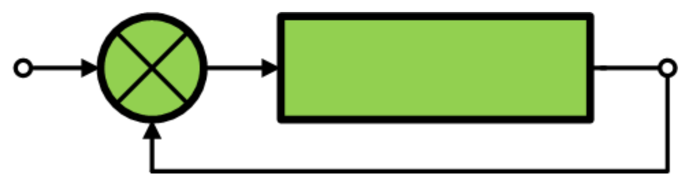
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO ELECTRÓNICA Y COMPUTACIÓN

ÁREA CONTROL

ASIGNATURA:

SISTEMAS DE CONTROL



# CONTROL DE CONVERTIDORES CONMUTADOS DC/DC

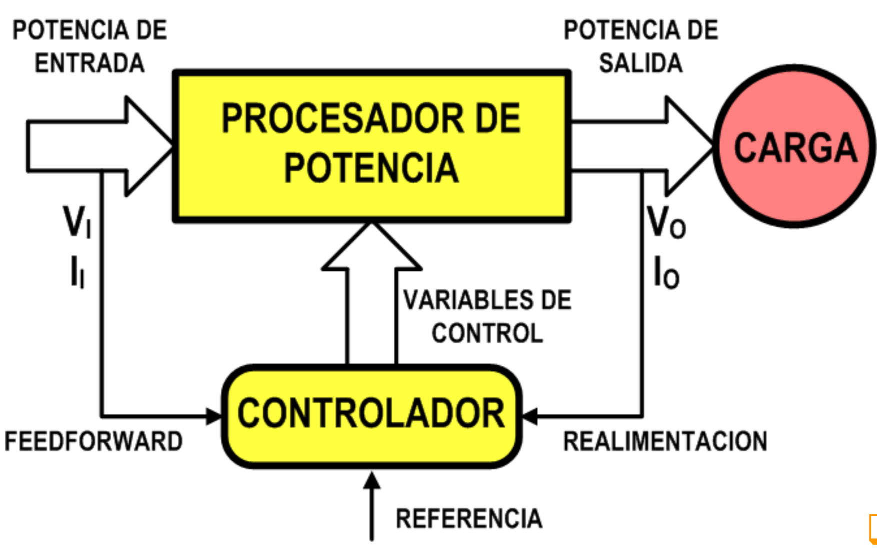
# PARTE 2: MODELIZACIÓN POR PROMEDIACIÓN DE ESTADOS

# CONTROL DE CONVERTIDORES CONMUTADOS DC/DC (1/16)

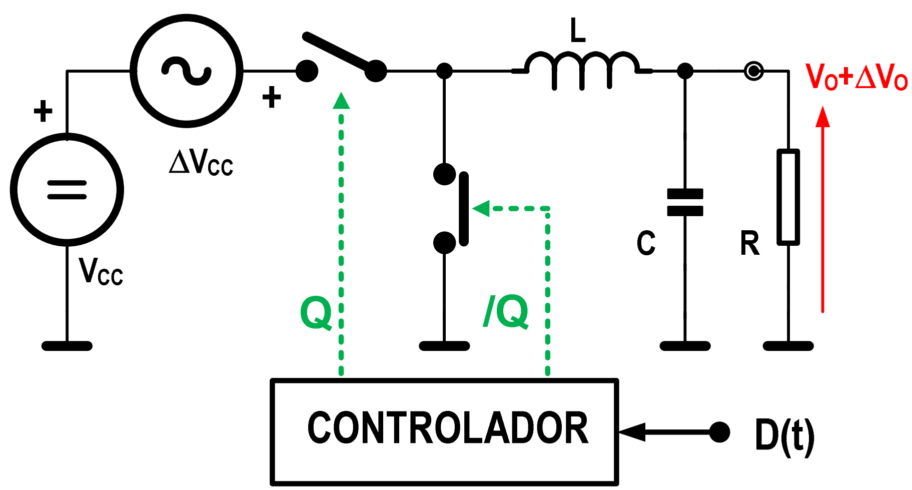
## MOTIVACIÓN:

- Los convertidores DC/DC son circuitos con topología (estructura circuital) variable en el tiempo, es decir, un caso particular de sistemas no LTI.
- Por ser sistemas no LTI, no aplica principio de superposición y se requiere caracterizar la planta en términos de sus transferencias respecto de la variable de control y de la entrada de potencia, en pequeña señal.

**CASO GENERAL**

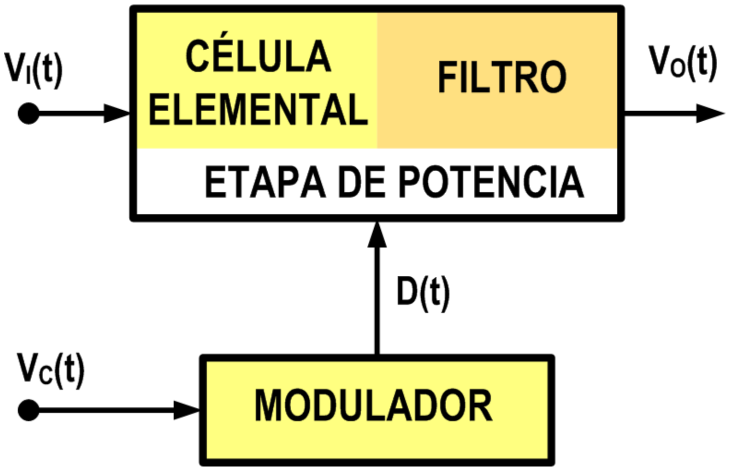



**CASO PARTICULAR**

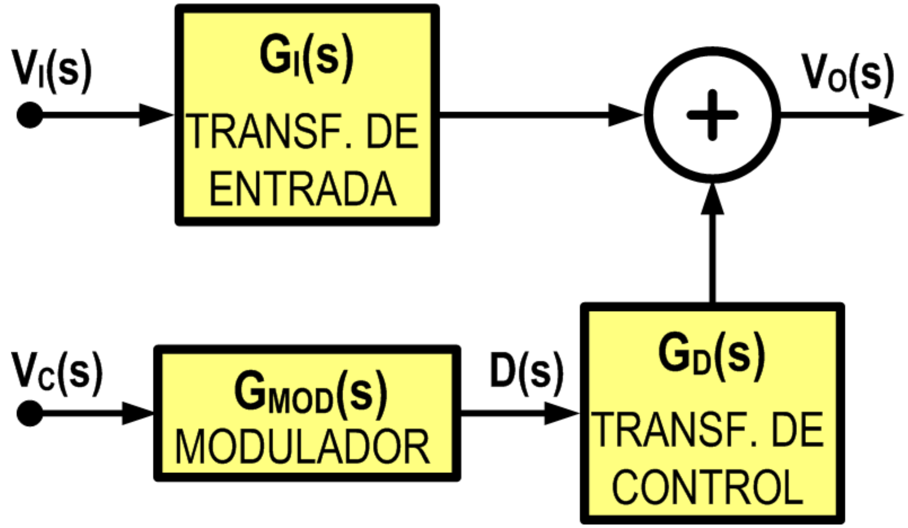



- **Cuál es el efecto de $\Delta V_{CC}$ sobre $\Delta V_O$ para D(t)=cte.?**
- **Cuál es el efecto de D(t) sobre $\Delta V_O$ para $\Delta V_{CC}$=cte.?**

