subconjuntos $T \subset S$.
- Esto nos determina el posible corte vertical y horizontal.

Sharing chocolate - WF 2010

Ejemplos:

```
4
3 4
6 3 2 1
Rta: "YES"
2
2 3
1 5
Rta: "NO
```

- Podemos tener $f(w, h, S)$ la respuesta para el subconjunto de amigos S teniendo un chocolate de w x h.
- Para esto iteramos en todos los subconjuntos $T \subset S$.
- Esto nos determina el posible corte vertical y horizontal.
- Ademas para cierto w y S queda determinado h por lo que podemos eliminar el parametro.

Sharing chocolate - WF 2010

Ejemplos:

```
4
3 4
6 3 2 1
Rta: "YES"
2
2 3
1 5
Rta: "NO
```

- Podemos tener $f(w, h, S)$ la respuesta para el subconjunto de amigos S teniendo un chocolate de w x h.
- Para esto iteramos en todos los subconjuntos $T \subset S$.
- Esto nos determina el posible corte vertical y horizontal.
- Ademas para cierto w y S queda determinado h por lo que podemos eliminar el parametro.
- Complejidad $O(w * 3^n)$

Iterando en subconjuntos

Iterando en subconjuntos

Dado un conjunto S ($|S| = N$) la cantidad de pares (X,Y) tal que $X \subseteq Y \subseteq S$ es como pintar los N elementos de 3 colores, o sea, 3^N.

Con bitmasks:

```
for(int subset=set; subset; subset=(subset-1) & set) {
    print subset
}
```

Para $set = 11$ (1011_b)
Imprime 11, 10, 9, 8, 3, 1.
1011_b, 1010_b, 1001_b, 1000_b, 11_b, 1_b respectivamente.
Tener cuidado si debemos considerar el vacio

Contenidos

Dividing the names

Enunciado

Dada $2N$ palabras se desean dividir entre N calles horizontales y N verticales.
En los letreros que identifican a una calle horizontal (y vertical) se puede escribir un prefijo del nombre de la calle tal que no sea prefijo de ninguna otra calle horizontal (y vertical).

- No existen dos cadenas tales que una sea prefijo de otra.
- Se quiere minimizar la suma de las longitudes de los carteles.

Ejemplos

```
4 GAUSS GALOIS EULER ERDOS
```

Dividing the names

Enunciado

Dada $2N$ palabras se desean dividir entre N calles horizontales y N verticales.
En los letreros que identifican a una calle horizontal (y vertical) se puede escribir un prefijo del nombre de la calle tal que no sea prefijo de ninguna otra calle horizontal (y vertical).

- No existen dos cadenas tales que una sea prefijo de otra.
- Se quiere minimizar la suma de las longitudes de los carteles.

Ejemplos

```
4 GAUSS GALOIS EULER ERDOS Rta: {G,E - G,E}
8 AA AB AC AD BA BB BC BD
```

Dividing the names

Enunciado

Dada $2N$ palabras se desean dividir entre N calles horizontales y N verticales.
En los letreros que identifican a una calle horizontal (y vertical) se puede escribir un prefijo del nombre de la calle tal que no sea prefijo de ninguna otra calle horizontal (y vertical).

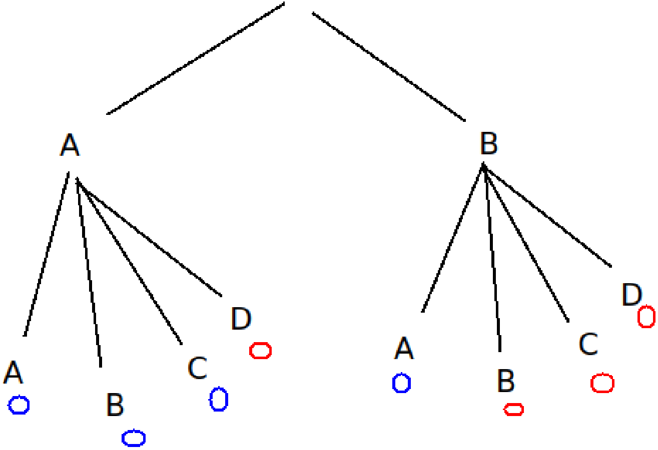
- No existen dos cadenas tales que una sea prefijo de otra.
- Se quiere minimizar la suma de las longitudes de los carteles.

