A&C

SEMINAR SĂPT. 12 17.05 - 21.05.2021

10. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU

REGIM TRANZITORIU = regimul în care mărimile din circuit pot avea variații arbitrare în timp.

10.1 Variabile de stare. Formularea problemei

Circuite
- → rezistoare ideale liniare
- → bobine ideale liniare
- → condensatoare ideale liniare
- → surse comandate liniar
- → bobine ideale liniare cuplate
- → surse ideale de tensiune → cu variații arbitrare în timp.
- → surse ideale de curent — cu variații arbitrare în timp

⇒ metode relativ simple ⇒ soluție analitică

CIRCUITELE ÎN REGIM TRANZITORIU CARE NU SUNT LINIARE NECESITĂ METODE NUMERICE DE REZOLVARE.

Problema fundamentală a analizei circuitelor electrice în regim tranzitoriu

Se dau:

- topologia circuitului;
- parametrii elementelor liniare R_k, L_k, C_k, L_{km}, inclusiv ai surselor comandate liniar $\alpha_k, \beta_k, \rho_k, \gamma_k$;

Scanned with CamScanner

- excitațiile în tensiune $e_K(t)$ și/sau curent $j_K(t)$, unde $e_K, j_K : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$.

- condițiile inițiale: curenții prin bobine $i_{L_K}(t_0)$ și tensiunile la bornele condensatorului $u_{C_K}(t_0)$.

Se cer:

- tensiunile și curenții $u_K(t)$ și $i_K(t)$ unde $u_K, i_K : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$
- puterile transferate de laturile circuitului $p_K(t)$.

10.2. Metoda identificării constantelor

Metoda identificării constantelor se aplică exclusiv circuitelor liniare de ordinul 1, cu excitație treaptă.

<u>Def</u>: CIRCUIT DE ORDINUL 1: - dacă el are un singur element acumulator de energie (o bobină sau un condensator).

<u>Def</u>: EXCITAȚIE TREAPTĂ: - trecerea circuitului de la o stare staționară (de curent continuu) la altă stare staționară.

În cazul unei excitații treaptă, circuitul evoluează de la o stare inițială (corespunzătoare momentului $t=0$) la o stare de regim permanent ($t \to \infty$).

<u>IDEEA METODEI</u>

Expresia variabilei de stare

$$x(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B \qquad (1)$$

unde $\tau\,[s] \to$ constantă de timp

$\tau = RC$ (condensator) $\qquad \tau = \frac{L}{R}$ (bobină)

Scanned with CamScanner

- constantele A și B se determină din analiza circuitului în cele două stări staționare între care se face tranziția:

1. starea inițială $t = 0$, cunoscută prin valoarea $x_0 = x(0)$ care fie se dă explicit, fie trebuie analizat circuitul în regim permanent anterior regimului tranzitoriu;

2. starea finală $t \to \infty$, cunoscută prin valoarea $x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t)$, care se obține prin analiza circuitului în regim staționar posterior regimului tranzitoriu. Este important ca circuitul să fie stabil ($\tau > 0$), deci limita să existe, astfel metoda nu se poate aplica.

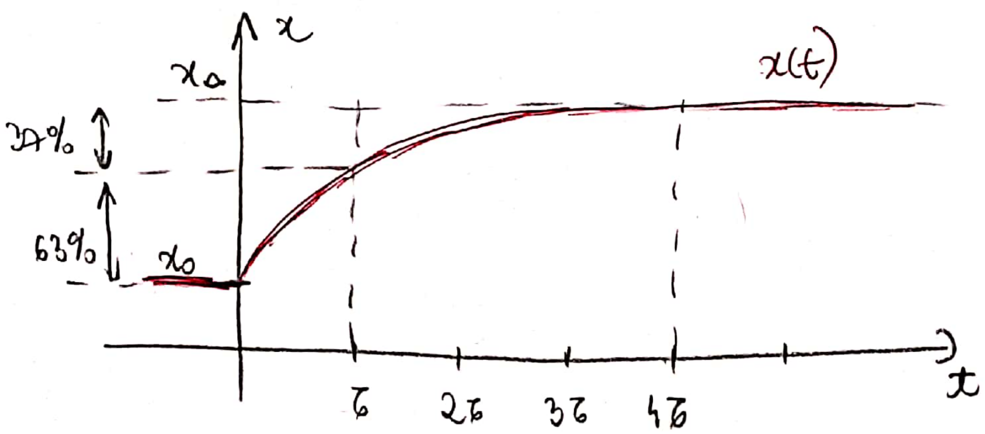
Cele două condiții de mai sus aplicate rel (1) conduc la:

$$x_0 = A + B \qquad (2)$$

$$x_\infty = B \qquad (3)$$

de unde rezultă că variația în timp a mărimii de stare este:

$$x(t) = (x_0 - x_\infty)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + x_\infty \qquad (4)$$



Evoluția lui $x(t)$ din relația (4)

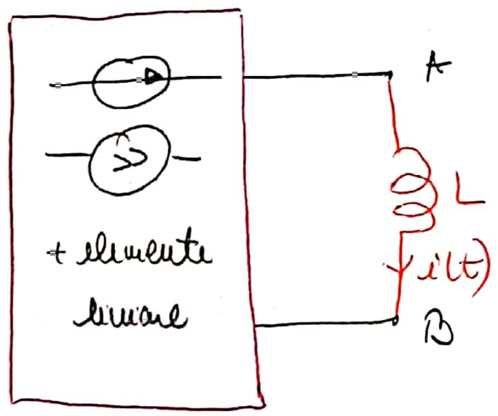
Scanned with CamScanner

Teoretic regimul tranzitoriu al unui circuit de ordinul I cu excitație treaptă durează un timp infinit, din punct de vedere practic se consideră că el se termină după 3÷4 constante de timp. ⇒ τ – ne dă informații asupra duratei regimului tranzitoriu.

ARGUMENTAREA FORMULEI $Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B$.

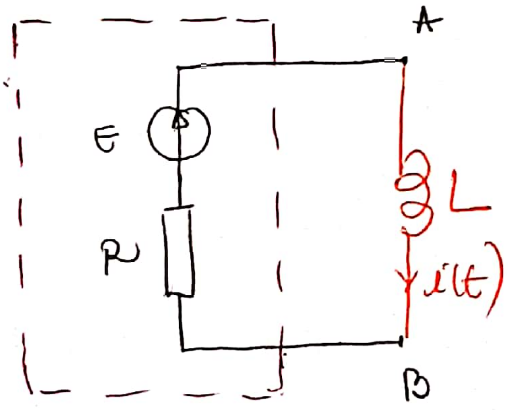
Pt argumentarea rel (1) considerăm un circuit care are o singură bobină de inductivitate L iar în rest numai elemente rezistive liniare și surse constante.

Fig A



Conform teoremei Thévenin, partea liniară activă se poate echivala cu un generator echivalent de tensiune având t.e.m E egală cu tensiunea de gol și rezistența internă R egală cu rezistența rețelei pasivizate.

Fig B



$$\tau = \frac{L}{R}.$$

TK II pe Fig B.

$$L\frac{di}{dt} + R\,i(t) = E \qquad (5)$$

$\overset{\nabla}{o}$ Ordinul I al circuitului poate fi corelat cu ordinul ec. diferențiale de rezolvat.

Sol. ec. (5) $\Rightarrow$ suma dintre soluția ecuației omogene și o soluție particulară a ecuației neomogene, scoasă din urmă căutându-se de forma termenului liber:

$$i(t) = i_0(t) + i_p$$

Ec omogenă $L\frac{di}{dt} + Ri = 0$ are ec. caracteristică

$Lx + R = 0$ care are soluția $x = -\frac{R}{L}$ care se notează

$x = -\frac{1}{\tau}$ unde

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (6)$$

$\Rightarrow$ rezultă soluția ecuație omogene $i_0(t) = Ae^{xt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

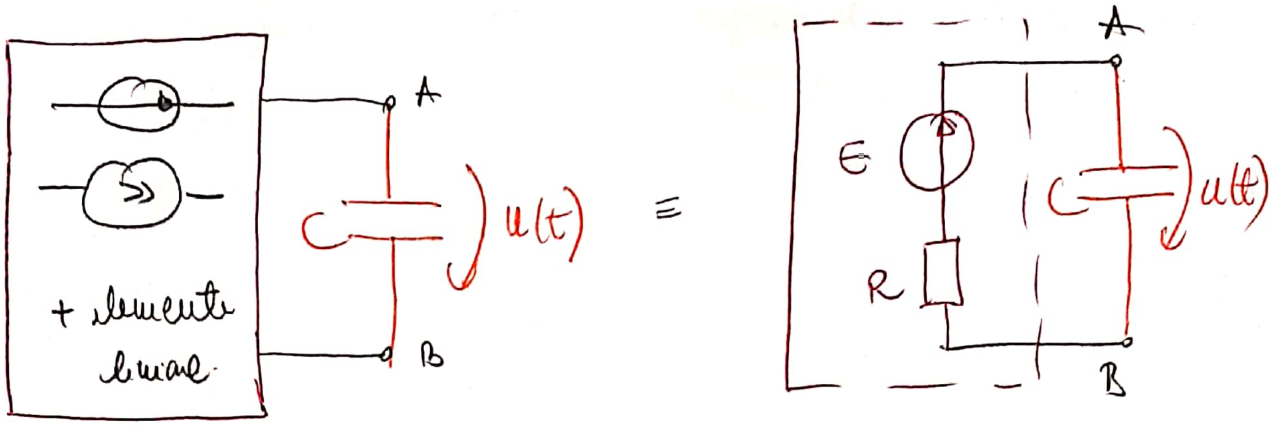
Soluția particulară a ecuației neomogene se caută de forma termenului liber, aici o constantă $i_p = B$ și în consecință

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B \qquad (7)$$

Înlocuind soluția particulară în rel (5) $\Rightarrow RB = E \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \frac{E}{R}$. Soluția particulară este soluția de regim permanent, obținută din analiza circuitului în care bobina este înlocuită cu schema sa echivalentă în c.c, adică un conductor perfect.

În mod similar pt cazul în care problema are un singur condensator.



$\tau = RC$

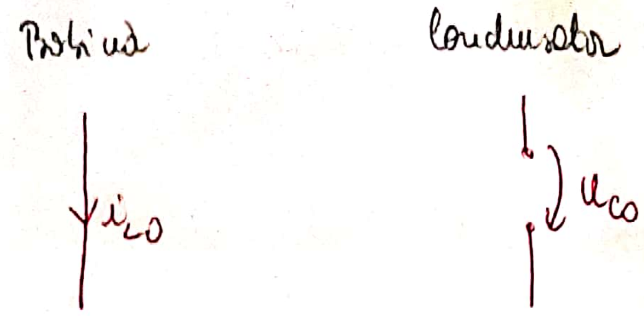
$$RC\frac{du}{dt} + u(t) = E. \Rightarrow \tau = RC.$$

ALGORITMUL METODEI IDENTIFICĂRII CONSTANTELOR

PASUL I Se analizează circuitul în regim staționar anterior regimului tranzitoriu cu metodele de la c.c, înlocuind bobina cu un conductor perfect și condensatorul cu un izolator perfect).