## MODELO DE PROBLEMA:



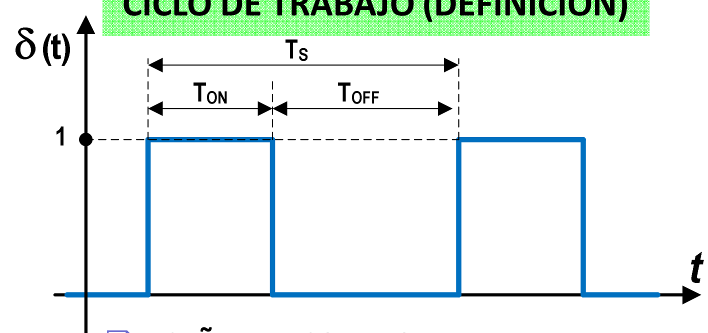

## OBJETIVO DEL ANÁLISIS




### HIPÓTESIS DE VALIDEZ

- ESTACIONARIEDAD
- ESTRATEGIA DE CONTROL PWM (FREC. CONSTANTE)
- CCM ó DOS LLAVES CONTROLADAS
- PEQUEÑA SEÑAL / PERTURBACIÓN
- SECUENCIALIDAD DE ESTADOS (DOS ESTADOS)
- LINEALIDAD APLICABLE EN CADA ESTRUCTURA
- LIMITACIÓN DINÁMICA (INTERÉS EN PROMEDIOS)

### CICLO DE TRABAJO (DEFINICIÓN)




- SEÑAL DE CONTROL BINARIA
- DEFINE DOS ESTADOS TOPOLÓGICOS

$$d(t) \triangleq \int_{t}^{t+T_S} \delta(t).dt = \frac{T_{ON}(t)}{T_S}$$

# CONTROL DE CONVERTIDORES CONMUTADOS DC/DC (3/16)

## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS:

**DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA**

$$\dot{X} = A.X + B.V_I$$
$$V_O = C.X$$

**ESTADO 1**

$$\dot{X} = A_1.X + B_1.V_I$$
$$V_O = C_1.X$$

**ESTADO 2**

$$\dot{X} = A_2.X + B_2.V_I$$
$$V_O = C_2.X$$

**PROMEDIACIÓN**

$$A = A_1.D + A_2.(1-D)$$
$$B = B_1.D + B_2.(1-D)$$
$$C = C_1.D + C_2.(1-D)$$

**DECOMPOSICIÓN DE VARIABLES**

X, D, $V_I$, $V_O$

$$V_K = \overline{V_K} + \widetilde{v_K}$$

BIAS ($\overline{V_K}$)

SEÑAL AC ($\widetilde{v_K}$)

**SEPARACIÓN DE VARIABLES DE ENTRADA**

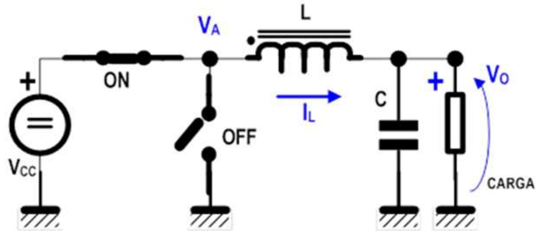
$\widetilde{v_I}$ → **TRANSFERENCIA RESPECTO DE LA ENTRADA DE POTENCIA**

$\widetilde{d}$ → **TRANSFERENCIA RESPECTO DE LA ENTRADA DE CONTROL**

## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS:

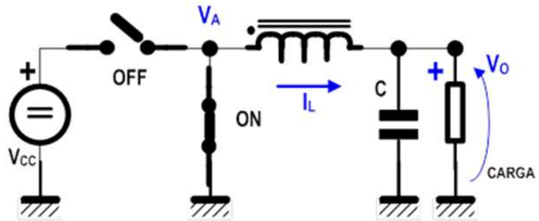
**ESTADO 1: $0 < t < D.T_S$**

$$\dot{X} = A_1.X + B_1.V_i$$
$$V_o = C_1.X$$




**ESTADO 2 : $D.T_S < t < T_S$**

$$\dot{X} = A_2.X + B_2.V_i$$
$$V_o = C_2.X$$




**DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} Dim(X) = m\ x\ 1 \\ Dim(A) = m\ x\ m \\ Dim(B) = m\ x\ 1 \\ Dim(C) = 1\ x\ m \end{array}$$

**MODELO PROMEDIADO**

$$\begin{cases} \dot{X} = [A_1.D + A_2.(1-D)].X + [B_1.D + B_2.(1-D)].V_i \\ V_o = [C_1.D + C_2.(1-D)].X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A} \triangleq [A_1.D + A_2.(1-D)] \\ \boldsymbol{B} \triangleq [B_1.D + B_2.(1-D)] \\ \boldsymbol{C} \triangleq [C_1.D + C_2.(1-D)] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{X} = \boldsymbol{A}.X + \boldsymbol{B}.V_i \\ V_o = \boldsymbol{C}.X \end{array}}$$

