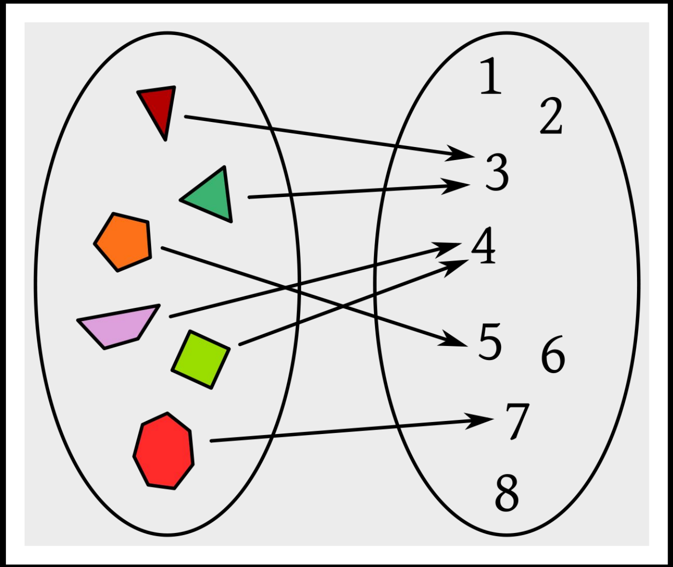
UNIDAD Nº 3: RELACIONES



RELACIONES BINARIAS

- Par ordenado: dados dos elementos a y b, indicamos mediante (a,b) al par ordenado de 1° componente a y 2° componente b
- PRODUCTO CARTESIANO: es el conjunto cuyos elementos son todos pares ordenados cuya 1° componente pertenece al conjunto A y la 2° componente al conjunto B

AxB={(a,b)/a ε A $\wedge$ b ε B}, en particular, A^2=AxA={(a,b)/a ε A $\wedge$ b ε A}

Propiedades: el producto cartesiano es asociativo: (AxB)xC=Ax(BxC)

el producto cartesiano es distributivo respecto de la unión e intersección: Ax(BUC)=(AxB)U(AxC)

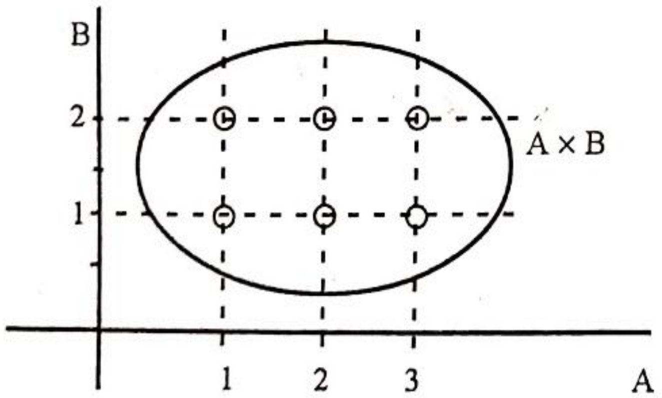
El producto cartesiano NO es conmutativo

• REPRESENTACION:

i) El producto cartesiano entre A = {1 , 2, 3} y B = {1 , 2}, es

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

ii) Por ser pares ordenados, los elementos del producto cartesiano de dos conjuntos pueden representarse mediante puntos de un plano cuya abscisa y ordenada son, respectivamente, la primera y la segunda componente.



Los vértices de la cuadrícula obtenida son los elementos del producto cartesiano.

RELACIONES BINARIAS

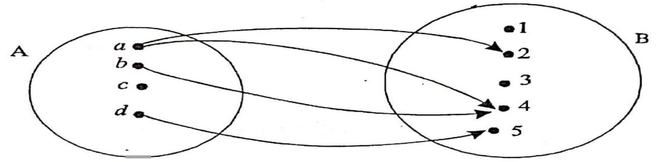
- DEFINICION: Dados dos conjunto A y B y una propiedad relativa a los elementos , si hacemos el producto cartesiano AxB y determinamos los pares ordenados (a,b) obtendremos un subconjunto R, para los cuales la propiedad va a ser positiva. $R \subset AxB$

$A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(x, y)$: x obtuvo la nota y

o bien $(x, y) \in R \Leftrightarrow P(x, y)$ es V

Supongamos que la situación al cabo de una semana queda especificada mediante el siguiente diagrama



Esta relación entre A y B está caracterizada por el conjunto de pares ordenados

$$R = \{(a, 2), (a, 4), (b, 4), (d, 5)\}$$

Como c no tiene ningún correspondiente en B, consideramos que no ha sido calificado en la semana.