În acest pas, topologia circuitului este cea de la momentul anterior regimului tranzitoriu (momentul "0_-")

$\Rightarrow$ se determină intensitatea curentului prin conductorul care înlocuiește bobina i_{L0} sau tensiunea la bornele izolatorului care înlocuiește condensatorului u_{C0}.



PASUL 2 Se analizează circuitul în regim staționar posterior regimului tranzitoriu cu metodele de la c.c., înlocuind bobina și condensatorul cu schema echivalentă de c.c.

(L → ——— ; C → —• •—)

În acest pas, topologia circuitului este cea de la momentul posterior regimului tranzitoriu (după 0_+). Prin această analiză se determină intensitatea curentului prin conductorul care înlocuiește bobina $i_{L\infty}$ sau tensiunea la bornele izolatorului care înlocuiește condensatorul $u_{C\infty}$.

PASUL 3 Se pasivizează circuitul și se determină rezistența echivalentă față de bornele elementului acumulator de energie (L sau C), notată cu R.

$\Rightarrow \tau = RC$ (în cazul circuitului cu condensator)

$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R}$ (-"- -"- bobină)

PASUL 4 Se determină evoluția în timp a variabilei de stare, identificând constantele din expresia

$$x(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B.$$

unde $x(t) = i_L(t)$ pentru circuitul cu bobină și $x(t) = u_C(t)$

pentru circuitul cu condensator.

Impunem 2 condiții $x(0) = x_0$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_\infty$$

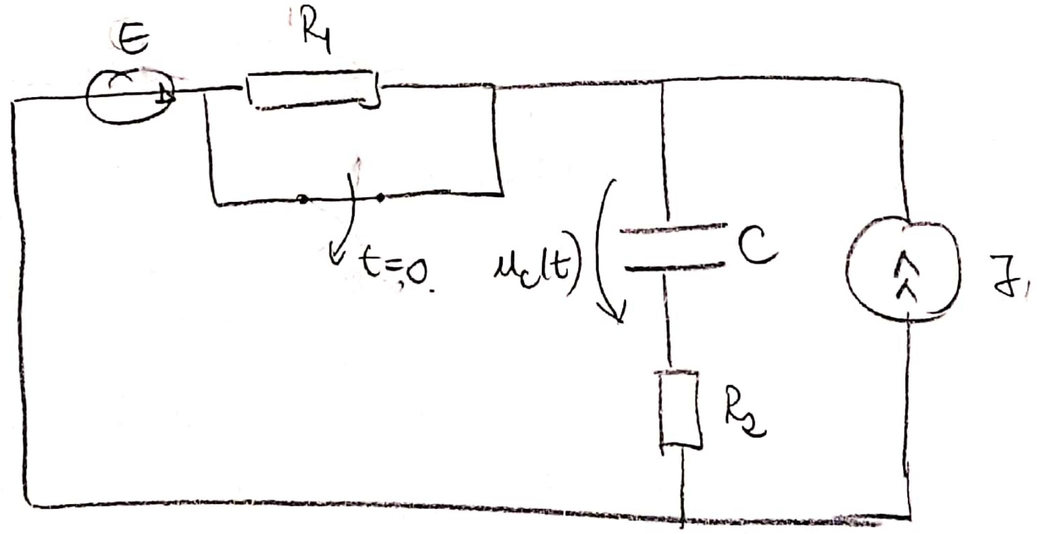
unde x_0 (valoarea inițială) → pasul 1

x_∞ (valoarea de regim permanent) → pasul 2.

<u>PASUL 5</u> Se determină celelalte mărimi din circuit înlocuind L sau C cu o SIC (în cazul circuitului cu bobina) sau cu o SIT (în cazul circuitului cu condensator).

<u>PROBLEME REZOLVATE</u>

1



$E_1 = 12V$

$J = 12A$

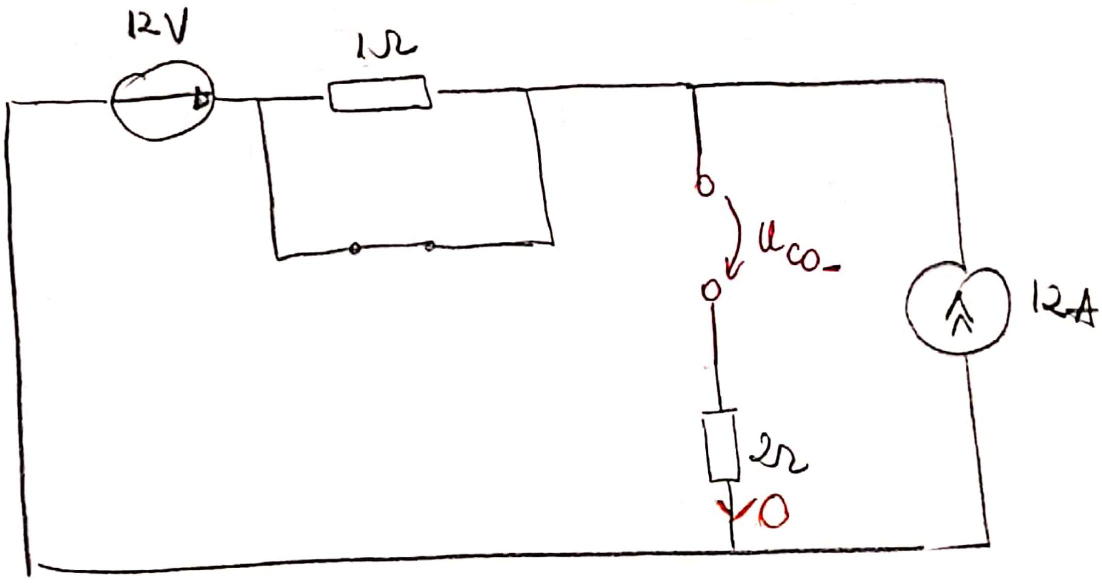
$R_1 = 1\Omega$

$R_2 = 2\Omega$

$C = 3F$ / $u_c(t) = ?$

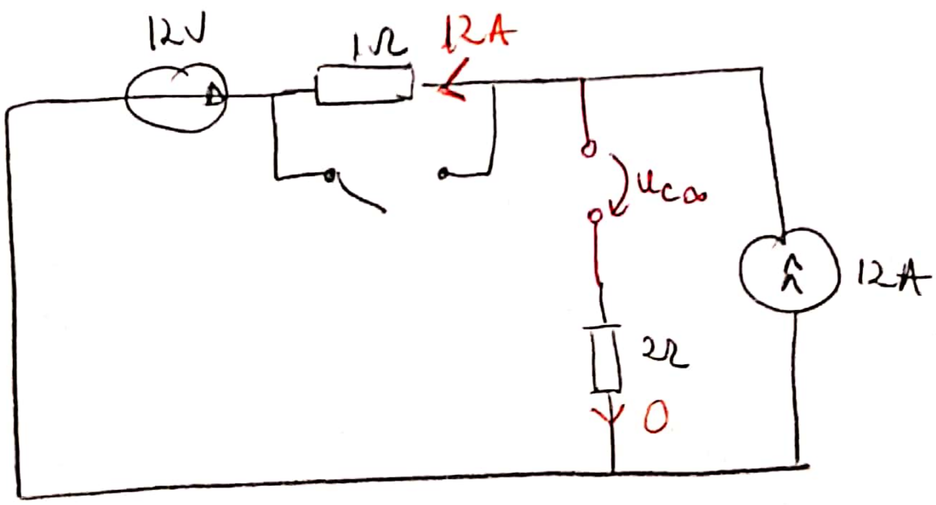
Scanned with CamScanner

PASUL 1 Se analizează circuitul în regim staționar anterior regimului tranzitoriu cu metodele de la c.c.



$\boxed{u_{C0-} = 12V}$

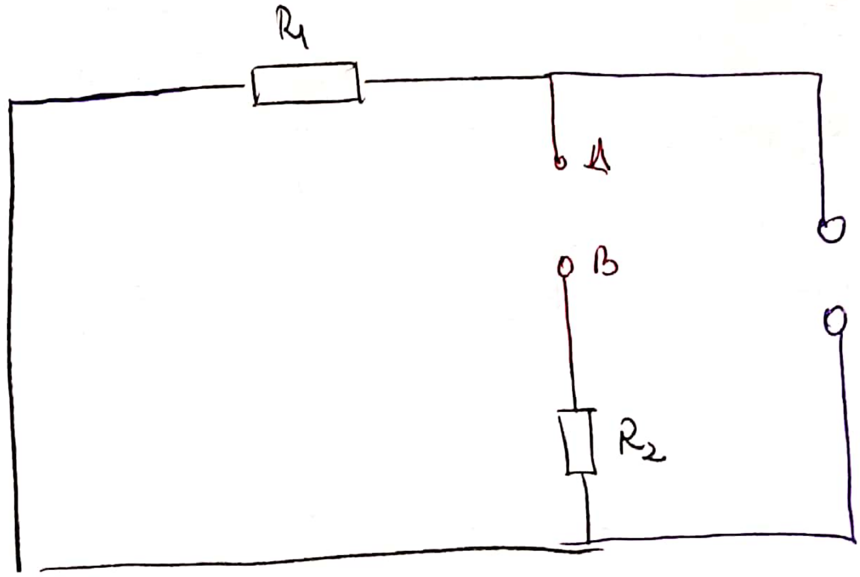
PASUL 2 Se analizează circuitul în regim staționar posterior regimului tranzitoriu.