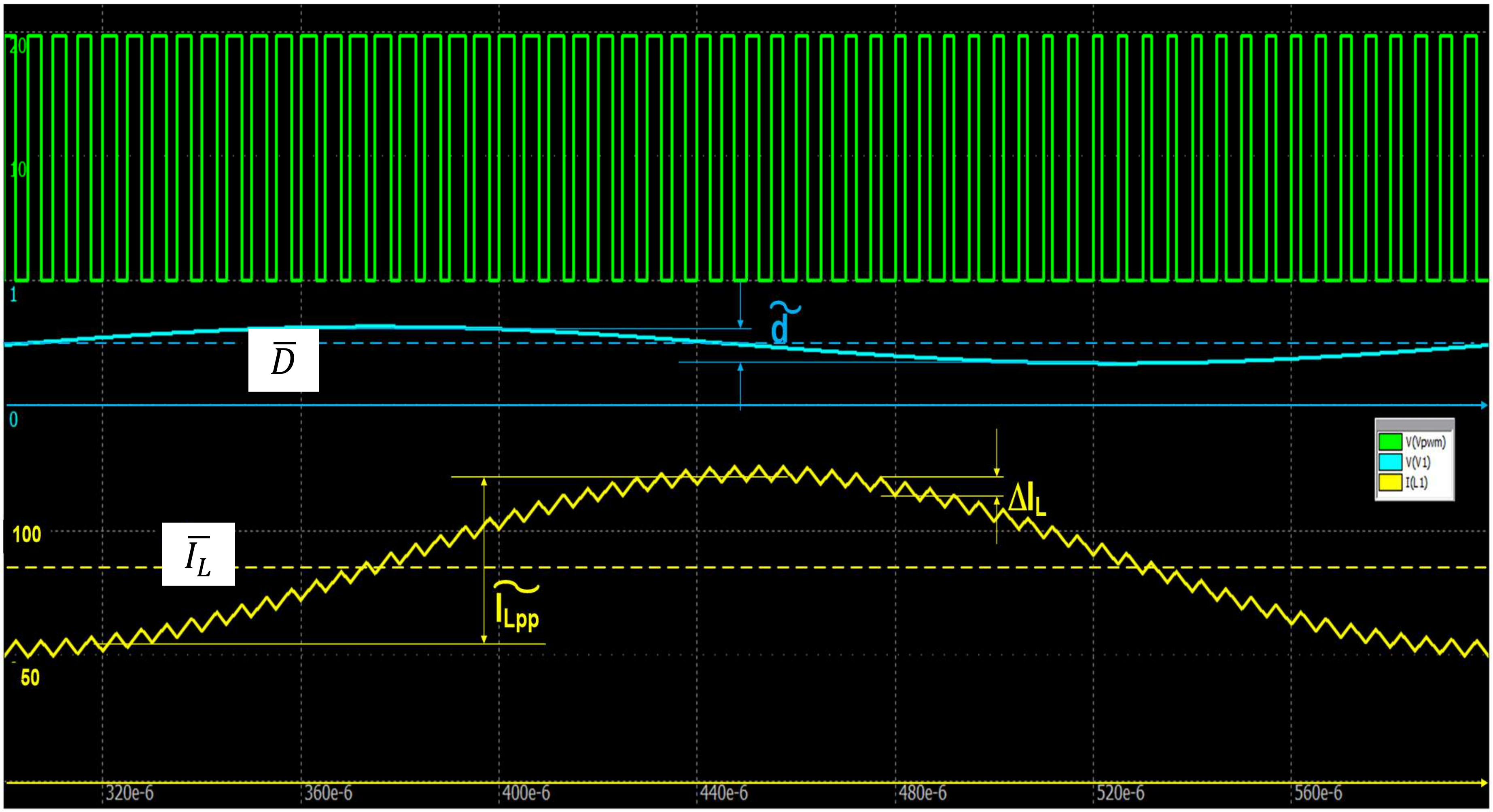
**DECOMPOSICIÓN BIAS + PEQUEÑA SEÑAL**

$$X = \bar{X} + \tilde{x} \qquad D = \bar{D} + \tilde{d} \qquad V_i = \bar{V_i} + \tilde{v_i} \qquad V_o = \bar{V_o} + \tilde{v_o}$$

$$\boxed{|\tilde{x_j}| \ll |\bar{X_j}|}$$

## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS:

### RELACIÓN DE MAGNITUDES: BIAS – AC - RIPPLE



## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS:

### CÁLCULO DE RELACIÓN DE CONVERSIÓN DE GRAN SEÑAL

$\tilde{x} = 0 \quad \tilde{d} = 0 \quad \widetilde{v_i} = 0 \quad \widetilde{v_o} = 0 \quad \dot{\tilde{x}} = 0$

**SISTEMA EN ESTADO ESTACIONARIO (BIAS)** $\Rightarrow$ $\dot{\bar{\boldsymbol{X}}} = \mathbf{0}$ !

$$\dot{\bar{X}} = \boldsymbol{A}.\bar{X} + \boldsymbol{B}.\bar{V_i} = 0 \rightarrow \bar{X} = -\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}.\bar{V_i}$$

***Y sustituyendo:*** $\bar{V_o} = \boldsymbol{C}.\bar{X} = -\boldsymbol{C}.\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}.\bar{V_i}$

**RELACIÓN DE CONVERSIÓN DE GRAN SEÑAL:**

$$\boxed{\bar{V_o} = -\boldsymbol{C}.\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}.\bar{V_i}}$$

### CÁLCULO DE TRANSFERENCIA RESPECTO DE LA VARIABLE DE CONTROL $\tilde{d}$

***Reescribiendo el modelo de sistema:***

$$\begin{cases} \dot{X} = [A_1.D + A_2.(1-D)].X + [B_1.D + B_2.(1-D)].V_i \\ V_o = [C_1.D + C_2.(1-D)].X \end{cases}$$

***Sustituir:*** $X = \bar{X} + \tilde{x} \quad D = \bar{D} + \tilde{d} \quad V_o = \bar{V_o} + \widetilde{v_o}$ ***Asumiendo en este caso que:*** $\widetilde{v_i} = 0 \quad \dot{\bar{X}} = 0$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \cancel{\boldsymbol{A}.\bar{X}} + \cancel{\boldsymbol{B}.\bar{V_i}} + \boldsymbol{A}.\tilde{x} + \left[A_1.\tilde{d} + A_2.\left(-\tilde{d}\right)\right].\bar{X} + \cancel{B.\widetilde{v_i}} + \left[B_1.\tilde{d} + B_2.\left(-\tilde{d}\right)\right].\bar{V_i} \\ \cancel{\bar{V_o}} + \widetilde{v_o} = \cancel{\boldsymbol{C}.\bar{X}} + \left[C_1.\tilde{d} + C_2.\left(-\tilde{d}\right)\right].\bar{X} + \boldsymbol{C}.\tilde{x} \end{cases}$$

***Donde se omitieron los términos productos de segundo orden:*** $\tilde{d}.\tilde{x};\ \tilde{d}.\widetilde{v_i}$ ***Con lo cual:***

