SÍNTESI LÒGICA

Índex de conceptes

- Mapes de Karnaugh
- Procediment sistemàtic, adjacències
- Simplificació per minterms
- Simplificació per maxterms
- Funcions incompletes

Utilitzant les propietats de l'Àlgebra de Boole podem simplificar les funcions lògiques.

$$f = A + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B$$

$$f = A + (A + \overline{A}) \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B = B \cdot C + A(1 + \overline{D}) + \overline{A} \cdot B =$$

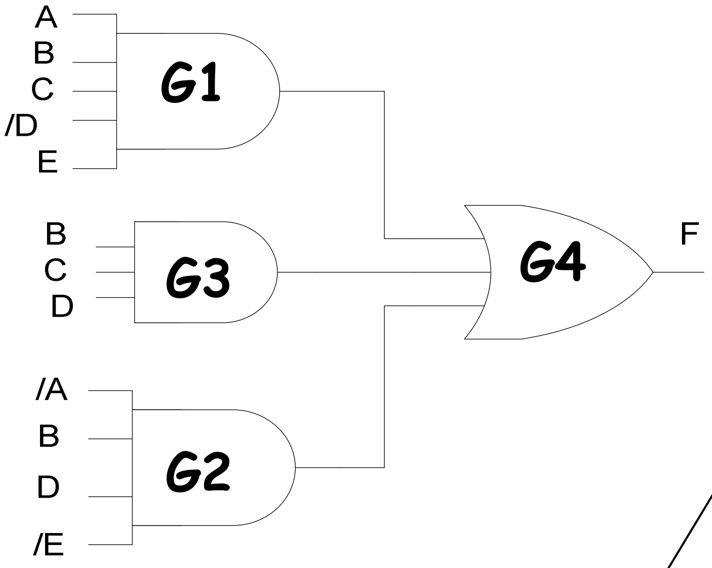
$$= B \cdot C + A + \overline{A} \cdot B = (A + \overline{A} \cdot B) + B \cdot C = A + B + B \cdot C = A + B \cdot (1 + B) = A + B$$

La implementació es pot realitzar de diferents formes

- funcions a dos nivells (més ràpida)
- funcions multinivell (pot ser més senzilla tecnològicament si utilitza un únic tipus de portes, menys cost)

2 Nivells / Multinivell

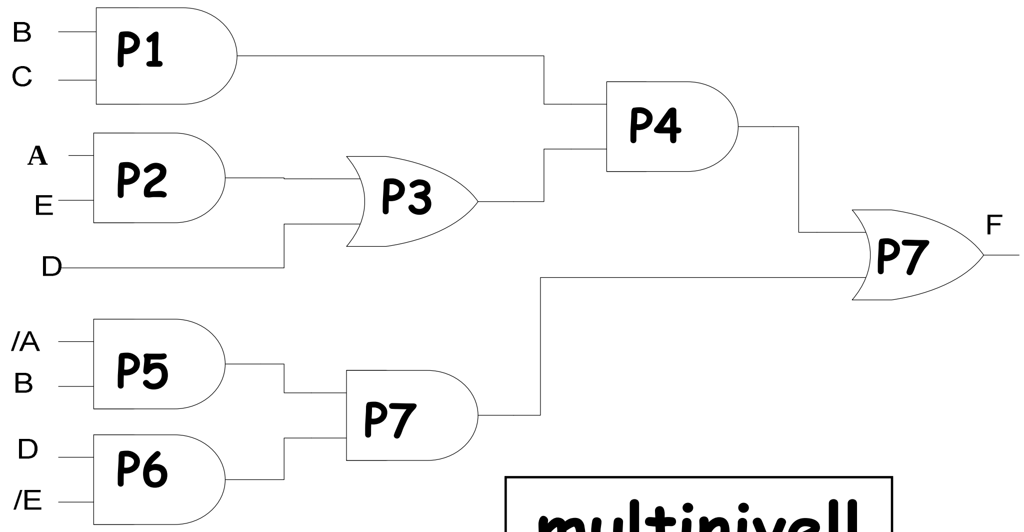
F = A B C /D E + B C D + /A B D /E



2 nivells

Aplicant lleis d'àlgebra de Boole

F = (B C)((A E) + D) + (/A B)(D /E)



multinivell

Avantatges / Inconvenients de cada estratègia de disseny combinacional

↑ Nivells => ↑ Retard ↓ Velocitat

↑ Nivells => ↓ # entrades ↓ Àrea [= Cost (mm^2 de Si)]

