# Sistema de Ecuaciones Lineales

***Definición***

Se llama *sistema de ecuaciones* a un conjunto de ecuaciones, cuyas soluciones, si existen, son los valores de las variables que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del conjunto.

Se llama sistema de ecuaciones lineales al sistema donde todas las ecuaciones son polinomios de grado uno. Si alguna de ellas no es un polinomio de grado uno, se denomina: sistema de ecuaciones mixto.

Ejemplos

a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ -\frac{1}{5}x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$ es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: $x$ e $y$.

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{y} - z = 2 \\ \sqrt{x + y + z} = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$ es un sistema de tres ecuaciones mixto, sus incógnitas son x, y, z, pero es mixto porque hay ecuaciones cuyas variables tienen exponente distinto de 1.

c) $\begin{cases} h = a^3 - \frac{1}{3}a^2 + 3a - 1 \\ h = 3\left(a - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$ es un sistema de dos ecuaciones mixto con dos incógnitas: $h$; $a$.

d) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$ es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas: $x$, $y$ y $z$.

## Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales según su estructura

***Definición***

Un sistema de ecuaciones lineales se puede clasificar según la cantidad de ecuaciones y de incógnitas como:

***Cuadrado***: Un sistema de ecuaciones lineales es cuadrado cuando tiene la misma cantidad de ecuaciones y de incógnitas.

***Rectangular***: Un sistema de ecuaciones lineales es rectangular cuando la cantidad de incógnitas es diferente a la cantidad de ecuaciones. Puede tener más ecuaciones o más incógnitas.

## Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales según su conjunto solución

Un sistema de ecuaciones lineales se puede clasificar según su conjunto solución como:

**Compatible Determinado:** El conjunto solución tiene un único elemento. Se suele decir que la solución es única.

**Compatible Indeterminado:** El conjunto solución tiene infinitos elementos. Se suele decir que existen infinitas soluciones.

**Incompatible:** EL conjunto solución es vacío. Se suele decir que no hay solución.

## Sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

Ejemplo

El siguiente es un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas: $x$ e $y$; donde los coeficientes son los valores reales: $\frac{1}{2}$ ; 1; -3; 2; los términos independientes son: 5; 7.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 5 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$$

## Resolución de Sistema de Ecuaciones Lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en encontrar los valores de las incógnitas que verifican simultáneamente todas las ecuaciones de dicho sistema.
En los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas compatibles las soluciones son pares ordenados.

Ejemplo

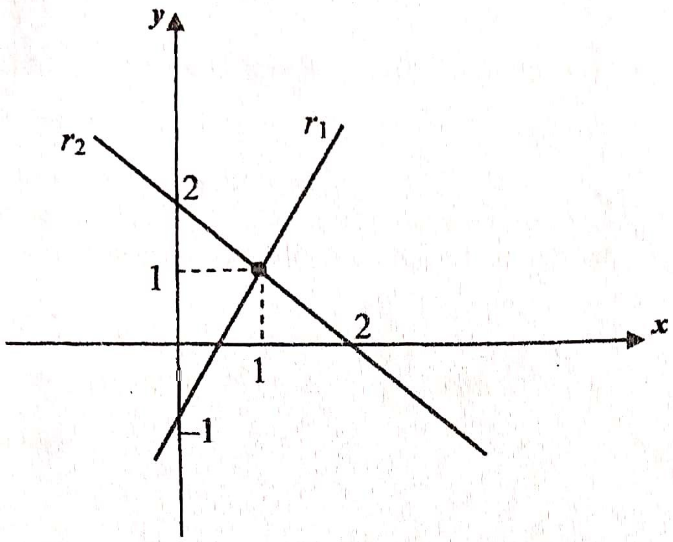
El sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$ tiene al par ordenado: $(x;y) = (1;1)$ como una solución, ya que este par ordenado verifica ambas ecuaciones: $\begin{cases} 2.1 - 1 = 1 \\ 5.1 - 2.1 = 3 \end{cases}$

## Idea gráfica para la resolución de Sistema de Ecuaciones Lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

El sistema está formado por ecuaciones lineales de dos incógnitas, y retomando lo visto sobre recta en el plano, toda ecuación lineal en a los sumo dos variables es la ecuación de una recta en el plano.

Ejemplo 1

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ; cada ecuación por separado tiene infinitas soluciones, es decir, infinitos pares de valores reales que la verifican.
Lo que habrá que buscar, es si entre estas infinitas soluciones de cada ecuación, existe alguna que sea solución de ambas ecuaciones a la vez.
Podemos, para ayudarnos en la búsqueda, graficar, en un mismo sistema de ejes cartesianos, las rectas cuyas ecuaciones son las del sistema dado.
Las ecuaciones, en forma explícita, de cada recta, son: $r_1 : y = 2x - 1$ ; y: $r_2 : y = -x + 2$ .