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \boldsymbol{A}.\tilde{x} + [A_1.-A_2.].\tilde{d}.\bar{X} + [B_1.-B_2.].\tilde{d}.\bar{V_i} \\ \widetilde{v_o} = [C_1.-C_2].\tilde{d}.\bar{X} + \boldsymbol{C}.\tilde{x} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathscr{L}$ ***En el plano transformado:***

## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS:

### CÁLCULO DE TRANSFERENCIA RESPECTO DE LA VARIABLE DE CONTROL (cont.)

$$\begin{cases} [s.Id - A].\tilde{x} = [A_1 - A_2].\tilde{d}.\bar{X} + [B_1 - B_2].\tilde{d}.\overline{V_i} \\ \widetilde{v_o} = [C_1 - C_2].\tilde{d}.\bar{X} + \boldsymbol{C}.\tilde{x} \end{cases}$$

*De la primer ecuación se obtiene:* $\tilde{x} = [s.Id - A]^{-1}.[A_1 - A_2].\tilde{d}.\bar{X} + [s.Id - A]^{-1}.[B_1 - B_2].\tilde{d}.\overline{V_i}$

*Y por operación en estado estacionario se sabe que:* $\bar{X} = -\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}.\overline{V_i}$

*Con lo cual, reemplazando:*

$$\widetilde{v_o} = [C_1 - C_2].\tilde{d}.\left[-\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}.\overline{V_i}\right] + \boldsymbol{C}.\left\{[s.Id - A]^{-1}.[A_1 - A_2].\tilde{d}.\left[-\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}.\overline{V_i}\right] + [s.Id - A]^{-1}.[B_1 - B_2].\tilde{d}.\overline{V_i}\right\}$$

*Finalmente resulta:*

**FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA RESPECTO DE LA VARIABLE DE CONTROL**

$$G_{\tilde{d}} = \frac{\widetilde{v_o}}{\tilde{d}} = \overline{V_i}.[C_2 - C_1].\left[\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}.\right] + \overline{V_i}.\boldsymbol{C}.[s.Id - A]^{-1}.\left\{[A_2 - A_1].\left[\boldsymbol{A}^{-1}.\boldsymbol{B}\right] + B_1 - B_2\right\}$$

## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS:

### CÁLCULO DE TRANSFERENCIA RESPECTO DE LA PERTURBACIÓN DE POTENCIA:

***Reescribiendo el modelo de sistema:***

$$\begin{cases} \dot{X} = [A_1.D + A_2.(1-D)].X + [B_1.D + B_2.(1-D)].V_i \\ V_o = [C_1.D + C_2.(1-D)].X \end{cases}$$

***Sustituir:*** $X = \bar{X} + \tilde{x}$ $\quad V_i = \overline{V_i} + \widetilde{v_i}$ $\quad V_o = \overline{V_o} + \widetilde{v_o}$ ***Asumiendo en este caso que:*** $\tilde{d} = 0$ $\quad \dot{\bar{X}} = 0$

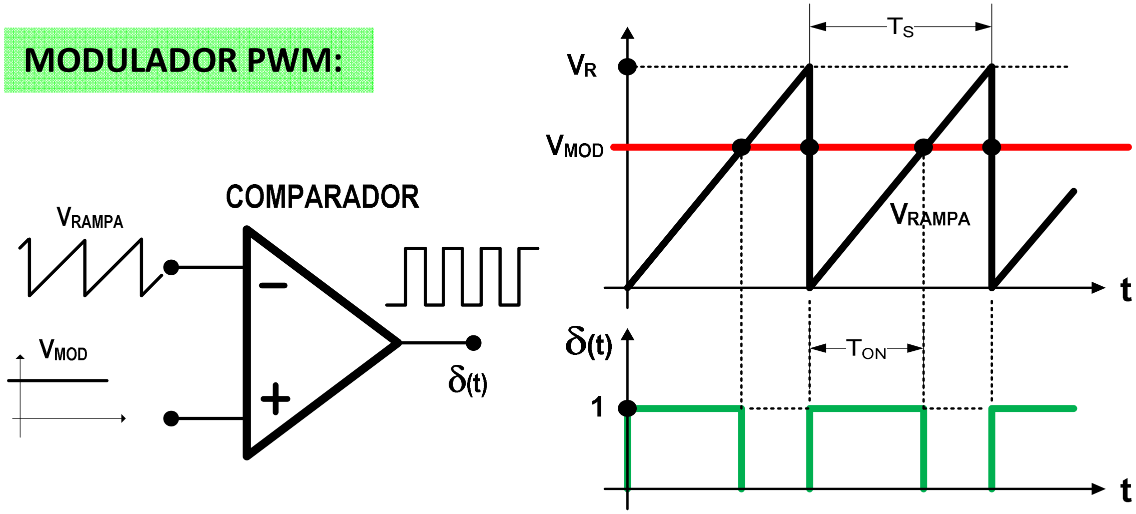
$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \cancel{\boldsymbol{A}.\bar{X}} + \cancel{\boldsymbol{B}.\overline{V_i}} + \boldsymbol{A}.\tilde{x} + B.\widetilde{v_i} \\ \cancel{\overline{V_o}} + \widetilde{v_o} = \cancel{\boldsymbol{C}.\bar{X}} + \boldsymbol{C}.\tilde{x} \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \tilde{x} = [s.Id - A]^{-1}.\boldsymbol{B}.\widetilde{v_i} \\ \widetilde{v_o} = \boldsymbol{C}.\tilde{x} \to \widetilde{v_o} = \boldsymbol{C}.[s.Id - A]^{-1}.\boldsymbol{B}.\widetilde{v_i} \end{matrix}$$

**FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA RESPECTO DE LA PERTURBACIÓN DE POTENCIA**

$$\boxed{G_{\widetilde{vi}} = \frac{\widetilde{v_o}}{\widetilde{v_i}} = \boldsymbol{C}.[s.Id - A]^{-1}.\boldsymbol{B}}$$

## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS:

