

# FFT

June 5, 2024

# 1 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

El problema del cálculo de la DFT es obtener una secuencia  $\{X(k)\}_{k=0,1,2,\dots,N-1}$  a partir de la secuencia  $\{x(n)\}_{n=0,1,2,\dots,N-1}$  para algún  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  de forma tal que

$$DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (1)$$

siendo  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  el cual es denominado Twiddle Factor y donde  $X(k)$  y  $x(n)$  son secuencias complejas, es decir  $X(k), x(n) \in \mathbb{C}$ .

Observar que  $W_N^0 = 1$ .

Desarrollando la ec. (1), se obtiene:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^0 + x(2)W_N^0 + \dots + x(N-1)W_N^0 & (k=0) \\ X(1) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^1 + x(2)W_N^2 + \dots + x(N-1)W_N^{N-1} & (k=1) \\ X(2) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^2 + x(2)W_N^4 + \dots + x(N-1)W_N^{2(N-1)} & (k=2) \\ &\vdots \\ X(k) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^k + x(2)W_N^{2k} + \dots + x(N-1)W_N^{(N-1)k} \\ &\vdots \\ X(N-1) &= x(0)W_N^0 + x(1)W_N^{N-1} + x(2)W_N^{2(N-1)} + \dots + x(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)} & (k=N-1) \end{aligned} \quad (2)$$

Matricialmente se puede expresar según:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_N = \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Observar que la cantidad de operaciones asciende como  $N^2$ .

## 2 Para qué se usa la FFT / IFFT en real time?

Recordemos rápidamente modulación en amplitud. Se tiene una señal  $x_0(t)$  que se desea transmitir por un medio físico. Primero limitamos las amplitudes posibles de  $x_0(t)$  porque si puede tomar cualquier valor (señal analógica) resulta que va ser muy difícil separarla del ruido. Por lo cual diremos que  $x_0(t)$  sólo puede tomar ciertos valores discretos. Comúnmente, la cantidad de valores que se adoptan son  $2^M$ . Además dichos valores discretos se asignan a valores binarios en código Gray ya que si del lado receptor por efecto del ruido, un símbolo se confunde con otro adyacente, sólo nos estaríamos equivocando en un bit. Sólo se permite que la señal  $x_0(t)$  adquiera uno de los  $2^N$  valores cada un tiempo que se denomina tiempo de símbolo  $T_{sym}$ .

Si queremos por el mismo medio enviar más cantidad de información en la misma cantidad de tiempo hay diferentes técnicas:

1. Aumentar la cantidad de niveles.
2. Disminuir el tiempo de símbolo.
3. Usar una portadora para modular "un nuevo canal" en una frecuencia alta que podamos diferenciar de la original de banda base.

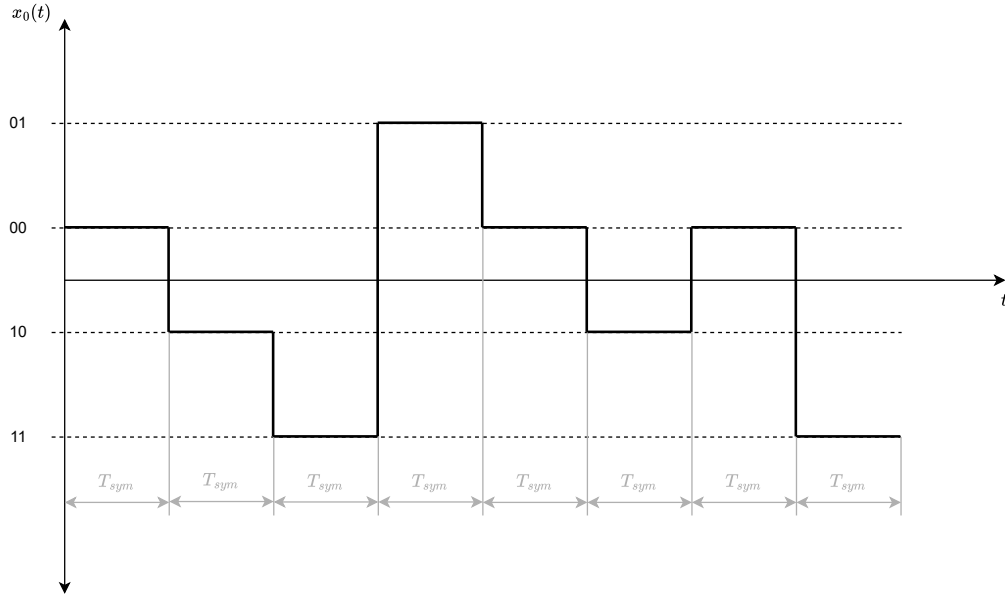


Figure 1: Modulación de amplitud discreta.

Concentrémonos en el caso 3. Entonces, queremos modular la amplitud de una portadora o carrier  $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ , donde  $f_c$  es la frecuencia del carrier, con una nueva señal  $x_1(t)$  que posee las mismas posibles amplitudes discretas y mismo tiempo de símbolo  $T_{sym}$ . Ahora, en el medio de transmisión existirá la señal

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(2\pi f_c t) \quad (5)$$

(Nota: se está ignorando la componente de ruido que agrega el canal y cualquier posible efecto de filtrado y/o distorsión que el canal pudiese también agregar).

Para separar ambos canales en el extremo receptor, entonces se multiplica la señal recibida por el carrier:

$$x(t)\cos(2\pi f_c t) = x_0 \cos(2\pi f_c t) + \cos^2(2\pi f_c t) = x_0 \cos(2\pi f_c t) + x_1 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t) \right] \quad (6)$$

Observemos que con un filtrado pasa bajos se puede discriminar  $x_0(t)$  de  $x_1(t)$ .

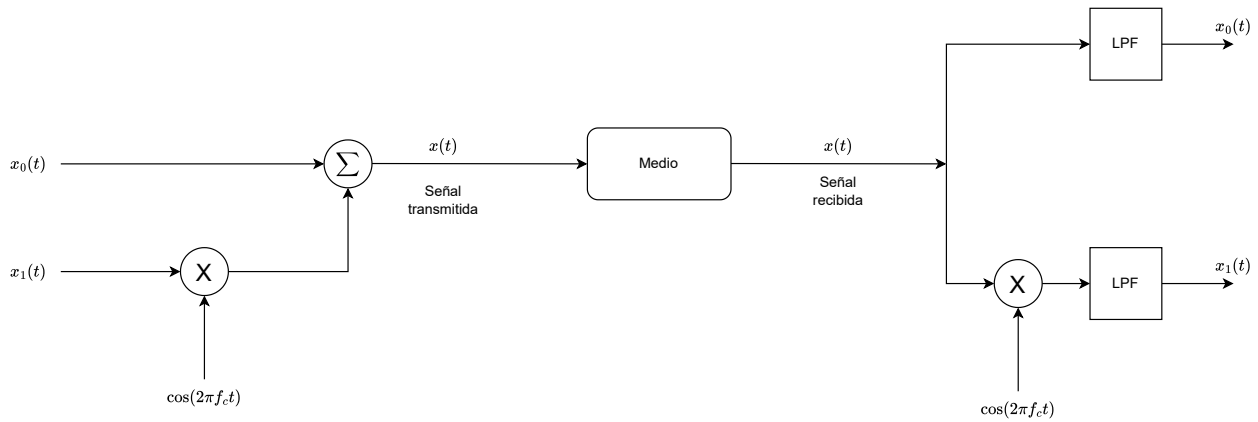


Figure 2: Demodulación.

La pregunta que surge es: ¿cuál es la frecuencia de portadora  $f_c$  adecuada para poder discriminar  $x_0$  y  $x_1$ ?

Respuesta: Alumnos contestan

Por otro lado, si quisieramos aumentando la cantidad de información transmitida en la misma cantidad de tiempo debemos seguir agregando portadoras, y el ancho de banda final vuelve al sistema irrealizable.