$\boxed{u_{C\infty}} = 12 \cdot 1 + 12 = \boxed{24V}$

Scanned with CamScanner

PASUL 3 Se pasivizează circuitul și se determină rezistența echivalentă față de bornele condensatorului.



$$R = R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3\,\Omega$$

$$\tau = RC = 3 \cdot 3 = 9\,s.$$

PASUL 4 Se determină evoluția în timp a variabilei de stare, identificând constantele A și B din expresia

$$u_C(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B.$$

$$\left.\begin{aligned} u_{C0} = 12 &\Rightarrow A + B = 12 \\ u_{C\infty} = 24 &\Rightarrow B = 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A = -12}$$

Tensiunea la bornele condensatorului este:

$$\boxed{u_C(t) = -12 e^{-\frac{t}{\tau}} + 24 \text{ [V] pt } t > 0}$$

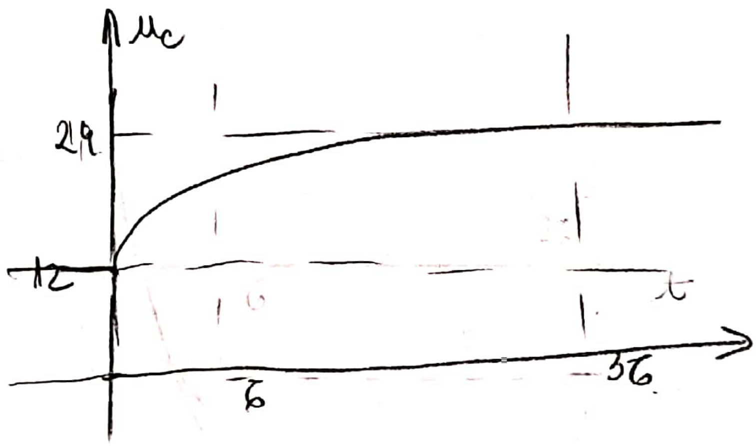
Scanned with CamScanner

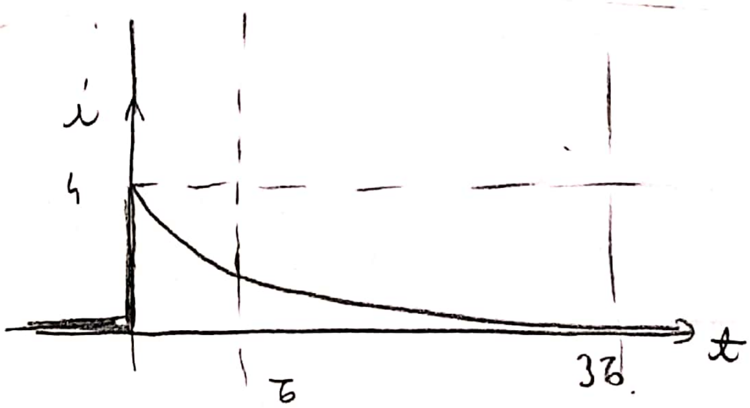
Se calculează și curentul prin condensator

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[-12e^{-\frac{t}{6}}+24\right] =$$

$$= C\cdot(-12)\left[-\frac{1}{6}\right]e^{-\frac{t}{6}} = \cancel{C}(-12)\left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right)e^{-\frac{t}{6}} =$$

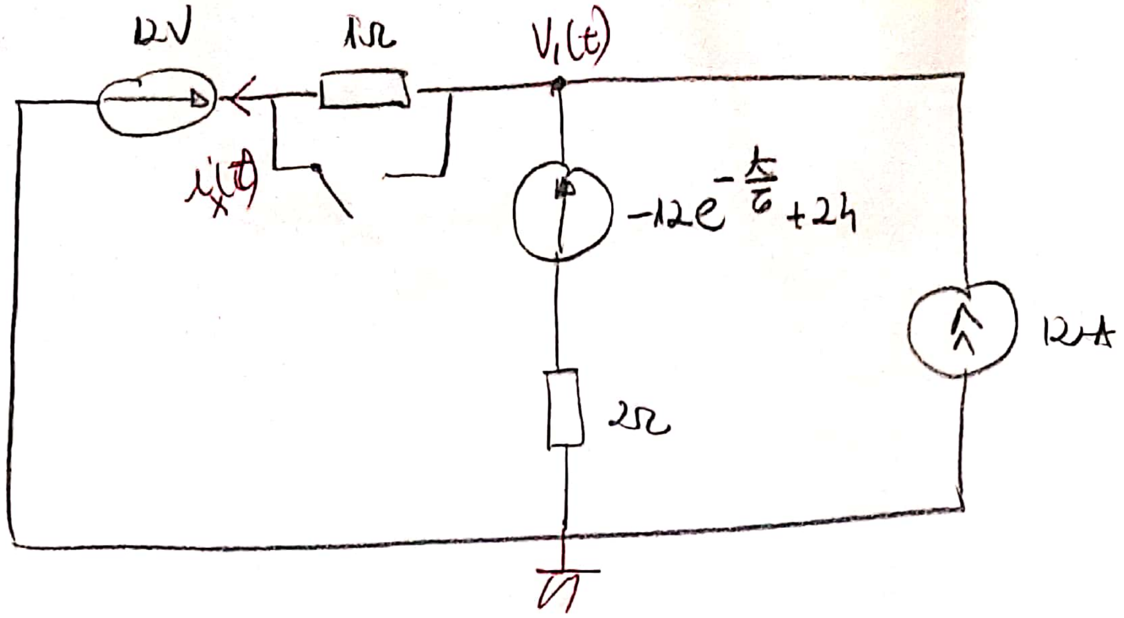
$$= \frac{12}{3}e^{-\frac{t}{6}} = 4e^{-\frac{t}{6}}\,[A] \quad t>0.$$





<u>PASUL 5</u> Se determină celelalte mărimi din circuit înlocuind condensatorul cu o sursă ideală de tensiune, având t. e. m. o funcție care depinde de timp.

Scanned with CamScanner



Metoda potențialelor nodurilor.

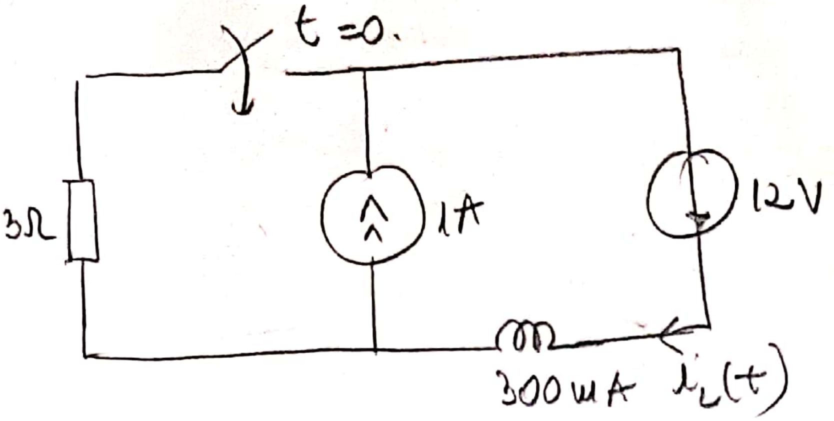
$$\frac{V_1(t)-12}{1}+\frac{V_1(t)-\left[-12e^{-\frac{t}{6}}+24\right]}{2}-12=0$$

$$2V_1(t)-24+V_1(t)+12e^{-\frac{t}{6}}-24-24=0$$

$$3V_1(t)=12e^{-\frac{t}{6}}+72 \Rightarrow \boxed{V_1(t)=4e^{-\frac{t}{6}}+24} \boxed{t>0}$$

$$\boxed{i_x(t)}=\frac{V_1(t)-12}{1}=\boxed{4e^{-\frac{t}{6}}+12,\ t>0}$$

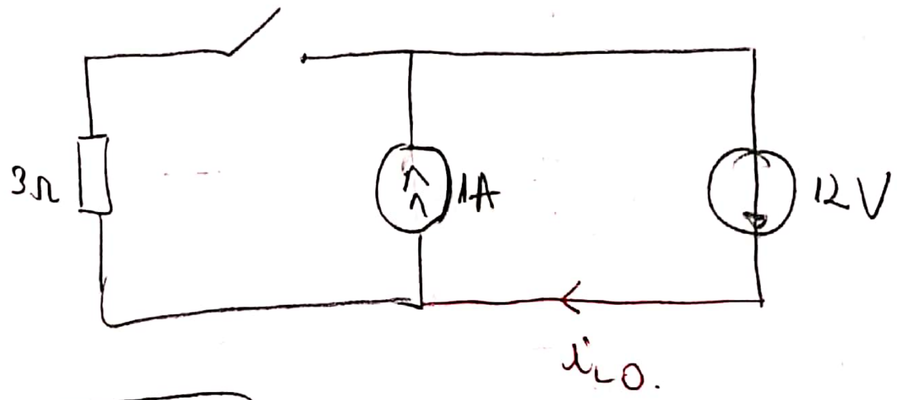
②



La $t=0$ se închide întrerupătorul. Să se afle

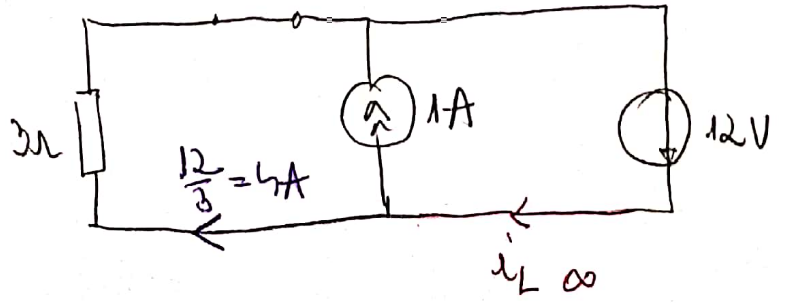
$i_L(t)$ și $u_L(t)$.

<u>PASUL 1</u> Se analizează circuitul de regim staționar anterior regimului tranzitoriu cu metodele de la c.c.



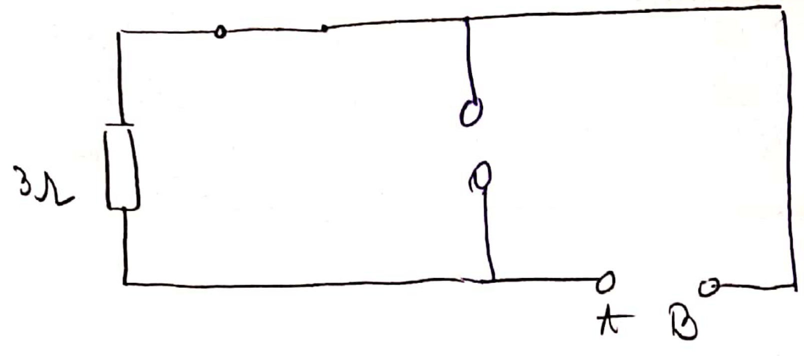
$\boxed{i_{L0} = 1A.}$

<u>PASUL 2</u> Se analizează circuitul în regim staționar posterior regimului tranzitoriu



$\Rightarrow i_{L\infty} = 1+4 = 5A$

PASUL 3 Se pasivizează circuitul și se determină rezistența echivalentă față de bornele bobinei.



$R = 3\,\Omega$.