### MODULADOR PWM:

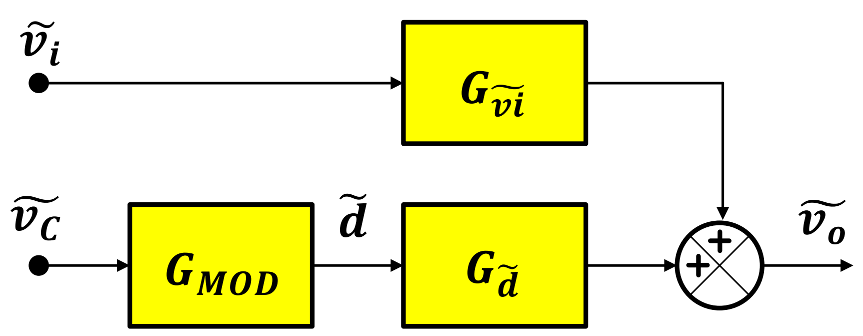



$$0 \leq V_{MOD} \leq V_R$$

### GANANCIA DEL MODULADOR PWM

$$\boxed{G_{MOD} = \frac{d(t)}{V_{MOD}} = \frac{1}{V_R}}$$

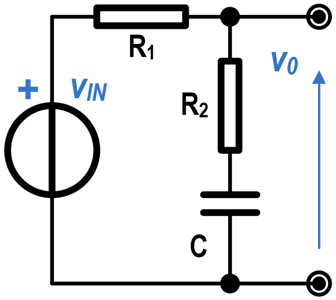
### MODELO DE CONTROL EN PEQUEÑA SEÑAL



## ESTRATEGIA DE PROMEDIACIÓN DE ESTADOS: TIPOS DE RESPUESTA

$$\tau_1 = C.(R_1 + R_2)$$
$$\tau_2 = C.R_2$$

### RESPUESTA DE SISTEMA CERO LHP + POLO LHP



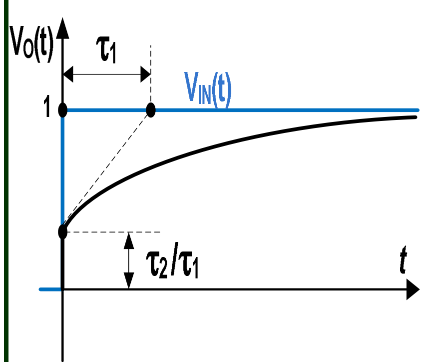

$$G(s) = \frac{V_O(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{(1 + s.\tau_2)}{(1 + s.\tau_1)}$$

**ESCALÓN UNITARIO:**

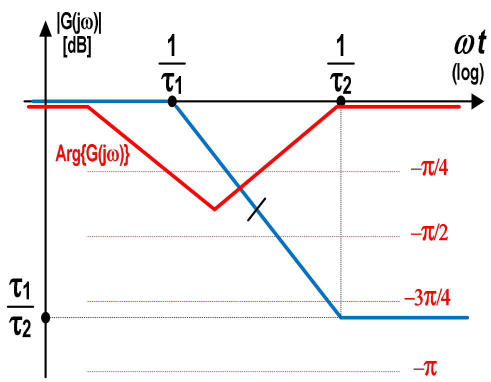
$$V_{IN}(s) = \frac{1}{s} \rightarrow V_O(s) = \frac{1}{s} - \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{(1 + s.\tau_1)}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{.\} \rightarrow v_O(t) = u(t) - \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{\tau_1}.e^{-t/\tau_1}$$

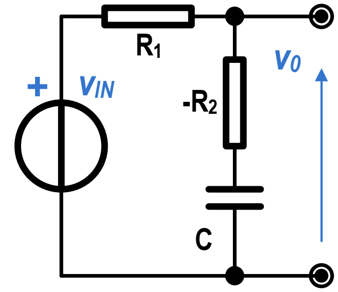
**RESPUESTA TEMPORAL:**




**RESPUESTA FRECUENCIAL:**




### RESPUESTA DE SISTEMA CERO RHP + POLO LHP



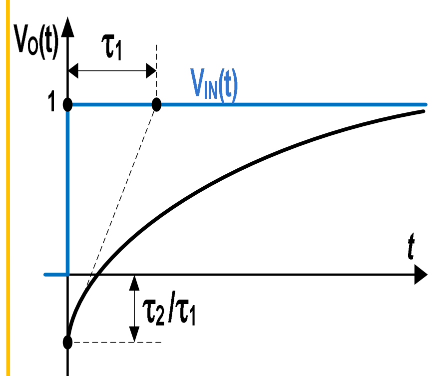

$$G(s) = \frac{V_O(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{(1 - s.\tau_2)}{(1 + s.\tau_1)}$$

**ESCALÓN UNITARIO:**

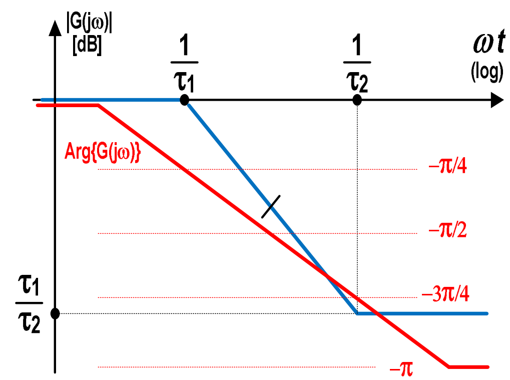
$$V_{IN}(s) = \frac{1}{s} \rightarrow V_O(s) = \frac{1}{s} - \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{(1 + s.\tau_1)}$$

$$\rightarrow L^{-1}\{.\} \rightarrow v_O(t) = u(t) - \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1}.e^{-t/\tau_1}$$