Otra opción: DMT/OFDM

¿Qué pasa si hacemos coincidir la frecuencia de carrier con el período de símbolo?

Respuesta: idealmente podemos poner la cantidad de portadoras que quisieramos siempre y cuando la frecuencia de la misma sea múltiplo entero de  $1/T_{sym}$ . Cada “tono” puede tomar el mismo conjunto posible de amplitudes discretas.

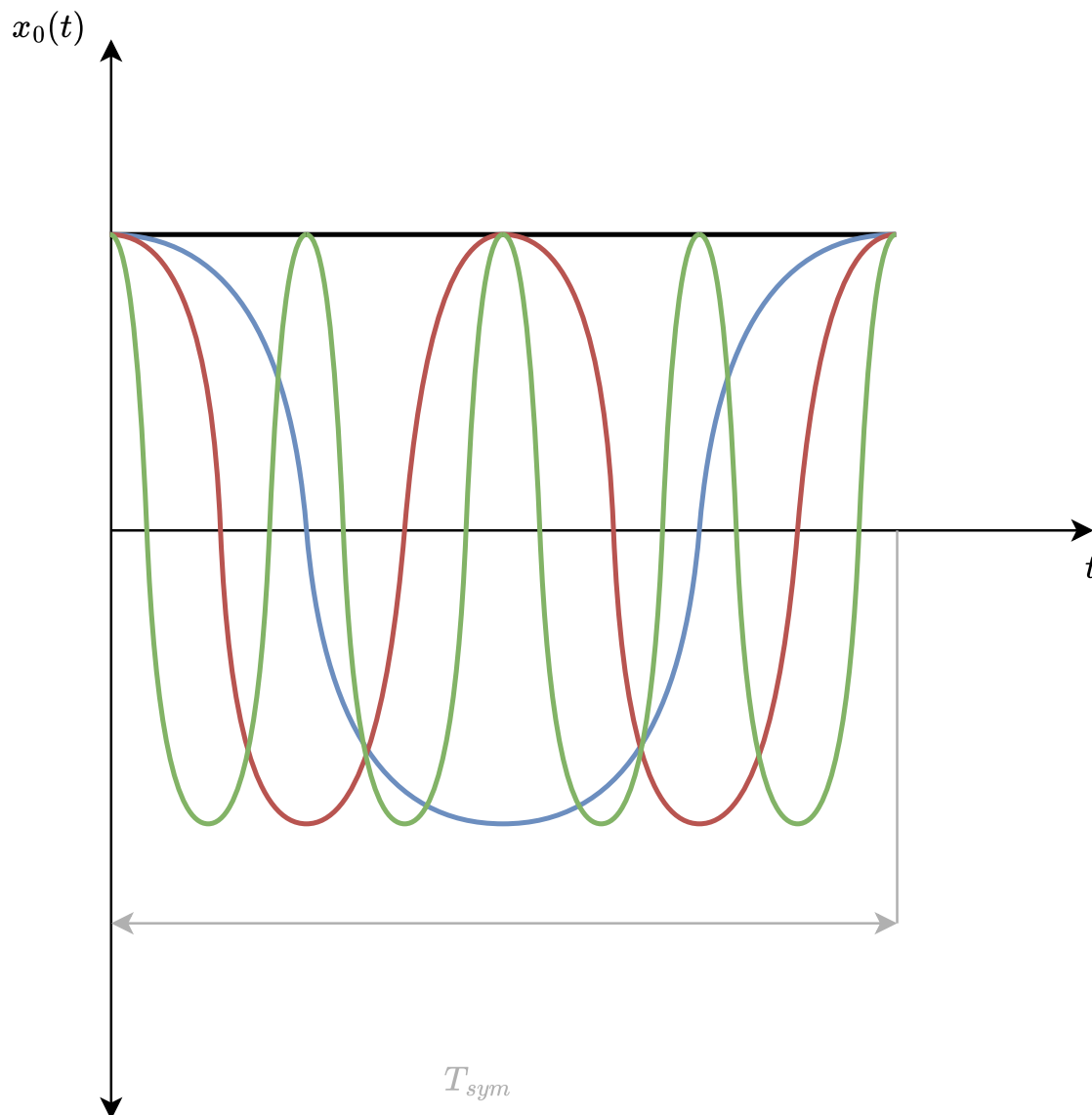


Figure 3: Multi tono.

Como vamos a crear el multitono con un sistema digital, entonces va a estar muestreado en el tiempo y por lo cual la cantidad posible de portoras es tal que cumpla con Nyquist, es decir que el carrier de mayor frecuencia será

$f_c(max) = N_{sym}/2$ , donde  $N_{sym} = f_s \times T_{sym}$  siendo  $f_s$  la frecuencia de muestreo del sistema. El valor de la amplitud de cada tono será  $2^M$  y la cuantización será de  $N$  bits

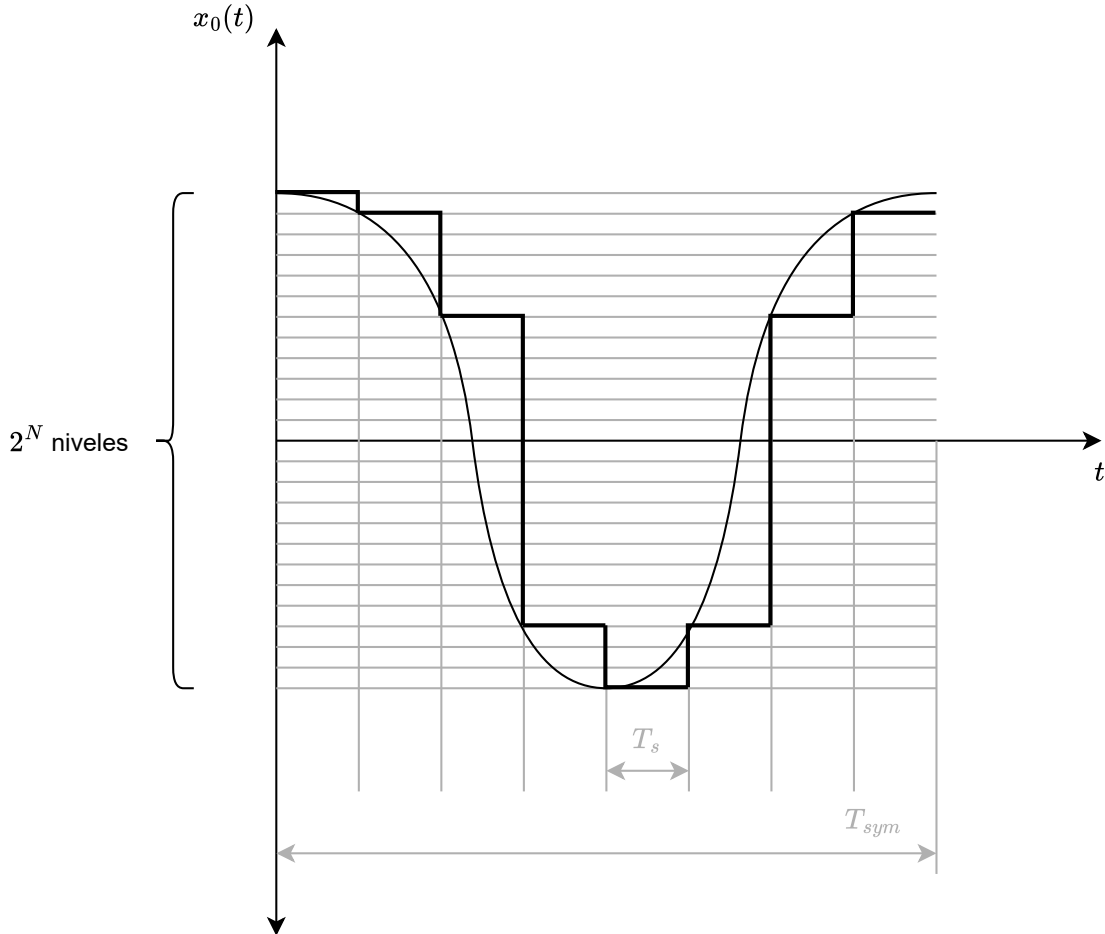


Figure 4: Tono discreto.