Según el gráfico, como cada punto de las rectas son solución de las respectivas ecuaciones, el punto donde se corten es una solución común a ambas ecuaciones. Ese punto, será, por lo tanto, la solución de nuestro sistema.
Por tanteo, calculamos que el par: $(x;y)=(1;1)$; es dicho punto de corte de las rectas; es decir, que el conjunto solución del sistema es: $S=\{(1;1)\}$.
Luego, el sistema es un sistema compatible determinado.

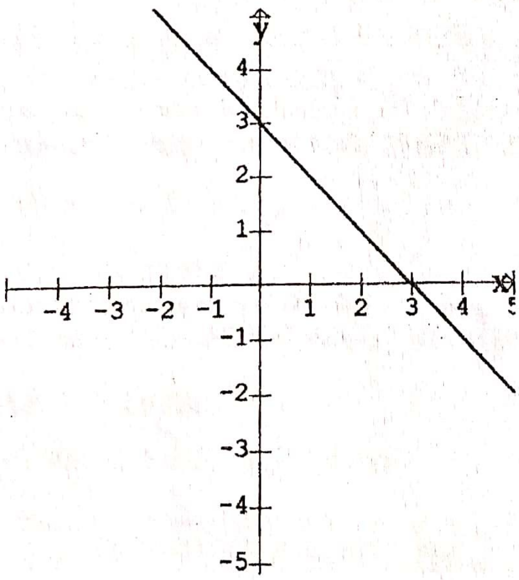
Ejemplo 2

b) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ Al igual que en el ejemplo anterior, expresamos las ecuaciones de las rectas en forma explícita y graficamos.

Despejamos en la primera ecuación $y=3-x$.

En la segunda ecuación nos encontramos con $y=\dfrac{6-2x}{2}$

$y=\dfrac{6}{2}-\dfrac{2x}{2} \Rightarrow y=3-x$ O sea, es la misma recta, por lo tanto hay infinitos pares que verifican ambas ecuaciones.




En esta situación se dice que el sistema es

***Sistema compatible indeterminado***

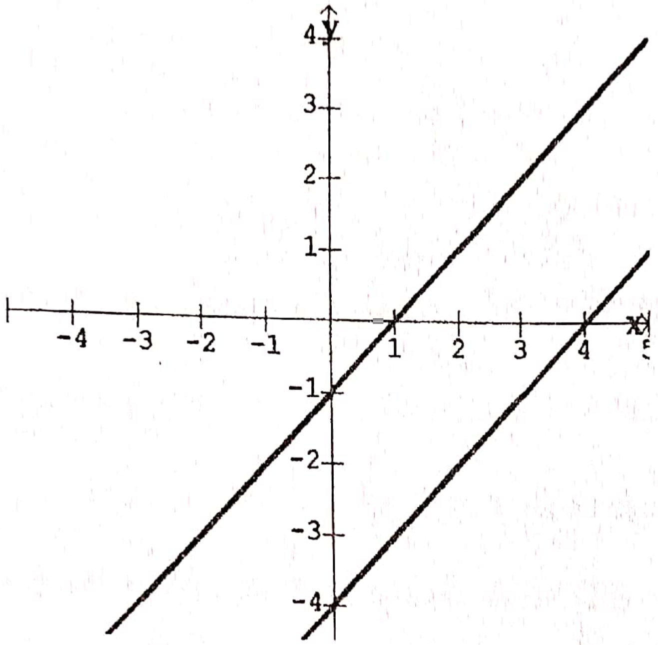
Ejemplo 3

c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+y=1 \end{cases}$

Procedemos en forma similar. Expresamos las ecuaciones de las rectas en forma explícita

$y=x-4$

$y=1+x$




Observamos que son dos rectas paralelas, por lo tanto no hay puntos en común entre ambas rectas.
En esta situación se dice que el sistema es

***Sistema incompatible***

***Conclusión***

Si el sistema de ecuaciones es compatible determinado, las rectas se cruzan en un punto
Si el sistema es compatible indeterminado, las rectas son coincidentes
Si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas no coincidentes.

## Actividad de Aplicación N° 27

Encontrar, mediante el método gráfico el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, indicando si se trata de un Sistema Compatible Determinado, Compatible Indeterminado o Incompatible.

a) $\begin{cases} 5x-5y=10 \\ y=4-x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-4y=4 \\ -x+2y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-4y=4 \\ -x+2y=-2 \end{cases}$

Si bien la idea gráfica nos ayuda a visualizar la situación; no nos informa con exactitud, las coordenadas del punto de intersección de las rectas, si es que lo hay. Para ello, podemos utilizar los métodos que resuelven sistemas en *forma analítica*.

## Sistemas Equivalentes

***Definición***

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tiene el mismo conjunto solución.