↓ # entrades => ↑ Regularitat (peces de puzzle + uniformes)

↓ # entrades=> ↓ Consum

Síntesi a dos nivells

Mètodes sistemàtics per aplicar les lleis de l'Àlgebra de Boole i simplificar les funcions lògiques per optimitzar:

- **Cost**
- **velocitat**

Mapes de Karnaugh

Mètode tabular o de Quine-McCluskey

Mapes de Karnaugh

Són una representació gràfica de les funcions de commutació, i es pot considerar com una representació gràfica de la taula de veritat. Per a realitzar aquesta representació cal que els termes canònics lògicament adjacents estiguin físicament adjacents a la representació. Això implica que la ordenació del diagrama no és la natural.

Són útils per a la simplificació a dos nivells.

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

El nombre que hi apareix a cada cel·la designa el minterm o maxterm que representa: nombre decimal corresponent a la combinació de cada cel·la. Per representar un minterm es col·loca un 1 a la cel·la; per un maxterm, es col·loca un 0.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5 1	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14 1	10

$m_5 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$ i $m_{14} = A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$

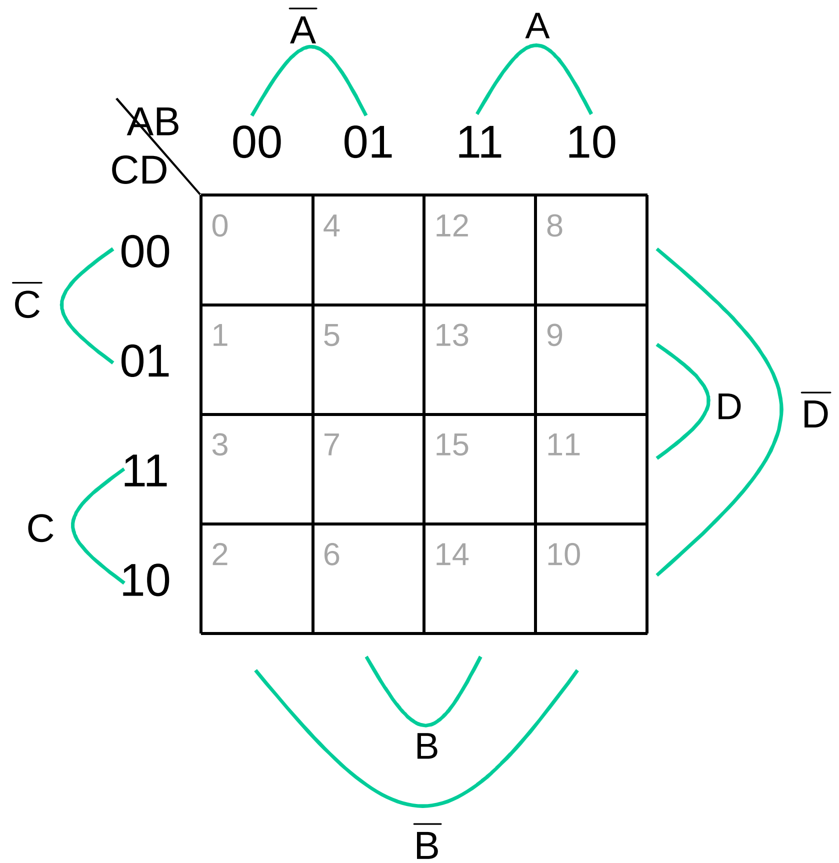
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4 0	12	8
01	1	5	13	9 0
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

$M_9 = \overline{A} + B + C + \overline{D}$ i $M_4 = A + \overline{B} + C + D$

El mapa de Karnaugh de 3 variables, considerat en 3D, és un cilindre => els quadres dels costats esquerra i dreta són adjacents.

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

distribució de les variables en un mapa



Al mapa de 4 variables: a més, els termes de dalt i de baix també són adjacents (una esfera).

Per treballar amb 5 variables, cal utilitzar dos mapes de 4 variables i considerar que un està a sobre de l'altre: a més de l'anterior, dues cel·les situades una sobre l'altre també són adjacents.

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

A=1

Per més variables ja no és útil.

Simplificació com a **suma de productes**

Es considera que una funció està simplificada quan (expressada com a suma de productes):

1. No hi ha cap altre expressió equivalent constituïda per menys productes.
2. No hi ha cap altre expressió equivalent amb el mateix nombre de productes però amb menys literals.

Nota: estem trobant una expressió mínima, no l'expressió mínima.