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R} = \frac{\cancel{3}00 \times 10^{-3}}{\cancel{3}} = 0.1\,s.$$

PASUL 4 Se determină evoluția în timp a variabilei de stare, identificând constantele A și B din expresia

$$i_L(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B.$$

$$\left.\begin{array}{l} i_{L0} = 1 \Rightarrow A + B = 1 \\ i_{L\infty} = 5 \Rightarrow B = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A = -4}$$

Curentul prin bobină este:

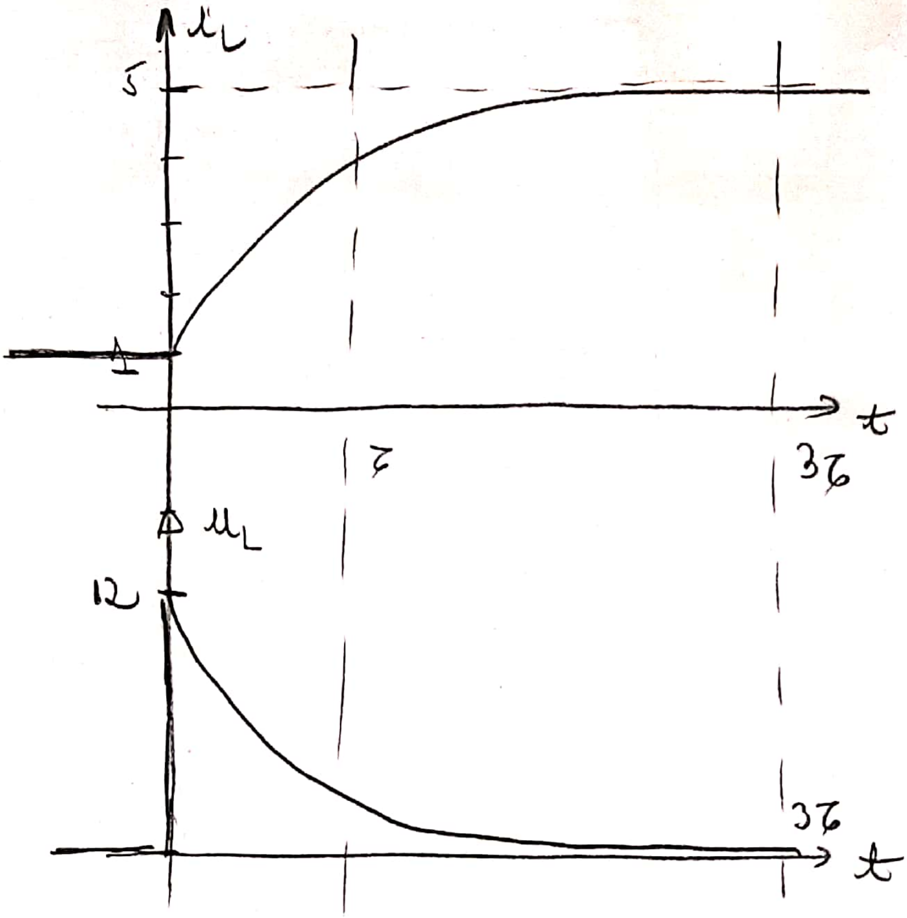
$$\boxed{i_L(t) = -4e^{-\frac{t}{\tau}} + 5 \quad \text{pt } t > 0}$$

Să calculăm și tensiunea la bornele bobinei.

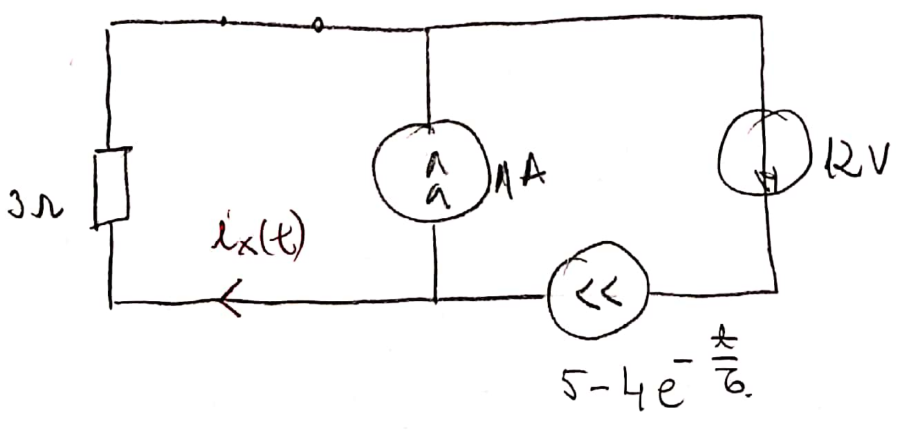
$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[-4e^{-\frac{t}{\tau}} + 5\right] =$$

$$= L \cdot (-4)\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = 4\cancel{L}\frac{R}{\cancel{L}} e^{-\frac{t}{\tau}} = 12 e^{-\frac{t}{\tau}},\ t \geq 0$$

Scanned with CamScanner



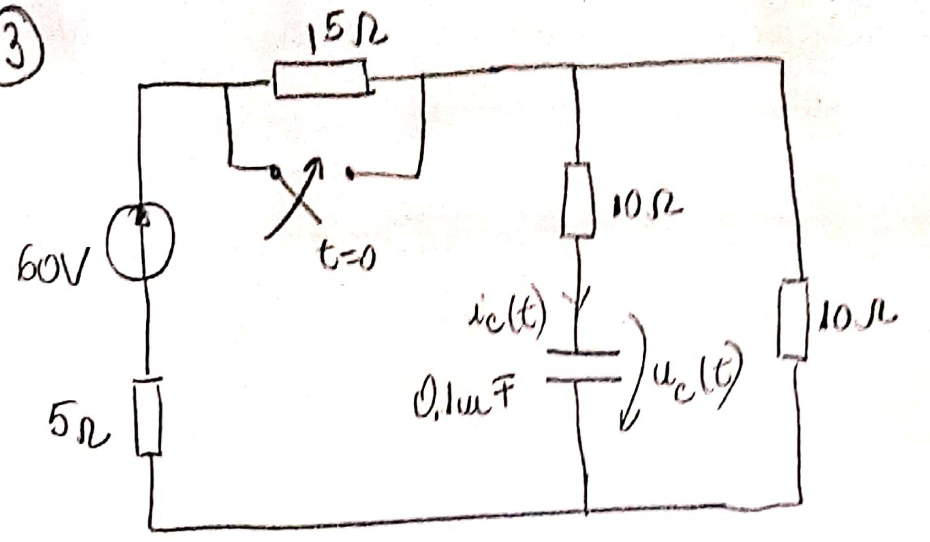
PASUL 5 Se determină celelalte mărimi din circuit înlocuind bobina cu o sursă ideală de curent (SIC)



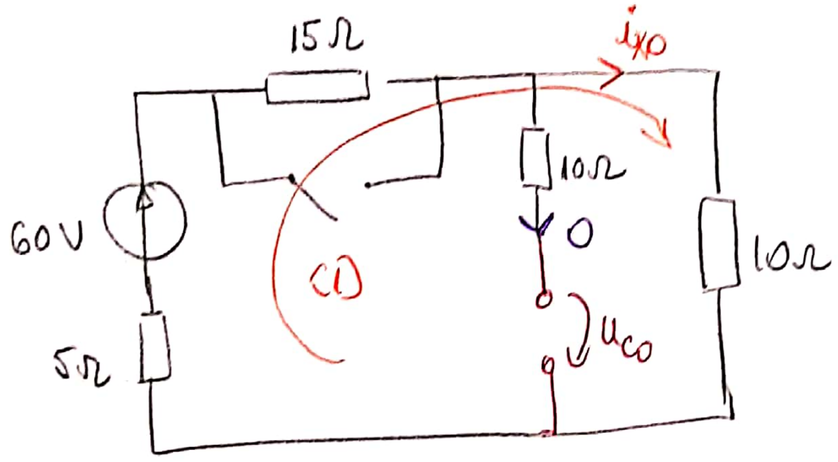
$$i_x(t) = 5-4e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 = 4-4e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0.$$

Scanned with CamScanner

3



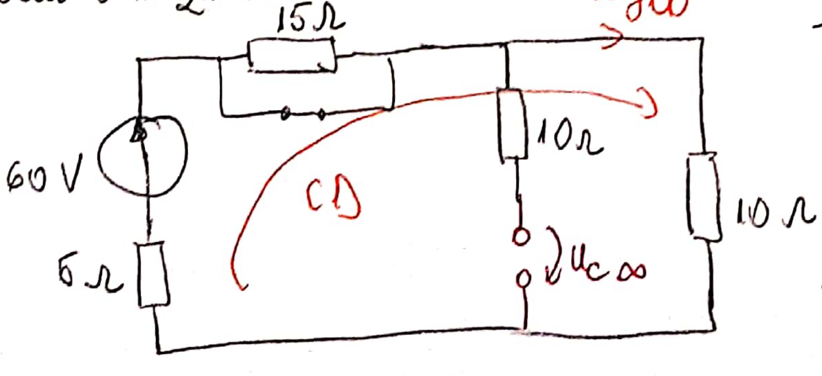
PASUL 1 Se analizează circ. în reg. staționar anterior reg. tranzitoriu cu metodele de la c.c.



TK II (C1) $(15+10+5)\, i_{x0} = 60 \rightarrow \boxed{i_{x0} = \frac{60}{30} = 2A}$

$\boxed{u_{c0} = 10 \cdot i_{x0} = 20V}$

PASUL 2 Se analizează circuitul în regim staționar posterior regimului tranzitoriu



TK II (C1):

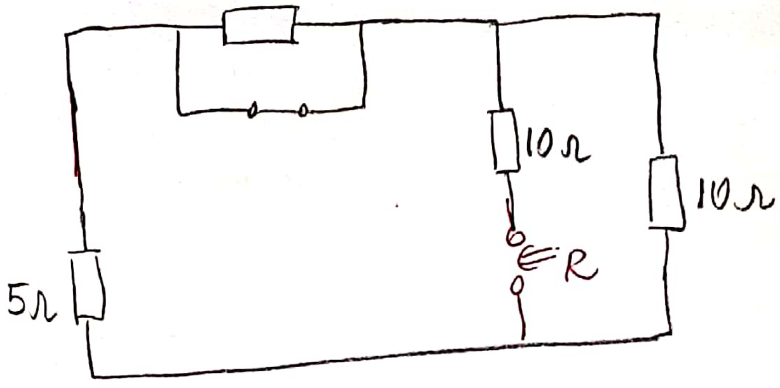
$(5+10)\, i_{y\infty} = 60$

$\Rightarrow \boxed{i_{y\infty} = 4A}$

$\boxed{u_{c\infty} = 10\, i_{y\infty} = 40V}$

Scanned with CamScanner

PASUL 3 Se pasivizează circuitul și se determină rezistența echivalentă față de bornele condensatorului.



$$R = 10 + \frac{\cancel{5} \times 10}{\cancel{5} \times 3} = \frac{40}{3}\,\Omega$$

$$\tau = R \cdot C = \frac{40}{3} \cdot 0.1 \times 10^{-3} = \frac{4}{3}\ \text{ms}.$$

PASUL 4 Se determină evoluția în timp a variabilei de stare, identificând constantele A și B din expresia $u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$

$$\left.\begin{array}{l} u_{c0} = 20 \Rightarrow A + B = 20 \\ u_{c\infty} = 40 \Rightarrow B = 40 \end{array}\right\} \boxed{A = -20}$$

Tensiunea la bornele condensatorului este:

$$\boxed{u_c(t) = -20e^{-\frac{t}{\tau}} + 40\ (V)\ \text{pt } t > 0}$$

Să calculăm și curentul prin condensator:

$$i_c(t) = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[-20e^{-\frac{t}{\tau}} + 40\right] =$$