**RESPUESTA TEMPORAL:**

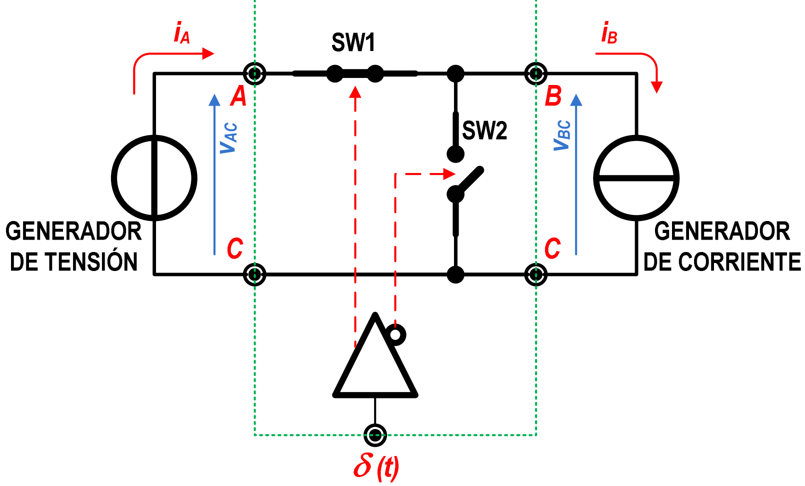



**RESPUESTA FRECUENCIAL:**



## LINEALIZACIÓN DE LA CÉLULA ELEMENTAL: TÉCNICA DE VORPÈRIAN

### CÉLULA ELEMENTAL DE CONMUTACIÓN




### RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES INSTANTÁNEAS:

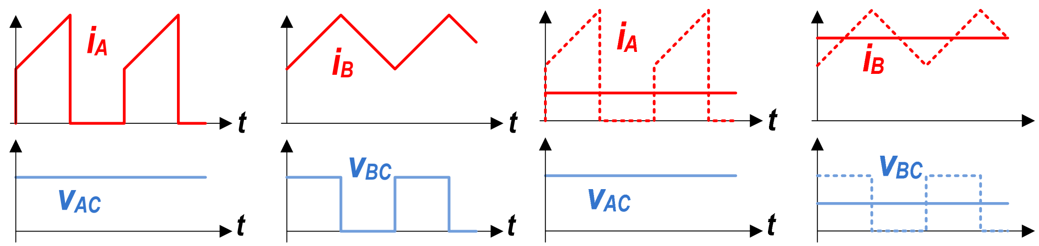
$$v_{BC}(t) = \delta(t).\, v_{AC}(t)$$

$$i_A(t) = \delta(t).\, i_B(t)$$

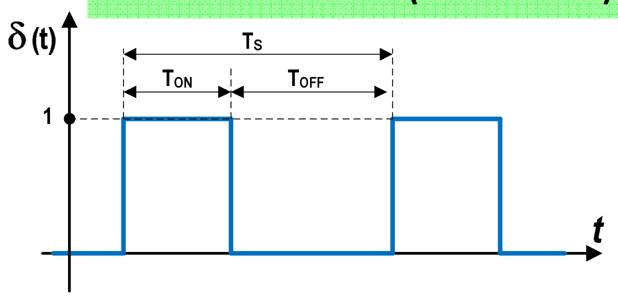
### RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES PROMEDIO:

$$v_{BC} = d(t).\, v_{AC}$$

$$i_A = d(t).\, i_B$$



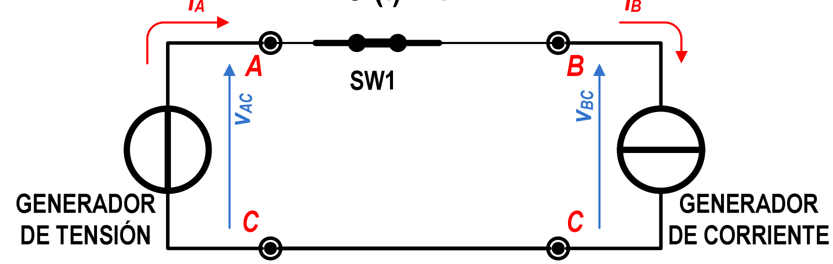

### CICLO DE TRABAJO (DEFINICIÓN)



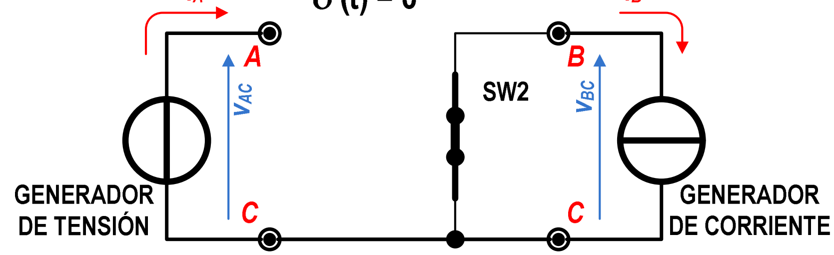

- SEÑAL DE CONTROL BINARIA FUNCIÓN DEL TIEMPO
- DEFINE DOS ESTADOS TOPOLÓGICOS

$$d(t) \triangleq \int_{t}^{t+T_S} \delta(t).\, dt = \frac{T_{ON}(t)}{T_S}$$

δ (t) = 1

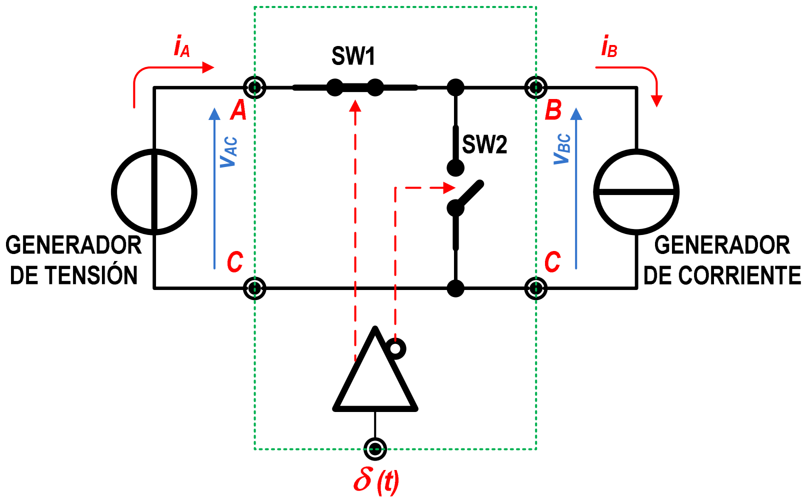



δ (t) = 0



## LINEALIZACIÓN DE LA CÉLULA ELEMENTAL: MÉTODO DE VORPÈRIAN

**CÉLULA ELEMENTAL DE CONMUTACIÓN**




**DECOMPOSICIÓN DE VARIABLES**

$v \rightarrow V + \tilde{v}$

$i \rightarrow I + \tilde{i}$

$d \rightarrow D + \tilde{d}$

$$\begin{cases} I_A + \widetilde{i_A} = (D + \tilde{d}).(I_B + \widetilde{i_B}) \\ V_{BC} + \widetilde{v_{BC}} = (D + \tilde{d}).(V_{AC} + \widetilde{v_{AC}}) \end{cases}$$