Recordem que cada *minterm* correspon a un 1 de la funció.

Exemple

L’adjacència de termes permet eliminar variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5: 1	13: 1	9
11	3	7: 1	15: 1	11
10	2: 1	6: 1	14	10

$$\overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + ABCD = B\overline{C}D(\overline{A}+A) + BCD(\overline{A}+A) =$$
$$= B\overline{C}D + BCD = BD(\overline{C}+C) = BD$$

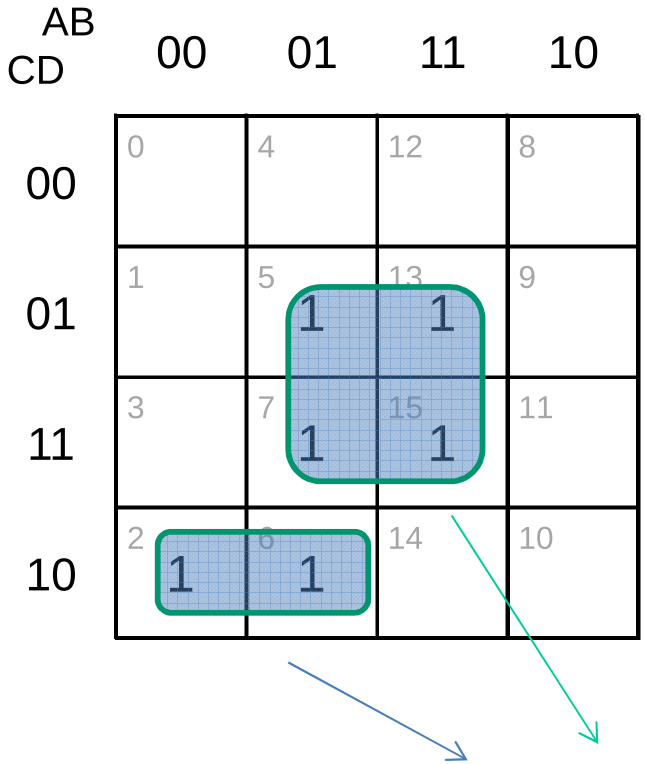
$$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} = \overline{A}C\overline{D}(\overline{B}+B) = \overline{A}C\overline{D}$$

- Amb quatre termes adjacents podem eliminar dues variables.

- Els termes adjacents només es diferencien en una variable: amb dos termes adjacents podem eliminar una variable i, per tant, simplificar-lo.

$$f = \Sigma m(2,5,6,7,13,15) = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + AB\overline{C}D + ABCD$$

Exemple



$$f = \Sigma m(2,5,6,7,13,15) = \overline{A}C\overline{D} + BD$$

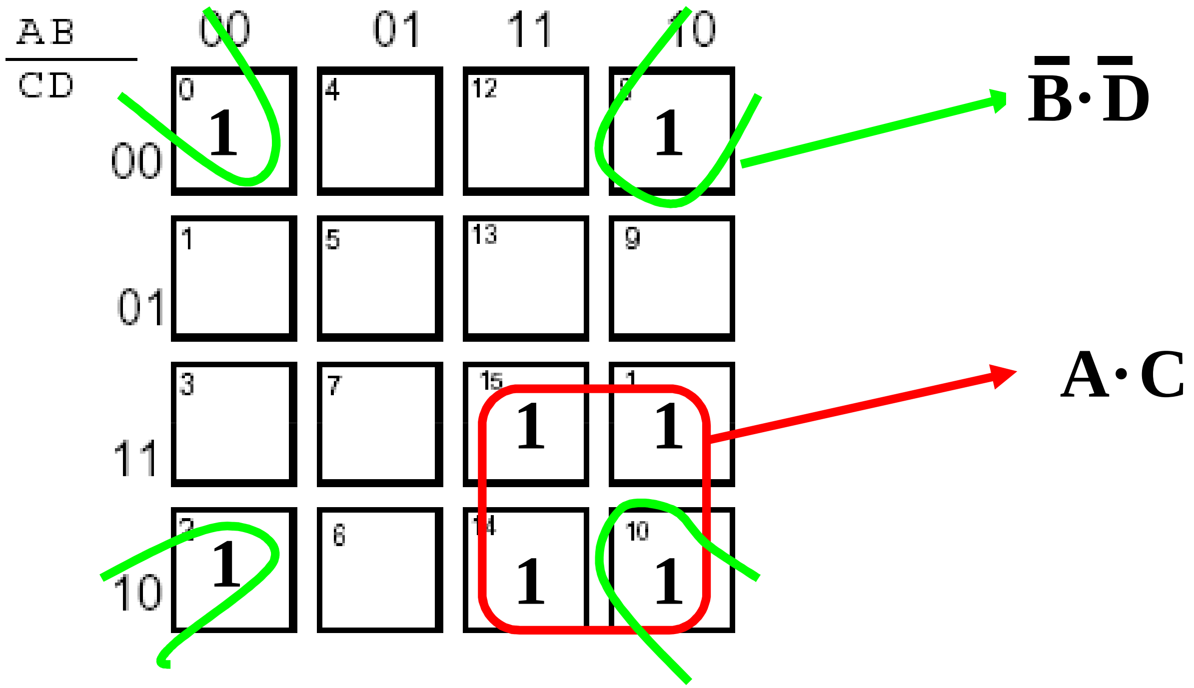
El procediment sistemàtic és:

