A & C

SERIILE AC, CA, CD SEMINAR (CA) SĂPT. 26.04 – 30.04.2021 (SĂPT 9)
3.05 – 7.05.2021 (SĂPT 10 pt cei care au vineri seminar).

CAP. 9.

9.1. REPREZENTĂRI ALE MĂRIMILOR SINUSOIDALE

Regim de c.a = regim sinusoidal $\underline{\text{def}}$ regimul sinusoidal, armonic sau de c.a este regimul în care toate mărimile (toți curenții și toate tensiunile din circuit) au variație sinusoidală în timp, cu aceeași frecvență.

MĂRIME SINUSOIDALĂ. REPREZENTAREA ANALITICĂ

Orice mărime sinusoidală este reprezentată sub forma:

$$y(t) = Y\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

$y(t) \to i(t) \to u(t)$

unde

- t → timpul [s] – variabilă independentă
- Y – valoarea efectivă [V], [A]
- $Y\sqrt{2} = Y_{max}$ – valoarea maximă [V], [A]
- ω – pulsație sau frecvență unghiulară [rad/s]
- $\omega t + \alpha$ → fază [rad]
- α – fază inițială (la $t=0$).

$y(t)$ este o mărime periodică $\Rightarrow y(t) = y(t+T)\ \forall t$

– T – perioada semnalului [s]: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (2)

- frecvența [Hz]

$$f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

Valoarea efectivă este o mărime pozitivă.

$$Y = \frac{Y_{max}}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

REPREZENTAREA ÎN COMPLEX. REPREZENTAREA FAZORIALĂ

$$y(t) \rightleftarrows \underline{Y}$$

unde $y(t) = Y\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$

$$\underline{Y} = Y e^{j\alpha}$$

În reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale se preia din expresia mărimii instantanee informația care o definește în mod unic: valoarea efectivă care devine modulul numărului complex și faza inițială care devine argumentul numărului complex.

Proprietățile reprezentării în complex. Reprezentarea fazorială

(T1) Teorema liniarității $\forall y_1, y_2 \in S_\omega$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Dacă

$$y_1(t) \rightleftarrows \underline{Y_1} \quad \text{și} \quad y_2(t) \rightleftarrows \underline{Y_2}$$

atunci

$$\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \rightleftarrows \lambda_1 \underline{Y_1} + \lambda_2 \underline{Y_2}$$

(T2) Teorema derivării $\forall\ y(t) \in S_\omega$

Dacă
$$y(t) \rightleftarrows \underline{Y}$$

atunci
$$\frac{d}{dt}\, y(t) \rightleftarrows j\omega \underline{Y}$$

(T3) Teorema integrării $\forall\ y(t) \in S_\omega$

Dacă
$$y(t) \rightleftarrows \underline{Y}$$

atunci
$$\int y(t)\,dt \rightleftarrows \frac{\underline{Y}}{j\omega}$$

(T4) Teorema produsului scalar $\forall\ y_1(t), y_2(t) \in S_\omega$

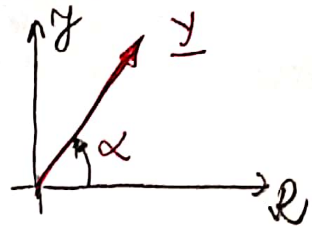
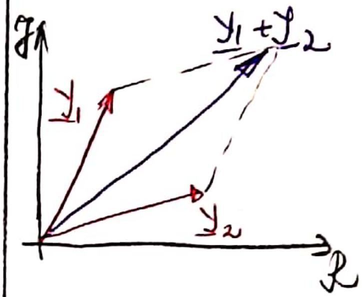
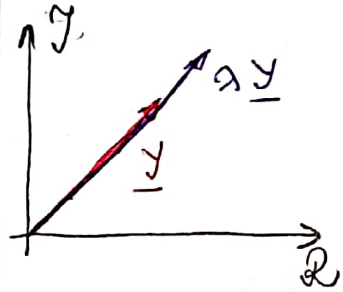
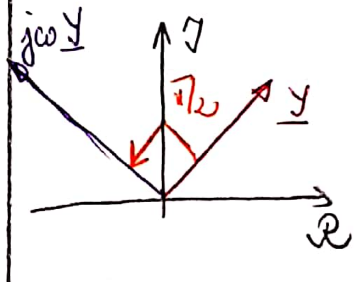
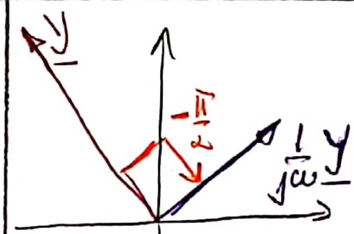
Dacă
$$y_1(t) \rightleftarrows \underline{Y}_1 \quad \text{și} \quad y_2(t) \rightleftarrows \underline{Y}_2$$

atunci
$$\langle y_1(t), y_2(t) \rangle_{S_\omega} = \langle \underline{Y}_1, \underline{Y}_2 \rangle_{C}$$

REPREZENTAREA FAZORIALĂ $\overset{def}{=}$ reprezentarea fazorială este reprezentarea mărimii sinusoidale în planul bidimensional, printr-un vector care are modulul egal cu valoarea efectivă și direcția dată de faza inițială.

Reprezentarea fazorială se identifică cu cea geometrică în planul complex → axa reală → axa Ox
→ axa imaginară → axa Oy.

Fazorii se mai numesc și VECTORI ROTITORI, deoarece dacă ei încep să se rotească în jurul originii cu viteza unghiulară ω, atunci proiecția lor pe axa verticală este proporțională cu semnalul sinusoidal pe care îl reprezintă, cu factorul de proporționalitate $\sqrt{2}$.

	Instantaneu (S_ω)	Complex ($\mathbb{C}$)	Fazorial ($\mathbb{R}^2$)
	$y(t) = Y\sqrt{2}\sin(\omega t+\alpha)$	$\underline{Y} = Y e^{j\alpha}$	
Adunarea a două mărimi sinusoidale → adunarea reprezentărilor complexe → adunarea a doi vectori	$y_1(t)+y_2(t)$	$\underline{Y}_1+\underline{Y}_2$	
Înmulțirea unei mărimi sinusoidale cu un scalar → înmulțirea $\underline{Y}$ cu acel scalar → înmulțirea unui vector cu un scalar	$\lambda y(t)$	$\lambda \underline{Y}$	
Derivarea unei mărimi sinusoidale → înmulțirea cu $j\omega$ a lui $\underline{Y}$ → o rotație cu $\pi/2$ în sens pozitiv (trigonometric)	$\frac{dy(t)}{dt}$	$j\omega \underline{Y}$	
Integrarea unei mărimi sinusoidale → împărțirea cu $j\omega$ a lui $\underline{Y}$ → o rotație cu $\pi/2$ în sens negativ	$\int y(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}\underline{Y}$	

Reprezentarea în complex transformă sistemul de ecuații diferențiale ordinare liniare (ale circ. de c.a.) în ecuații algebrice în mulțimea numerelor complexe.

Exerciții A) Verificați reprezentările în complex a mărimilor sinusoidale.

a) 1) $i_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_{1ef}\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha)$

$\underline{I}_1 = I_{1ef} e^{j\alpha} = 5 e^{j\frac{\pi}{2}}$ → forma exponențială

$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \sin\alpha$

$\Rightarrow \underline{I}_1 = 5(\cos\frac{\pi}{2} + j \sin\frac{\pi}{2}) = 5j$ → forma algebrică

2) $u_1(t) = 10 \sin(\omega t)$

$U_{1max} = 10 \Rightarrow U_{1max} = U_{ef}\sqrt{2} \Rightarrow U_{ef} = \frac{U_{1max}}{\sqrt{2}}$

$\underline{U}_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j0} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ → formă exponențială și forma algebrică

b) 1) $i_2(t) = \frac{10}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \pi)$

$i_2(t) = \frac{10}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi)$

$\underline{I}_2 = I_{2ef} e^{j\alpha} = 5 e^{j\pi}$ → forma exponențială

$\underline{I}_2 = 5(\cos\pi + j \sin\pi) = -5$ → forma algebrică.

