

**Cíle výuky:** Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, umí je najít
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formálně definovat, uvést příklady
- rozumí pojům [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i příslušné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na příkladech
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formálně definovat, uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestavit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktuře, umí najít definovatelné podmnožiny/relace

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

**Příklad 1.** Uvažme  $\mathbb{Z}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}; +, -, 0 \rangle$  kde  $+$  je binární sčítání modulo 4 a  $-$  je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek  $+$  vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

- Je  $\mathbb{Z}_4$  model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
- Určete všechny podstruktury  $\mathbb{Z}_4 \langle a \rangle$  generované nějakým  $a \in \mathbb{Z}_4$ .
- Obsahuje  $\mathbb{Z}_4$  ještě nějaké další podstruktury?
- Je každá podstruktura  $\mathbb{Z}_4$  modelem teorie grup?
- Je každá podstruktura  $\mathbb{Z}_4$  elementárně ekvivalentní  $\mathbb{Z}_4$ ?

**Příklad 2.** Buď  $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

- Existuje redukt  $\mathbb{Q}$ , který je modelem teorie grup?
- Lze redukt  $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$  rozšířit na model teorie grup?
- Obsahuje  $\mathbb{Q}$  podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní  $\mathbb{Q}$ ?
- Označme  $\text{Th}(\mathbb{Q})$  množinu všech sentencí pravdivých v  $\mathbb{Q}$ . Je  $\text{Th}(\mathbb{Q})$  kompletní teorie?

**Příklad 3.** Mějme teorii  $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$  v jazyce  $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$  s rovnostmi.

- Je  $T$  kompletní?
- Kolik má teorie  $T$  jednoduchých extenzí, až na ekvivalenci? Kolik je kompletních? Napište všechny kompletní a alespoň tři nekompletní.
- Je teorie  $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$  v jazyce  $L' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$  extenzí  $T$ ? Je  $T'$  jednoduchá extenze  $T$ ? Je  $T'$  konzervativní extenze  $T$ ?

**Příklad 4.** Buď  $T'$  extenze teorie  $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$  v jazyce  $L = \langle +, 0, \leq \rangle$  s rovnostmi o definice  $<$  a unárního  $-$  s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce  $L$ , které jsou ekvivalentní v  $T'$  s následujícími formulami.

- $(-x) + x = 0$
- $x + (-y) < x$
- $-(x + y) < -x$

**Příklad 5.** Mějme jazyk  $L = \langle F \rangle$  s rovnostmi, kde  $F$  je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

- interval  $(0, \infty)$  v  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$  kde  $\cdot$  je násobení reálných čísel
- množina  $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$  ve stejné struktuře  $\mathcal{A}$
- množina všech jednoprvkových podmnožin  $\mathbb{N}$  v  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$
- množina všech prvočísel v  $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$

## DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 6.** Buď  $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$  teorie v jazyce  $L = \langle E \rangle$  s rovností, kde  $E$  je binární relační symbol a  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují právě čtyři prvky”.

- (a) Uvažme rozšíření  $L' = \langle E, c \rangle$  jazyka o nový konstantní symbol  $c$ . Určete počet (až na ekvivalenci) teorií  $T'$  v jazyce  $L'$ , které jsou extenzemi teorie  $T$ .
- (b) Má  $T$  nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce  $L'$ ? Zdůvodněte.

**Příklad 7.** Nechť  $T = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg c_1 = c_2\}$  je teorie jazyka  $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$  s rovností, kde  $f$  je unární funkční,  $c_1, c_2$  jsou konstantní symboly a axiom  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují právě 3 prvky”.

- (a) Určete, kolik má teorie  $T$  navzájem neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí. Napište dvě z nich.
- (b) Nechť  $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, \neg f(c_1) = f(c_2)\}$  je teorie stejného jazyka, axiom  $\varphi$  je stejný jako výše. Je  $T'$  extenze  $T$ ? Je  $T$  extenze  $T'$ ? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění.

**Příklad 8.** Mějme jazyk  $L = \langle P, R, f, c, d \rangle$  s rovností a následující dvě formule:

$$\begin{aligned}\varphi : & P(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \wedge \neg x = y \\ \psi : & P(x, y) \rightarrow P(x, f(x, y)) \wedge P(f(x, y), y)\end{aligned}$$

Uvažme následující  $L$ -teorii:

$$\begin{aligned}T = \{ & \varphi, \psi, \neg c = d, \\ & R(x, x), \\ & R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, \\ & R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \\ & R(x, y) \vee R(y, x)\}\end{aligned}$$

- (a) Nalezněte expanzi struktury  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  do jazyka  $L$  na model teorie  $T$ .
- (b) Je sentence  $(\forall x)R(c, x)$  pravdivá/lživá/nezávislá v  $T$ ? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.
- (c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze  $T$  nebo zdůvodněte, proč neexistují.
- (d) Nechť  $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$  je teorie v jazyce  $L' = \langle R, f, c, d \rangle$ . Je teorie  $T$  konzervativní extenzí teorie  $T'$ ? Uveďte zdůvodnění.

## K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 9.** Nechť  $T_n = \{\neg c_i = c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  označuje teorii jazyka  $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$  s rovností, kde  $c_1, \dots, c_n$  jsou konstantní symboly.

- (a) Pro dané konečné  $k \geq 1$  určete počet  $k$ -prvkových modelů teorie  $T_n$  až na izomorfismus.
- (b) Určete počet spočetných modelů teorie  $T_n$  až na izomorfismus.
- (c) Pro jaké dvojice hodnot  $n$  a  $m$  je  $T_n$  extenzí  $T_m$ ? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.