**SOLUCIÓN DC (SS)**

$$I_A = D.I_B$$

$$V_{BC} = D.V_{AC}$$

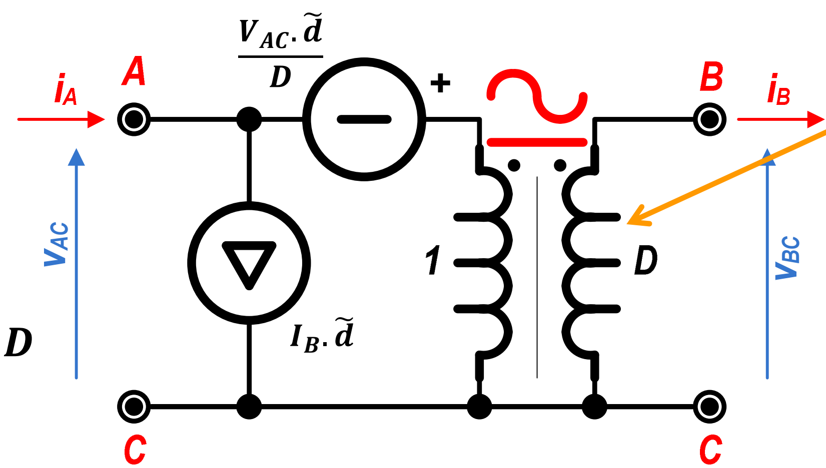
**SOLUCIÓN AC (SS)**

$$\widetilde{i_A} = \tilde{d}.I_B + \widetilde{i_B}.D$$

$$\widetilde{v_{BC}} = \tilde{d}.V_{AC} + \widetilde{v_{AC}}.D$$

$$\boldsymbol{I_A = D.I_B}$$

$$\boldsymbol{\widetilde{i_A} = \tilde{d}.I_B + \widetilde{i_B}.D}$$



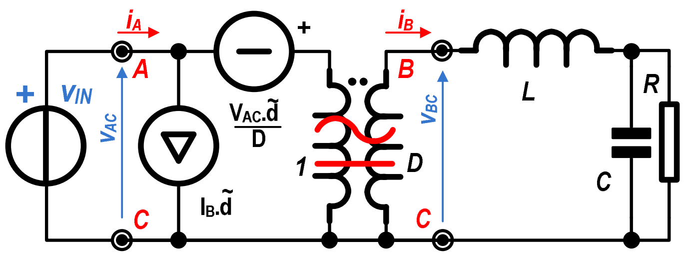

$$\boldsymbol{V_{BC} = D.V_{AC}}$$

$$\boldsymbol{\widetilde{v_{BC}} = \tilde{d}.V_{AC} + \widetilde{v_{AC}}.D}$$

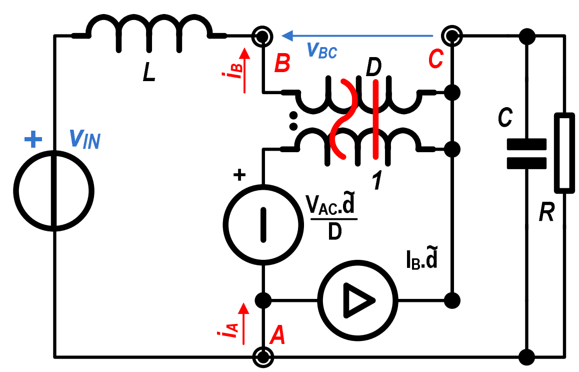
**SIMBOLIZA TRANSFORMACIÓN DC +AC !!**

**CÉLULA PWM ELEMENTAL LINEALIZADA**

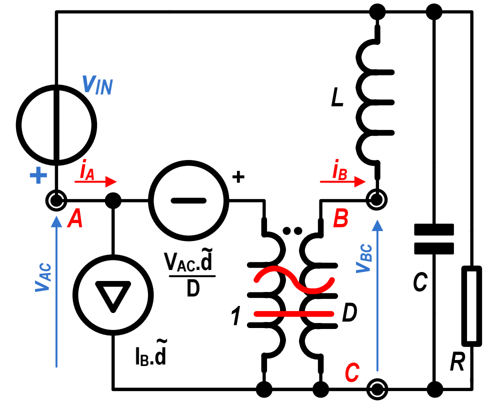
## USO DEL MODELO DE VORPÈRIAN EN EL CALCULO DE FUNCIONES TRANSFERENCIA




**BUCK (FORWARD, STEP DOWN)**



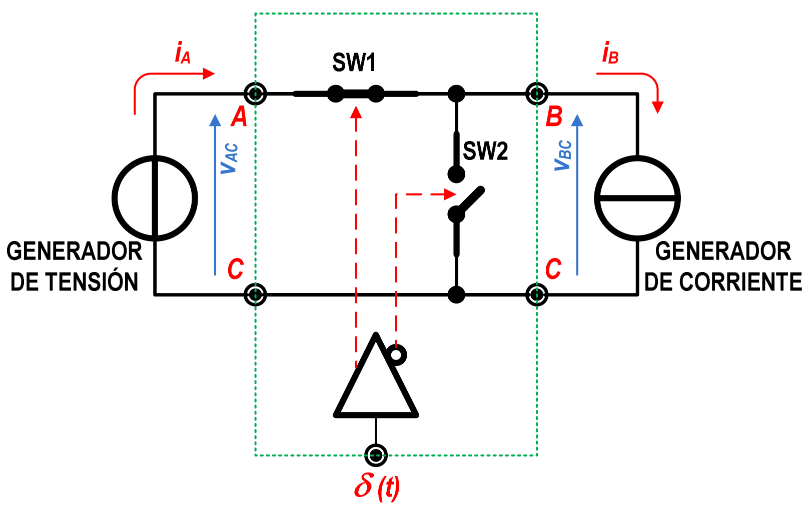

**BOOST (STEP UP)**




**FLYBACK (STEP UP/DOWN)**

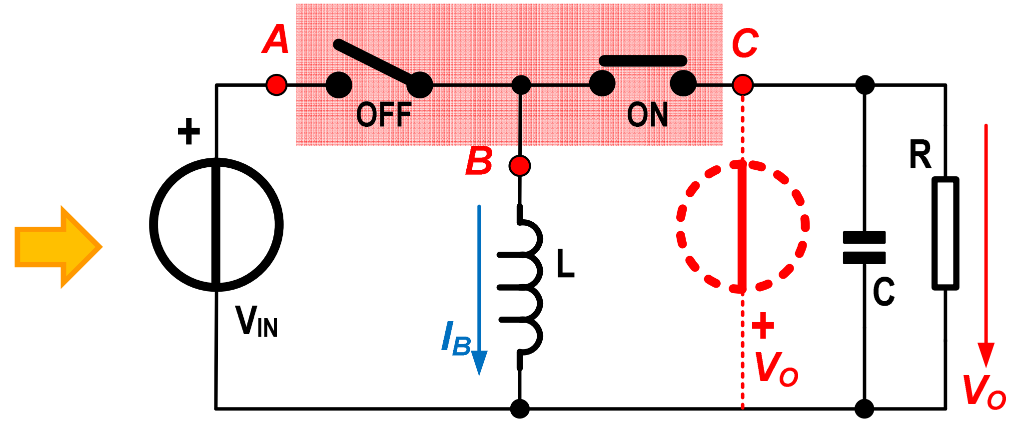
## EJEMPLO: CONVERTIDOR FLYBACK

CÉLULA ELEMENTAL DE CONMUTACIÓN

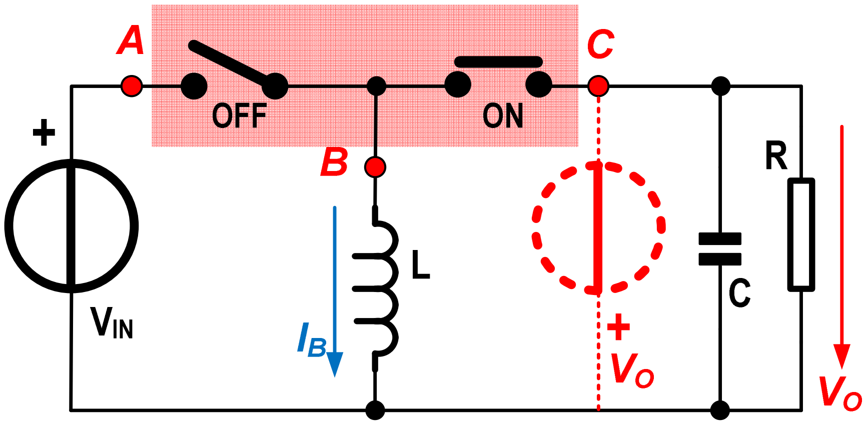



$$V_{AC} = V_{IN} + V_O$$

$$I_B = \frac{I_O}{(1-D)} = \frac{V_O}{R.(1-D)}$$

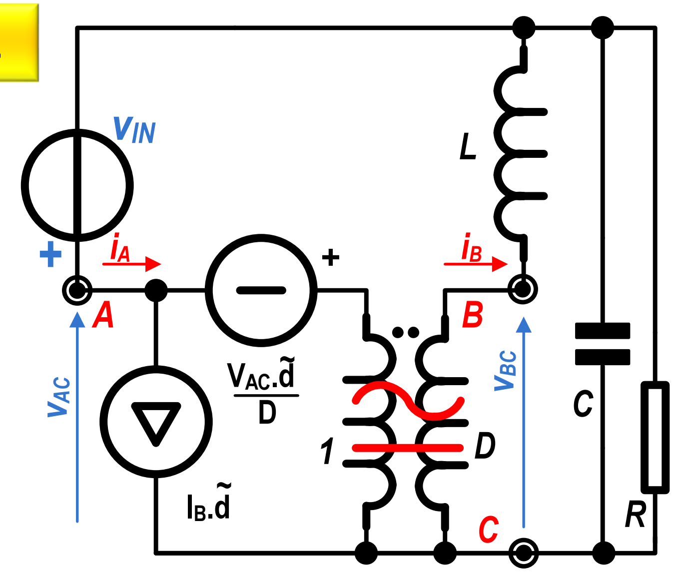