2) $u_2(t) = -10\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

Valoarea maximă trebuie să fie > 0

$-\sin x = \sin(x + \pi)$

$u_2(t) = 10\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \pi\right) = 10\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$

$\underline{U}_2 = 10 e^{j\frac{3\pi}{4}}$ → forma exponențială

$\underline{U}_2 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 10\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}(-1+j)$

– forma algebrică

c) 1) $i_3(t) = 10\cos\omega t = 10\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{I}_3 = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}}$ → forma exponențială

$\underline{I}_3 = \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{10}{\sqrt{2}} j = 5\sqrt{2} j$

2) $u_3(t) = 10\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

$\underline{U}_3 = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = 5\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$ → forma exponențială

$\underline{U}_3 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5(1+j)$ → forma algebrică

d) 1) $i_4(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{I}_4 = 10 e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ → forma exponențială

$\underline{I}_4 = 10\left(\cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2}\right) = -10j \rightarrow$ forma algebrică

2) $u_4(t) = 20\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{20}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)$

$\underline{U}_4 = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 10\sqrt{2}\, e^{j\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} \rightarrow$ forma exponențială

$\underline{U}_4 = 10\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - j\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 10\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10(1+j) \rightarrow$

forma algebrică

e) temă

B) Verificați reprezentările instantanee ale mărimilor complexe de mai jos.

a) 1) $\underline{I}_6 = 5$

$tg\,\alpha = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow \alpha = arctg\,0 = 0.$

$|\underline{I}_6| = I_6 = 5$

$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\text{partea reală}}{\text{modul}} = \frac{5}{5} = 1 \\ \sin\alpha &= \frac{\text{partea imaginară}}{\text{modul}} = \frac{0}{5} = 0. \end{aligned}\right\} \alpha = 0^\circ$

$\Rightarrow i_6(t) = 5\sqrt{2}\sin\omega t.$

2) $\underline{U}_6 = 10 + 10j$

$tg\,\alpha = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \alpha = arctg\,1 = \frac{\pi}{4}.$

$|\underline{U}_6| = U_6 = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}.$

$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \alpha = \frac{\pi}{4}$

PAGCop /27

Scanned with CamScanner

$$u_6(t) = 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 20\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) 1) $\underline{I}_7 = -10$

$$|\underline{I}_7| = I_7 = 10 \; ; \; tg\alpha = \frac{0}{-10} = 0 \Rightarrow \alpha = arctg\, 0 + \pi = \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = -1 \\ \sin\alpha = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$i_7(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi)$$

2) $\underline{U}_7 = 5 - 5j \Rightarrow |\underline{U}_7| = U_7 = 5\sqrt{2}$; $tg\alpha = -\frac{5}{5} = -1 \Rightarrow$ $\alpha = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

$$u_7(t) = 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 10\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) 1) $\underline{I}_8 = 10j \rightarrow |\underline{I}_8| = I_8 = 10$; $tg\alpha = \frac{10}{0} = \infty \Rightarrow$ $\alpha = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}.$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$i_8(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

2) $\underline{U}_8 = -3 + 4j \Rightarrow |\underline{U}_8| = U_8 = 5$; $tg\alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = arctg\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = -\frac{3}{5} \\ \sin\alpha = \frac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 90^\circ + 37^\circ = 127^\circ$$

$u_g(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 127^\circ)$ sau $u_g(t) = 5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi\right)$

d) 1) $\underline{I}_g = -2j \rightarrow |\underline{I}_g| = I_g = 2$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{0} = -\infty$; $\alpha = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\\ \sin\alpha = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

$$i_g(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

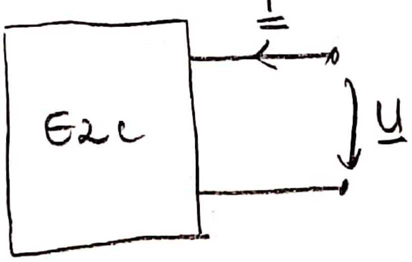
2) $\underline{U}_g = 3 - 4j \Rightarrow |\underline{U}_g| = U_g = 5$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{3}{5}\\ \sin\alpha = -\frac{4}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -53^\circ$$

$$u_g(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 53^\circ) = 5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$$

IMPEDANȚA/ADMITANȚA COMPLEXĂ a E2C LINIARE

Impedanța complexă a unui E2C $\stackrel{def}{=}$ $\underline{Z}$ - raportul dintre reprezentarea în complex a tensiunii la borne și reprezentarea în complex a curentului prin element. (conform regulii de la receptoare)



$$\Rightarrow \underline{Z} \stackrel{def}{=} \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$Z = |\underline{Z}| \qquad \varphi = \arg(\underline{Z})$$

Z ↓ modulul impedanței $\qquad$ φ ↓ defazaj

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(t) \rightleftarrows \underline{U} = U e^{j\varphi_u} \\ i(t) \rightleftarrows \underline{I} = I e^{j\varphi_i} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{U}{I} \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

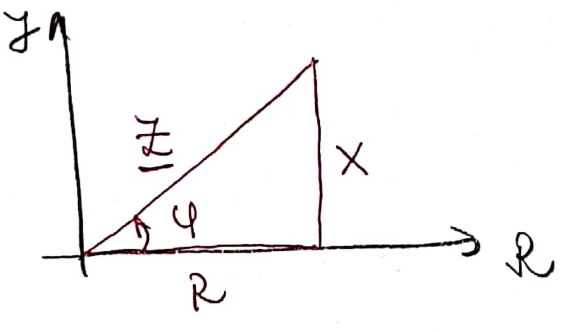
Rezistența (de c.a.) și reactanța unui E2C = partea reală a impedanței complexe se numește REZISTENȚĂ (de c.a) R, $[\Omega]$
Partea imaginară a impedanței complexe se numește REACTANȚĂ (X), $[\Omega]$

$$R = \mathcal{R}(\underline{Z}), \quad X = \mathcal{I}(\underline{Z}) \quad (7)$$

unde

$$\underline{Z} = R + jX \quad (8)$$

TRIUNGHIUL IMPEDANȚELOR



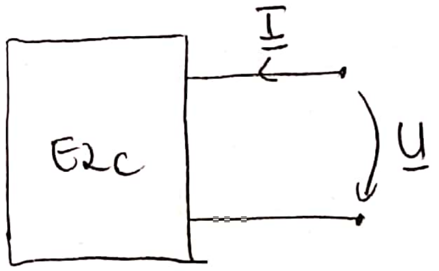
- forma exponențială $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$
- forma algebrică $\underline{Z} = R + jX$
- trecerea de la forma exponențială la cea algebrică:

$$R = Z\cos\varphi \qquad X = Z\sin\varphi$$

• trecerea de la forma algebrică la cea exponențială

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \tan\varphi = \frac{X}{R}$$

Admitanța complexă a unui E2C = $\underline{Y}$ - raportul dintre reprezentarea în complex a intensității curentului prin element și tensiunea la bornele sale.



$$\underline{Y} \stackrel{def}{=} \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Admitanța și defazajul unui E2C - modulul admitanței complexe se numește ADMITANȚĂ (Y) [S]. Argumentul admitanței complexe este minus defazajul definit anterior.

$$Y = |\underline{Y}|$$

unde

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi}$$

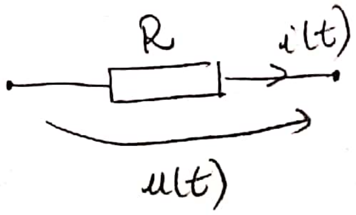
și $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Conductanța (de c.a.) și susceptanța unui E2C = partea reală a admitanței complexe se numește CONDUCTANȚĂ (de c.a.) G. Partea imaginară a admitanței complexe se numește SUSCEPTANȚĂ B. [S]

$$G = \Re(\underline{Y}), \quad B = \Im(\underline{Y})$$

$$\underline{Y} = G + jB$$

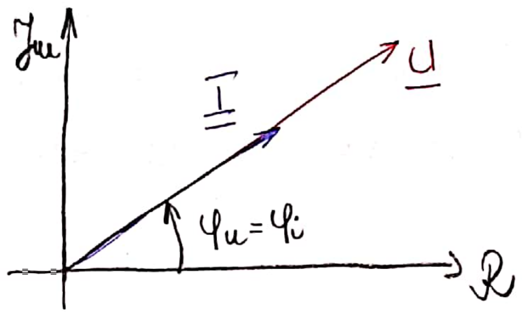
REZISTORUL DIPOLAR



$$u(t) = R\,i(t) \rightleftarrows \underline{U} = R\,\underline{I} \quad (13)$$

$$u(t) \rightleftarrows \underline{U} = U e^{j\varphi_u}, \quad i(t) \rightleftarrows \underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