Definición

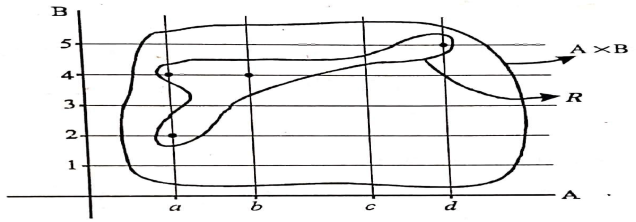
Relación de A en B es todo subconjunto del producto cartesiano A×B.

En símbolos

R es una relación entre A y B $\Leftrightarrow R \subset A \times B$

Para indicar que un par ordenado (a, b) pertenece a la relación suele escribirse $a\ R\ b$, lo que equivale a $(a, b) \in R$.

2.3. REPRESENTACIÓN DE RELACIONES



Mediante una tabla de doble entrada. Sobre la columna izquierda se anotan los elementos de A, y sobre la fila superior, los de B. En el ángulo superior izquierdo, escribimos el símbolo de la relación. Se asigna a cada elemento del producto cartesiano A×B un 1 o bien un 0, según que el par ordenado correspondiente pertenezca o no a la relación. Con el mismo ejemplo, resulta la siguiente *matriz* de 4 filas y 5 columnas

R	1	2	3	4	5
a	0	1	0	1	0
b	0	0	0	1	0
c	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1

$$M_{R:A \to B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Conjunto dominio:** llamamos dominio de la relación al conjunto formado por todos los elementos de A que pertenecen a la 1° componente de los pares ordenados de la relación

  $D_R=\{x \ \varepsilon \ A/(x,y) \varepsilon \ R\}$

- **Conjunto imagen**: llamamos imagen de la relación al conjunto formado por todos los elementos de B que pertenecen a la 2° componente de los pares ordenados de la relación

  $I_R=\{y \ \varepsilon \ B/ \ (x,y) \ \varepsilon \ R\}$

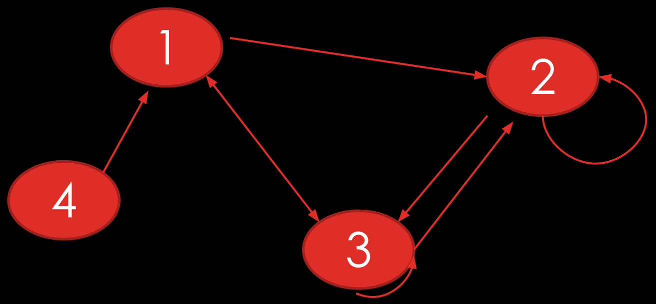
RELACIONES DEFINIDAS EN UN SOLO CONJUNTO

- El conjunto R es una relacione definida en un solo conjunto A, si y solo si, R⊂ A^2

O sea, R es un subconjunto del producto cartesiano de A^2=AxA

En las relaciones definidas en un solo conjunto vamos a poder representarla, además de las anteriores representaciones, con lo que denominamos DIGRAFO, que es un grafo (del griego **grafos**: dibujo, imagen) con flechas, donde a los elementos del conjunto lo llamamos vértices y los pares ordenados de la relacion aristas.

Ejemplo:



R={(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1)}
Siendo A={1, 2, 3, 4} y
AxA={(1,1)(1,2),(1,3),(1,4)
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)}

Definiciones que podemos ver en el dígrafo:

<u>TRYECTORIA</u>: Camino que sigo de un vértice a otro

<u>LONGITUD DEL CAMINO</u>: Cantidad de pares ordenados que se utiliza para llegar a destino

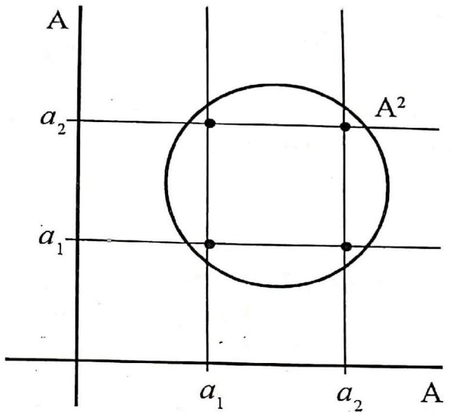
<u>CICLO</u>: Del lugar de donde salgo tengo que llegar

- CON EL SIGUIENTE EJEMPLO VEMOS LAS POSIBLES CONTIDAD DE RELACIONES QUE SE PUEDEN OBTENER.