Ejemplos

```
4 GAUSS GALOIS EULER ERDOS Rta: {G,E - G,E}
8 AA AB AC AD BA BB BC BD
Rta: {AA,AB,AC,B - A,BB,BC,BD}
```

Dividing the names

Veamos el Trie de las $2N$ cadenas. Una asignación es como colorear las hojas de dos colores (vertical y horizontal).



Siendo

- $size_v^1$ la cantidad de hojas rojas en el subárbol.
- $size_v^2$ la cantidad de hojas azules en el subárbol.

Hay que minimizar el costo de cada nodo definido como:

$$size_v^1 + size_v^2 - (size_v^1 == 1 + size_v^2 == 1)$$

Que es la cantidad de cadenas distintas en las que aparece.

Observación: basta con pintar N hojas de rojo, las azules quedan definidas.

Hallemos $f(v, k)$ que dado un nodo distribuye de manera óptima k hojas rojas en el subárbol correpondiente al nodo v. De modo que la suma de los costos de los nodos del subárbol sea mínima.

La respuesta al problema es $f(root, N)$

Dividing the names

Observar que parece una mochila en un árbol. Tratemos de hallar f:

$$f(v,k) = k + k - size[v] - (k == 1 + k - size[v] == 1) + ...$$

En ... tenemos que hacer la llamada recursiva a los hijos, hay que distribuir esos k colores rojos disponibles en los hijos de v.

Si fuera un árbol binario sería fácil:

$$... = min_{i=0}^{k}[f(hijo_{derecho}, i) + f(hijo_{izquierdo}, k - i)]$$

Una solución es ”binarizar” el árbol:

- A cada nodo le calculamos su primer hijo y su hermano.
- Hacemos una DP f' en el árbol resultante que es binario.

$$... = min_{i=0}^{k}[f'(primerHijo_v, i) + f'(hermano_v, k - i)]$$

- $f(v,k)'$ distribuye de manera óptima k hojas rojas en el subárbol de v y sus *hermanos derechos*.

Dividing the names

```
long long f(int v, int n) { // resultado: (f(0,n) - cant[0] + 2*n)*n
    long long &r = dp[v][n]; if (r != -1) return r;
    if (hijo[v]==-1 && hermano[v]==-1) return r = n>1 ? INF:0;
    if (hijo[v]==-1)
        return r = min( f(hermano[v],n), f(hermano[v],n-1) );
    if (hermano[v]==-1) {
        r = f(hijo[v],n) + (n==1 ? 0ll : n)
                         + (cant[v]-n==1 ? 0ll : cant[v]-n) ;
        return r = min(r,INF);
    }
    r = INF;
    for(int m=0 ; m < n+1 ; m++) {
        r = min(r, f(hijo[v],m) + f(hermano[v],n-m) +
                   (m==1 ? 0ll : m) +
                   (cant[v]-m==1 ? 0ll : cant[v]-m) );
    }
    return r;
}
```

Dividing the names

Otra solucion es hacer una mochila para distribuir los k objetos en los hijos de v.

$$f(v,k) = dp_v(0,k)$$

$$dp_v(i,k) = \sum_{t=0}^{k} [\quad f(hijo[v][i],t) + dp_v(i+1,k-t)\quad]$$

Esto es hacer una mochila en CADA hijo.
Analicemos la complejidad de todas juntas:

$$\sum_{v \in G} O(grado(v) * K^2) = O([\sum_{v \in G} grado(v)] * K^2) = O(N * K^2)$$