$$\Rightarrow U e^{j\varphi_u} = R I e^{j\varphi_i}$$

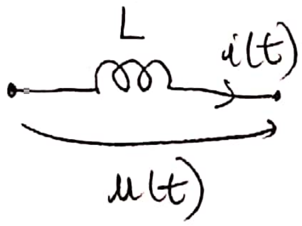


$$U = R I \quad (14)$$

$$\varphi_u = \varphi_i \quad (15)$$

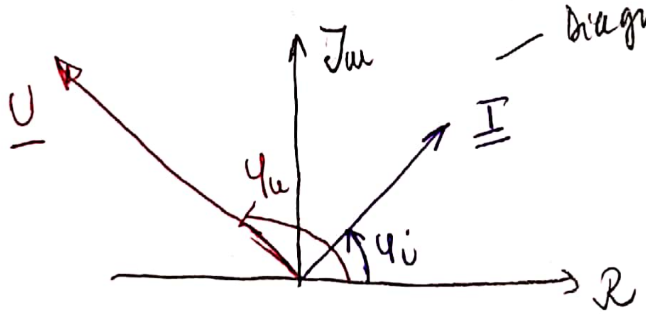
Diagrama fazorială a rezistorului
Curentul și tensiunea sunt în fază

BOBINA IDEALĂ DIPOLARĂ



$$u(t) = L\frac{di}{dt} \rightleftarrows \underline{U} = j\omega L\,\underline{I}$$

$$U e^{j\varphi_u} = \omega L I e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})}$$

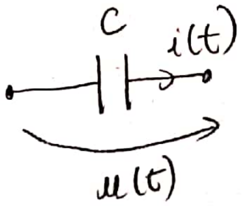


— Diagrama fazorială a bobinei (Curentul este în urma tensiunii)

$$U = \omega L I$$

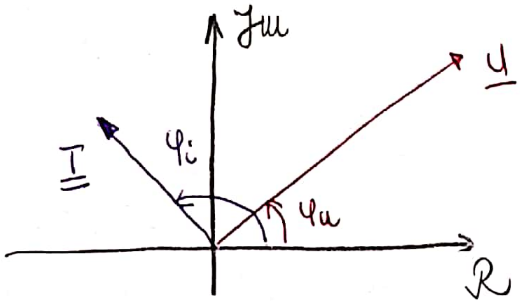
$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}.$$

CONDENSATORUL IDEAL DIPOLAR



$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \rightleftarrows \underline{I} = j\omega C \underline{U}$$

$$I e^{j\varphi_i} = \omega C U e^{j\left(\varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)}$$



$$I = \omega C U$$

$$\varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}$$

Diagrama fazorială a condensatorului

Tensiunea este în urma curentului

METODE DE ANALIZĂ A CIRCUITELOR DE C.A. FĂRĂ CUPLAJE

Se dau:

- topologia circuitului;
- R, L, C;
- U_{ef}, faze inițiale ale surselor;
- frecvența.

Se cer:

- graful de curenți
- graful de tensiuni
- bilanțul puterilor.

FORMA ÎN COMPLEX a TK I

$$\sum_{k\in(n)}^{*} i_k(t)=0 \rightleftarrows \sum_{k\in(n)}^{A} \underline{I}_k=0 \quad \forall(n)$$

FORMA ÎN COMPLEX a TK II

$$\sum_{k\in[b]}^{*} u_k(t)=0 \rightleftarrows \sum_{k\in[b]}^{*} \underline{U}_k=0 \quad \forall[b]$$

Analiza circuitelor de c.a:

PASUL 1: Se reprezintă în complex sursele independente;

PASUL 2: Elementele pasive se înlocuiesc cu reprezentările lor în complex:

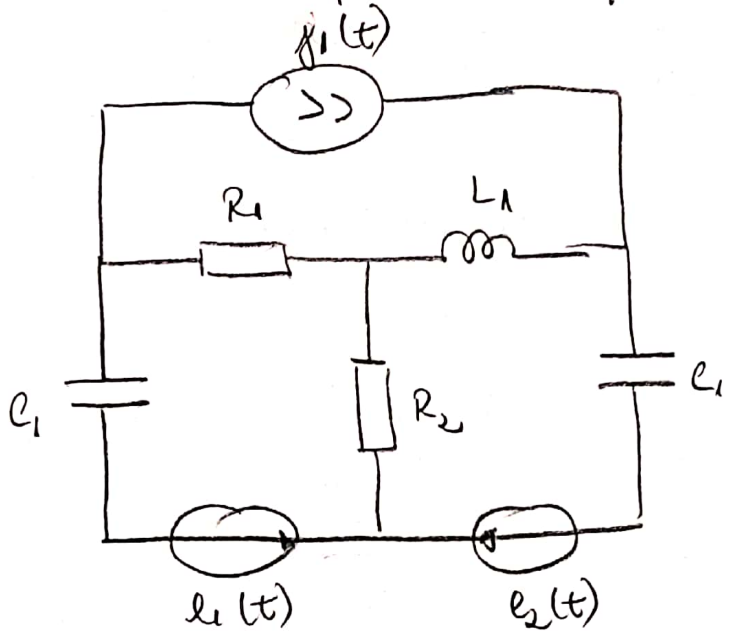
1) $\underline{Z}=R$ → rezistor
2) $\underline{Z}=j\omega L$ → bobină
3) $\underline{Z}=\frac{1}{j\omega C}$ → condensator

PASUL 3: Se rezolvă circuitul cu metodele de la c.c.

PASUL 4: Se revine în timp.

Problemă rezolvată 1

Aflați toți curenții și toate tensiunile laturilor.



$j_1(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$

$L_1 = \frac{100}{\pi}\ mH$

$C_1 = C_2 = \frac{1000}{\pi}\ \mu F$

$e_1(t) = 20\sqrt{2}\sin\omega t$

$e_2(t) = 40\sqrt{2}\sin\omega t$

$f = 50\ Hz$

PASUL 1 – reprezentarea în complex a surselor independente (formă algebrică).

$$j_1(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \underline{J}_1 = 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j$$

$$e_1(t) = 20\sqrt{2}\sin\omega t \rightarrow \underline{E}_1 = 20$$

$$e_2(t) = 40\sqrt{2}\sin\omega t \rightarrow \underline{E}_2 = 40.$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi\ rad/s$$

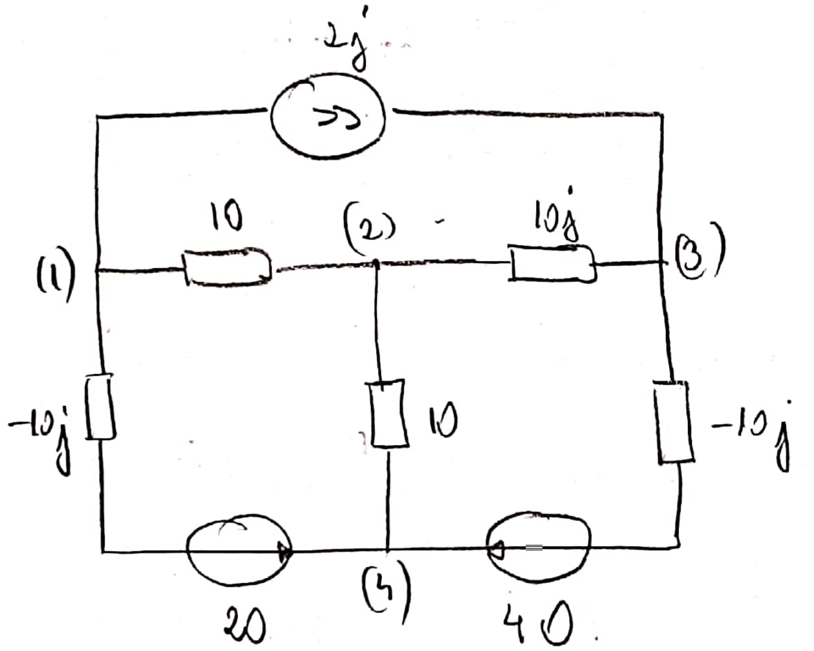
PASUL 2: Elementele pasive se înlocuiesc cu reprezentările lor în complex.