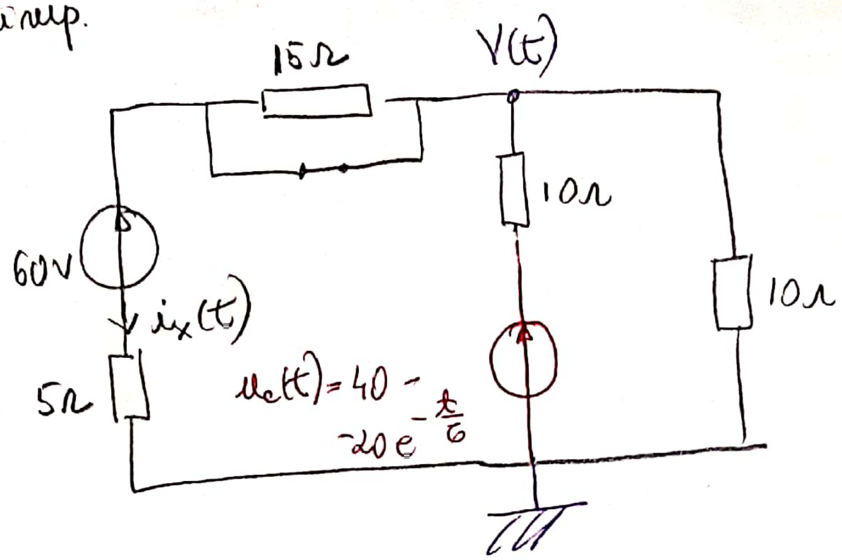
$$= C \cdot (-20)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = 20\cancel{C}\,\frac{1}{R\cancel{C}}\,e^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= \frac{\cancel{20}}{\cancel{40}} \cdot 3e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{i_c(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{\tau}}\ ,\ t > 0}$$

Scanned with CamScanner

PASUL 5 Se determină celelalte mărimi din circuit înlocuind condensatorul cu o SIT, având t.e.m o funcție care depinde de timp.



$$\frac{V(t) - 60}{5} + \frac{V(t) - u_c(t)}{10} + \frac{V(t)}{10} = 0$$

$$2V(t) - 120 + V(t) - u_c(t) + V(t) = 0.$$

$$4V(t) - u_c(t) - 120 = 0 \Rightarrow 4V(t) = -20e^{-\frac{t}{6}} + 40 + 120$$

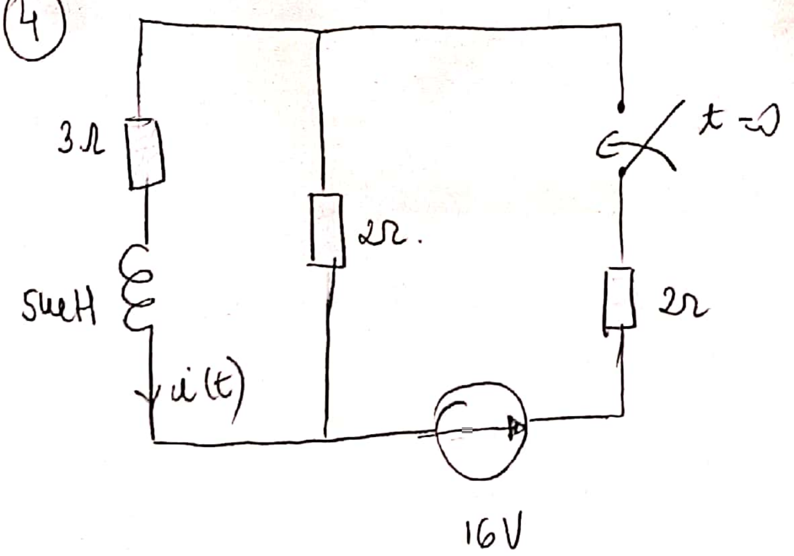
$$4V(t) = -20e^{-\frac{t}{6}} + 160 \Rightarrow \boxed{V(t) = -5e^{-\frac{t}{6}} + 40, \ t > 0}$$

$$i_x(t) = \frac{V(t) - 60}{5} = \frac{-5e^{-\frac{t}{6}} + 40}{5}$$

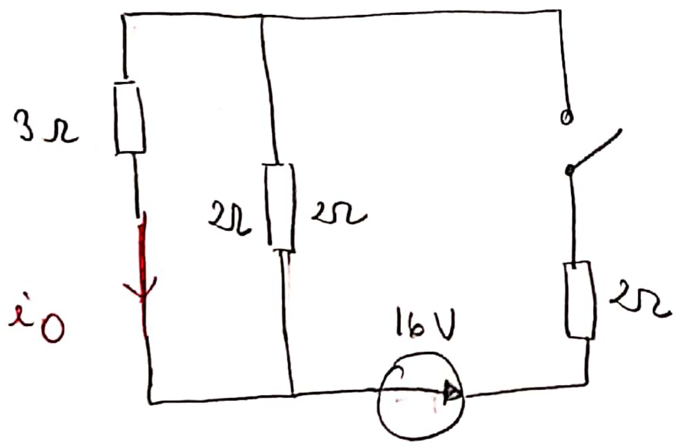
$$\boxed{i_x(t) = -e^{-\frac{t}{6}} + 8, \ t > 0}$$

Scanned with CamScanner

4

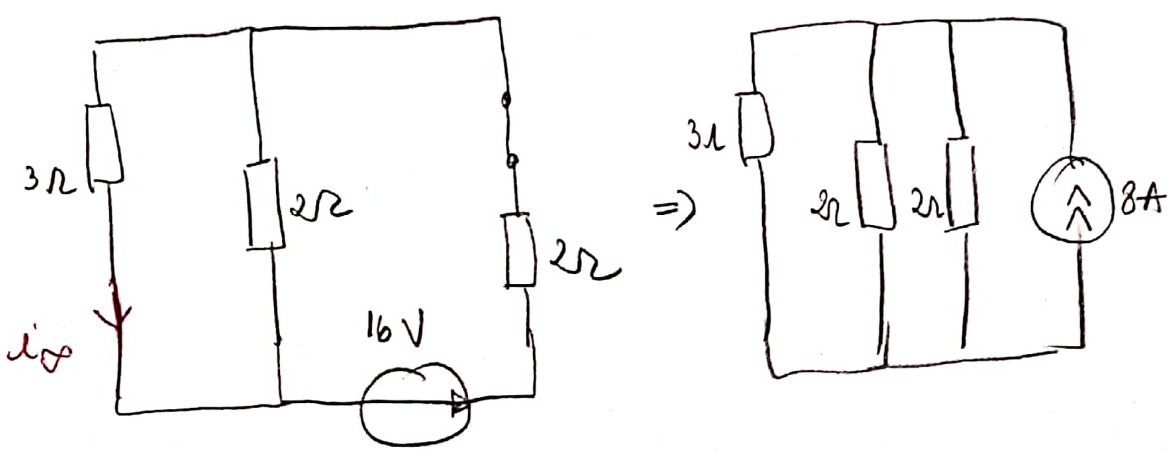


PASUL 1 Se analizează circ. în regim staționar anterior reg tranzitoriu cu metodele de la c.c.



$$\boxed{i_0 = 0}$$

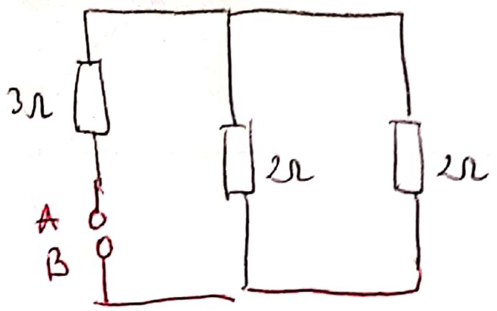
PASUL 2 Se analizează circuitul în reg staționar posterior reg tranzitoriu



$$\boxed{i_\infty = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2A}$$

Scanned with CamScanner

PASUL 3 Se pasivizează circuitul și se determină rezistența echivalentă față de bornele bobinei.



$$R = 3 + 1 = 4\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5\times 10^{-3}}{4} = \frac{5}{4}\ ms.$$

PASUL 4 Se determină evoluția în timp a variabilei de stare, identificând constantele A și B din expresia $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$

$$\left.\begin{array}{l} i_0 = 0 \\ i_\infty = 2A \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A+B = 0 \\ B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A = -2}$$

$$\boxed{i(t) = -2e^{-\frac{t}{\tau}} + 2, \ t>0}$$

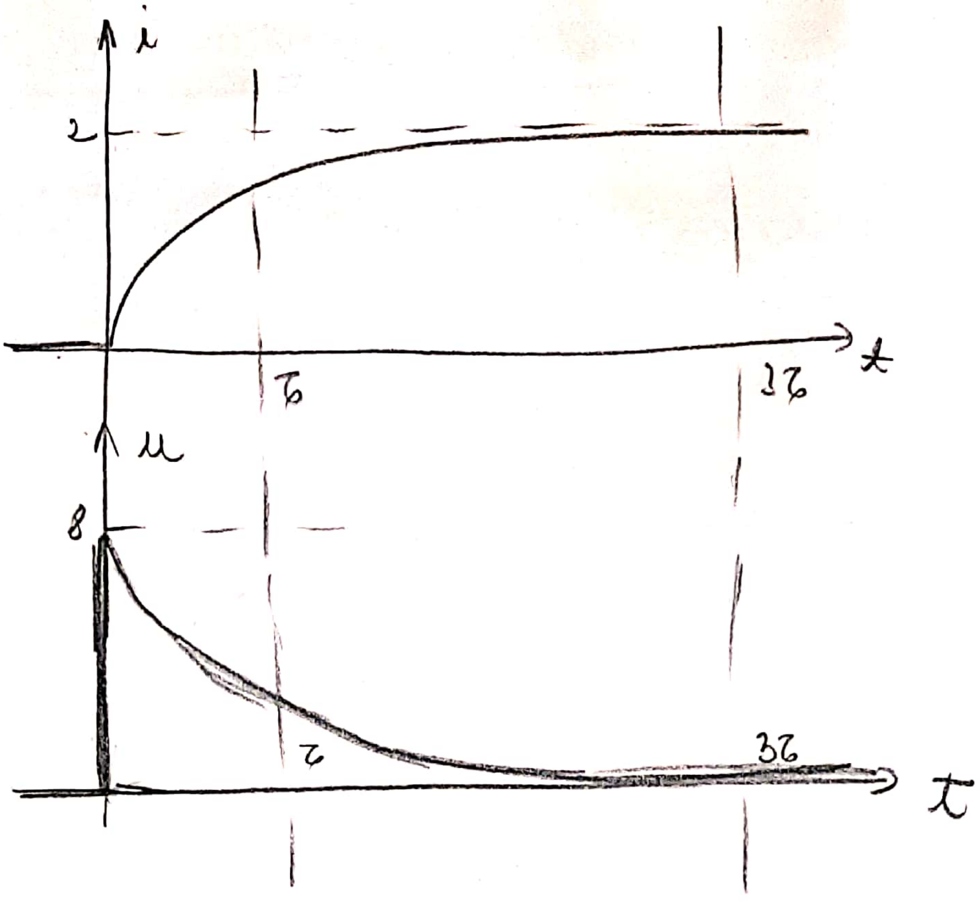
Tensiunea de la bornele bobinei.