En frecuencia, el espectro se verá:

Ejemplo:  $f_s = 16.384 KHz$ ,  $N_{sym} = 16384$ ,  $f_c(max) = 8.192 KHz$ ,  $\Delta f_c = 1.0 KHz$ ,  $M = 4$  (4 amplitudes posibles), cuantización  $N = 10 bits$ .

Finalmente, se puede duplicar la cantidad de información transmitida modulando en cuadratura dos componentes: una parte “real” y una “imaginaria”. Es decir, se tienen dos multitonos muestreados en tiempo  $x_{re}(n)$ ,  $x_{im}(n)$  siendo

$$\begin{aligned} x_{re}(n) &= \sum_{i=0}^{N_{carriers}-1} x_{re_i}(n) \cos\left(\frac{2\pi n i}{N_{carriers}}\right) \\ x_{im}(n) &= \sum_{i=0}^{N_{carriers}-1} x_{im_i}(n) \cos\left(\frac{2\pi n i}{N_{carriers}}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $x_{re_i}(n)$ ,  $x_{im_i}(n)$  sólo pueden tomar  $2^M$  valores. La señal compleja modulante será:

$$x(n) = x_{re}(n) + j x_{im}(n) \quad (8)$$

y la señal transmitida por el medio será:

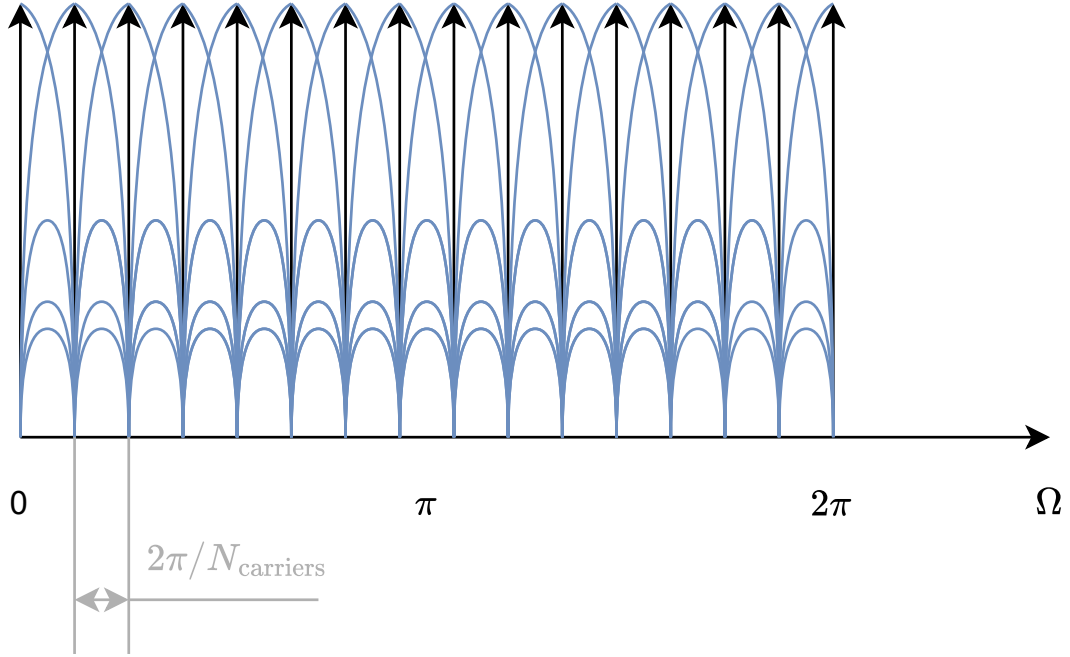


Figure 5: Tono discreto.

$$x_{Tx}(n) = x_{re}(t) \cos(2\pi f_c t) + x_{im}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (9)$$

Para recuperar partes real e imaginaria en el extremo receptor, se multiplica  $x_{Rx}$  por  $\cos(2\pi f_c t)$  y por  $\sin(2\pi f_c t)$ :

(Nota: se está ignorando la componente de ruido que agrega el canal y cualquier posible efecto de filtrado y/o distorsión que el canal pudiese también agregar).

$$\begin{aligned} x_{Rx}(t) \cos(2\pi f_c t) &= \frac{1}{2}x_{re}(t) + \frac{1}{2}x_{re}(t) \cos(2\pi 2f_c t) + \frac{1}{2}x_{im}(t) \sin(2\pi 2f_c t) \\ x_{Rx}(t) \sin(2\pi f_c t) &= \frac{1}{2}x_{im}(t) + \frac{1}{2}x_{re}(t) \sin(2\pi 2f_c t) + \frac{1}{2}x_{im}(t) \cos(2\pi 2f_c t) \end{aligned} \quad (10)$$

Por medio de LPF pueden obtenerse  $x_{re}(t)$ ,  $x_{im}(t)$ .

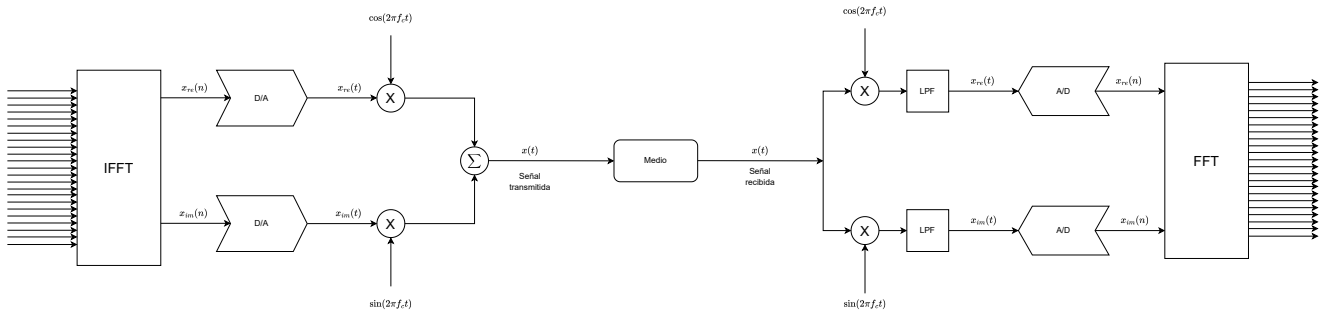


Figure 6: Modelo de sistema de comunicaciones.