$\underline{Z}_{R_1} = R_1 = 10\Omega$ $\qquad$ $\underline{Z}_{R_2} = R_2 = 10\Omega$

$\underline{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j\,100\cancel{\pi} \cdot \frac{100}{\cancel{\pi}}\,10^{-3} = 10j$

$\underline{Z}_{C_1} = \underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 100\cancel{\pi} \cdot \frac{1000}{\cancel{\pi}}\,10^{-6}} = -10j$

Reprezentarea în complex a circuitului



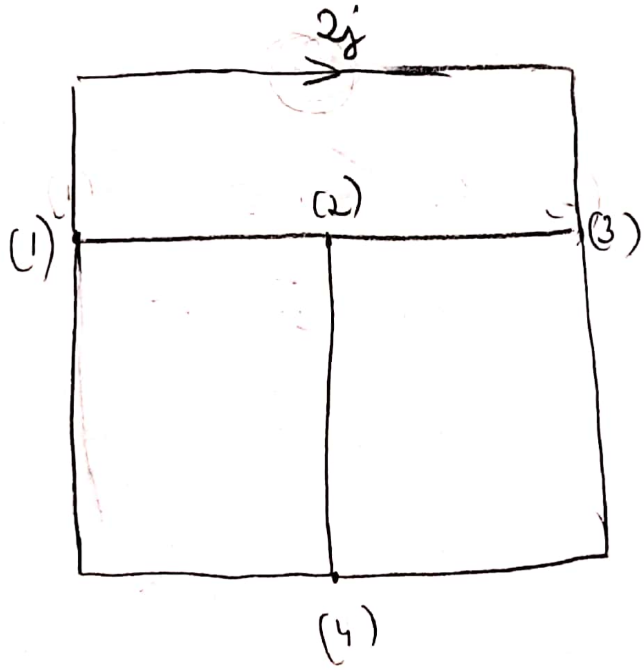
$H = 4$

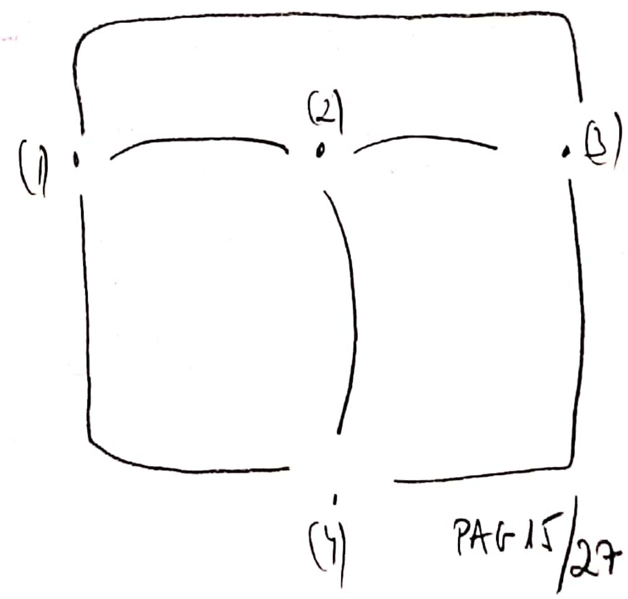
$L = 6$

$n_{SIC} = 1$

$n_{SIT} = 0$

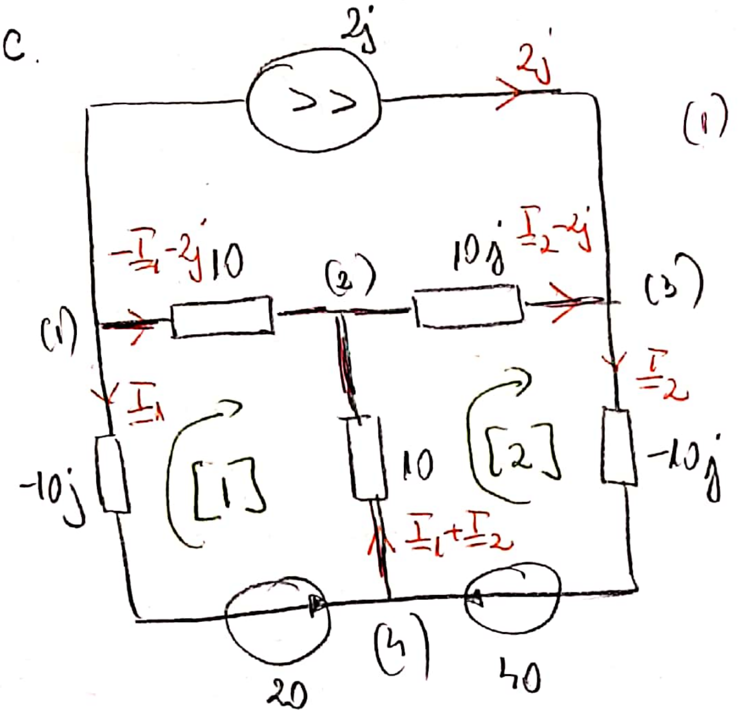
PASUL 3 Se rezolvă circuitul cu metodele de la c.c.

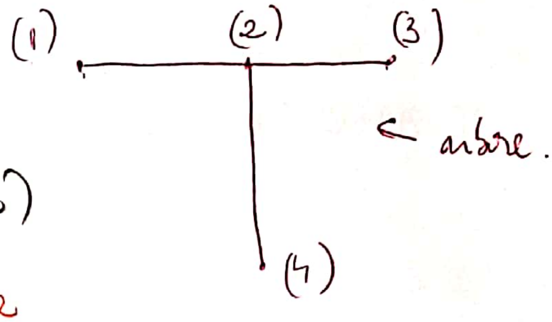




- metodele în tensiuni $N-1-n_{CIT} = 3$ ecuații
- metodele în curenți $L-N+1-n_{SIC} = 6-4+1-1 = 2$ ecuații

M.C.C.





$$
\begin{cases}
[1]: -10(I_1+I_2) - (-10j\,I_1) + 10(-I_1-2j) = -20 \\
[2]: 10j(I_2-2j) - 10j\,I_2 + 10(I_1+I_2) = 40
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-10 I_1 - 10 I_2 + 10j I_1 - 10 I_1 - 20j = -20 \\
\cancel{10j I_2} + 20 - \cancel{10j I_2} + 10 I_1 + 10 I_2 = 40
\end{cases}
$$

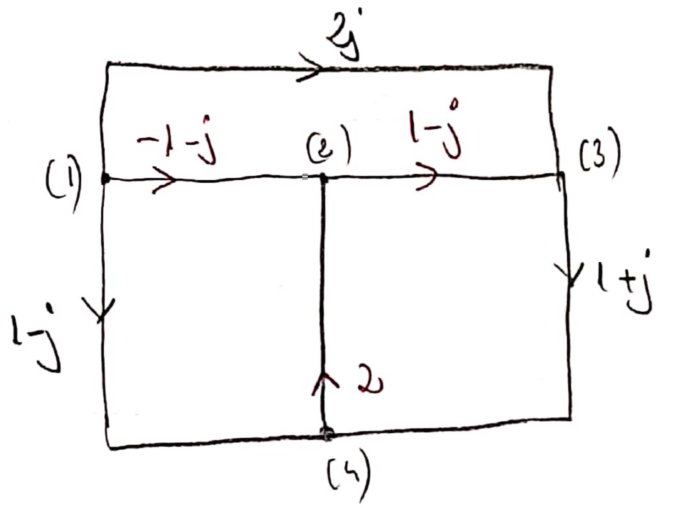
$$
\begin{cases}
-2I_1 + jI_1 - I_2 = -2+2j \\
I_1 + I_2 = 2
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
I_1(-2+j) - I_2 = -2+2j \\
I_1 + I_2 = 2
\end{cases}
$$

