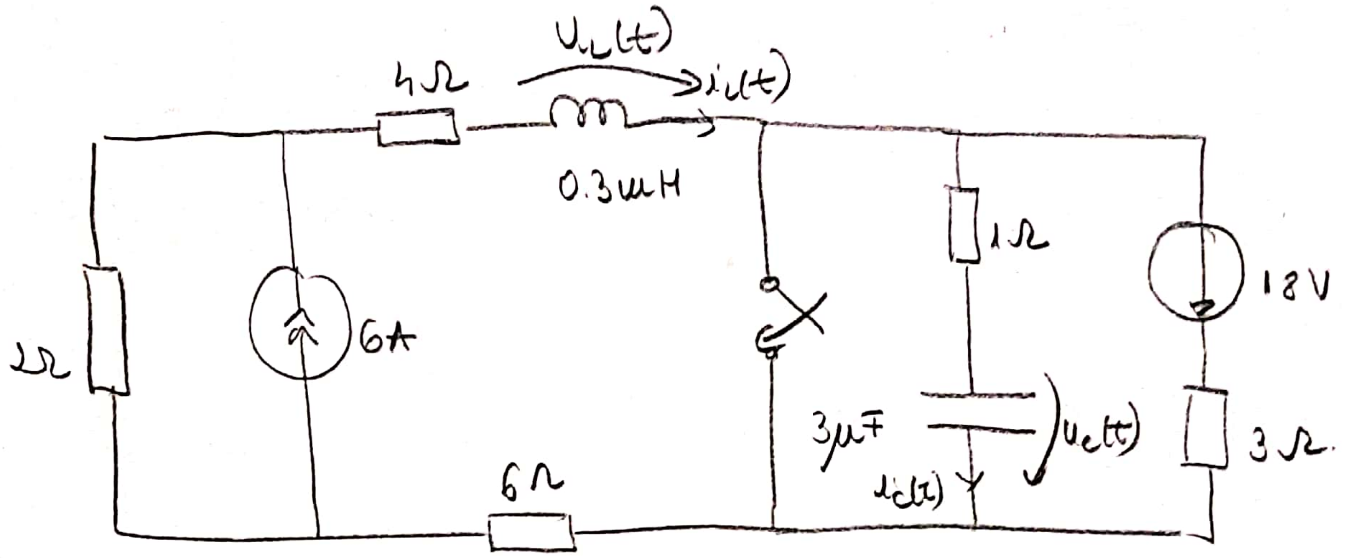
A&C

SEMINAR SĂPT. 13 24.05 - 28.05.2021

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU.

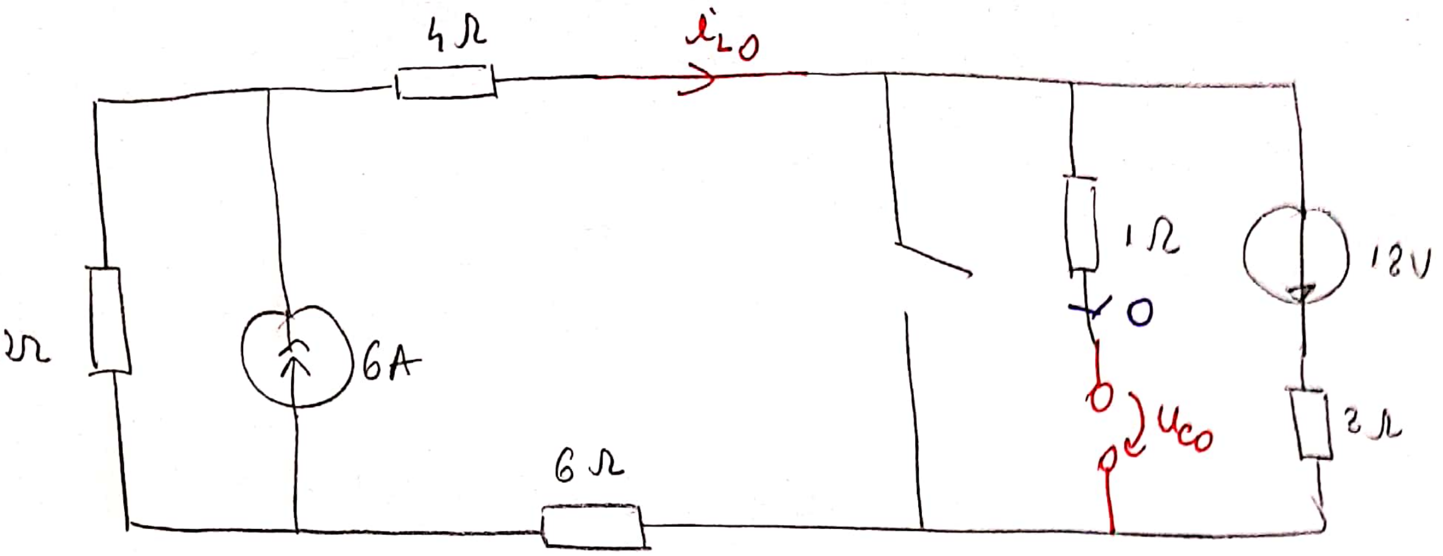
1.



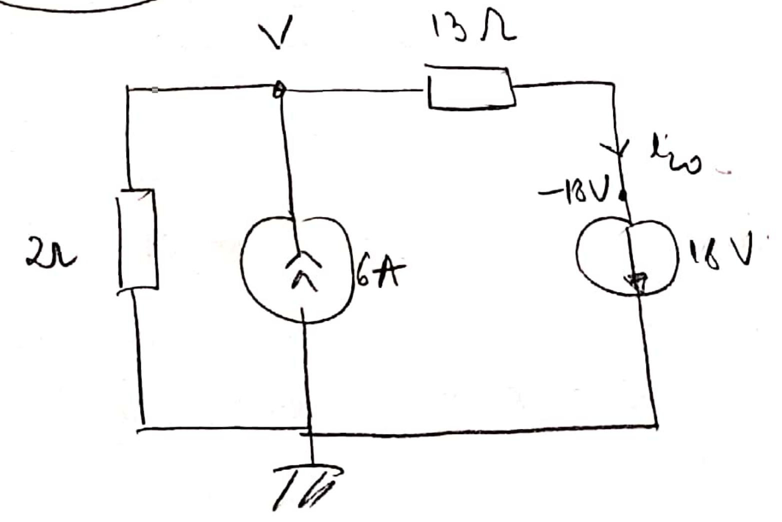
În circuitul din figură întrerupătorul se închide la momentul $t=0$.