### 3 El algoritmo de Goertzel

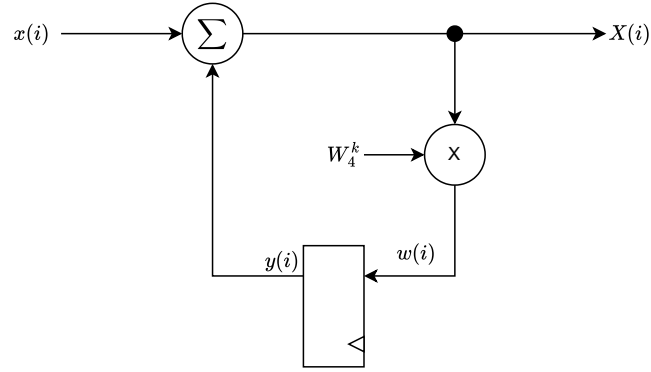
Se desprende de la implementación directa de la ec. (1).

$$X(k) = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^k + x(2)W_N^{2k} + \dots + x(N-1)W_N^{(N-1)k} \quad (11)$$

Agrupando, se obtiene:

$$X(k) = x(0) + W_N^k (x(1) + W_N^k (x(2) + W_N^k (x(3) + W_N^k (x(4) + \dots)))) \quad (12)$$

**Ejemplo  $N = 4$**



$i$	$x(N-i)$	$w(i)$	$y(i)$	$X(i)$
0	$x(3)$	$x(3)W_4^k$	0	$x(3)$
1	$x(2)$	$x(2)W_4^k + x(3)W_4^{2k}$	$x(3)W_4^k$	$x(2) + x(3)W_4^k$
2	$x(1)$	$x(1)W_4^k + x(2)W_4^{2k} + x(3)W_4^{3k}$	$x(2)W_4^k + x(3)W_4^{2k}$	$x(1) + x(2)W_4^k + x(3)W_4^{2k}$
3	$x(0)$	$x(0)W_4^k + x(1)W_4^{2k} + x(2)W_4^{3k} + x(3)W_4^{4k}$	$x(1)W_4^k + x(2)W_4^{2k} + x(3)W_4^{3k}$	$x(0) + x(1)W_4^k + x(2)W_4^{2k} + x(3)W_4^{3k}$

Figure 7: Algoritmo de Goertzel para  $N = 4$ .

Observar que para cada valor de  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  debe repetirse la operatoria, dado un total de  $N^2$  iteraciones. Una forma posible de acelerar la operación es con  $N$  unidades operando en paralelo.

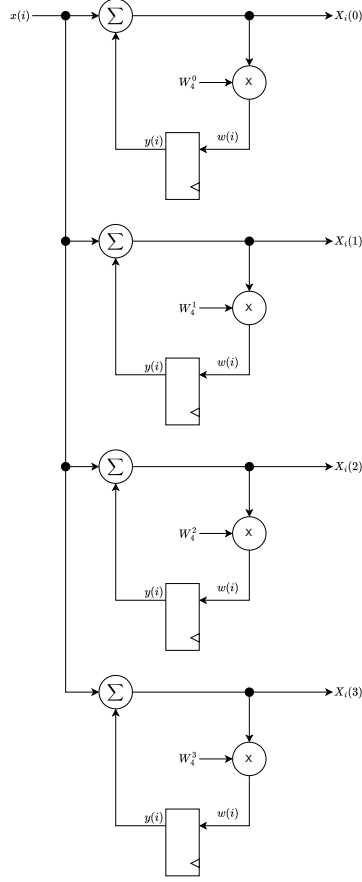


Figure 8: Algoritmo paralelo de Goertzel para  $N = 4$ .

## 4 Radix-2 FFT - Decimation in Time (R2-FFT-DIT)

Sea  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  y sea  $N$  un entero par. Entonces, para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 DFT[x(n)] = X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\
 &= \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_N^{2mk}}_{n=2m \text{ par}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_N^{(2m+1)k}}_{n=2m+1 \text{ impar}} \\
 &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_N^{2mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_N^{2mk}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Observar que  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  entonces  $W_N^i = e^{-j\frac{2\pi}{N}i} = e^{-j\frac{2\pi}{N/i}} = W_{N/i}$ .

Luego

$$X(k) = \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_{N/2}^{mk}}_{C(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_{N/2}^{mk}}_{D(k)} \tag{14}$$

Observar que  $X(k)$  son dos DFTs de  $N/2$  puntos, es decir

$$X(k) = C(k) + W_N^k D(k) \tag{15}$$



donde

$$\begin{aligned} C(k) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_{N/2}^{mk} \\ D(k) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)W_{N/2}^{mk} \end{aligned} \quad (16)$$

Observar que:

- $W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \cdot e^{-j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}} = -W_N^{k+N/2}$  y entonces  $-W_N^k = W_N^{k+N/2}$
- $W_N^i = e^{-j\frac{2\pi}{N}i} = e^{-j2\pi} = 1$
- Sea  $k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$ , entonces  $C(k + N/2) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_{N/2}^{m(k+N/2)} = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_{N/2}^{mk}W_{N/2}^{N/2} = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)W_{N/2}^{mk} = C(k)$ , es decir  $C(k) = C(k + N/2)$
- Lo mismo sucede con  $D(k)$ , es decir  $D(k) = D(k + N/2)$

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} X(k) &= C(k) + W_N^k D(k) \\ X(k+4) &= C(k) - W_N^k D(k) \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (17)$$

**Ejemplo para N=8**

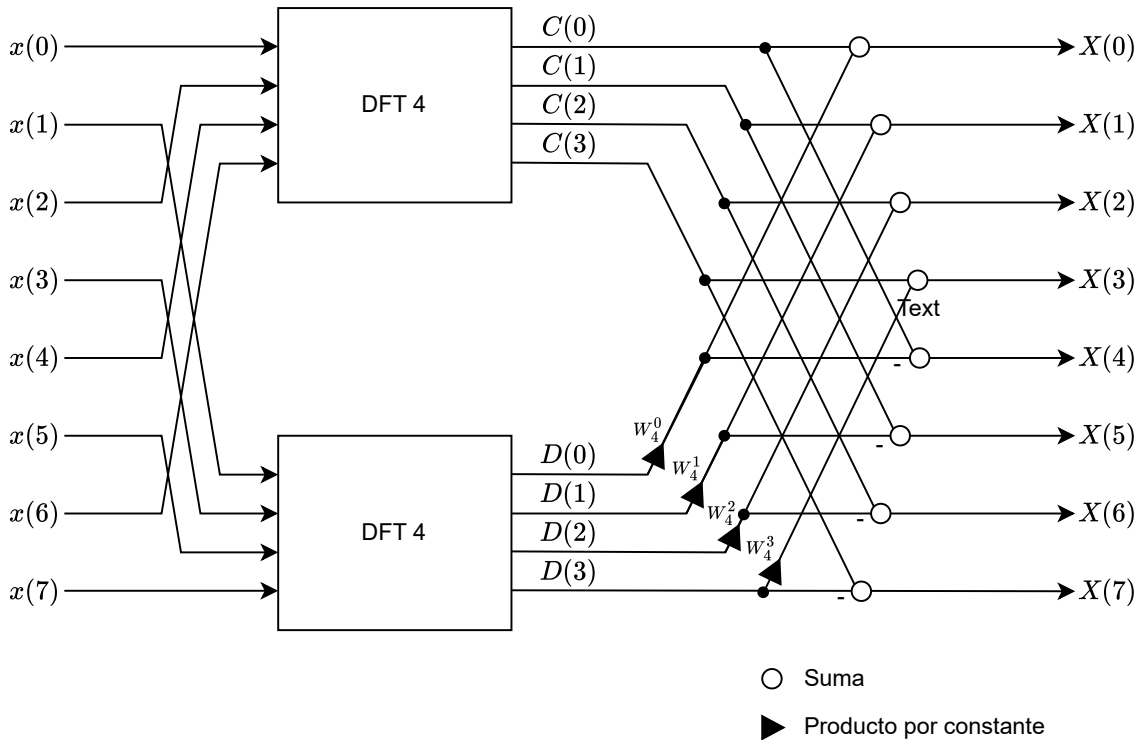


Figure 9: FFT-DIT for  $N = 8$ .

Se puede volver a realizar el mismo proceso si  $N/2$  es par. Es decir, puede hacerse de nuevo una decimación en tiempo para ambos  $C(k)$  y  $D(k)$ . En general, si  $N = 2^M$ , el proceso puede repetirse  $M - 1$  veces hasta reducir a la DFT-2 (DFT de dos puntos).

