UNIDAD Nº 2: MATRICES

COMBINACION LINEAL Y DEPENDENCIA LINEAL

COMBINACION LINEAL

- Se dice que un vertor (o matriz) $\vec{W}$ es combinación lineal de los vectores (o matrices) $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, \ldots, \vec{V_r}$, si el vector $\vec{W}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{W} = k_1.\vec{V_1} + k_2.\vec{V_2} + k_3.\vec{V_3} + \cdots + k_r\vec{V_r}$$

siendo $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r$ escalares (nº reales)

EJEMPLO: Demostrar que $\vec{W}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{U}\ y\ \vec{V}$

$$\vec{U} = (1, 2, -1)$$
$$\vec{V} = (6, 4, 2)$$
$$\vec{W} = (9, 2, 7)$$

$$\vec{W} = \alpha \vec{U} + \beta \vec{V}$$

$$(9,2,7) = \alpha \cdot (1, 2, -1) + \beta (6, 4, 2)$$

$$(9,2,7) = (\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (\beta 6, 4\beta, 2\beta)$$

$$(9,2,7) = (\alpha + 6\beta\ ;\ 2\alpha + 4\beta\ ;\ -\alpha + 2\beta)$$

$$\begin{cases} 9 = \alpha + 6\beta & (1) \\ 2 = 2\alpha + 4\beta & (2) \\ 7 = -\alpha + 2\beta & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = \alpha + 6\beta & (1) \\ 2 = 2\alpha + 4\beta & (2) \\ 7 = -\alpha + 2\beta & (3) \end{cases}$$

$$(1)\quad 9 - 6\beta = \alpha$$

$$\begin{cases} 2 = 2.(9 - 6\beta) + 4\beta \\ 7 = -(9 - 6\beta) + 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 18 - 12\beta + 4\beta \\ 7 = -9 + 6\beta + 2\beta \end{cases}$$

$$2 - 18 = -8\beta$$
$$-16 = -8\beta$$
$$\frac{-16}{-8} = \beta \qquad \boxed{\beta = 2}$$

$$7 + 9 = 8\beta$$
$$16 = 8\beta$$
$$\boxed{\beta = 2}$$

$$D{:}\ (1)\quad 9 - 6\beta = \alpha$$
$$9 - 6.2 = \alpha \qquad \boxed{\alpha = -3}$$

$$\vec{w} = -3\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$$

DEPENDENCIA LINEAL

- Si $S = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots, \vec{V}_r\}$ es un conjunto de vectores (o matrices), y si la ecuación vectorial $k_1.\overrightarrow{V_1} + k_2.\overrightarrow{V_2} + k_3.\overrightarrow{V_3} + \cdots + k_r\overrightarrow{V_r} = \vec{0}$ tiene al menos una solución

$k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_r = 0,$

y esta es la única solución de la ecuación vectorial antes dicha, entonces el conjunto de vectores (o matrices) S, se dice que es LINEALMENTE INDEPENDIENTE, en forma abreviada L.I.

Si la ecuación vectorial antes dicha, tienen además otras soluciones, se dice que el conjunto es LINEALMENTE DEPENDIENTE, en forma abreviada L.D.

EJEMPLO: Indicar si los siguientes vectores son L.I. o L.D.

$$\vec{V}_1 = (1, 4, 3)$$
$$\vec{V}_2 = (2, 9, 1)$$

$$\alpha \cdot \vec{V}_1 + \beta V_2 = \vec{0}$$

$$\alpha(1,4,3) + \beta.(2,9,1) = (0,0,0)$$

$$(\alpha, 4\alpha, 3\alpha) + (2\beta + 9\beta + \beta) = (0,0,0)$$

$$(\alpha + 2\beta, 4\alpha + 9\beta; 3\alpha + \beta) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 4\alpha + 9\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

De ①

$$\alpha + 2\beta = 0$$
$$\alpha = -2\beta$$

$$\begin{cases} 4.(-2\beta) + 9\beta = 0 \\ 3(-2\beta) + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8\beta + 9\beta = 0 \\ -6\beta + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = 0}$$

$$-5\beta = 0 \quad \boxed{\beta = 0}$$

$$\alpha = -2.0$$
$$\boxed{\alpha = 0}$$

CONJ. DE VECTORES ES L.I