# UNIDAD Nº 2: MATRICES

# DEFINICION:

- **ARREGLO:** Es una estructura homogénea cuyas componentes pueden ser de cualquier tipo, aunque todos deben ser del mismo tipo. En general trabajaremos con arreglos numéricos.
- **MATRIZ:** Llamamos matriz de orden o dimensión mxn, a un arreglo rectangular de formado por m filas y n columnas. En general a las matrices se las designa con letras mayúsculas, y a sus elementos, en forma genérica, con la misma letra que a la matriz, pero con letra minúscula y con dos subíndices, el i y el j.

Si a una matriz se la designa con la letra A, a sus elementos se los designa con $a_{ij}$

El primer subíndice (i) indica la fila a la que pertenece el elemento, y el segundo subíndice (j) indica la columna a la que pertenece el elemento

Una matriz de orden o dimensión 2x3 con elementos pertenecientes a los números reales se indica $A_{(a_{ij})} \in \Re^{2x3}$

EJEMPLO: A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

$a_{13} = \frac{1}{2}$ elemento perteneciente a la fila 1 columna 3

- Una matriz de orden nxm en forma genérica, se escribe de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO: Escribir la siguiente matriz $A_{(a_{ij})} \in \mathbb{R}^{3x4}$ / $a_{ij} = 2 \; si \; i = j \vee a_{ij} = 3 \; si \;\; i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

# MATRICES PARTICULARES

- ***MATRIZ CUADRADA***: Es una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas, o sea, m=n, y su dimensión es nxn

  En forma simbólica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

En una matriz cuadrada, todos los elementos ubicados en las posiciones donde i=j se la denomina diagonal principal de la matriz

- ***MATRIZ FILA***: Es una matriz en la que todos sus elementos se encuentran dispuestos en una sola fila, su orden o dimensión será 1xn y tendrá la misma cantidad de elementos como columnas tiene la matriz.

  En forma simbólica se escribe

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$ Vector Fila

$$B = [2 \quad \tfrac{1}{3} \quad -1 \quad 0 \quad 2] \qquad B_{(b_{ij})} \in \mathbb{R}^{1\times 5}$$

$\rightarrow b_{13}$

- ***MATRIZ COLUMNA***: es una matriz en la que todos sus elementos están dispuestos en una sola columna, su orden o dimensión será nx1, y tendrá tantos elementos como fila tiene la matriz.

  en forma simbólica se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1/3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{VECTOR COLUMNA}$$

$$A_{(a_{ij})} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$$

- ***MATRIZ DIAGONAL***: Es una matriz cuadrada en la que se cumple $\forall i, \forall j \; si \; i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$, o sea, que es una matriz que tiene nulos los elementos que no están ubicados en la diagonal principal de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{MATRIZ DIAGONAL}$$

DIAGONAL PRINCIPAL

- ***MATRIZ ESCALAR***: Es toda matriz diagonal en la que se cumple que $\forall i, \forall j, si\ i = j \rightarrow a_{ij} = \boldsymbol{k, con\ k\varepsilon\mathbb{R}}$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{MATRIZ ESCALAR}$$

DIAGONAL PRINCIPAL

- ***MATRIZ IDENTIDAD***: Para designar la matriz identidad solo usaremos I

Es una matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal valen 1

En forma simbólica se define la matriz identidad como una matriz escalar en la que $\forall i, \forall j, si\ i = j \rightarrow a_{ij} = 1$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{E}\mathbb{R}^{2x2} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{E}\mathbb{R}^{3x3}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{E}\mathbb{R}^{4x4}$$

Si en una operación se pide lo siguientes $2A + B = I, la\ matriz\ I\ es\ la\ identidad$

- ***MATRIZ NULA***: Para designar a esta matriz usaremos la letra N, y será una matriz de cualquier orden o dimensión en la que todos los elementos valen 0 (cero)

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si se da la operación $2A + B + N = I, la\ matriz\ N\ es\ la\ nula\ e\ I\ es\ la\ identidad$

# OPERACIONES ENTRE MATRICES

- ***IGUALDAD***: para que dos matrices sean iguales, estas deben tener el mismo orden o dimensión y además los elementos ubicados en las mismas posiciones deben de ser iguales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B \begin{bmatrix} x+1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\forall x \neq 1 \quad A \neq B$$

- ***SUMA DE MATRICES***: Para poder sumas dos o mas matrices, estas deben tener el mismo orden.