## 5 Radix-2 FFT - Decimation in Frequency (R2-FFT-DIF)

Sea  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  y sea  $N$  un entero par. Entonces, para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  se tiene:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m) W_N^{mk} + W_N^{kN/2} \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m+N/2) W_N^{mk} \end{aligned} \quad (18)$$

Sabemos que  $W_N^i = W_{N/i}$  y entonces  $W_N^{kN/2} = W_{2/k} = e^{-j\frac{2\pi}{2}k} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$ . Entonces,

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m) W_N^{mk} + (-1)^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m+N/2) W_N^{mk} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(m) + (-1)^k x(m+N/2)] W_N^{mk} \end{aligned} \quad (19)$$

Observar que

$$(-1)^k = \begin{cases} +1 & k \text{ par}, & k = 2l, & l = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \\ -1 & k \text{ impar}, & k = 2l+1, & l = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \end{cases} \quad (20)$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(2l) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(m) + x(m+N/2)] W_N^{2ml} = \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(m) + x(m+N/2)] W_{N/2}^{ml} \\ X(2l+1) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(m) - x(m+N/2)] W_N^{m(2l+1)} = \sum_{m=0}^{N/2-1} [x(m) - x(m+N/2)] W_{N/2}^{ml} W_N^m \end{aligned} \quad (21)$$

Sean

$$\begin{aligned} a(m) &= x(m) + x(m+N/2) \\ b(m) &= x(m) - x(m+N/2) \end{aligned} \quad m = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (22)$$

Luego

$$\begin{aligned} X(2l) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} a(m) W_{N/2}^{ml} = DFT_{N/2}[a(m)] \\ X(2l+1) &= \sum_{m=0}^{N/2-1} (b(m) W_N^m) W_{N/2}^{ml} = DFT_{N/2}[b(m) W_N^m] \end{aligned} \quad (23)$$

lo cual corresponde a las DFTs de  $N/2$  puntos de  $a(m)$  y de  $b(m) W_N^m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$ .

**Ejemplo para N=8**

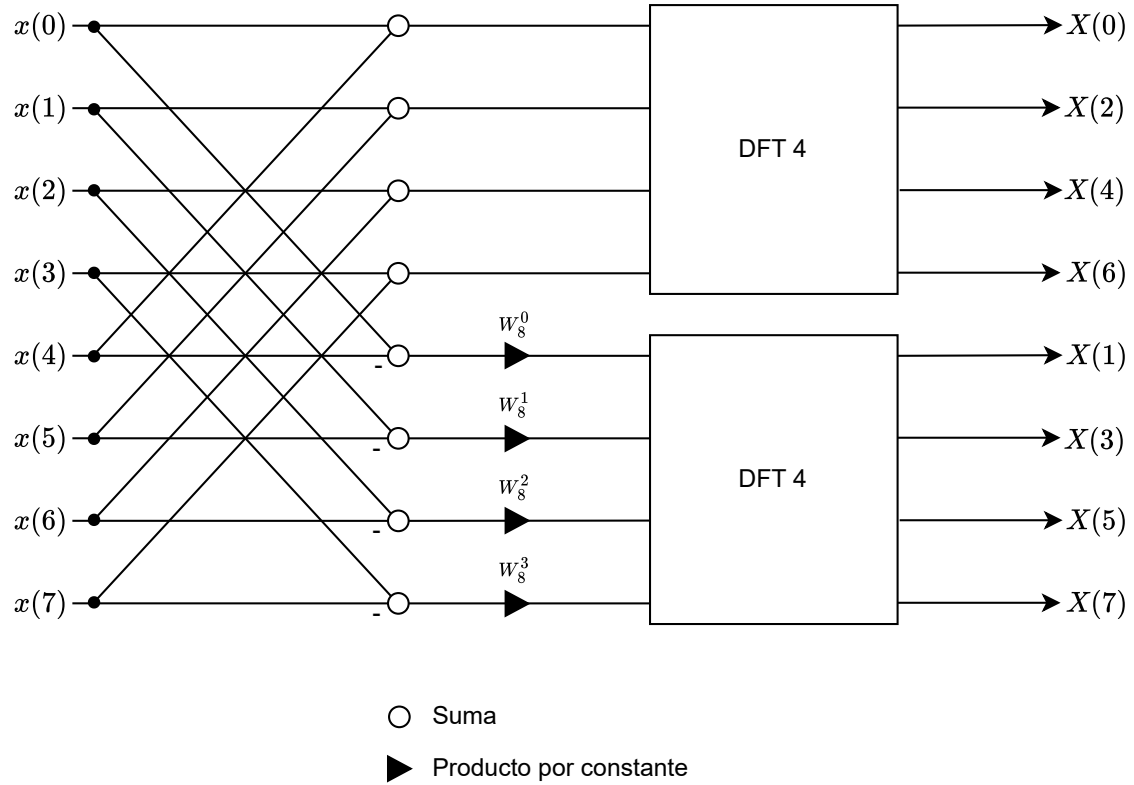


Figure 10: FFT-DIF para  $N = 8$ .

Se puede volver a realizar el mismo proceso si  $N/2$  es par. Es decir, puede hacerse de nuevo una decimación en frecuencia para ambos  $a(m)$  y  $b(m)$ . En general, si  $N = 2^M$ , el proceso puede repetirse  $M - 1$  veces hasta reducir a la DFT-2 (DFT de dos puntos).

El último paso, una DFT de 2 puntos se reduce a:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)W_2^{0,0} + x(1)W_2^{1,0} = x(0) + x(1) \\ X(1) &= x(0)W_2^{0,1} - x(1)W_2^{1,1} = x(0) - x(1) \end{aligned} \quad (24)$$

El siguiente diagrama de flujo se puede definir como la operación butterfly (BF) y que toda la FF2-R2-DIF se puede desarrollar por medio de él.

Observar que las salida quedó desordenada. Si los índices de  $X(k)$  se representan en binario sin signo (US), aplicando bit reversal, se puede acceder de forma ordenada a  $X(k)$ .

k	US	Bit reversal	US
0	000	000	0
4	100	001	1
2	010	010	2
6	110	011	3
1	001	100	4
5	101	101	5
3	011	110	6
7	111	111	7

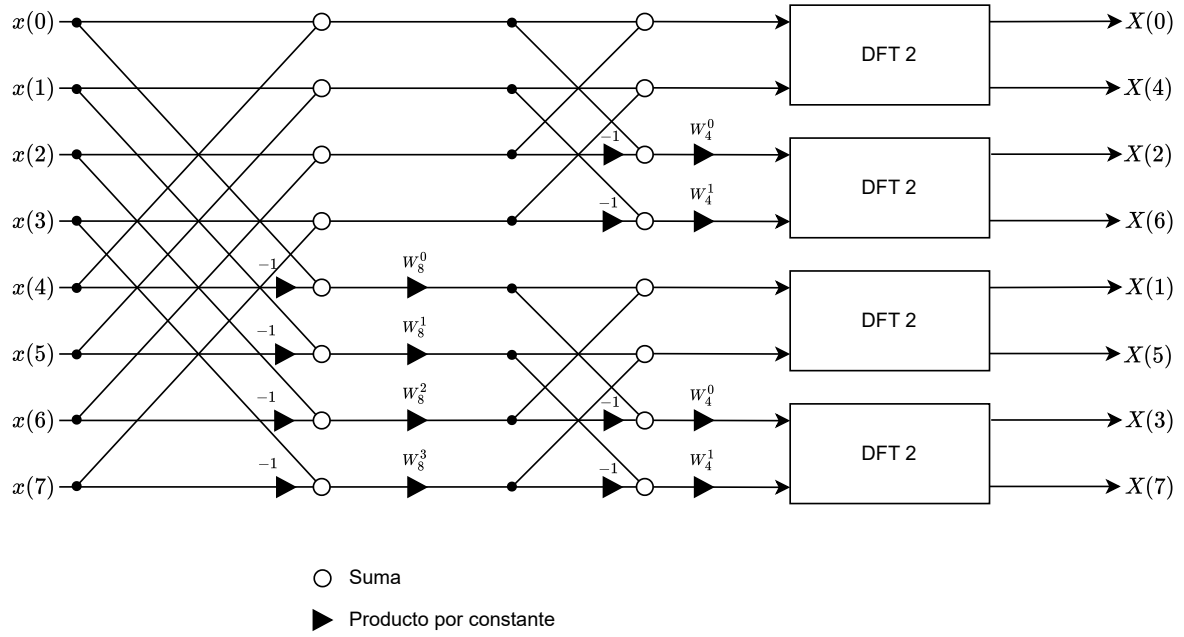


Figure 11: FFT-DIF para  $N = 8$ .