1. S'agafen tots els 1s que no es poden agrupar amb res
2. Es formen tots els grups de dos 1s que no poden formar cap grup de quatre
3. Es formen tots els grups de quatre 1s que no poden formar cap grup de vuit
4. ..... I així successivament
5. El mètode acaba quan s'han cobert tots els 1s

L'agrupació de termes es fa sempre en potències de 2 (2, 4 8, 16, ...).

Un mateix 1 es pot agafar totes les vegades que sigui necessari per fer simplificacions

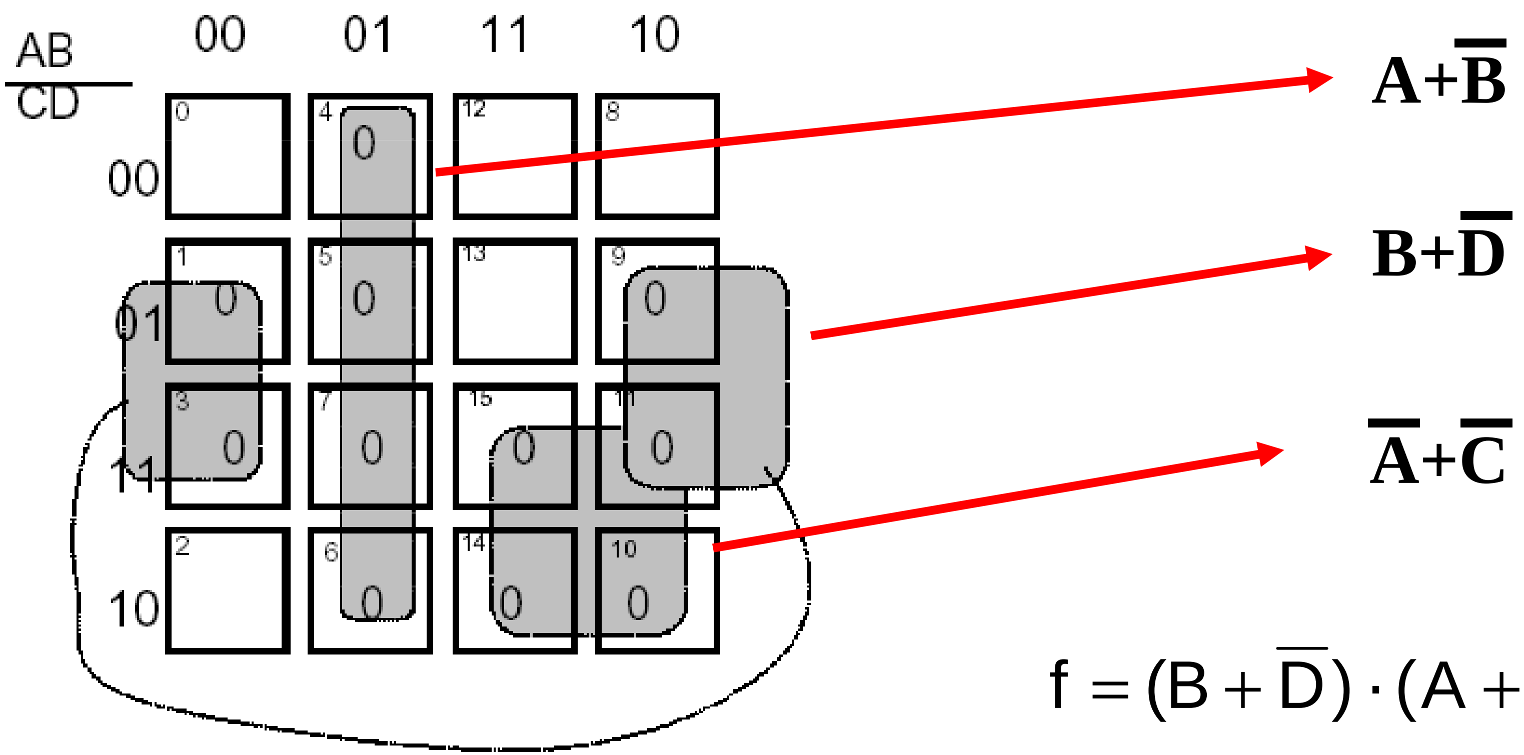
$$f = \sum_4 m(0,2,8,10,11,14,15) =$$



Simplificació com a **producte de sumes**