Determinați și reprezentați grafic evoluția tensiunii și curentului prin bobină și condensator cu sensurile marcate pe figură.

PASUL 1 Se analizează circuitul în regim staționar anterior regimului tranzitoriu cu metodele de la c.c. și se determină condițiile inițiale pentru variabilele de stare.



METODA I → metoda nodurilor



TKI V.

$$\frac{V-0}{2}\,(\cdot 13) + \frac{V-(-18)}{13}\,(\cdot 2) - 6\,(\cdot 26) = 0$$

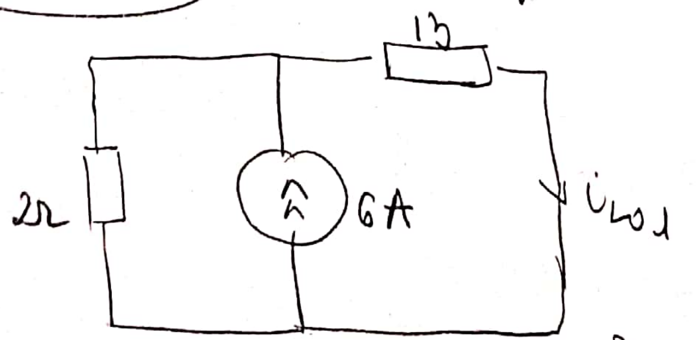
$$13V + 2V + 36 - 156 = 0$$

$$15V = 120 \Rightarrow \boxed{V = 8V}$$

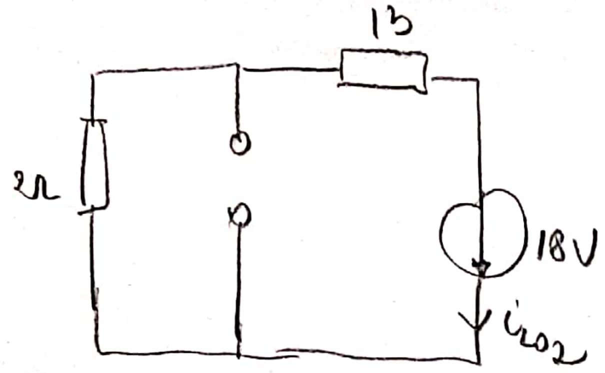
$$\boxed{i_{L0} = \frac{V+18}{13} = \frac{8+18}{13} = \frac{26}{13} = 2A}$$

$$\boxed{u_{C0} = -18 + 3\,i_{L0} = -18 + 3\cdot 2 = -18 + 6 = -12V}$$

METODA II - SUPERPOZIȚIA



$$i_{L01} = \cancel{6}^{2} \cdot \frac{2}{\cancel{15}_{5}} = \frac{4}{5}A$$



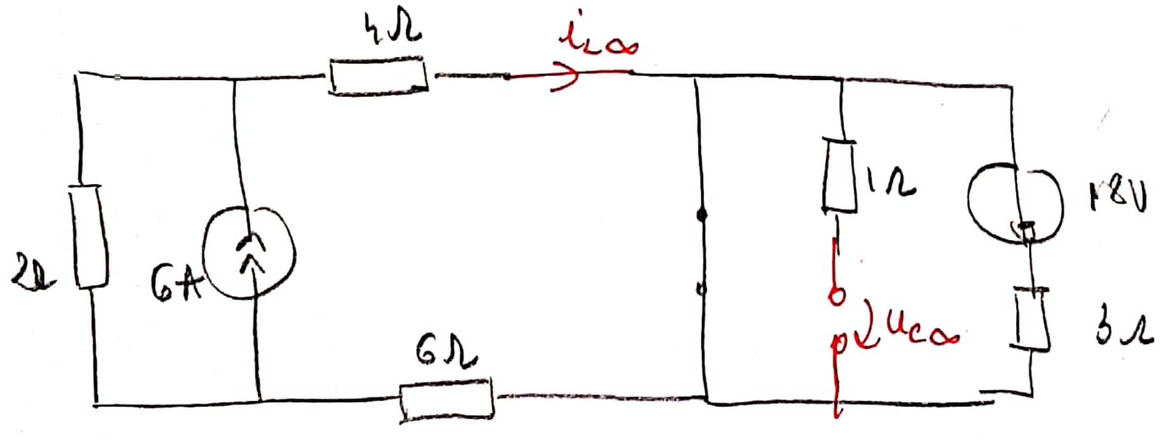
$$i_{Lo_2} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{i_{L0} = i_{L01} + i_{L02} = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2A}$$

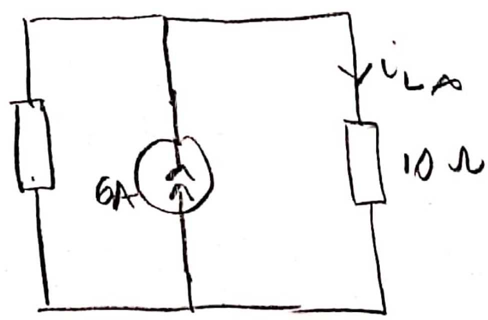
$$\Rightarrow \boxed{u_{C0} = -12V}$$

PASUL 2 - OPTIONAL

Se analizează circuitul în regim permanent posterior regimului tranzitoriu și se determină valorile asimptotice ale variabilelor de stare. (doar pt verificarea rezultatelor)