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = L\cdot\frac{d}{dt}\left[-2e^{-\frac{t}{\tau}} + 2\right] =$$

$$= \cancel{L}(-2)\left(-\frac{R}{\cancel{L}}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2\cdot 4\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boxed{u(t) = 8e^{-\frac{t}{\tau}}, \ t>0}$$

Scanned with CamScanner



Scanned with CamScanner

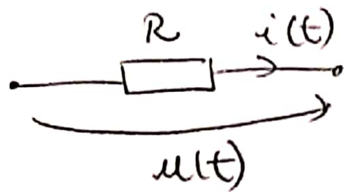
METODA TRANSFORMATEI LAPLACE

TEOREMELE LUI KIRCHHOFF ÎN OPERAȚIONAL

TKI
$$\sum_{k\in(n)}^{A} i_k(t)=0 \rightleftarrows \sum_{k\in(n)}^{A} I_k(s)=0 \quad \forall n$$

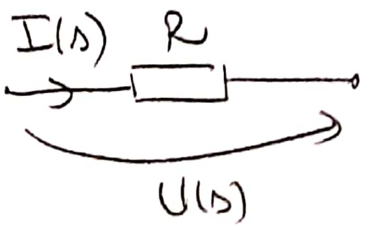
TKII
$$\sum_{k\in[b]}^{A} u_k(t)=0 \rightleftarrows \sum_{k\in[b]}^{A} U_k(s)=0 \quad \forall [b]$$

REZISTORUL DIPOLAR



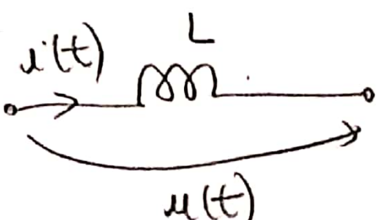
$$u(t)=R\,i(t)$$

$$\Updownarrow$$



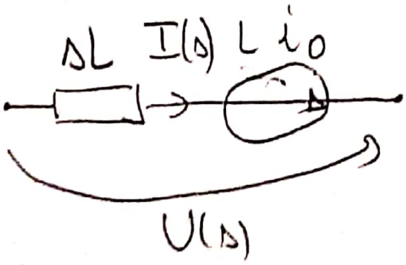
$$U(s)=R\,I(s)$$

BOBINA IDEALĂ DIPOLARĂ



$$u(t)=L\frac{di}{dt}$$

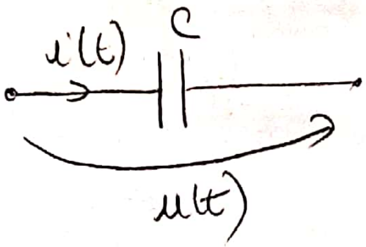
$$\Updownarrow$$



$$U(s)=sL\,I(s)-L\,i(0^-)$$

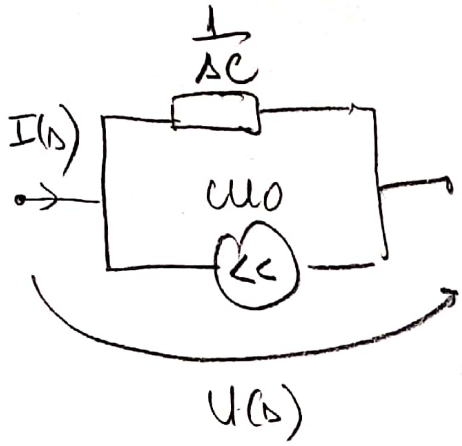
Scanned with CamScanner

CONDENSATORUL IDEAL DIPOLAR



$$i(t) = C\frac{du}{dt}$$

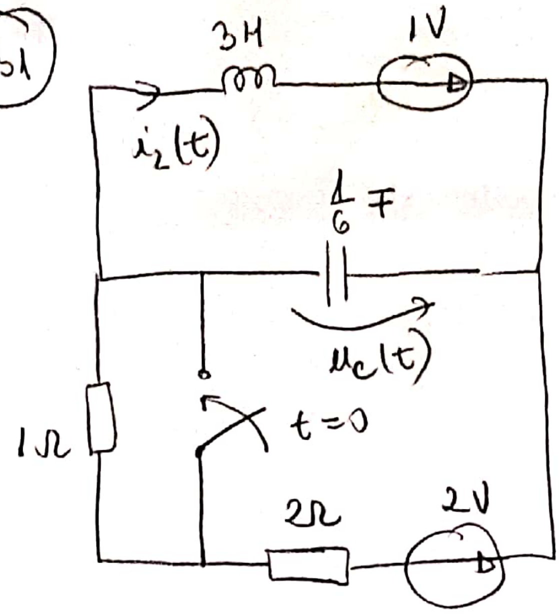
$$\Updownarrow$$



$$I(s) = sCU(s) - Cu(0^-)$$

Scanned with CamScanner

Pb 1

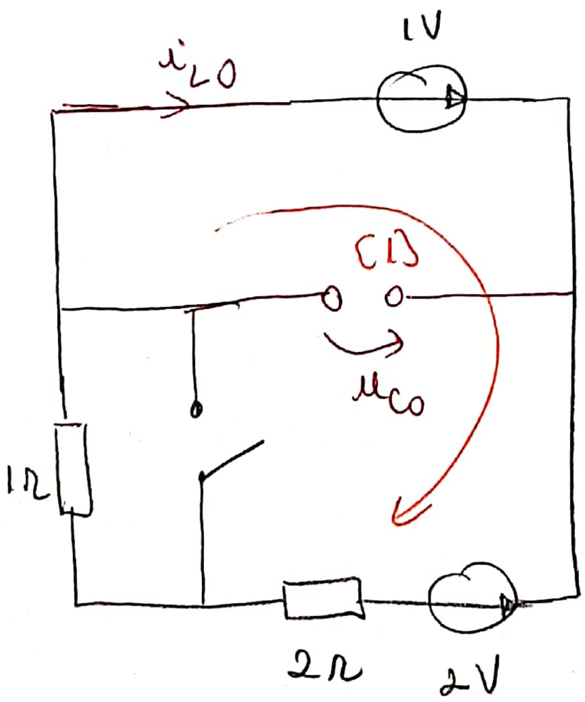


$i_L(t), u_C(t) = ?$

La $t=0$ se închide întrerupătorul.

Circuitul este de ordinul 2 pentru că are o bobină și un condensator.

PASUL 1 Se analizează circuitul în regimul staționar anterior regimului tranzitoriu cu metodele de c.c. (se determină condițiile inițiale pentru variabilele de stare)



$\boxed{u_{C0} = -1V}$

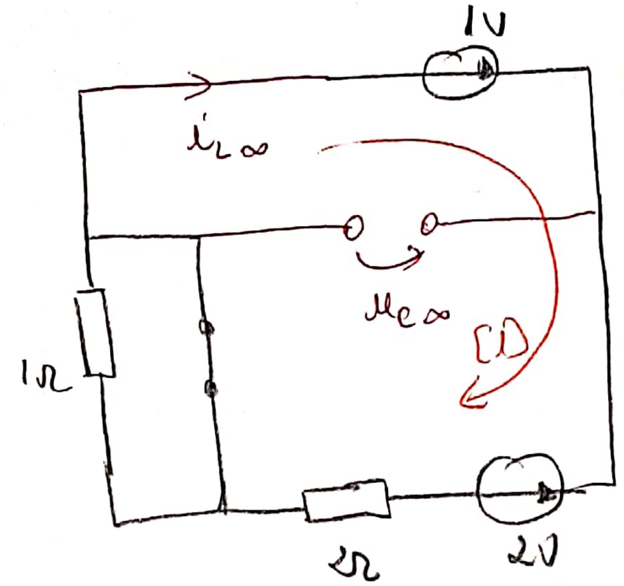
TK II (1):

$(2+1)\, i_{L0} = 1-2$

$\boxed{i_{L0-} = -\frac{1}{3} A}$

Scanned with CamScanner

PASUL 2 Se analizează circuitul în regim permanent posterior regimului tranzitoriu și se determină valorile asimptotice ale variabilelor de stare.



ACEST PAS NU ESTE OBLIGATORIU ÎN APLICAREA METODEI TRANSFORMATEI LAPLACE, ÎL VOM FOLOSI NUMAI PT VERIFICAREA REZULTATELOR

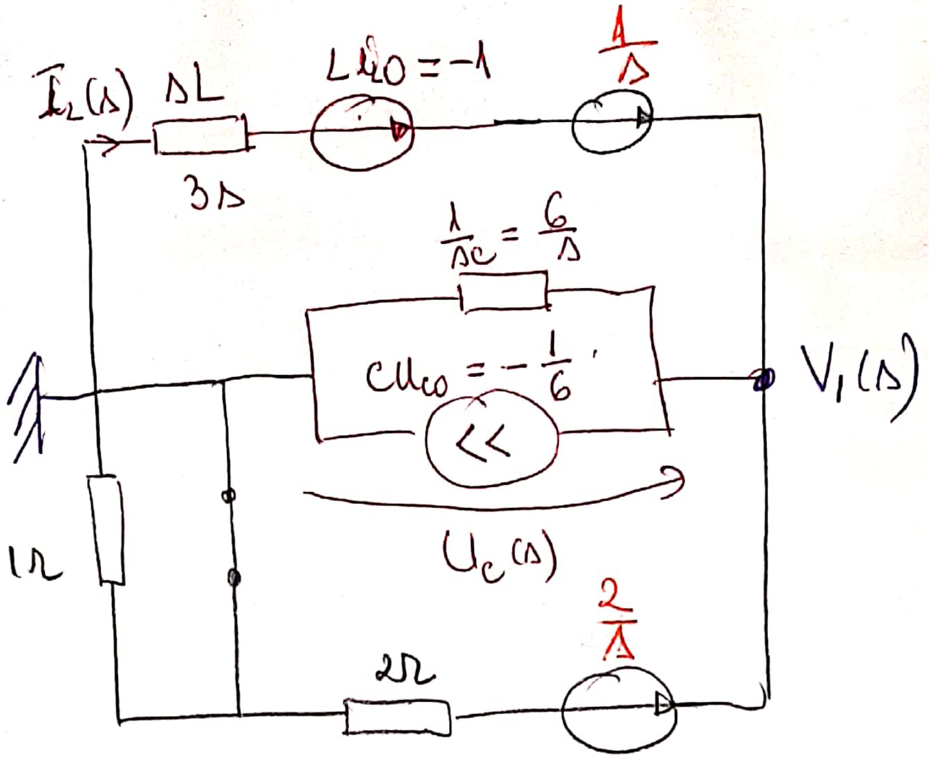
$$u_{C\infty} = -1V$$

TK II [1] $\quad 2 i_{L\infty} = 1-2 \Rightarrow i_{L\infty} = -\frac{1}{2}\,A$

PASUL 3 Se reprezintă circuitul în operațional.

Se înlocuiesc rezistoarele, bobinele, condensatoarele cu schemele lor operaționale și sursele se reprezintă, la rândul lor, în operațional.

Scanned with CamScanner



PASUL 4: Se rezolvă circuitul cu metodele de la c.c.