La matriz que se obtiene como resultado tendrá el mismo orden que las matrices sumadas. Cada elemento de la matriz resultado se obtendrá sumando los elementos ubicados en las mismas posiciones de las matrices a sumar.

En forma simbólica: $A + B = C, con\ A, B\ y\ C\ \mathcal{E}\mathbb{R}^{mxn}, \forall i, \forall j \rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \underbrace{a_{11} + b_{11}}_{c_{11}} & \underbrace{a_{12} + b_{12}}_{c_{12}} & \underbrace{a_{13} + b_{13}}_{c_{13}} \\ \underbrace{a_{21} + b_{21}}_{c_{21}} & \underbrace{a_{22} + b_{22}}_{c_{22}} & \underbrace{a_{23} + b_{23}}_{c_{23}} \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1/2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1/2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2+1 & (-4)+(-1) \\ 1+2 & (-3)+1/2 \\ 2+(-3) & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -5/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# PROPIEDADES DE LA SUMA

1. OPERACIÓN CERRADA: La suma de 2 matrices es otra matriz definida en forma única
2. PROPIEDAD CONMUTATIVA: $A + B = B + A,\ con\ A\ y\ B\ \in \Re^{mxn}$
3. PROPIEDAD ASOCIATIVA: $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C),\ con\ A, B\ y\ C\ \in \Re^{mxn}$
4. ELEMENTO NEUTRO: la matriz nula cumple con la condición de elemento neutro, ya que A+N=A
5. ELEMENTO OPUESTO: La matriz opuesta de la matriz A es la matriz (-A), ya que A+ (-A)=N

Para realizar la siguiente operación A-B=A+(-B)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1/2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1/2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1/2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- ***PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ***: Para multiplicar un escalar por una matriz, lo que hacemos es multiplicar el escalar por cada elemento de la matriz.

En forma simbólica es: $\alpha \mathcal{E} \Re, A \mathcal{E} \Re^{mxn}$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO: α=2 y

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

***PROPIEDADES***:

1. OPERACIÓN CERRADA
2. PROPIEDAD ASOCIATIVA
3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA DE MATRICES
4. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA SUMA DE ESCALARES

$\alpha \mathcal{E} \mathbb{R}, A_{(a_{ij})} \mathcal{E} \mathbb{R}^{mn}, B_{(b_{ij})} \mathcal{E} \mathbb{R}^{mn}$

$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$

$\exists \alpha_1, \alpha_2 \mathcal{E} \mathbb{R}, A_{(a_{ij})} \mathcal{E} \mathbb{R}^{mn}$

$(\alpha_1 + \alpha_2) A = \alpha_1 A + \alpha_2 A.$

# PRODUCTO DE MATRICES

- Para poder multiplicar una matriz A por otra matriz B, en ese orden, es necesario que la cantidad de columnas de la primera matriz sea igual a la cantidad de filas de la segunda matriz. Si esta condición no se cumple, la multiplicación no se puede realizar en ese orden.