Ejemplos

El sistema de ecuaciones lineales: (I) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ es compatible determinado y su conjunto solución es:

$S=\{(1;1)\}$

El sistema de ecuaciones lineales: (II) $\begin{cases} 2x-2y=0 \\ 4x+4y=8 \end{cases}$ es compatible determinado y su conjunto solución es:

$S=\{(1;1)\}$

Por lo tanto, los sistemas lineales (I) y (II) son equivalentes.

## Operaciones elementales entre las ecuaciones de un sistema

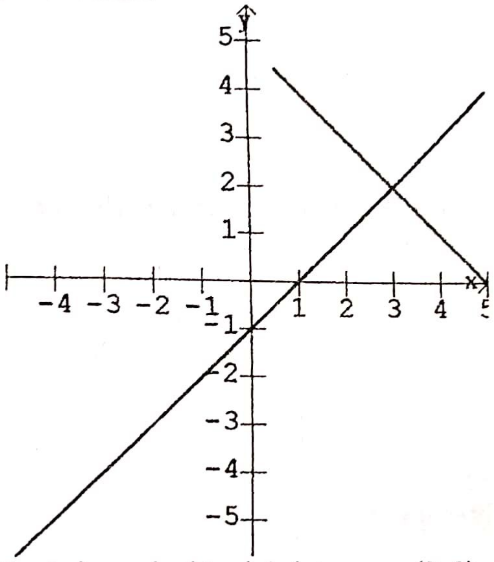
Son operaciones que transforman un sistema en otro equivalente

- Permutar ecuaciones del sistema.
- Multiplicar una ecuación en un número real, no nulo.
- Sumar o restar a una ecuación cualquier múltiplo, no nulo, de otra ecuación del sistema.

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ El par (3;2) verifica ambas ecuaciones. $\begin{cases} 3+2=5 \\ 3-2=1 \end{cases}$

Graficamos:




La única solución del sistema es (3; 2)

Si a $x + y = 5$ la multiplicamos por 2, resulta $2x + 2y = 10$,

El sistema $\begin{cases} 2x+2y=10 \\ x-y=1 \end{cases}$ es equivalente al anterior, se puede comprobar que la única solución es (3; 2).

Esto se aplica para resolver analíticamente los sistemas de ecuaciones lineales.

## Resolución analítica de sistemas de ecuaciones lineales

Usamos las propiedades antes descriptas para resolver sistemas

## Método de eliminación de Gauss

También se lo llama de reducción o de sumas y restas.

Tratamos de eliminar alguna incógnita, en alguna de las ecuaciones. Por ejemplo, si en nuestro sistema dejamos la primera ecuación como está y a la segunda la reemplazamos por la suma de la primera con la segunda multiplicada por – 1.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \quad E_2 \to E_1 + (-1)E_2 \qquad \begin{array}{r} x+y=5 \\ + \quad -x+y=-1 \\ \hline 2y=4 \end{array}$$

El sistema resulta entonces:

$\begin{cases} x+y=5 \\ \quad 2y=4 \end{cases}$ Por las propiedades dichas anteriormente este sistema es equivalente al anterior, es decir el conjunto solución es el mismo. Con este procedimiento consigue que una incógnita desaparezca y así poder despejar.

Resulta entonces

$$2y = 4$$
$$y = 4:2$$
$$y = 2$$

Reemplazamos en la primera ecuación

$$x + 2 = 5$$
$$x = 5 - 2$$
$$x = 3$$

El conjunto solución es $S = \{(3;2)\}$ En este caso el sistema es, de acuerdo con su conjunto solución, ***compatible determinado***

Otro ejemplo

Resolver el sistema: $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -2x - \frac{3}{2}y = -5 \end{cases}$

Tratamos de eliminar alguna incógnita, por ejemplo x. Para ello realizamos alguna de las operaciones entre ecuaciones

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -2x - \frac{3}{2}y = -5 \end{cases} \quad E_2 \to 2E_2 + E_1$$

Resulta:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son todos los pares que cumplen $4x + 3y = 10$

$S = \{(x, y) \in R^2 / 4x + 3y = 10\}$

El sistema es ***compatible indeterminado***. Tiene infinitas soluciones.

Un ejemplo más:

Resolver:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$ Eliminamos alguna variable $E_2 \to 2E_2 - E_1$

Resulta:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

La segunda ecuación es una contradicción, esto significa que el sistema es ***incompatible***. No tiene solución.

El conjunto solución es $S = \varnothing$ (Conjunto vacío)

***Existen otros métodos que en el caso de los sistemas de dos por dos, suelen usarse, ellos son: método de sustitución y de igualación.***

## Método de Sustitución

Este método consiste en considerar una ecuación del sistema, elegir una variable de dicha ecuación y expresarla en función de la/s otra/s variable/s. Y luego, sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación presente en el sistema.