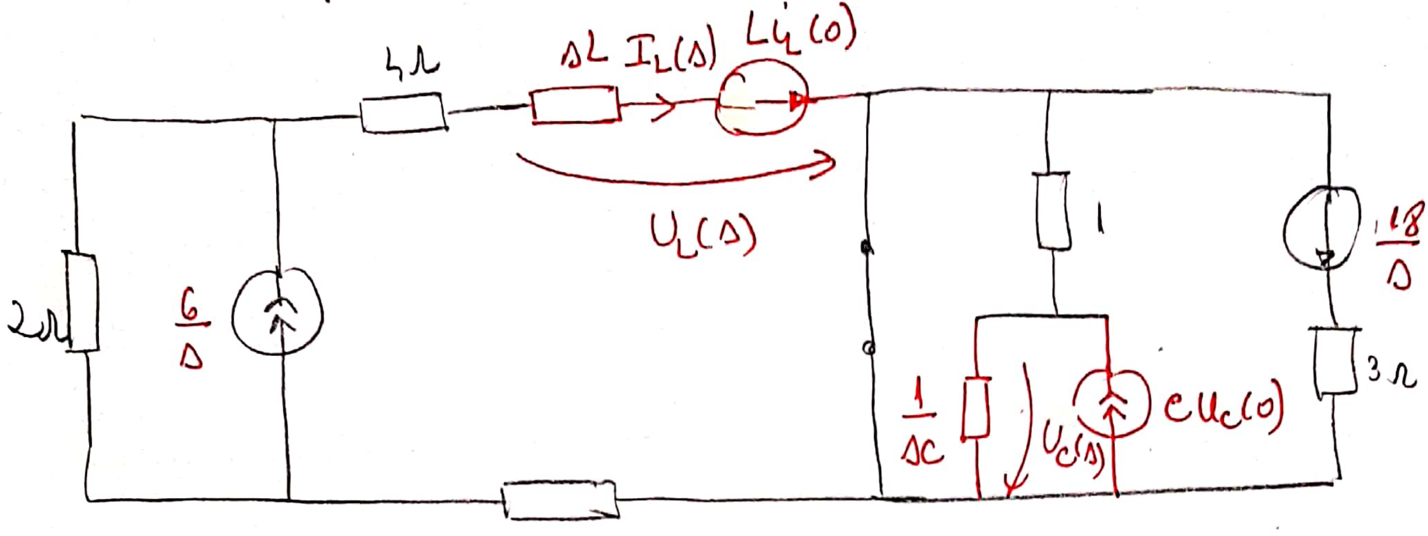


$$\boxed{u_{C\infty} = 0}$$



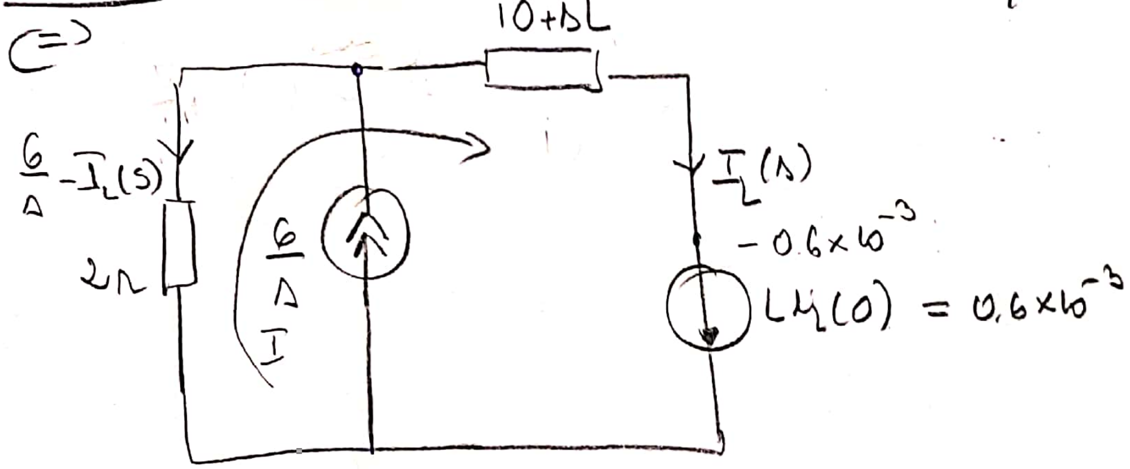
$$\boxed{i_{L\infty} = \cancel{6} \cdot \frac{2}{\cancel{12}_2} = 1A}$$

PASUL 3 Se reprezintă circuitul în operațional



PASUL 4 Se rezolvă circuitul cu metodele învățate la c.c.

⟺



$$L i_L(0) = 0.3\times10^{-3}\times 2 = 0.6\times10^{-3}$$

$$C u_C(0) = 3\times10^{-6}\times(-12) = -36\times10^{-6}$$

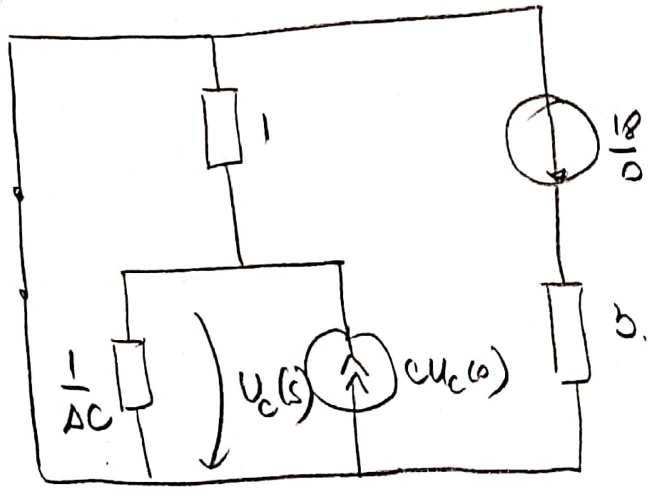
$$TK\,II_{\text{ }I}: (10+sL)I_L(s) - 0.6\times10^{-3} - \left(\frac{6}{s} - I_L(s)\right)2 = 0$$

$$I_L(s)\cdot\left[10+sL+2\right] = 0.6\times10^{-3} + \frac{12}{s}$$

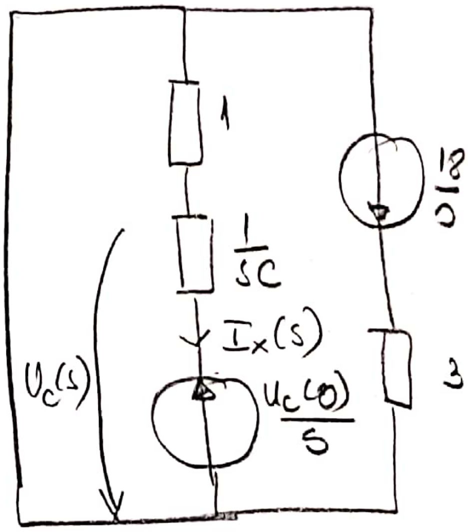
$$I_L(s)\left[0.3\times10^{-3}s+12\right] = \frac{s\times0.6\times10^{-3}+12}{s}$$

$$I_L(s) = \frac{s \times 0.6\times10^{-3} + 12}{s\left[0.3\times10^{-3} s + 12\right]} = \frac{\cancel{0.6\times10^{-3}}^{\,2}\left[s + \frac{12}{0.6\times10^{-3}}\right]}{\cancel{0.3\times10^{-3}}\, s\left[s + \frac{12}{0.3\times10^{-3}}\right]} =$$

$$\boxed{I_L(s) = 2\,\frac{s + 20\times10^{3}}{s\left[s + 40\times10^{3}\right]}}$$