TKI:
$$\frac{V_1(s)-\frac{1}{s}-(-1)}{3s}+\frac{V_1(s)}{\frac{6}{s}}-\frac{1}{6}+\frac{V_1(s)-\frac{2}{s}}{2}=0$$

$$V_1(s)\left(\frac{1}{3s}+\frac{s}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3s^2}-\frac{1}{3s}+\frac{1}{6}+\frac{1}{s}$$

$$V_1(s)\frac{2+s^2+3s}{\cancel{6s}}=\frac{2-2s+s^2+6s}{\cancel{6}s^{\cancel{2}}}$$

$$V_1(s)=\frac{s^2+4s+2}{s(s^2+3s+2)}=-U_C(s)$$

$$\boxed{U_C(s)=-\frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}}$$

$$I_L(s)=-\frac{V_1(s)-\frac{1}{s}-(-1)}{3s}=-\frac{V_1(s)-\frac{1}{s}+1}{3s}$$

Scanned with CamScanner

$$I_L(s) = -\frac{\dfrac{s^2+4s+2}{s(s^2+3s+2)} - \dfrac{1}{s} + 1}{3s} = -\frac{\dfrac{s^2+4s+2}{s(s^2+3s+2)} + \dfrac{s-1}{s}}{3s}$$

$$I_L(s) = -\frac{s^2+4s+2 + (s-1)(s^2+3s+2)}{3s^2(s^2+3s+2)} =$$

$$= -\frac{\cancel{s^2}+4s+\cancel{2}+s^3+3s^2+2s-\cancel{s^2}-3s-\cancel{2}}{3s^2(s^2+3s+2)} =$$

$$= -\frac{s^3+3s^2+3s}{3s^2(s^2+3s+2)} = -\frac{\cancel{s}(s^2+3s+3)}{3s^{\cancel{2}}(s^2+3s+2)}$$

$$\boxed{I_L(s) = -\frac{s^2+3s+3}{3s(s+1)(s+2)}}$$

PASUL 5 Se verifică soluția obținută.

Se verifică teorema valorii inițiale.

$$\lim_{s\to\infty} s\, I_L(s) = i_L(0) = -\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{s\to\infty} s\, U_C(s) = u_C(0) = -1$$

În acest caz putem verifica și teorema valorii finale deoarece regimul tinde către unul staționar și limitele la infinit există:

Scanned with CamScanner

$$\lim_{s \to 0} s I_L(s) = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{s \to 0} s U_C(s) = -1$$

PASUL 6 Se revine în domeniul timpului

Pentru revenirea în domeniul timpului soluțiile operaționale trebuie descompuse în fracții simple.

$$U_C(s) = -\frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

$$A(s^2+3s+2) + Bs(s+2) + Ds(s+1) = s^2+4s+2$$

$$s^2(A+B+D) + s(3A+2B+D) + 2A = s^2+4s+2$$

$$\begin{cases} A+B+D = 1 \\ 3A+2B+D = 4 \\ 2A = 2 \Rightarrow \boxed{A=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+D = 0 \\ 2B+D = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{B = 1} \Rightarrow \boxed{D = -1}$$

$$U_C(s) = -\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right] = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

Folosind tabelul de corespondențe, putem scrie soluția în instantaneu:

$$\boxed{u(t) = -1 - e^{-t} + e^{-2t}}$$

funcția are 2 poli reali $s_1 = -1$ și $s_2 = -2$ cărora le corespund două constante de timp.

$$\tau_1 = -\frac{1}{s_1} = 1\,s \quad \text{și} \quad \tau_2 = -\frac{1}{s_2} = \frac{1}{2}\,s$$

Scanned with CamScanner

$$I_L(s) = -\frac{s^2+3s+3}{3s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

$$A(s^2+3s+2) + Bs(s+2) + Ds(s+1) = s^2+3s+3$$

$$s^2(A+B+D) + s(3A+2B+D) + 2A = s^2+3s+3$$

$$\begin{cases} A+B+D = 1 \\ 3A+2B+D = 3 \\ 2A = +3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = +\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \begin{cases} B+D = -\frac{1}{2} \\ 2B+D = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{B = -1} \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{2}}$$

$$I_L(s) = -\frac{1}{3}\left[+\frac{3}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s+2}\right]$$

$$I_L(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+2}$$

→ fct are 2 poli nenuli $\Rightarrow s_1 = -1$ și $s_2 = -2$ → 2 constante de timp.

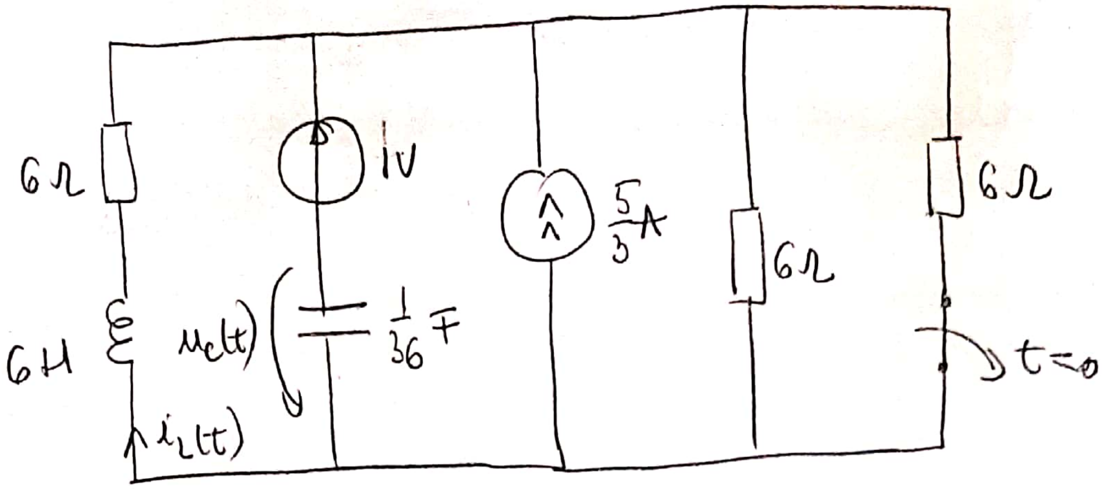
$$\tau_1 = -\frac{1}{s_1} = 1s \quad \text{și} \quad \tau_2 = -\frac{1}{s_2} = \frac{1}{2}s$$

Folosind tabelul de corespondență putem scrie soluția în instantaneu

$$\boxed{i_L(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t}}$$

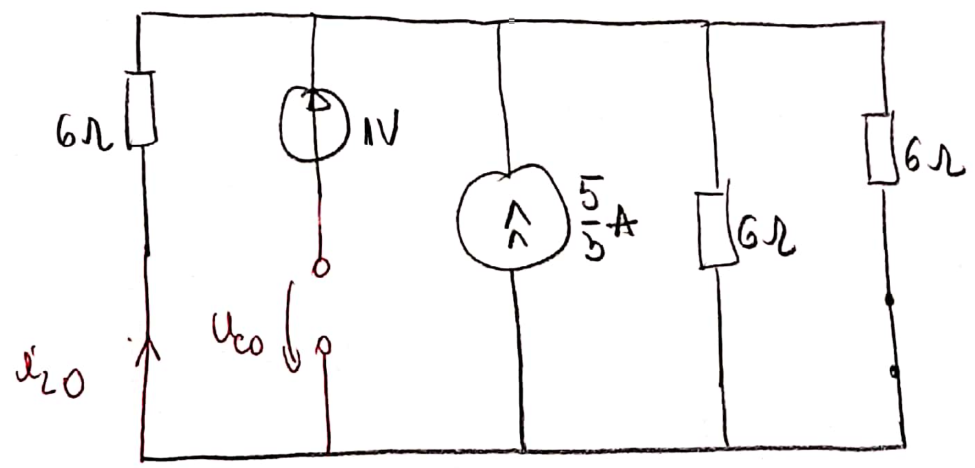
Scanned with CamScanner

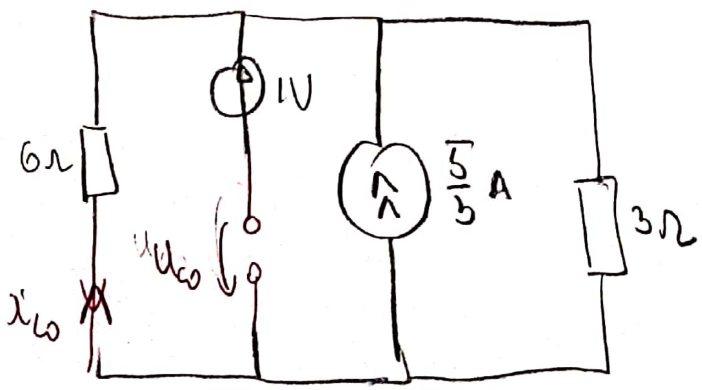
Pb 2



La $t=0$ se deschide intrerupătorul. Aflați $i_L(t)$ și $u_C(t)$.

PASUL 1 Se analizează circuitul în regim staționar anterior regimului tranzitoriu cu met. de la c.c. și se determină condițiile inițiale pentru variabilele de stare.





Div. de crt

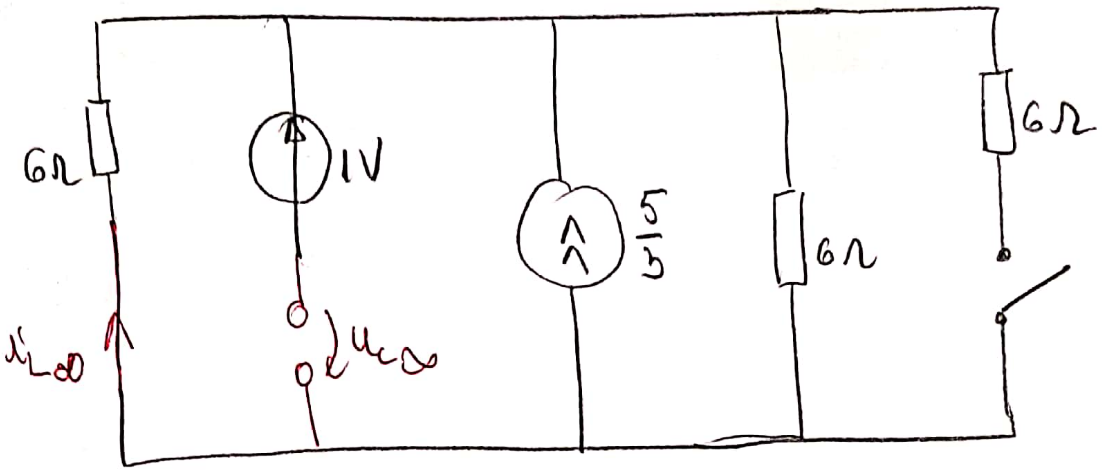
$$\boxed{i_{L0} = -\frac{5}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{3+6} = -\frac{5}{9}\,A}$$

$$u_{C0} = -1 - 6 i_{L0} =$$

$$= -1 + \overset{2}{\cancel{6}}\,\frac{5}{\underset{3}{\cancel{9}}} = -1 + \frac{10}{3} = \boxed{\frac{7}{3}\,V}$$

PASUL 2 (OPȚIONAL).