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$

Resolvemos por el método de sustitución:

Consideramos la ecuación: $3x - y = 2$ ; y elegimos la variable: $y$ . Expresamos a esta variable en función de $x$ ;

$$y = 3x - 2 \qquad (I)$$

Ahora, sustituimos a la variable y, según (I) en la otra ecuación: $\frac{1}{2}x+(3x-2)=\frac{3}{2}$

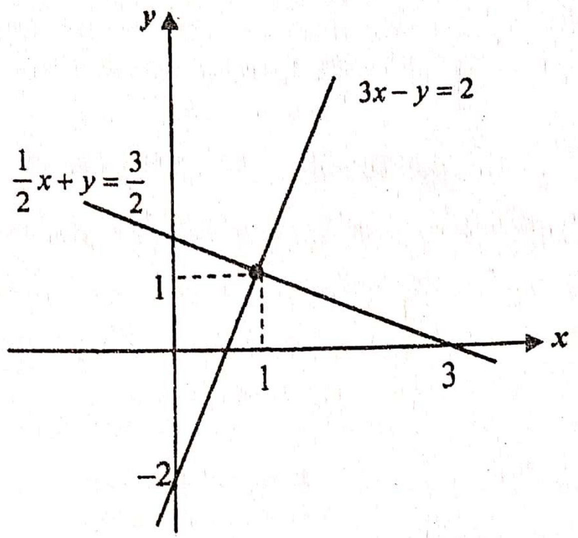
Al realizar esta sustitución, resulta una ecuación en una variable, que resolvemos:

$\frac{1}{2}x+3x=\frac{3}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x=\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=1$.

Finalmente, obtenido el valor de la variable $x$, buscamos el valor de la otra variable reemplazando en cualquiera de las ecuaciones la variable hallada: $y=3.1-2 \Leftrightarrow y=1$.

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y su conjunto solución es: $S=\{(1;1)\}$

Visto desde la gráfica de las rectas:




## Método de Igualación

Este método propone considerar todas las ecuaciones, elegir en ellas la misma variable, y expresarla en función de las otras variables. Luego, como se desea que las soluciones sean comunes a todas las ecuaciones, esa variable elegida debe valer lo mismo en cada ecuación. Entonces se igualan las expresiones en la que variable elegida está en función de las otras.

Ejemplo

Sea el sistema lineal de ecuaciones: $\begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=2 \end{cases}$

Resolvemos por el método de igualación:

Elegimos la variable $y$ en cada ecuación, y la expresamos en función de la variable $x$:

De la primera ecuación: $x-y=0 \Leftrightarrow y=x$

De la segunda ecuación: $-x+y=2 \Leftrightarrow y=x+2$

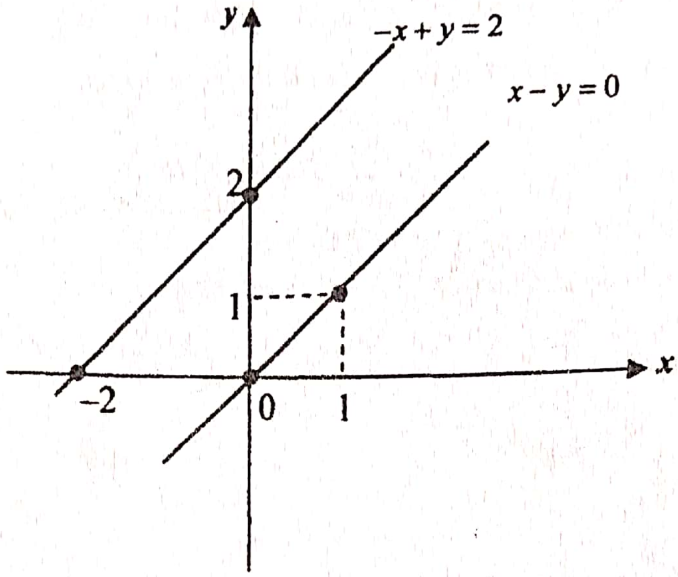
Luego, como la variable $y$ debe valer igual en cada ecuación, igualamos las expresiones de esta variable:

$$x=x+2 \Leftrightarrow 0.x=2$$

Esta ecuación es incompatible, esto es que no existe $x \in R$ para que la variable "y" valga lo mismo en cada ecuación. Es decir, no hay soluciones comunes entre las ecuaciones.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es incompatible y su conjunto solución es: $S=\varnothing$

Las ecuaciones del sistema son las ecuaciones de dos rectas paralelas.




## Actividad de Aplicación Nº 28

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Clasificarlos y comprobar gráficamente:

a) $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ -2x-4y=-16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-2y=5 \\ 2x-y=2,5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}+\dfrac{x+y}{3}=1 \\ \dfrac{3x+y}{5}-\dfrac{5x-2y}{2}=1 \end{cases}$