$\Leftrightarrow$



$$I_x(s)\left[1 + \frac{1}{sC}\right] + \frac{U_c(0)}{s} = 0 \;\Rightarrow\; I_x(s) = -\frac{\frac{U_c(0)}{\cancel{s}}}{\frac{sC+1}{\cancel{s}C}} \Rightarrow$$

$$I_x(s) = -\frac{CU_c(0)}{sC+1}$$

$$U_c(s) = \frac{1}{sC} I_x(s) + \frac{U_c(0)}{s} = -\frac{1}{s\cancel{C}} \cdot \frac{\cancel{C}U_c(0)}{sC+1} + \frac{U_c(0)}{s}$$

$$U_c(s) = -\frac{-12}{Cs\left(s + \frac{1}{C}\right)} - \frac{12}{s} = \frac{\cancel{12}^{\,4}}{\cancel{3}\times10^{-6}\, s\left(s + \frac{1}{3\times10^{-6}}\right)} - \frac{12}{s}$$

$$\boxed{U_c(s) = \frac{4\times 10^6}{s\left(s+\frac{10^6}{3}\right)} - \frac{12}{s}}$$

PASUL 5 Se verifică soluția obținută

Teorema valorii inițiale

$$\lim_{s\to\infty} sI_L(s) = i_L(0) = 1$$

$$\lim_{s\to\infty} sU_c(s) = u_c(0) = -12.$$

Teorema valorii finale

$$\lim_{s\to 0} sI_L(s) = 2$$

$$\lim_{s\to 0} sU_c(s) = -12.$$

PASUL 6 Se revine în domeniul timpului

Pentru revenirea în domeniul timpului soluțiile operaționale trebuie descompuse în fracții simple.

$$I_L(s) = 2\left[\frac{s+20\times 10^3}{s(s+40\times 10^3)}\right] = 2\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+40\times 10^3}\right)$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+40\times 10^3} = \frac{s+20\times 10^3}{s(s+40\times 10^3)}$$

$$A\,(s+40\times10^{3}) + Bs = s+20\times10^{3}$$

$$s(A+B) + 40\times10^{3}A = s+20\times10^{3}$$

$$A+B=1 \qquad \boxed{B=\frac{1}{2}}$$

$$40\times\cancel{10^{3}}A = 20\times\cancel{10^{3}} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$$

$$I_L(s) = 2\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+40\times10^{3}}\right] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+40\times10^{3}}$$

$$\boxed{i_L(t) = 1 + e^{-\frac{t}{\tau_L}}} \quad (A).$$

$$\boxed{\tau_L = \frac{1}{40\times10^{3}} \Rightarrow \tau_L = \frac{1}{40}10^{-3} = \frac{1000}{40}\,\frac{10^{-3}}{10^{3}} = 25\,\mu s}$$

$$\boxed{u_L(t)} = L\,\frac{di_L}{dt} = L\left[1+e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right]' = L\cdot\left(-\frac{1}{\tau_L}\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}} =$$

$$= 0.3\times\cancel{10^{-3}}(-)\cdot 40\times\cancel{10^{3}}\,e^{-\frac{t}{\tau_L}} \boxed{= -12\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (V).}$$

$$U_C(s) = \frac{4\times10^{6}}{s\left(s+\frac{10^{6}}{3}\right)} - \frac{12}{s}.$$

$$\frac{4\times10^{6}}{s\left(s+\frac{10^{6}}{3}\right)} = \frac{D}{s} + \frac{F}{s+\frac{10^{6}}{3}}.$$

$$D\left(s+\frac{10^6}{3}\right)+Fs=4\times10^6$$

$$s(D+F)+D\frac{10^6}{3}=4\times10^6$$

$$D+F=0 \qquad \boxed{F=-12}$$

$$D\frac{\cancel{10^6}}{3}=4\times\cancel{10^6} \Rightarrow \boxed{D=12}$$

$$U_c(s)=\cancel{\frac{12}{s}}-\frac{12}{s+\frac{10^6}{3}}-\cancel{\frac{12}{s}}=-\frac{12}{s+\frac{10^6}{3}}$$