Si la condición se cumple, las matrices se podrán multiplicar y el resultado será otra matriz que tendrá la misma cantidad de filas que la primera matriz y la misma cantidad de columnas que la segunda matriz. Por lo tanto $A.B = C \rightarrow A(a_{ij})\mathcal{E}\mathbb{R}^{mxn}, B(b_{ij})\mathcal{E}\mathbb{R}^{nxp} y\ C(c_{ij})\mathcal{E}\mathbb{R}^{mxp}$

Para obtener un elemento de la matriz resultado, se debe multiplicar una fila de la primera matriz por una columna de la segunda matriz, la posición del elemento a calcular me indicara que fila de la 1° matriz, por que columna de la 2° matriz se multiplicaran.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} b_{21}}^{C_{11}} & \overbrace{a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} b_{22}}^{C_{12}} & \overbrace{a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23}}^{C_{13}} \\ \underbrace{a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}}_{C_{21}} & \underbrace{a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}}_{C_{22}} & \underbrace{a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23}}_{C_{23}} \\ \underbrace{a_{31} b_{11} + a_{32} b_{12}}_{C_{31}} & \underbrace{a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22}}_{C_{32}} & \underbrace{a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23}}_{C_{33}} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = C \qquad A^{2\times 4} \cdot B^{4\times 3} = C^{2\times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2+2+0+-2 & 4+(-3)+0+(-3) & 4+(-6)+0+0 \\ 4+(-2)+9+(-1) & 8+3+(-3)+(-4) & 8+6+0+0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -2 \\ 10 & 4 & 14 \end{bmatrix} \checkmark$$

# PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

1. <u>PROPIEDAD DISTRUBUTIVA RESPECTO A LA SUMA DE MATRICES</u>

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\left(\underset{n\times p}{B}+\underset{n\times p}{C}\right)=\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B}}_{m\times p}+\underbrace{\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times p}{C}}_{m\times p}$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

2. <u>PROPIEDAD ASOCIATIVA</u>

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{\left(\underset{n\times p}{B}\cdot\underset{p\times r}{C}\right)}_{m\times r}=\underbrace{\left(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B}\right)}_{m\times p}\cdot\underset{p\times r}{C}$$

NO SIEMPRE SE CUMPLE LA PROPIEAD CONMUTATIVA

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

EL PRODUCTO DE DOS MATRICES NO NULAS PUEDE DAR COMO RESULTADO LA MATRIZ NULA

# OPERACIONES Y MATRICES PARTICULARES

***MATRIZ TRASPUESTA:*** Dada una matriz $A(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{mxn}$, llamamos matriz traspuesta de A, y lo simbolizamos con $A^t$ a una matriz que tiene las siguientes características:

$$A^t(a_{ji}) \in \mathbb{R}^{nxm}$$

EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$a_{12}$ $a_{13}$ $a_{21}$ $a_{31}$

$A(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\qquad A^t(a_{ji}) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRASPUESTA

$$(A^t)^t = A$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

- ***MATRIZ SIMETRICA***: Una matriz cuadrada se llama simétrica si y solo si es igual a su traspuesta.

En una matriz simétrica los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales.

En forma simbólica es: $A(a_{ij})\mathcal{E}\mathbb{R}^{nxn}\ es\ simetrica \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow \forall i, \forall j\ a_{ij} = a_{ji}$

EJEMPLO:

simetrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

simetrica

simetrica

$a_{12} = a_{21}$ $\quad a_{13} = a_{31}$ $\quad a_{23} = a_{32}$

$-2 = -2$ $\quad 5 = 5$ $\quad -4 = -4$

LA MATRIZ A ES SIMÉTRICA

- ***<u>MATRIZ ANTISIMETRICA</u>***: Una matriz cuadrada se denomina anti simétrica si y solo si es igual a la opuesta de su traspuesta.

En una matriz anti simétrica los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos y los elementos de la diagonal principal son ceros.

En forma simbólica es: $A \mathcal{E} \mathbb{R}^{nxn}\ es\ antisimetrica \Leftrightarrow A = -A^t \Leftrightarrow \forall i, \forall j\ a_{ij} = -a_{ji}\ \wedge a_{ii} = 0$

EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & +5 \\ +2 & 0 & -4 \\ -5 & +4 & 0 \end{bmatrix} \quad -A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = -A^t$$