$$+ \quad I_1(-2+j+1) = 2j$$

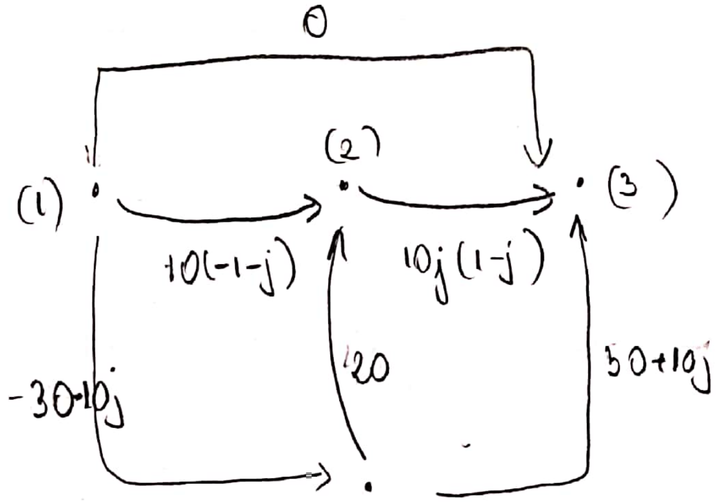
$$I_1(-1+j) = 2j \Rightarrow I_1 = \frac{2j}{-1+j} = \frac{2j(-1-j)}{2}$$

$$I_1 = -j+1 = \boxed{1-j = I_1}$$

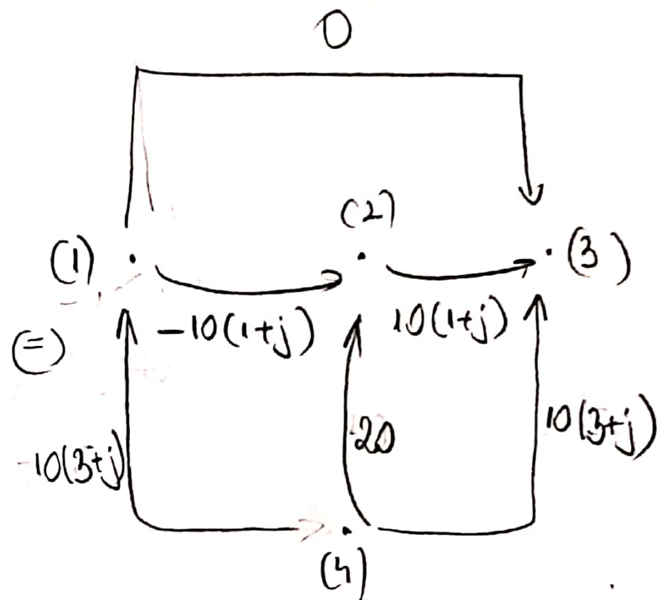
$$\boxed{\underline{I}_2 = 2-\underline{I}_1 = 2-1+j = \boxed{1+j}}$$



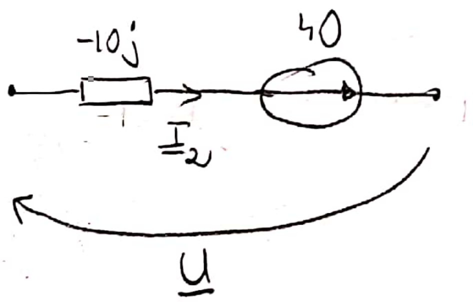
← GRAFUL DE CURENȚI



(=)



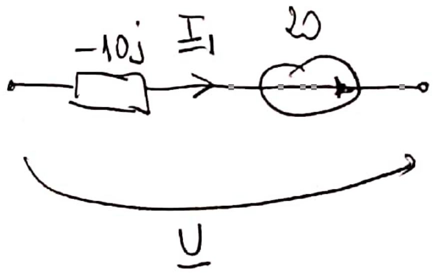
GRAFUL DE TENSIUNI



$$-10j\underline{I}_2 - 40 + \underline{U} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U} = 40 + 10j(1+j) =$$

$$= 40 + 10j - 10 = 30 + 10j$$



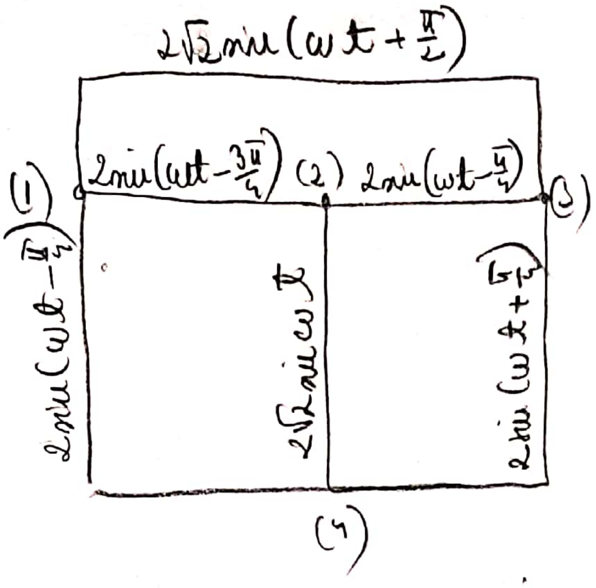
$$-10j\underline{I}_1 - 20 - \underline{U} = 0$$

$$\underline{U} = -10j(1-j) - 20$$

$$\underline{U} = -10j - 10 - 20 = -30 - 10j$$

$$\underline{U} = -10(3+j)$$

PASUL 4: se revine in timp.



GRAFUL DE CURENTI

$$2j \rightarrow |2j| = 2$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= 0\\ \sin\alpha &= 1\end{aligned}\right\} \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$2j \rightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1-j \rightarrow |1-j| = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$1-j \rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-1-j \rightarrow |-1-j| = \sqrt{2} \qquad \left.\begin{aligned}\cos\alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \alpha = -\frac{3\pi}{4}$$

$$|-1-j| \rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$1+j \rightarrow |1+j| = \sqrt{2} \qquad \left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$1+j \rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

GRAFUL DE TENSIUNI

$$-10(1+j) \rightarrow |-10(1+j)| = 10\sqrt{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\cos\alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \alpha = -\frac{3\pi}{4}$$

$-10(1+j) \to 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) = 20\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)$

$10(1+j) \to |10(1+j)| = 10\sqrt{2}$ $\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \alpha = \frac{\pi}{4}$

$10(1+j) \to 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = 20\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

$20 \to 20\sqrt{2}\sin\omega t$

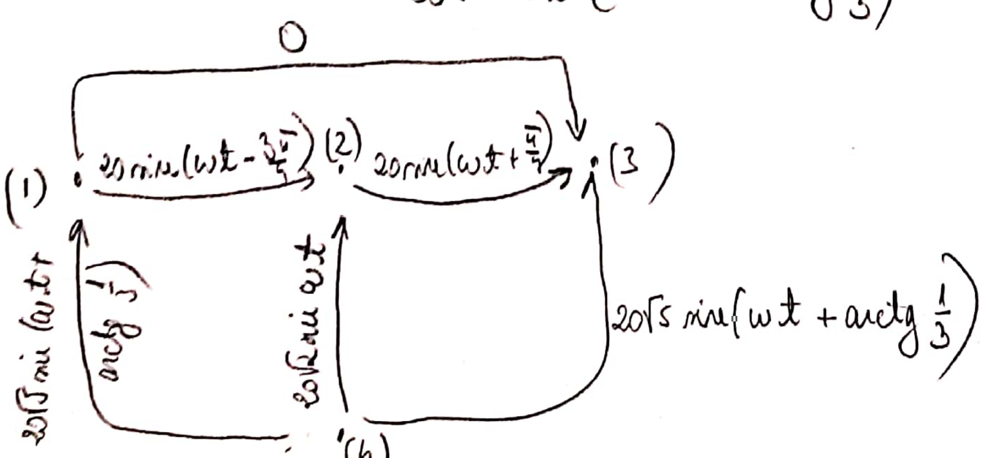
$10(3+j) \to |10(3+j)| = 10\sqrt{10}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$$

$10(3+j) \to 10\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) =$
$= 20\sqrt{5}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$

$+10(3+j) \to |+10(3+j)| = 10\sqrt{10}$

$+10(3+j) \to 10\sqrt{10}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$
$= 20\sqrt{5}\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$



PAG 19/27

Bilanțul puterilor → punct 3 completare:

$$\underline{S}_c = \underline{S}_g \Rightarrow \sum_{k\in I_{R,L,C}} \underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k\in I_{S,T}} \underline{E}_k \underline{I}_k^* + \sum_{k\in I_{S,C}} \underline{U}_k \underline{J}_k^*$$