Dividing the names

```
forn(i,postC) {
        int v = post[i];
        if (sz(G[v])) {
            int cantH = sz(G[v]);
            dp[cantH][0] = 0;
            forr(x,1,n+1) dp[cantH][x] = INF;
            dforn(i,cantH) {
                int hv = G[v][i];
                forn(m,n+1) {
                    dp[i][m] = INF;
                    forn(mp,min(cant[hv],m)+1) {
                        dp[i][m] = min(dp[i][m],
                            dp[i+1][m-mp]+f[hv][mp]);
                    }
                }
            }
            forn(m,min(cant[v],n)+1) f[v][m] = min(INF, dp[0][m] + (m==1 ? 0ll : m) + (cant[v]-m==1 ? 0ll : cant[v]-m) );
        } else {
            assert(cant[v]==1);
            f[v][0]=f[v][1]=0;
            forr(m,2,n+1) f[v][m]=INF;
        }
    }
    cout << (f[0][n]-cant[0]+2*n)*n << endl;
```

Contenidos

Problema motivador

Optimal Search Tree

Dados n valores enteros distintos v_i, junto a sus frecuencias f_i, dar un árbol binario de búsqueda óptimo para los valores.
Sea l_i la distancia a la raíz de cada uno de los v_i el coste de un ST lo definiremos como:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i . f_i \tag{1}$$

Ejemplo:

```
3
1 2 3
100 1 1
```

Problema motivador

Optimal Search Tree

Dados n valores enteros distintos v_i, junto a sus frecuencias f_i, dar un árbol binario de búsqueda óptimo para los valores.
Sea l_i la distancia a la raíz de cada uno de los v_i el coste de un ST lo definiremos como:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i . f_i \tag{1}$$

Ejemplo:

```
3
1 2 3
100 1 1
Rta: 104 (100, (1, 1) )
```

Problema motivador

- Sólo nos importa el orden relativo de los v_i.
- Luego ordenamos por v_i y tenemos que ver como parenteseamos.
- Parece un problema de dp en rangos...

Problema motivador

- Sólo nos importa el orden relativo de los v_i.
- Luego ordenamos por v_i y tenemos que ver como parenteseamos.
- Parece un problema de dp en rangos...

Sea $f(i,j)$ el costo del ST óptimo para el rango $[i,j]$ resulta:

$$f(i,j) = min_{k=i}^{j-1} f(i,k) + f(k+1,j) + sum_f(i,j)$$

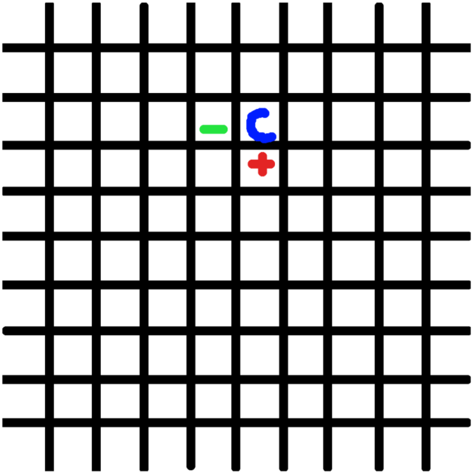
Complejidad $O(n^3)$ ($sum_f(i,j)$ se calcula con prefix sums).

Optimización de Knuth

- $dp(i,j) = min_{i<k<j} dp(i,k) + dp(k,j) + coste(i,k,j)$
- Definamos $K(i,j)$ como el menor k donde se alcanza el mínimo para $dp(i,j)$
- **Condición de Knuth**: $K(i,j-1) \leq K(i,j) \leq K(i+1,j)$
  - K es monótona en ambos parámetros.
  - Si agregamos un elemento por **izquierda** K se mueve **a la izquierda**.
  - Si agregamos un elemento por **derecha** K se mueve **a la derecha**.
- $dp(i,j) = min_{K(i,j-1)<k<K(i+1,j)} dp(i,k) + dp(k,j) + coste(i,k,j)$
  - Los K los calculamos en el mismo algoritmo.
  - Cuando calculemos $dp(i,j)$ ya tendremos calculado $K(i,j-1)$ y $K(i+1,j)$ ya que corresponden a rangos más chicos.
  - Maravillosamente reduce la complejidad a $\mathbf{O(N^2)}$