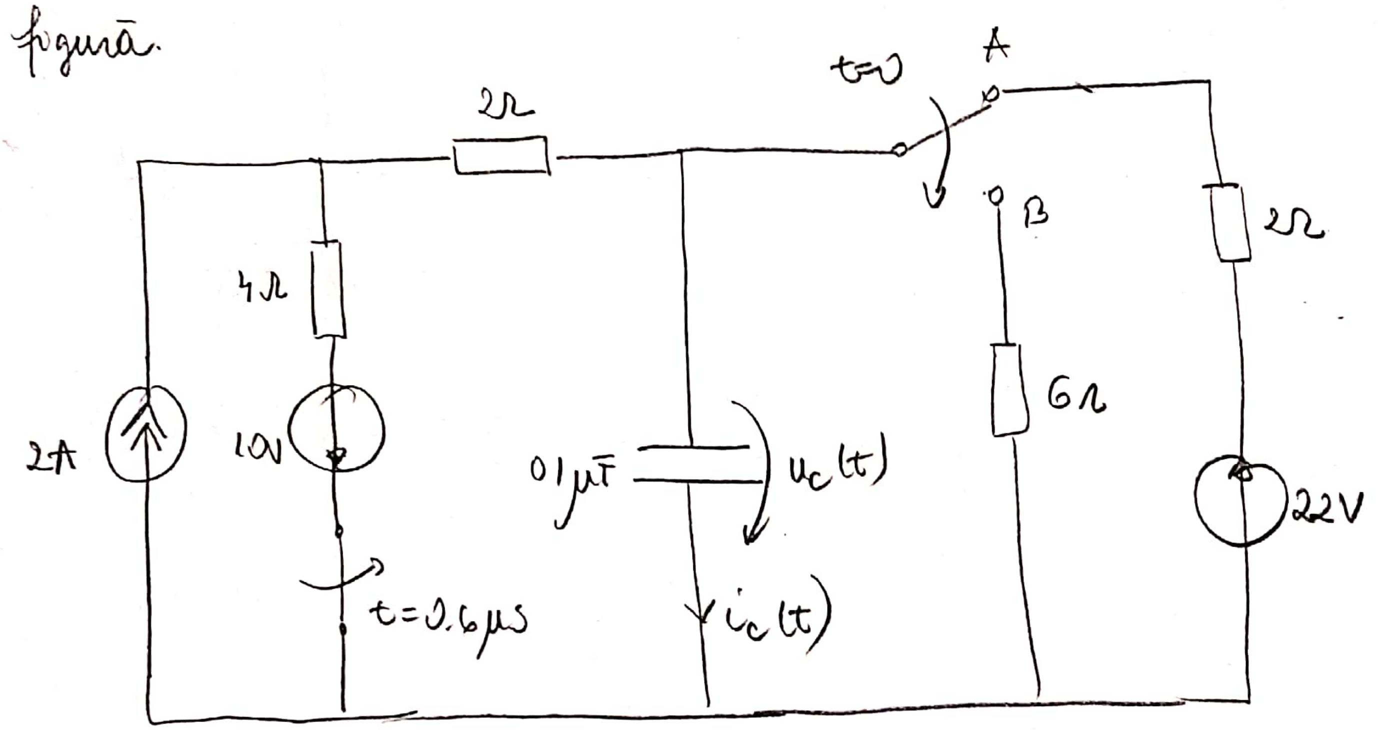
$$\boxed{u_c(t)=-12e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau=\frac{3}{10^6}=3\mu s.}$$

$$\boxed{i_c(t)}=C\frac{du_c}{dt}=C\frac{d}{dt}\left[-12e^{-\frac{t}{\tau}}\right]=C(-12)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=$$

$$=\cancel{3}\times\cancel{10^{-6}}\cdot12\frac{\cancel{10^6}}{\cancel{3}}e^{-\frac{t}{\tau}}=\boxed{12e^{-\frac{t}{\tau}}\quad [A]}$$

2. În circuitul din figură comutatorul trece din A în B la $t=0$.

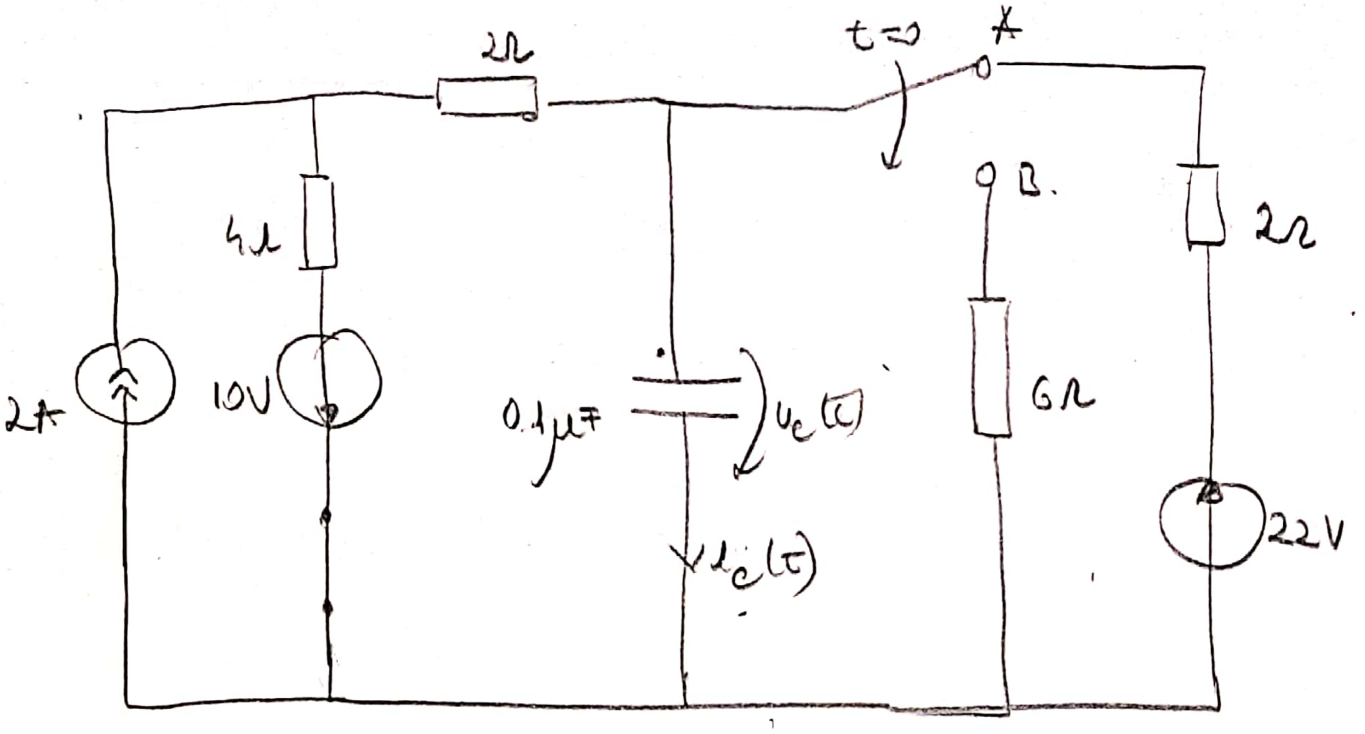
Apoi, la momentul $t = 0{,}6\mu s$ se deschide și întrerupătorul. Determinați și reprezentați grafic evoluția tensiunii și curentului prin condensator pentru sensurile de referință marcate pe figură.