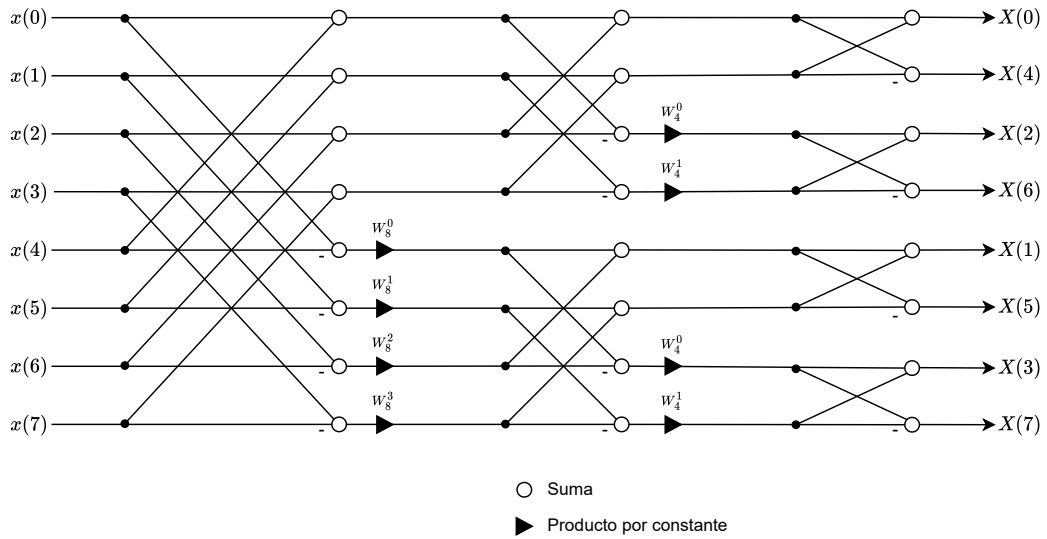


Figure 12: SFD FFT-DIF para  $N = 8$ .

## 5.1 Implementación de la R2-FFT-DIT

La implementación siguiente es la denominada single delay feedback (SDF). Se supone que la entrada  $x(n)$  se va generando en el tiempo, típicamente proviene de un par de conversores ADC, uno para la parte real y otra para la imaginaria y ambas componentes posee  $B_x$  bits en formato 2C. Observar que cada grupo no solapado de  $N$  muestras consecutivas son procesadas para obtener la FFT de dicho grupo con orden bit-reversal.

En la Fig. se observa que un contador módulo  $N$  provee temporización al sistema. Observar que durante las primeras  $N/2$  muestras, el MSB del contador es 0, y luego se vuelve 1 hasta que el contador hace overflow y se reinicia.

Los multiplicadores complejos pueden realizarse con un CORDIC con la ventaja que los ángulos son fijos y por lo tanto se puede tener pre salvado los valores de  $d_i$ . También puede hacerse con multiplicadores complejos por constantes. En caso de usar CORDIC recordar que por efecto de la ganancia de CORDIC hay que normalizar la salida

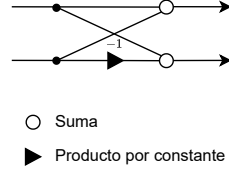


Figure 13: FFT-DIF butterfly.

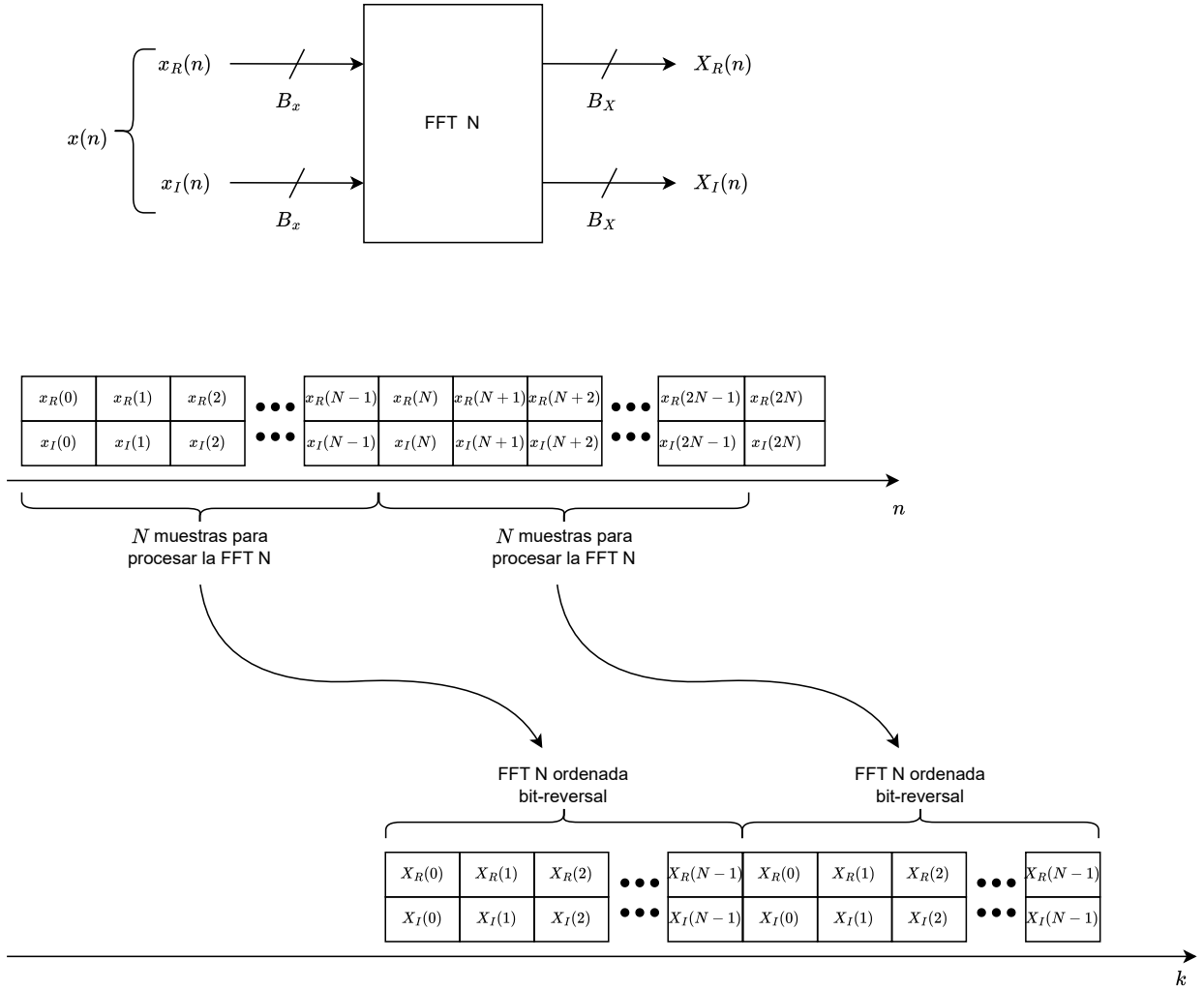


Figure 14: Diagrama temporal de entrada salida de la FFT DIF SPDF.

del CORDIC. Observar que para la última etapa no hay multiplicador complejo ya que  $W_N^0 = 1$ , para la penúltima etapa observar que  $W_N^{N/2} = \pm j$  lo cual también implica la eliminación del multiplicador complejo.