SAU

$$P = RI^2 = 10\cdot(\sqrt{2})^2 + 10\cdot 2^2 = 20 + 40 = 60\ W$$

$$\left.\begin{aligned} Q_L &= \omega L I^2 = 10\times(\sqrt{2})^2 = 20 \\ Q_C &= -\frac{1}{\omega C} I^2 = -10\times(\sqrt{2})^2 + (-10)(\sqrt{2})^2 = -40 \end{aligned}\right\} Q = -20\ VAR$$

$$\underline{S} = 2j^*\cdot 0 + 20(1-j)^* + 40(1+j)^* =$$

$$= 20(1+j) + 40(1-j) = 20 + 20j + 40 - 40j$$

$$\underline{S} = 60 - 20j$$

$$\underline{S} = P + jQ \Rightarrow 60-20j = 60-20j$$

$$\underline{S}_c = \underline{S}_g \Rightarrow \underline{S}_c = \sum_{k\in I_{R,L,C}} \underline{Z}_k I_k^2 =$$

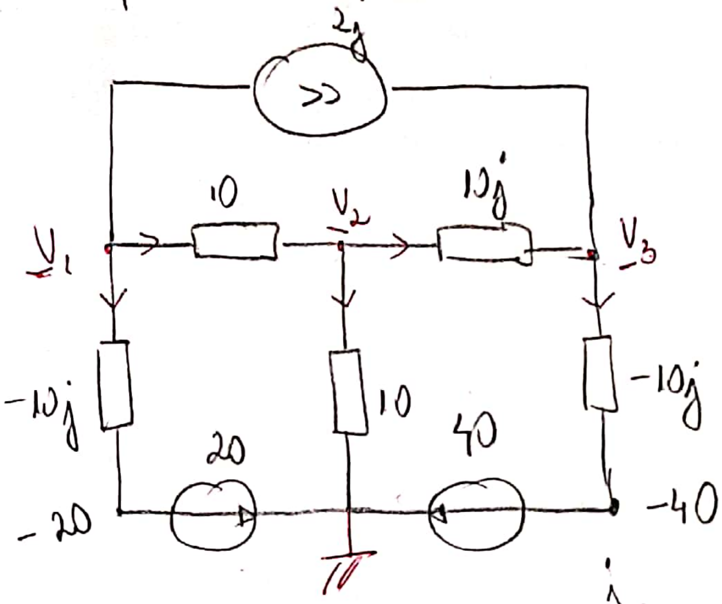
$$= 10\cdot(\sqrt{2})^2 + 10\cdot 2^2 + 10j\cdot(\sqrt{2})^2 - 10j\cdot(\sqrt{2})^2 - 10j(\sqrt{2})^2 =$$

$$= 20 + 40 + \cancel{20j} - \cancel{20j} - 20j = 60 - 20j$$

$$\underline{S}_g = 2j^*\cdot 0 + 20(1-j)^* + 40(1+j)^* = 20(1+j) + 40(1-j) =$$

$$= 60 - 20j \Rightarrow \underline{S}_c = \underline{S}_g.$$

Met. pot noduri



$$\text{TKI}_{V_1}: \begin{cases} 2j + \dfrac{V_1 - V_2}{10} + \dfrac{V_1 + 20}{-10j} = 0 \\[2ex] \text{TKI}_{V_2}: -\dfrac{V_1 - V_2}{10} + \dfrac{V_2 - 0}{10} + \dfrac{V_2 - V_3}{10j} = 0 \\[2ex] \text{TK}_{V_3}: -2j - \dfrac{V_2 - V_3}{10j} + \dfrac{V_3 + 40}{-10j} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2j + \dfrac{V_1 - V_2}{10} + \dfrac{V_1 j + 20j}{10} = 0. \\[2ex] -\dfrac{V_1 - V_2}{10} + \dfrac{V_2}{10} + \dfrac{-jV_2 + jV_3}{10} = 0. \\[2ex] -2j - \dfrac{-jV_2 + jV_3}{10} + \dfrac{jV_3 + 40j}{10} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20j + V_1 - V_2 + V_1 j + 20j = 0. \\ -V_1 + V_2 + V_2 - jV_2 + jV_3 = 0 \\ -20j + jV_2 - \cancel{jV_3} + \cancel{jV_3} + 40j = 0 \end{cases}$$

PAG 21/27

$$\begin{cases} \underline{V}_1(1+j) - \underline{V}_2 = -40j & (1) \\ -\underline{V}_1 + \underline{V}_2(2-j) + j\underline{V}_3 = 0 & (2) \\ \cancel{j}\underline{V}_2 = -20\cancel{j} \Rightarrow \boxed{\underline{V}_2 = -20\text{ V}} \end{cases}$$

$$(1)\quad \underline{V}_1(1+j) = -20-40j \Rightarrow \underline{V}_1(1+j) = -20(1+2j)$$

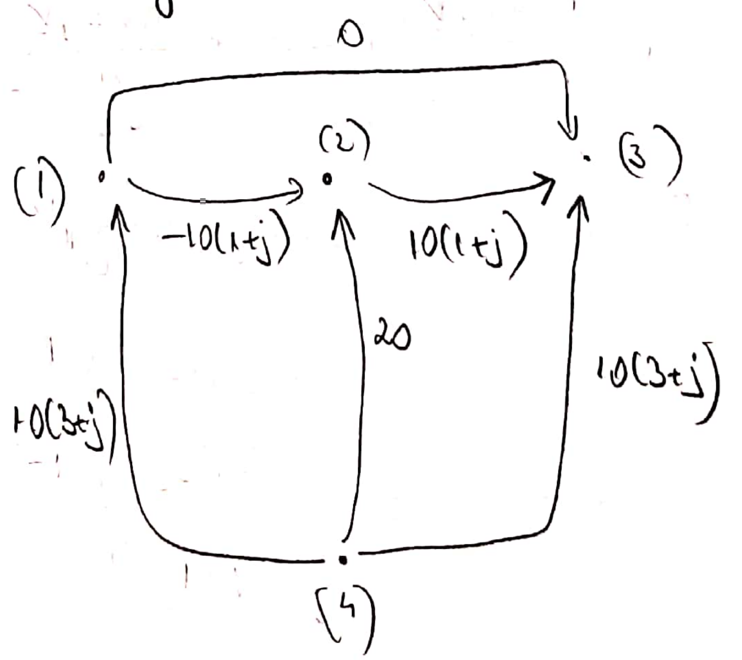
$$\underline{V}_1 = \frac{-20(1+2j)}{1+j} = \frac{-20(1+2j)(1-j)}{2} = -10(1-j+2j+2)$$

$$\boxed{\underline{V}_1 = -10(3+j)}$$

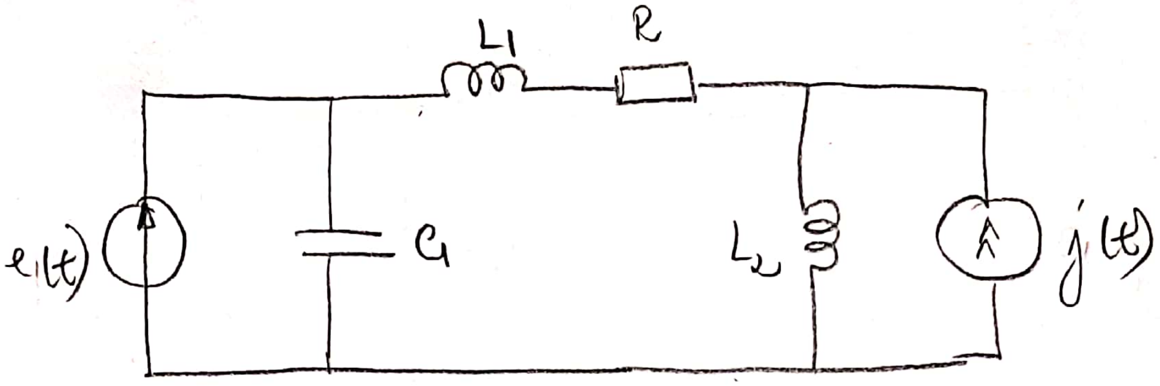
$$(2) \Rightarrow 10(3+j) - 20(2-j) + j\underline{V}_3 = 0$$

$$30+10j-40+20j = -j\underline{V}_3 \Rightarrow -10+30j = -j\underline{V}_3 \,\Big|\cdot j$$

$$-10j-30 = \underline{V}_3 \Rightarrow \underline{V}_3 = -10(3+j)$$



PROBLEMA REZOLVATĂ 2:



$e_1(t) = 30\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$C_1 = \frac{2000}{3\pi}\,\mu F$ $\qquad f = 50Hz.$

$L_1 = \frac{100}{\pi}\,mH = L_2$

$R = 10\,\Omega$

$j(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

PASUL 1 - reprezentarea în complex a surselor independente (forma algebrică)

$e(t) = 30\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \underline{E} = 30e^{j\frac{\pi}{2}} = 30j$

$j(t) = \sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \rightarrow \underline{J} = 1e^{j(-\frac{\pi}{2})} = -j$

$\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s

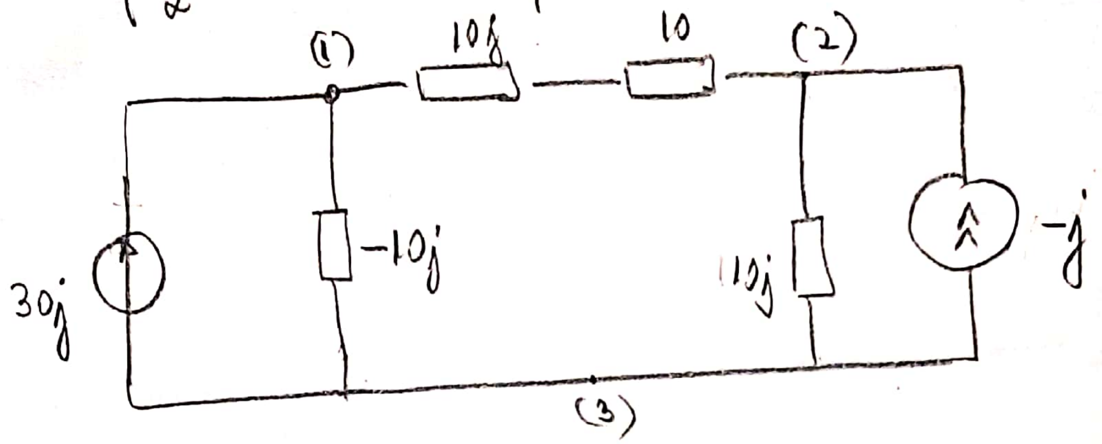
PASUL 2 : Elementele pasive se înlocuiesc cu reprezentările în complex.

$\underline{Z}_R = R = 10$

$\underline{Z}_{L_1} = \underline{Z}_{L_2} = j\omega L = j\cdot 100\cancel{\pi}\times\frac{100}{\cancel{\pi}}\cdot 10^{-3} = 10j$ PAG 23/27

$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\,100\cancel{\pi}\times\frac{2000}{3\cancel{\pi}}10^{-6}} = -15j$

Reprezentarea în complex a circuitului



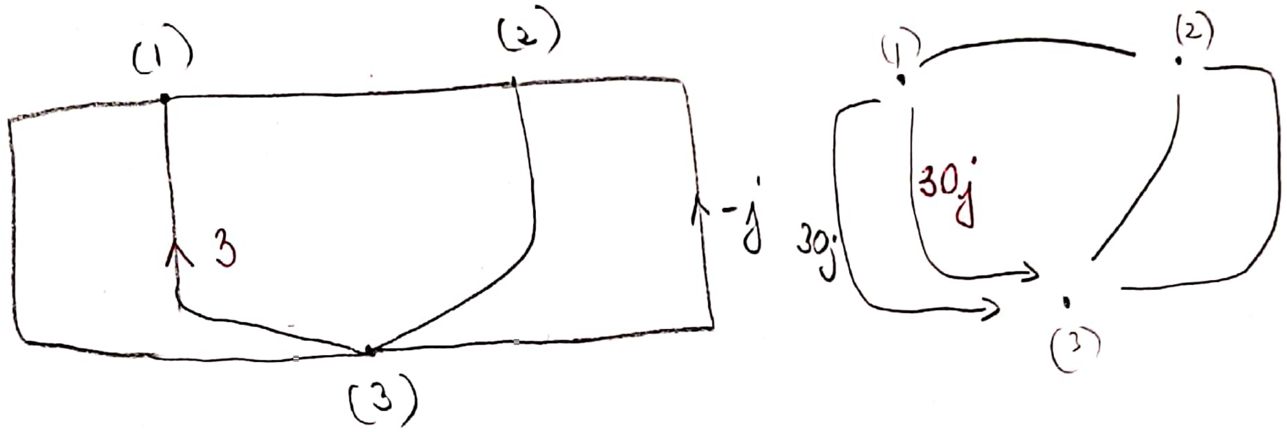
$N=3$

$L=5$

$n_{sic}=1$

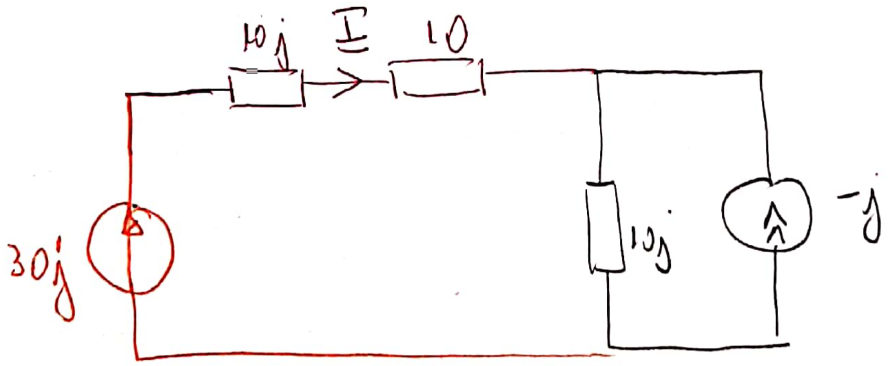
$n_{siT}=1$

PASUL 3 Se rezolvă circuitul cu metodele de la C.C.

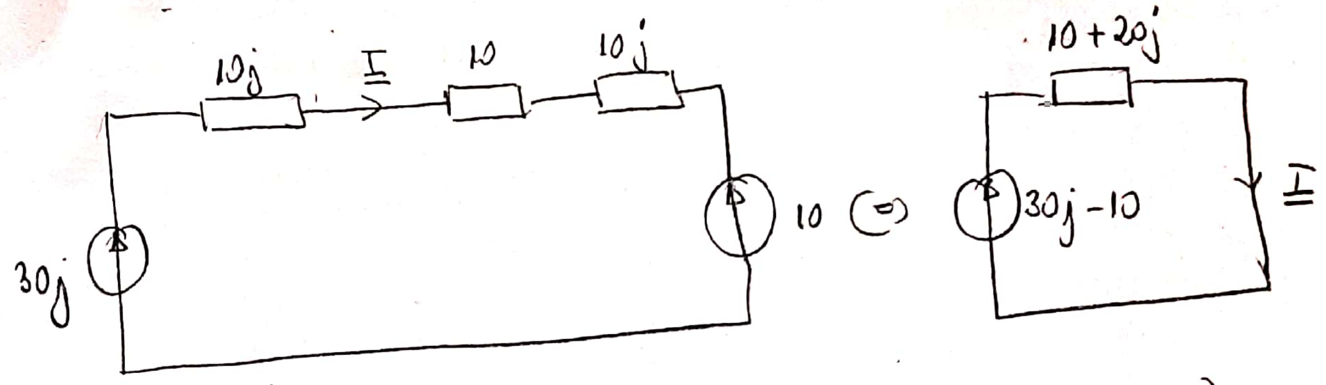


- metoda în tensiuni $N-1-n_{siT} = 3-1-1 = 1$ ecuație
- metoda în curenți $L-N+1-n_{sic} = 5-3+\cancel{1}-\cancel{1} = 2$ ecuații