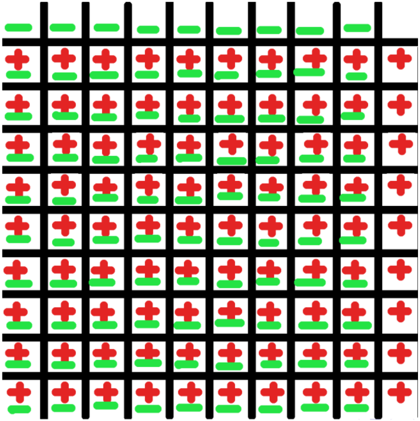
Optimización de Knuth

Costo para calcular $dp(i,j)$: $K(i+1,j) - K(i,j-1) + 1$



Optimización de Knuth

- Los términos de casi toda la matriz se cancelan.
- Las N^2 casillas pagan el término 1. $\mathbf{O(N^2)}$.
- Las $O(N)$ casillas del borde pagan la iteración de $O(N)$. $\mathbf{O(N^2)}$.



Contenidos

Ciel and Gondolas

https://codeforces.com/blog/entry/8192 **E**

Ciel and Gondolas

Hay N personas en una fila esperando acomodarse en K gondolas ($N \leq 4000$, $K \leq 800$). Tenemos una matriz simetrica de N x N. $u_{i,j}$ expresa el nivel de incomodidad que las personas i y j sienten estando en la misma gondola. $u_{i,j} = u_{j,i}$, $u_{i,i} = 0$, $u_{i,j} \leq 9$. La incomodidad de una gondola es la suma de las incomodidades de todas las parejas de personas en dicha gondola. Se desea minimizar la incomodidad total que es la suma de las incomodidades de todas las gondolas.

- Las gondolas tienen capacidad arbitraria.
- Debemos respetar el orden de la fila.

```
3 2
0 2 0
2 0 3
0 3 0
```

Ciel and Gondolas

https://codeforces.com/blog/entry/8192 **E**

Ciel and Gondolas

Hay N personas en una fila esperando acomodarse en K gondolas ($N \leq 4000$, $K \leq 800$). Tenemos una matriz simetrica de N x N. $u_{i,j}$ expresa el nivel de incomodidad que las personas i y j sienten estando en la misma gondola. $u_{i,j} = u_{j,i}$, $u_{i,i} = 0$, $u_{i,j} \leq 9$. La incomodidad de una gondola es la suma de las incomodidades de todas las parejas de personas en dicha gondola. Se desea minimizar la incomodidad total que es la suma de las incomodidades de todas las gondolas.

- Las gondolas tienen capacidad arbitraria.
- Debemos respetar el orden de la fila.

```
3 2
0 2 0
2 0 3
0 3 0  Rta: 2
```

Ciel and Gondolas

```
8 3
0 1 1 1 1 1 1 1
1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 0
```

Ciel and Gondolas

```
8 3
0 1 1 1 1 1 1 1
1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 0
Rta: 7 {1, 2, 3} | {4, 5, 6} | {7, 8}
```

Ciel and Gondolas

```
8 3
0 1 1 1 1 1 1 1
1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 0
Rta: 7 {1, 2, 3} | {4, 5, 6} | {7, 8}    5 2
0 0 1 1 1
0 0 1 1 1
1 1 0 0 0
1 1 0 0 0
1 1 0 0 0
```

Ciel and Gondolas

```
8 3
0 1 1 1 1 1 1 1
1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 0
Rta: 7 {1, 2, 3} | {4, 5, 6} | {7, 8}    5 2
0 0 1 1 1
0 0 1 1 1
1 1 0 0 0
1 1 0 0 0
1 1 0 0 0
Rta: 0 {1, 2} | {3, 4, 5}
```

Ciel and Gondolas

Hallemos $f(k,i)$ la incomodidad minima para acomodar las personas en $[i,n)$ usando a lo sumo k gondolas. Para $i < n$ y $k > 0$ tenemos:

$$f(k,i) = Min_{i<j\leq n}\ C[i,j) + f(k-1,j)$$

- La respuesta sera $f(K,0)$.
- $C[i,j)$ podemos hallarlo en $O(1)$ con prefix sums.