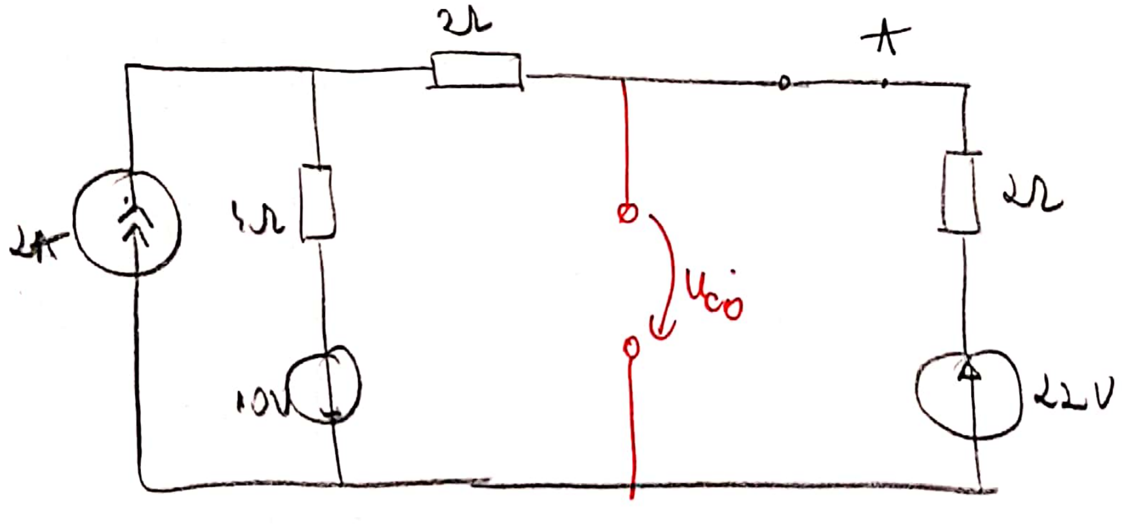
Rezolvarea cuprinde două părți, una corespunzătoare primului tranzitoriu $t \in (0, t_1)$ și una pt tranzitoriu $t \in (t_1, \infty)$

Pt $t \in (0, t_1)$

PASUL 1 Se analizează circuitul în regim staționar anterior regimului tranzitoriu cu metodele de la c.c.

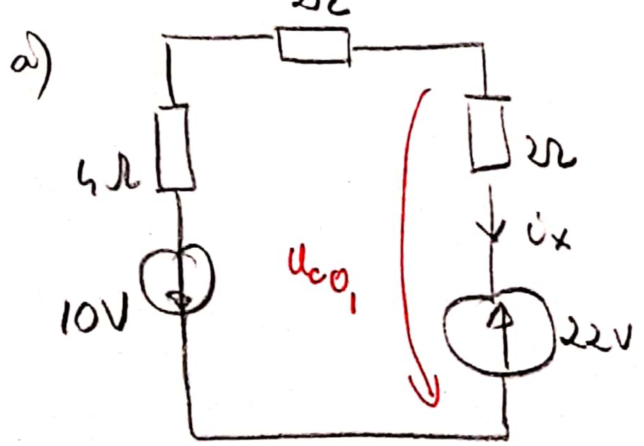


Circuitul pt $t \in (0, t_1)$.



SUPERPOZIȚIE

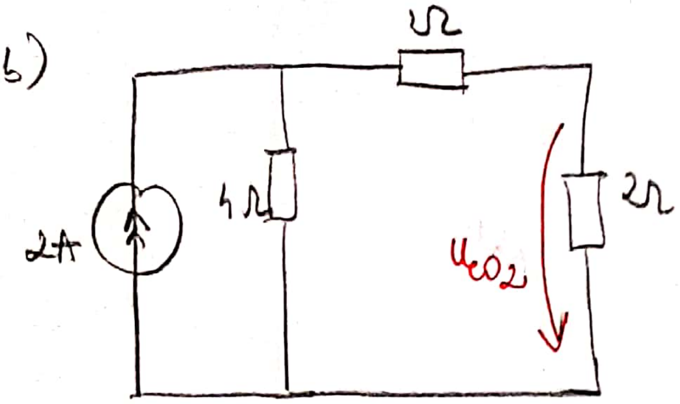
a)



$$i_x = -\frac{32}{8} = -4A$$

$$u_{C0_1} = 2i_x + 22 = -8 + 22 = 14V$$

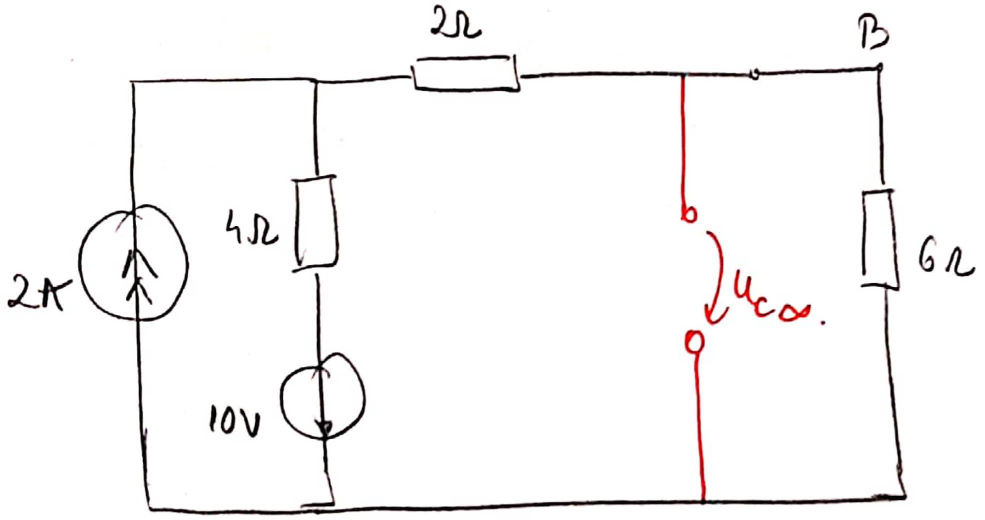
b)