## 6 Radix-2<sup>2</sup> FFT - Decimation in Frequency (R2<sup>2</sup>-FFT-DIF)

Sea  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  y sea  $N = 4^M$  un entero par. Se sabe que  $W_N^k = W_{N/k}$ .

Sean  $n_1 = 0, 1; n_2 = 0, 1; n_3 = 0, 1, \dots, N/4 - 1$ ; de forma tal que  $n = \frac{N}{2}n_1 + \frac{N}{4}n_2 + n_3$ .

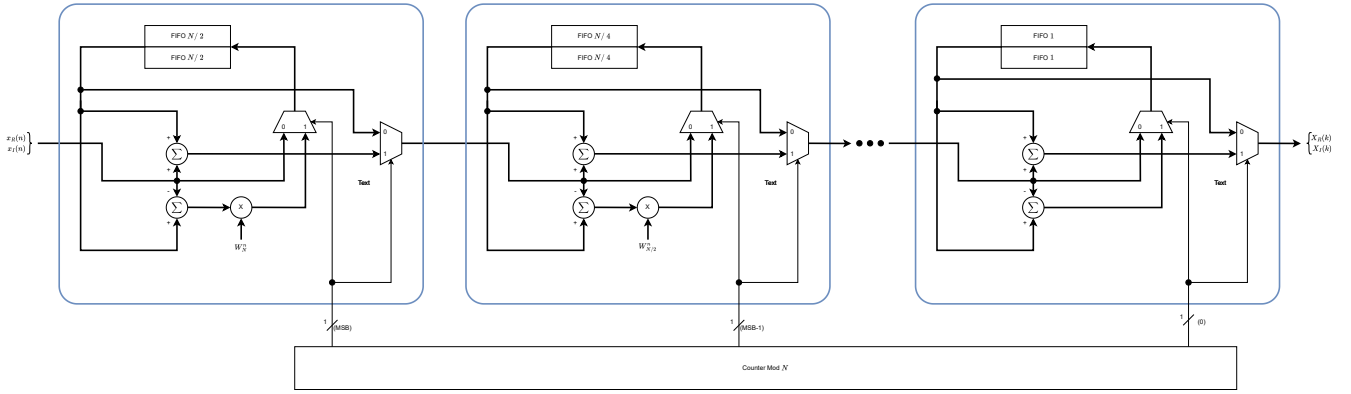


Figure 15: Implementación de R2 FFT DIF SPDF.

Sean  $k_1 = 0, 1$ ;  $k_2 = 0, 1$ ;  $k_3 = 0, 1, \dots, N/4 - 1$ ; de forma tal que  $k = k_1 + 2k_2 + 4k_3$ .

Observar que con este mapeo, resulta  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  y  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Entonces, aplicando los mapeos de  $n$  y  $k$  a la definición de la DFT se obtiene:

$$DFT[x(n)] = X(k) = X(k_1 + 2k_2 + 4k_3) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad (25)$$

Luego,

$$\begin{aligned} X(k_1 + 2k_2 + 4k_3) &= \sum_{\frac{N}{2}n_1 + \frac{N}{4}n_2 + n_3=0}^{N-1} x\left(\frac{N}{2}n_1 + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)W_N^{\left(\frac{N}{2}n_1 + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(k_1+2k_2+4k_3)} \\ &= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \sum_{n_2=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 x\left(\frac{N}{2}n_1 + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)W_N^{\left(\frac{N}{2}n_1 + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(k_1+2k_2+4k_3)} \\ &= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \sum_{n_2=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 x\left(\frac{N}{2}n_1 + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)W_N^{\frac{N}{2}n_1(k_1+2k_2+4k_3) + \left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(k_1+2k_2+4k_3)} \\ &= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \sum_{n_2=0}^1 \left[ x\left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right)W_N^{\left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(k_1+2k_2+4k_3)} \right. \\ &\quad \left. + x\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)W_N^{\frac{N}{2}(k_1+2k_2+4k_3) + \left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(k_1+2k_2+4k_3)} \right] \\ &= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \sum_{n_2=0}^1 \left[ x\left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right) + x\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)W_N^{\frac{N}{2}(k_1+2k_2+4k_3)} \right] W_N^{\left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(k_1+2k_2+4k_3)} \end{aligned} \quad (26)$$

Observar que:

1.

$$\begin{aligned} W_N^{\frac{N}{2}(k_1+2k_2+4k_3)} &= e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}(k_1+2k_2+4k_3)} \\ &= e^{-j\pi(k_1+2k_2+4k_3)} \\ &= (-1)^{(k_1+2k_2+4k_3)} \\ &= (-1)^{k_1+2(k_2+2k_3)} \\ &= (-1)^{k_1}((-1)^2)^{(k_2+2k_3)} \\ &= (-1)^{k_1} \end{aligned} \quad (27)$$

2.

$$W_N^{Nn_2k_3} = e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn_2k_3} = e^{-j2\pi n_2k_3} = 1^{n_2k_3} = 1 \quad (28)$$

3.

$$W_N^{\frac{N}{4}n_2(k_1+2k_2)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{4}n_2(k_1+2k_2)} = e^{-j\frac{\pi}{2}n_2(k_1+2k_2)} = (-j)^{n_2(k_1+2k_2)} \quad (29)$$

4.

$$W_N^{4n_3k_3} = e^{-j\frac{2\pi}{N}4n_3k_3} = e^{-j\frac{2\pi}{N/4}n_3k_3} = W_{N/4}^{n_3k_3} \quad (30)$$

Entonces

$$\begin{aligned} W_N^{\left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(k_1+2k_2+4k_3)} &= W_N^{Nn_2k_3} W_N^{\frac{N}{4}n_2(k_1+2k_2)} W_N^{n_3(k_1+2k_2)} W_N^{4n_3k_3} \\ &= 1 \cdot (-j)^{n_2(k_1+2k_2)} \cdot W_N^{n_3(k_1+2k_2)} W_{N/4}^{n_3k_3} \\ &= (-j)^{n_2(k_1+2k_2)} W_N^{n_3(k_1+2k_2)} W_{N/4}^{n_3k_3} \end{aligned} \quad (31)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
X(k_1 + 2k_2 + 4k_3) &= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \sum_{n_2=0}^1 \left[ x\left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right) + x\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(-1)^{k_1} \right] (-j)^{n_2(k_1+2k_2)} W_N^{n_3(k_1+2k_2)} W_{N/4}^{n_3 k_3} \\
&= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \left\{ \sum_{n_2=0}^1 \left[ x\left(\frac{N}{4}n_2 + n_3\right) + x\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4}n_2 + n_3\right)(-1)^{k_1} \right] (-j)^{n_2(k_1+2k_2)} \right\} W_N^{n_3(k_1+2k_2)} W_{N/4}^{n_3 k_3} \\
&= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \left\{ \left[ x(n_3) + x\left(\frac{N}{2} + n_3\right)(-1)^{k_1} \right] + \left[ x\left(\frac{N}{4} + n_3\right) + x\left(\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + n_3\right)(-1)^{k_1} \right] (-j)^{(k_1+2k_2)} \right\} \cdot W_N^{n_3(k_1+2k_2)} W_{N/4}^{n_3 k_3} \\
&= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \left\{ \left[ x(n_3) + (-1)^{k_1} x\left(\frac{N}{2} + n_3\right) \right] + (-j)^{(k_1+2k_2)} \left[ x\left(\frac{N}{4} + n_3\right) + (-1)^{k_1} x\left(\frac{3N}{4} + n_3\right) \right] \right\} \cdot W_N^{n_3(k_1+2k_2)} W_{N/4}^{n_3 k_3} \\
&= \sum_{n_3=0}^{N/4-1} \left\{ H(k_1, k_2, n_3) W_N^{n_3(k_1+2k_2)} \right\} W_{N/4}^{n_3 k_3}
\end{aligned} \tag{32}$$

donde

$$H(k_1, k_2, n_3) = \underbrace{\left[ x(n_3) + (-1)^{k_1} x\left(\frac{N}{2} + n_3\right) \right]}_{BFI(n_3)} + (-j)^{(k_1+2k_2)} \underbrace{\left[ x\left(\frac{N}{4} + n_3\right) + (-1)^{k_1} x\left(\frac{3N}{4} + n_3\right) \right]}_{BFI\left(\frac{3N}{4} + n_3\right)} \tag{33}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{BFII(n_3)}$