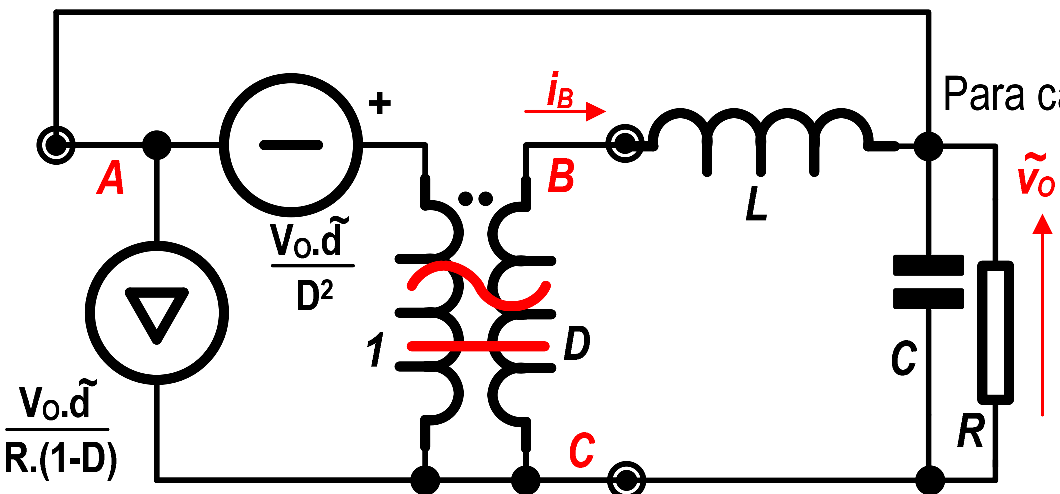
## CONVERTIDOR FLYBACK – TRANSFERENCIA DE CONTROL




$$V_{AC} = V_{IN} + V_O$$

$$I_B = \frac{V_O}{R.(1-D)}$$




Para calcular la transferencia de control $V_{IN} = 0$

Operando con el circuito....

- CERO DE NO MÍNIMA FASE
- CERO RHP DEPENDE DE $D$
- INDUCTANCIA EFECTIVA: $L_E = \frac{L}{(1-D)^2}$

$$G_C(s) = \frac{\tilde{v}_O}{\tilde{d}}(s) = \frac{V_{IN}}{(1-D)^2} \cdot \frac{\left[1 - \frac{s.L.D}{R.(1-D)^2}\right]}{\left[1 + \frac{s.L}{R.(1-D)^2} + \frac{s^2.L.C}{(1-D)^2}\right]}$$

## SUMARIO:

- Los convertidores DC/DC son sistemas de estructura variable (no LTI)
- Para modelizar las funciones de trasferencia se puede emplear el método de promediación de estados (promediando la topología) o el método de Vorpérian (promediando las llaves)
- Las funciones de transferencia resultantes pueden incluir ceros de no mínima fase

**BIBLIOGRAFÍA:**


- “Fundamentals of Power Electronics”, R. Erickson, D. Maksimovic
- “Simplified Analysis of PWM Converters Using Model of PWM Switch, Part I: CCM”, V. Vorpèrian, IEEE
- Apuntes de Cátedra

# PREGUNTAS ?