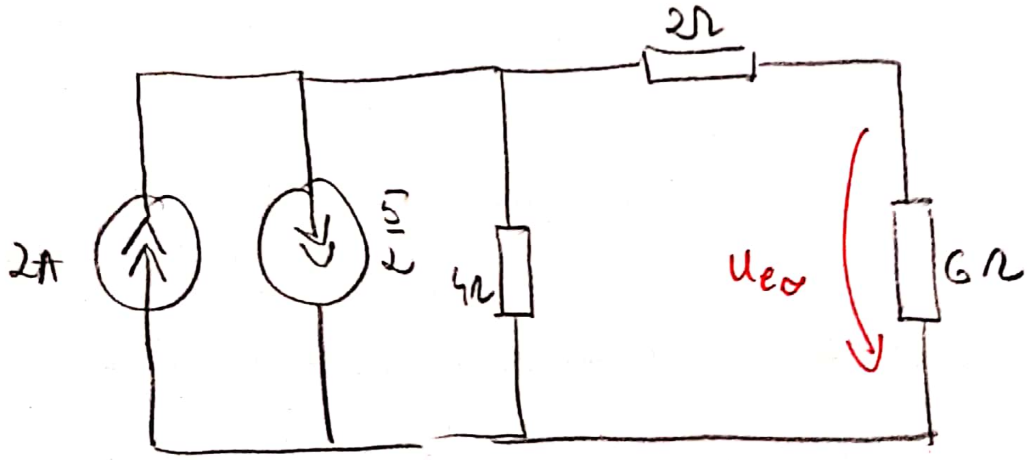


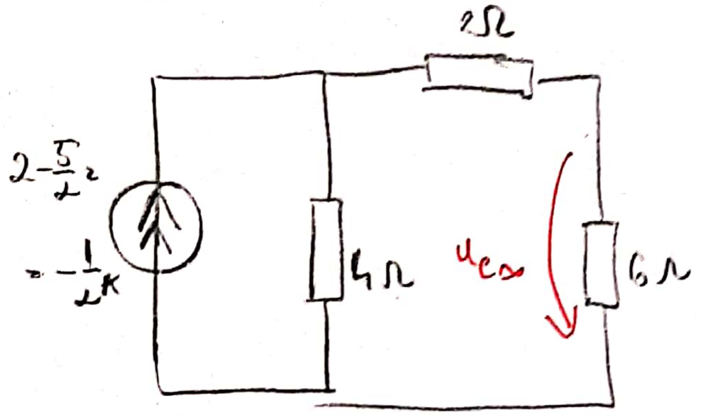
$$u_{co_2} = 2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{4}{\cancel{8}} = 2V$$

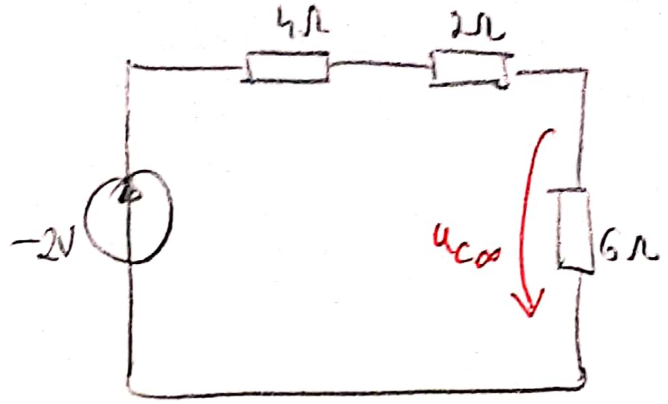
$$\boxed{u_{co} = u_{co_1} + u_{co_2} = 14 + 2 = 16V}$$

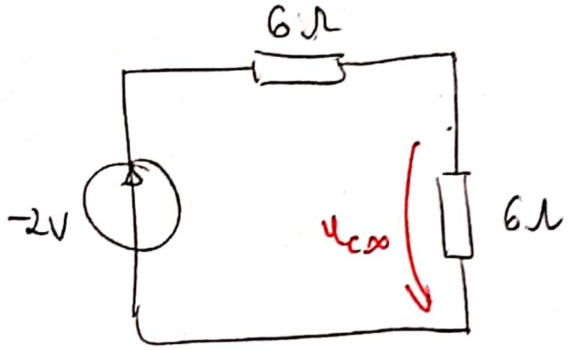
PASUL 2 Se analizează circuitul în regim staționar posterior regimului tranzitoriu.





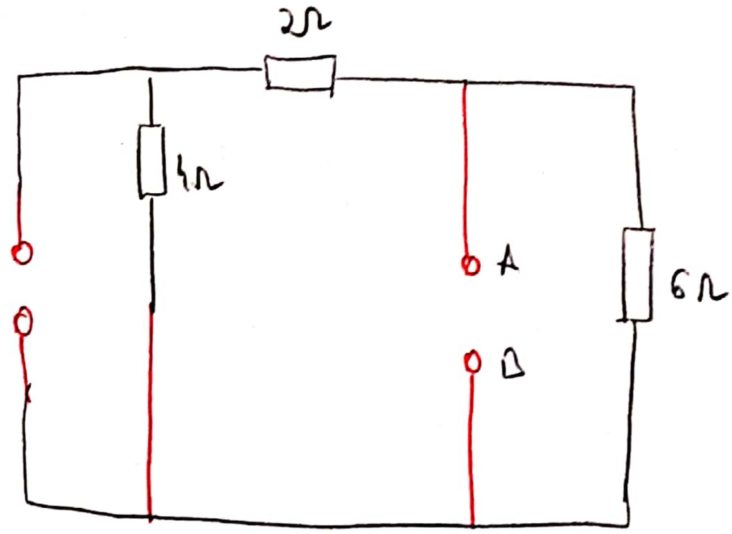






$$\boxed{u_{c\infty} = (-2)\,\frac{6}{12} = -1V}$$

<u>PASUL 3</u> Se pasivizează circuitul și se determină rezistența echivalentă față de bornele condensatorului.



$$R_{AB} = \frac{6\cdot(4+2)}{6+(4+2)} = \frac{\cancel{6}\times 6}{\cancel{6}\times 2} = 3\Omega$$

$$\tau_1 = R_{AB}\cdot C = 3\cdot 0{,}1\,\mu F = 0.3\,\mu s.$$

<u>PASUL 4</u> Se determină evoluția în timp a variabilei de stare, identificând constantele A și B din expresia

$$u_c(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

$$u_{c0} = 16 \Rightarrow A+B = 16$$
$$u_{c\infty} = -1 \Rightarrow B = -1$$
$$\Rightarrow \boxed{A=17}$$

$$\boxed{u_c(t) = 17e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \quad (1) \text{ pt } t \in (0, t_1) \quad \tau_1 = 0.3\mu s}$$

$$i_c(t) = C\frac{d}{dt}\left[17e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right] = C \cdot 17\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 0.1 \times \cancel{10^{-6}} \times 17\left(-\frac{1}{0.3 \times \cancel{10^{-6}}}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{17}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