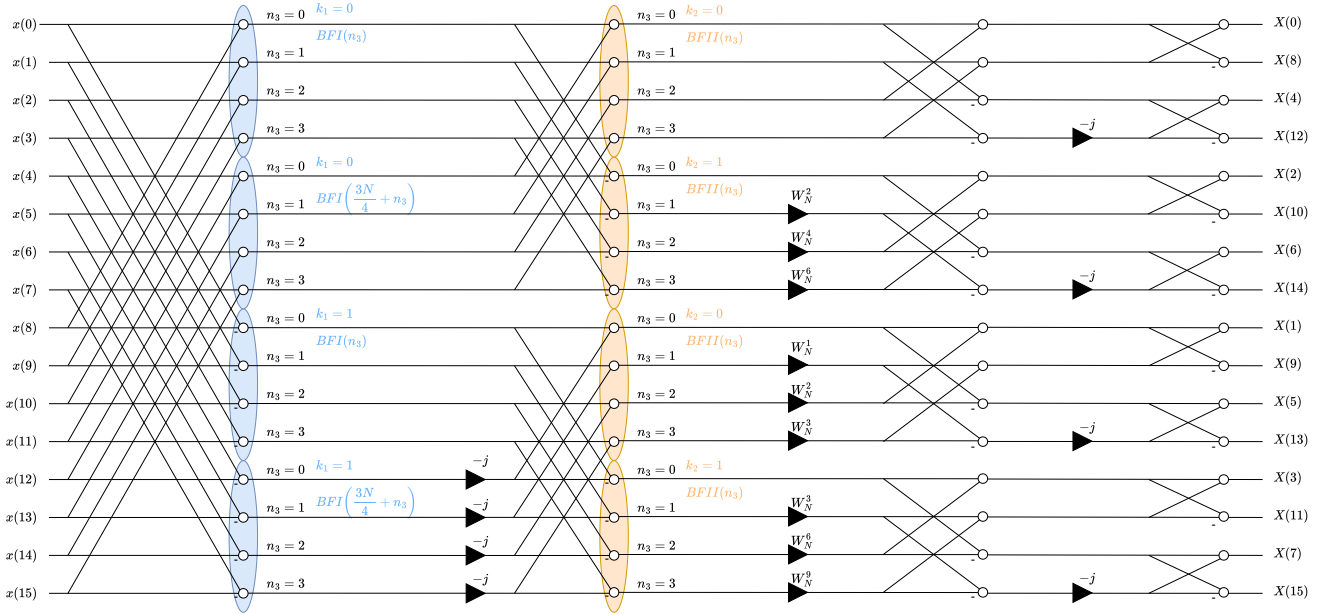


Figure 16: SFD R2<sup>2</sup> FFT-DIF para  $N = 16$ .

## 6.1 Implementación de la R2<sup>2</sup>-FFT-DIT



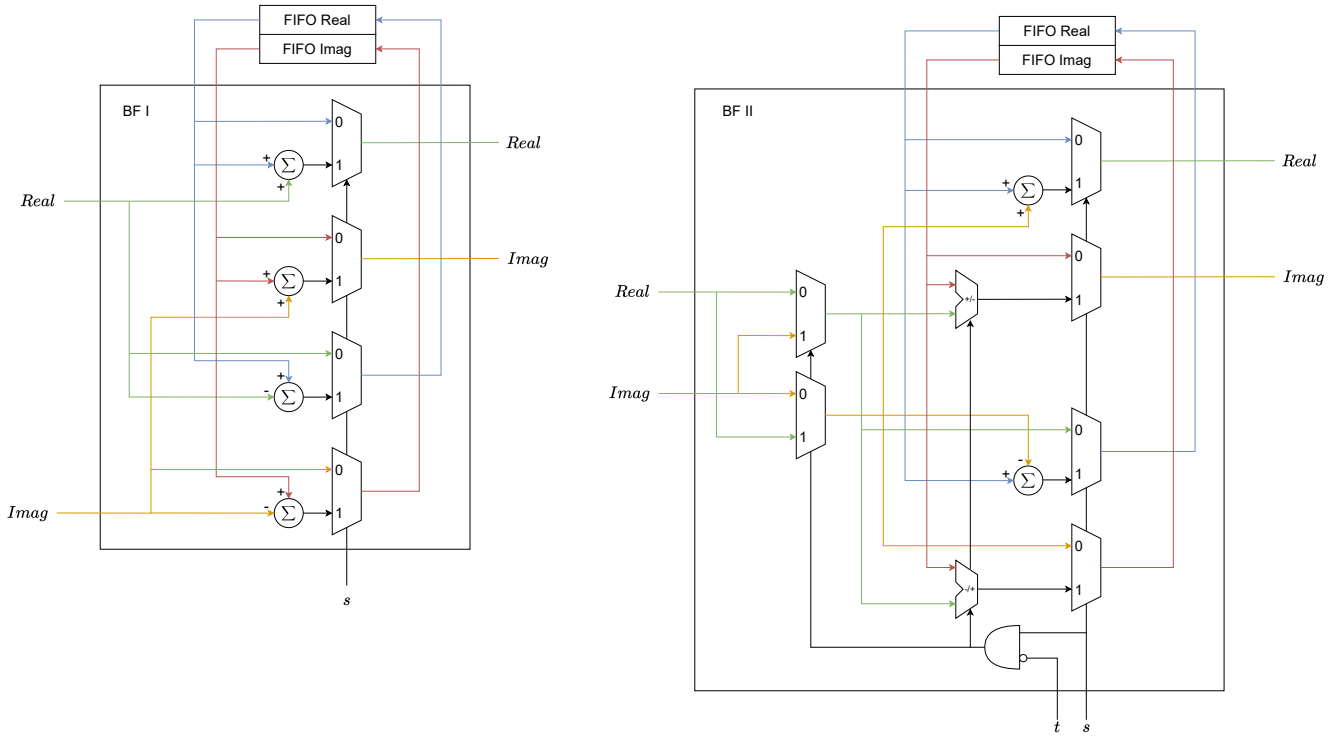


Figure 17: Butterflies para  $R2^2$ .

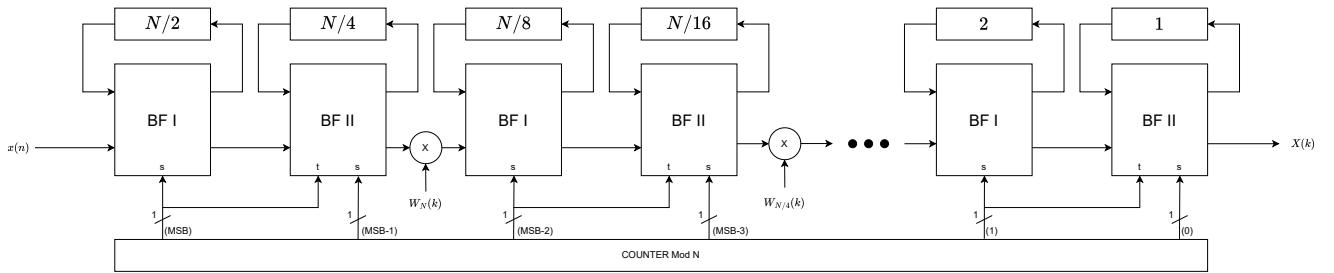


Figure 18: Implementación  $R2^2$ -SDF.