METODA GENERATOARELOR ECHIVALENTE

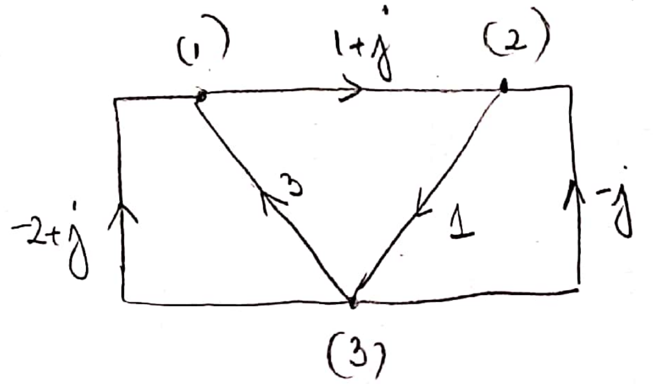


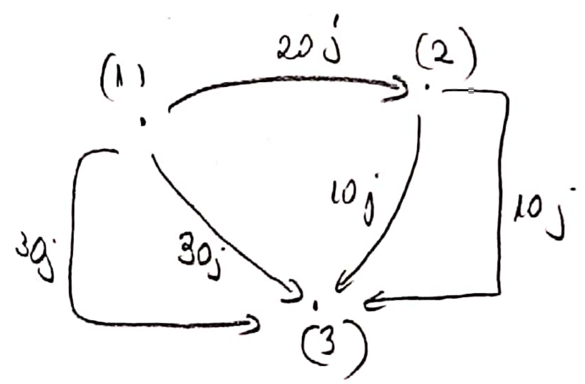
SRC → SRT



$$(1\cancel{0}+2\cancel{0}j)\,I = 3\cancel{0}j-1\cancel{0} \Rightarrow I = \frac{3j-1}{1+2j} = \frac{(3j-1)(1-2j)}{5}$$

$$I = \frac{3j+6-1+2j}{5} = \frac{5(1+j)}{5} = 1+j$$





Bilanțul puterilor

$P = 10\times|1+j|^2 = 10\cdot 2 = 20\ W.$

$Q = 10\times|1+j|^2 + 10\times|1|^2 + (-10)\cdot 3^2 = 10\times 2+10-90 = -60$

$\underline{S} = 30j\cdot(-2+j)^* + 10j\,(-j)^* =$

$= 30j(-2-j) + 10j\cdot j = -60j+30-10 = 20-60j$

$\underline{S} = P + jQ = 20-60j$

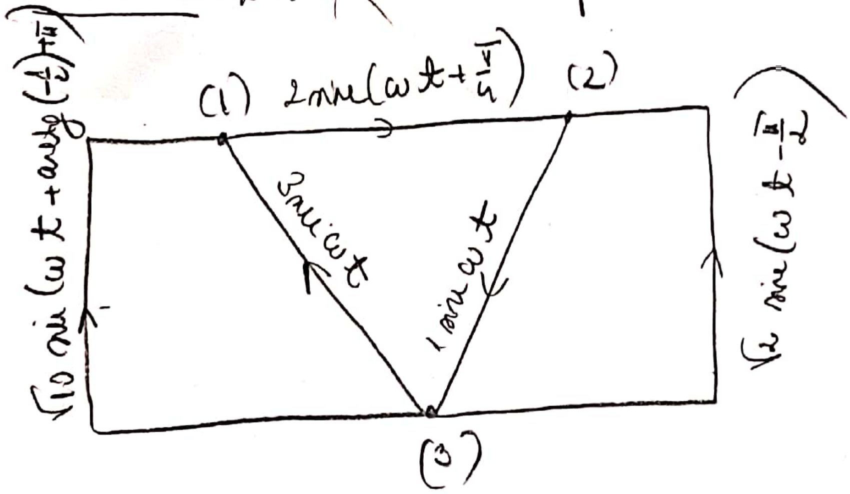
$\underline{S}_c = 10\times|1+j|^2 + 10j\times|1+j|^2 + 10j\times|1|^2 - 10j\cdot|3|^2 =$

$= 10\cdot 2 + 10j\times 2 + 10j - 90j = 20-60j$

PAG 25/27

$\underline{S}_g = 30j(-2+j)^* + 10j(-j)^* = 20-60j \Rightarrow \underline{S}_c = \underline{S}_g.$

PASUL 4 - α venue în timp



$$1+j \to |1+j|=\sqrt{2} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \alpha=\frac{\pi}{4}$$

$$1+j \longrightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin(\omega t+\frac{\pi}{4}) = 2\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})$$

$$-j \to |-j|=1 \quad \left.\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=-1\end{array}\right\} \alpha=-\frac{\pi}{2}.$$

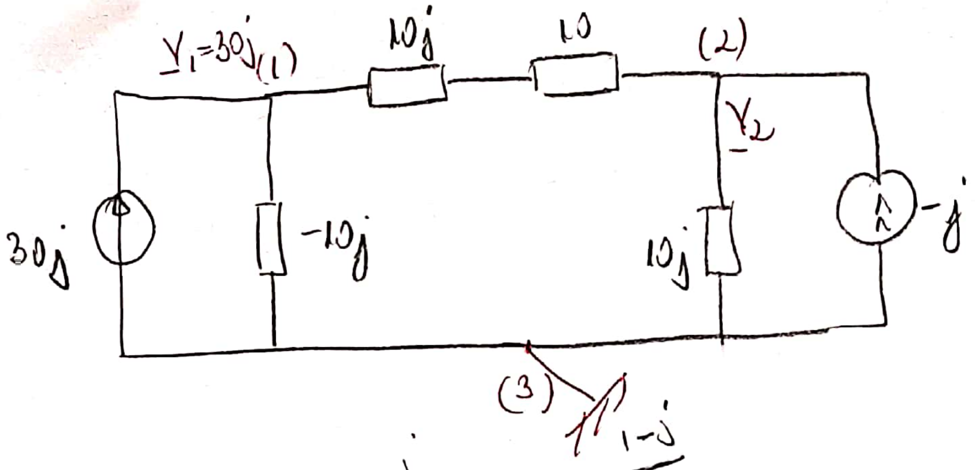
$$-j \to \sqrt{2}\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

$$-2+j \to |-2+j|=\sqrt{5} \Rightarrow tg\,\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\arctg(-\frac{1}{2})$$

$$-2+j \to \sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\sin(\omega t+\arctg(-\frac{1}{2})+\pi)$$

Pt graful de tensiuni → identic → TEMĂ

Rezolvare cu metoda nodurilor



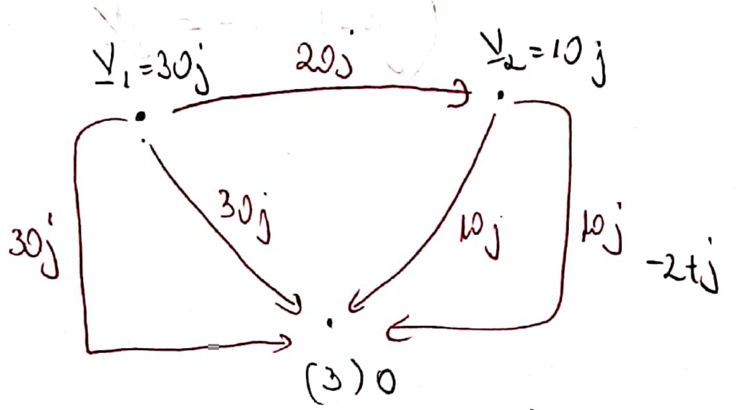
$$TKI_{\underline{V}_2} = -(-j) + \frac{\underline{V}_2}{10j} - \frac{30j - \underline{V}_2}{10(1+j)} = 0$$

$$j - \frac{j\underline{V}_2}{10} - \frac{(30j - \underline{V}_2)(1-j)}{10\times 2} = 0$$

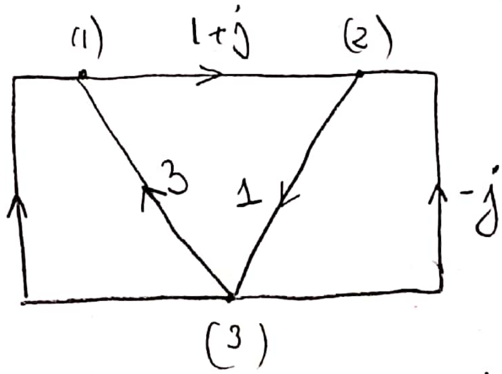
$$20j - 2j\underline{V}_2 - 30j - 30 + \underline{V}_2 - j\underline{V}_2 = 0.$$

$$-10j - 30 = \underline{V}_2(3j-1) \Rightarrow \underline{V}_2 = \frac{-10(3+j)}{3j-1}$$

$$\underline{V}_2 = \frac{-\cancel{10}(3+j)(-3j-1)}{\cancel{10}} = -[-9j - \cancel{3} + \cancel{3} - j] = 10j$$



GRAFUL DE TENSIUNI



GRAFUL DE CURENȚI

Bilanțul pag 25.