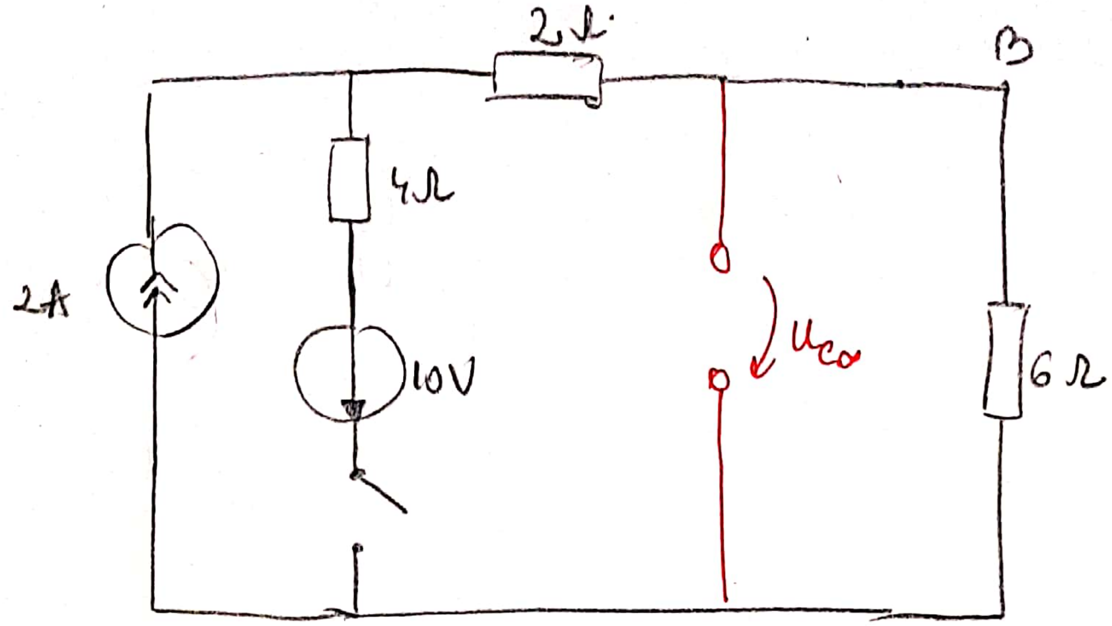
$$\boxed{i_c(t) = -\frac{17}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \in (0, t_1), \quad \tau_1 = 0.3\mu s}$$

$$t = 0.6\mu s = 2\tau_1.$$

La $t = 0.6\mu s = 2\tau_1$ variabile de stare ajunge la valoarea

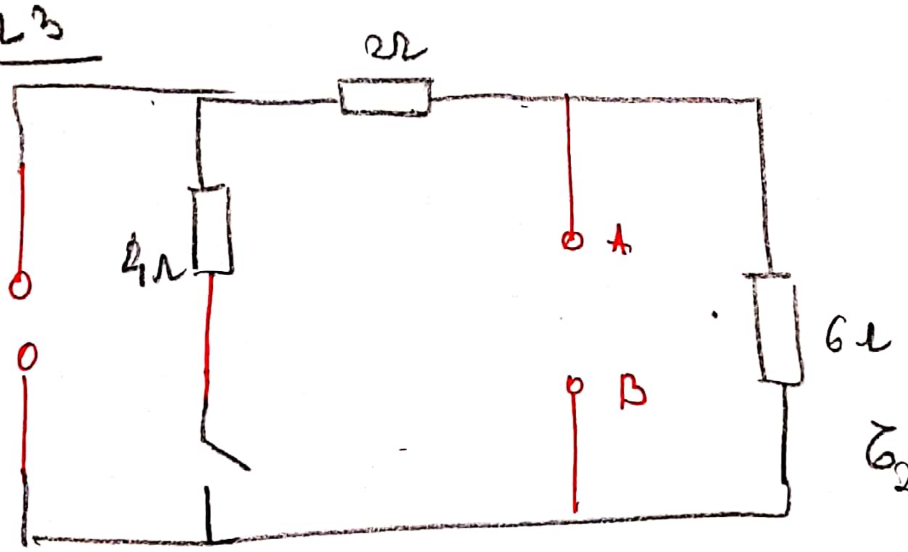
$$\begin{cases} u_c(2\tau_1) = 17e^{-\frac{2\cancel{\tau_1}}{\cancel{\tau_1}}} - 1 = 2.3 - 1 = 1.3 \\ i_c(2\tau_1) = -\frac{17}{3}e^{-2} = -0.766 \end{cases}$$

PASUL 2 :



$$\boxed{u_{c\infty} = 6 \times 2 = 12V}$$

PASUL 3



$R_{AO} = 6\Omega.$

$\tau_2 = R_{AO} \cdot C =$

$= 6 \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.6 \mu s.$

PASUL 4 $\quad u_c(t) = A e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} + B.$

$$\left.\begin{cases} u_c(0) = 1.3 & A+B = 1.3 \\ u_c(\infty) = 12 & B = 12 \end{cases}\right\} \Rightarrow A = -10.7.$$

$$\boxed{u_c(t) = -10.7\, e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} + 12 \quad [V] \qquad t \in (t_1, \infty)}$$

$$i_c(t) = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[-10.7\, e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} + 12\right].$$

$$= C(-10.7)\left(-\frac{1}{\tau_2}\right) e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} = \cancel{0.1}\times\cancel{10^{-6}}\times 10.7(+)\frac{1}{\underset{6}{\cancel{0.6}}\times\cancel{10^{-6}}}\, e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}}$$

$$= +\frac{10.7}{6} e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}}$$

$$u_c(t) = \begin{cases} 17 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - 1 \quad [V] \quad pt \quad t \in (0, t_1) \\ -10.7 e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} + 12 \quad [V] \quad pt \quad t \in (t_1, \infty) \end{cases}$$

$$i_c(t) = \begin{cases} -\frac{17}{3} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad [A] \quad pt \quad t \in (0, t_1) \\ \frac{10.7}{6} e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} \quad [A] \quad pt \quad t\, (t_1, \infty) \end{cases}$$