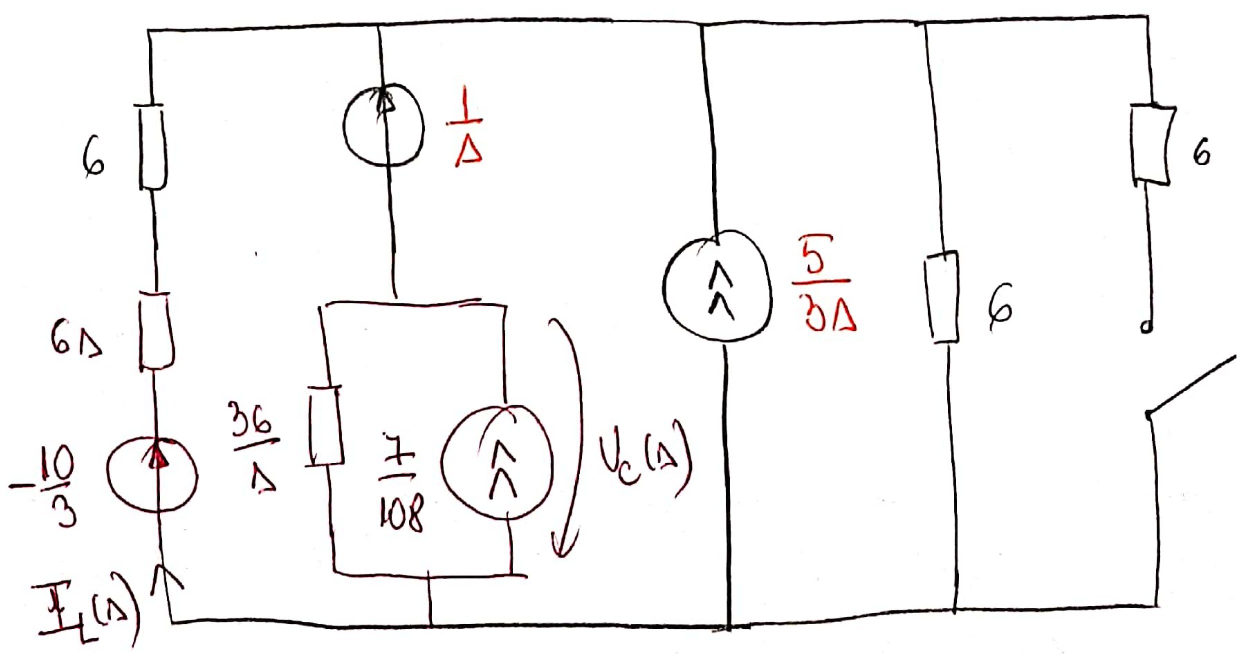
Se analizează circuitul în regim permanent posterior regimului tranzitoriu și se determină valorile asimptotice ale variabilelor de stare.



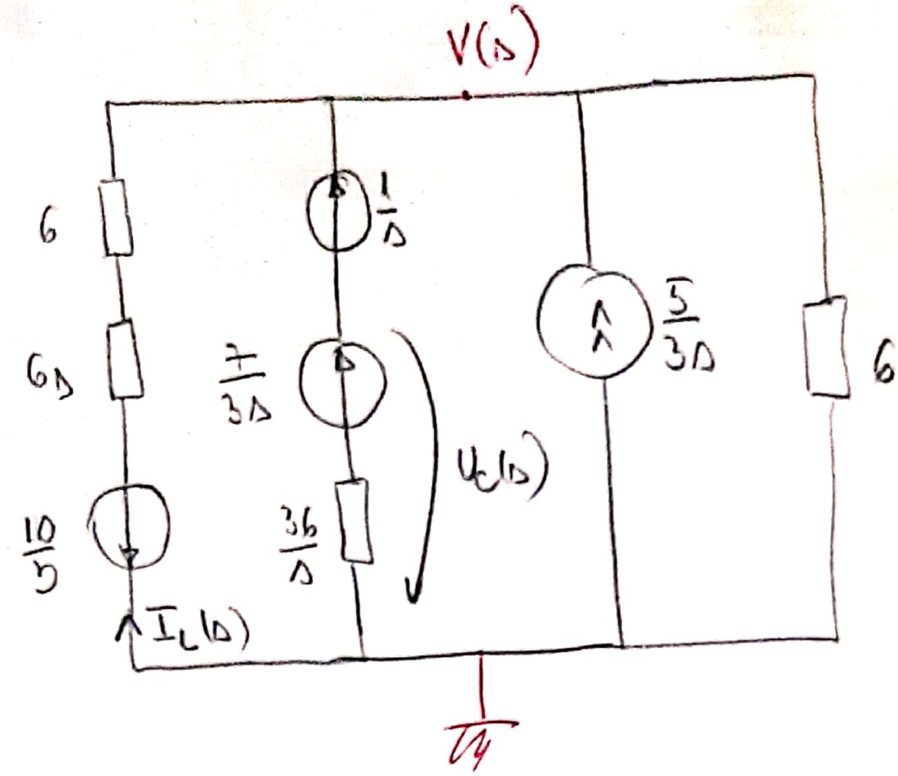
$$\boxed{i_{L\infty} = -\frac{5}{3}\,\frac{\cancel{6}}{\cancel{12}_2} = -\frac{5}{6}\,A}$$

$$\boxed{u_{C\infty} = -1 - 6\,i_{L\infty} = -1 + 5 = 4\,V}$$

PASUL 3 Se reprezintă circuitul în operațional.



Scanned with CamScanner



$$TKI_{V(s)}: \quad \frac{V(s)-\left(-\frac{10}{s}\right)}{6s+6} + \frac{V(s)-\frac{1}{s}-\frac{7}{3s}}{\frac{36}{s}} - \frac{5}{3s} + \frac{V(s)}{6} = 0$$

$$V(s)\left[\frac{1}{6s+6} + \frac{s}{36} + \frac{1}{6}\right] = -\frac{10}{s}\,\frac{1}{6s+6} + \frac{\frac{1}{s}+\frac{7}{3s}}{\frac{36}{s}} + \frac{5}{3s}$$

$$V(s)\,\frac{1}{\cancel{6}2}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{s}{6} + 1\right] = -\frac{10}{\cancel{s}}\,\frac{1}{6(s+1)} + \frac{\cancel{s}}{36}\,\frac{3+7}{\cancel{3}\cancel{s}} + \frac{5}{\cancel{3}s}$$

$$V(s)\,\frac{1}{2}\,\frac{6+s(s+1)+6(s+1)}{6(s+1)} = -\frac{5}{3(s+1)} + \frac{5}{18} + \frac{5}{s}$$

$$V(s)\,\frac{1}{2}\,\frac{6+s^2+s+6s+6}{\cancel{6(s+1)}} = \frac{-30s+5s(s+1)+5\times18(s+1)}{\cancel{18}3s\cancel{(s+1)}}$$

$$V(s)\,\frac{s^2+7s+12}{2} = \frac{-30s+5s^2+5s+90s+90}{3s}$$

$$V(s) = \frac{2\,[5s^2+65s+90]}{3s\,(s^2+7s+12)} = \frac{10\,(s^2+13s+18)}{3s\,(s^2+7s+12)}$$

$$U_c(s) = Y(s) - \frac{1}{s}$$

$$V(s) = \frac{10}{3}\;\frac{s^2+13s+18}{s\,(s+3)(s+4)}$$

2 poli reali $s_1=-3$; $s_2=-4$

$$\tau_1 = -\frac{1}{s_1} = \frac{1}{3}\,s \quad ; \quad \tau_2 = -\frac{1}{s_2} = \frac{1}{4}\,s.$$

$$\frac{s^2+13s+18}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{D}{s+4}$$

$$A(s^2+7s+12) + Bs(s+4) + Ds(s+3) = s^2+13s+18.$$

$$\begin{cases} A+B+D=1 \\ 7A+4B+3D=13 \\ 12A=18 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} B+D=-\frac{1}{2} \\ 4B+3D = 13-\frac{21}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Bigg| -3.$$

$$\begin{cases} -3B-3D=\frac{3}{2} \\ 4B+3D=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{B=4} \Rightarrow \boxed{D=-\frac{1}{2}-4=-\frac{9}{2}}$$

Scanned with CamScanner

$$V(s) = \frac{10}{3}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{s} + 4\frac{1}{s+3} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+4}\right]$$

$$V(s) = 5\frac{1}{s} + \frac{40}{3}\frac{1}{s+3} - 15\frac{1}{s+4}$$

$$U_c(s) = \frac{5}{s} + \frac{40}{3}\frac{1}{s+3} - 15\frac{1}{s+4} - \frac{1}{s} = \frac{4}{s} + \frac{40}{3}\frac{1}{s+3} - 15\frac{1}{s+4}$$

$$\boxed{u_c(t) = 4 + \frac{40}{3}e^{-3t} - 15e^{-4t}}$$

$$I_L(s) = \frac{-\frac{10}{3} - V(s)}{6s+6} = \frac{-\frac{10}{3} - \frac{10}{3}\frac{s^2+13s+18}{s(s+3)(s+4)}}{6(s+1)}$$

$$I_L(s) = -\frac{10}{18}\,\frac{1 + \frac{s^2+13s+18}{s(s^2+7s+12)}}{s+1}$$

$$I_L(s) = -\frac{5}{9}\,\frac{s(s^2+7s+12) + s^2+13s+18}{s(s+1)(s^2+7s+12)}$$

$$I_L(s) = -\frac{5}{9}\,\frac{s^3+7s^2+12s+s^2+13s+18}{s(s+1)(s+3)(s+4)} = -\frac{5}{9}\,\frac{s^3+8s^2+25s+18}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$I_L(s) = -\frac{5}{9}\,\frac{\cancel{(s+1)}(s^2+7s+18)}{s\cancel{(s+1)}(s+3)(s+4)} = -\frac{5}{9}\,\frac{s^2+7s+18}{s(s+3)(s+4)}$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{s^2+7s+18}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{D}{s+4}$$

$$A(s^2+7s+12) + Bs(s+4) + Ds(s+3) = s^2+7s+18$$

$$\begin{cases} A+B+D=1 \\ 7A+4B+3D=7 \\ 12A=18 \Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} B+D=-\frac{1}{2} \\ 4B+3D = 7-7\cdot\frac{3}{2} = 7\left(1-\frac{3}{2}\right) = \\ \qquad = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3B-3D = \frac{3}{2} \\ 4B+3D = -\frac{7}{2} \end{cases} \qquad \boxed{D = -\frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{B=-2}$$

$$I_L(s) = -\frac{5}{9}\left[\frac{3}{2}\,\frac{1}{s} - 2\,\frac{1}{s+3} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{s+4}\right]$$

$$I_L(s) = -\frac{5}{6}\,\frac{1}{s} + \frac{10}{9}\,\frac{1}{s+3} - \frac{5}{6}\,\frac{1}{s+4}$$

$$\boxed{i_L(t) = -\frac{5}{6} + \frac{10}{9}e^{-3t} - \frac{5}{6}e^{-4t}}$$

Scanned with CamScanner