Ciel and Gondolas

Hallemos $f(k, i)$ la incomodidad minima para acomodar las personas en $[i, n)$ usando a lo sumo k gondolas. Para $i < n$ y $k > 0$ tenemos:

$$f(k, i) = Min_{i<j\leq n}\ C[i, j) + f(k-1, j)$$

- La respuesta sera $f(K, 0)$.
- $C[i, j)$ podemos hallarlo en $O(1)$ con prefix sums.
- Sigue siendo $O(N^3)$:(

Ciel and Gondolas

Hallemos $f(k, i)$ la incomodidad minima para acomodar las personas en $[i, n)$ usando a lo sumo k gondolas. Para $i < n$ y $k > 0$ tenemos:

$$f(k, i) = Min_{i<j\leq n}\ C[i, j) + f(k-1, j)$$

- La respuesta sera $f(K, 0)$.
- $C[i, j)$ podemos hallarlo en $O(1)$ con prefix sums.
- Sigue siendo $O(N^3)$:(

Sea $opt[k][i]$ el minimo j tal que:

$$dp[k][j] = C[i, j) + f(k-1, j)$$

Intuitivamente (**demostracion de tarea**) tenemos:

$$opt[k][0] \leq opt[k][1] \leq opt[k][2] \leq ... \leq opt[k][n]$$

Condición de D&C

- **Condición de D&C**

$$opt[k][i] \leq opt[k][i+1]$$

- $opt[k][i]$ es monótona en i (para k fijo).
- Para k fijo si tenemos un sufijo menor a particionar el siguiente punto óptimo donde particionar avanza (en realidad *no retrocede*)

Ciel and Gondolas

$$dp[k][i] = Min_{i<j\leq n}\ C[i,j) + dp[k-1][j]$$

- Y esto para que nos sirve? Veamoslo en $N = 200$.
- Vamos a ir calculando $dp[k][i]$ para valores de k creciente.
- $k = 0$ es caso base.
- Supongamos que ya tenemos calculados $dp[k][i]$ con $k \leq 3$.
- Se me ocurre calcular $dp[4][100]$ (for + formula, se basa en $k-1$).
- De paso calculamos $opt[4][100]$.
- $0 \leq$ **opt[4][0] ... opt[4][99]** $\leq$ opt[4][100].
- opt[4][100] $\leq$ **opt[4][101] ... opt[4][199]** $\leq n$.

Ciel and Gondolas

Haremos una funcion $compute(k, L, R, optL, optR)$ que:

- Calculara $dp[k][L...R]$.
- $dp[k'][i]$ ya debe estar calculado para $k' < k$.
- Asume que la cota de $opt[k][L...R]$ esta en el rango $[optL...optR]$

Luego haremos:

```
for(int k = 1 ; k<K ; k++) {
    compute(k, 0, N, 0, N)
}
```

Ciel and Gondolas

$compute(k, L, R, optL, optR) =$

1. Si L==R calculamos a mano con la fomula.
2. Sea $M = (L + R)/2$. Calculamos $dp[k][M]$ y $opt[k][M]$ Esto son $optR - optL + 1$ operaciones.
3. compute(k, L, M-1, optL, opt[k][M])
4. compute(k, M+1, R, opt[k][M], optR)

Analisis de complejidad:

- El arbol de esta recursion tiene altura $log(N)$ y en cada nivel hacemos $O(N)$ operaciones.
- Luego cada llamada a *compute* es $O(N * log(N))$.
- La complejidad total es $O(K * N * log(N))$.

Links utiles

Hay muchisimo material, solo basta buscar en **codeforces**. Los que listo aca son **MUY BUENOS**

- “A little bit of classics: dynamic programming over subsets and paths in graphs.” `https://codeforces.com/blog/entry/337`
- “Sum over Subsets Dynamic Programming.” `https://codeforces.com/blog/entry/45223`
- “[Tutorial] Non-trivial DP Tricks and Techniques.” `https://codeforces.com/blog/entry/47764`.
- “Everything About Dynamic Programming.” `https://codeforces.com/blog/entry/43256`.
- “Digit DP.” `https://codeforces.com/blog/entry/53960`
- Una bocha de problemas `https://codeforces.com/blog/entry/325`.