SI A tiene m elementos y B tiene n elementos, entonces podemos obtener $2^{(n*m)}$ relaciones posible

Formamos todas las relaciones que es posible definir en el conjunto

$$A = \{a_1, a_2\}$$



Determinamos primero el producto cartesiano

$$A^2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$$

Como A^2 tiene cuatro elementos, existen 2^4 relaciones en A, que son las siguientes

$R_1 = \phi$

$R_2 = \{(a_1, a_1)\}$

$R_3 = \{(a_1, a_2)\}$

$R_4 = \{(a_2, a_1)\}$

$R_5 = \{(a_2, a_2)\}$

$R_6 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2)\}$

$R_7 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_1)\}$

$R_8 = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2)\}$

$R_9 = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$

$R_{10} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_2)\}$

$R_{11} = \{(a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$

$R_{12} = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$

$R_{13} = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_2)\}$

$R_{14} = \{(a_1, a_1), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$

$R_{15} = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$

$R_{16} = A^2$

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

- **REFLEXIVA:**

Sea R una relación definida en A, es decir, $R \subset A^2$. Tal relación puede clasificarse de acuerdo con las siguientes propiedades:

2.7.1. Reflexividad

$$R \text{ es } \textit{reflexiva} \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$$

2.7.2. No reflexividad

Consiste en la negación de 2.7.1.

$$R \text{ es no reflexiva} \Leftrightarrow \exists\, x \,/\, x \in A \;\wedge\; (x, x) \notin R$$

2.7.3. Arreflexividad

$$R \text{ es arreflexiva} \Leftrightarrow \forall\, x : x \in A \Rightarrow (x, x) \notin R$$

• SIMETRICA:

2.7.4. Simetría

$$R \text{ es simétrica } \Leftrightarrow \forall x\, \forall y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

2.7.5. No simetría

Es la negación de la simetría.

$$R \text{ es no simétrica } \Leftrightarrow \exists x\, \exists y \in A / (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R$$

2.7.6. Asimetría

$$R \text{ es asimétrica } \Leftrightarrow \forall x\, \forall y : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$$

- TRANSITIVA:

2.7.7. Transitividad

R es transitiva $\Leftrightarrow \forall x, \forall y, \forall z : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

2.7.8. No transitiva

Por ser la negación de la transitividad, decimos

R es no transitiva $\Leftrightarrow \exists x, \exists y, \exists z / (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \wedge (x, z) \notin R$

- ANTISIMETRICA:

2.7.9. Antisimetría

R es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall x, \forall y : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$

CLASIFICACIÓN DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

- **RELACION DE EQUIVALENCIA**: Una relación R es de equivalencia cuando es REFLEXIVA, SIMETRICA Y TRANSITIVA

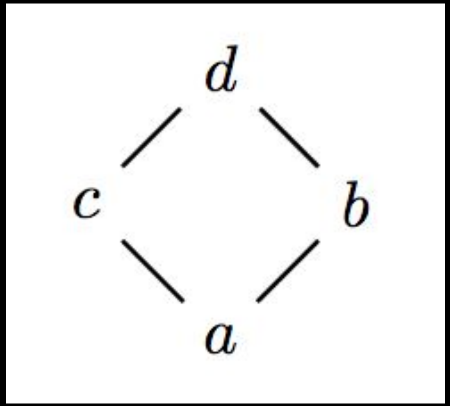
- **RELACION DE ORDEN**: AMPLIO: Cuando es reflexiva, transitiva y antisimétrica
  - Parcial: $\exists a, b \in A / (a, b) \notin R \wedge (b, a) \notin R$
  - Total: $\forall a \neq b \rightarrow (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

  ESTRICTO: Cuando es transitiva, asimétrica y arreflexiva (no lo vemos en el curso)

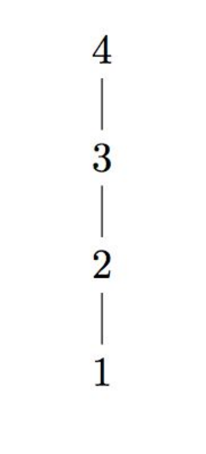
DIAGRAMA DE HASSE: Solo para relación de orden amplio. Se establece un orden de abajo para arriba con mayor importancia hasta el elemento de menor importancia

- EJEMPLOS DE DIAGRAMA DE HASSE:

Relación de orden amplio parcial: R={(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b)(b,d),(c,c),(c,d),(d,d)}



Relación de orden amplio total: R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}



- PARTICION:

Una partición debe cumplir 3 condiciones:

- La unión de los subconjuntos da como resultado el mismo conjunto
- La intersección de a pares es vacía
- No pueden haber subconjuntos vacíos

Una partición da una relación de equivalencia, y una relación de equivalencia transforma al conjunto en una partición

Ejemplo: $A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2), (3,3),(3,4),$ ... $4)\}$

$A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,4\}$

$\{A_1, A_2\}$ Es una partición