Aquí cada maxterm correspon a un 0 a la funció i hem de recordar quina relació hi ha entre minterms i maxterms. La resta del procediment és igual al descrit per als minterms.

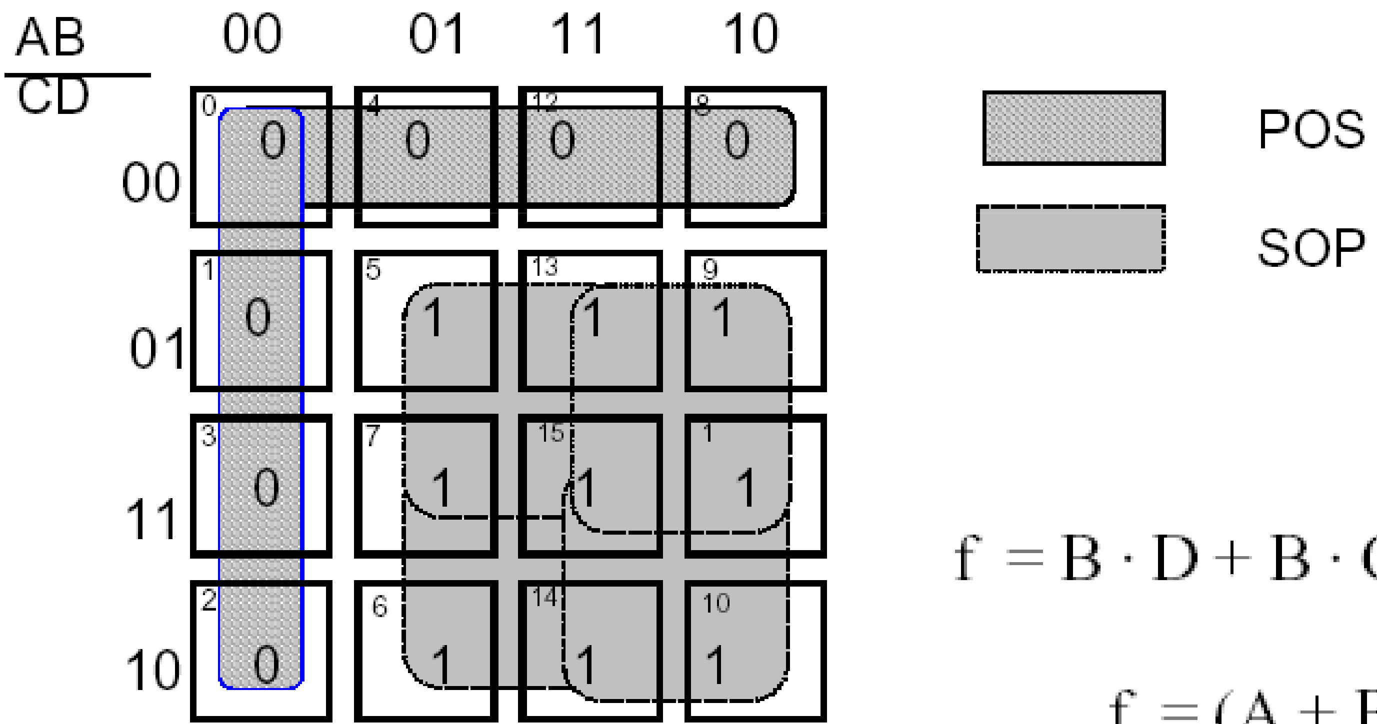
$$f = \prod M\,(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15)$$



$$f = (B + \overline{D}) \cdot (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + \overline{C})$$

Les simplificacions com a suma de productes o com a producte de sumes no tenen per què ser iguals en la seva complexitat.

$$f = \sum m(5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15) = \prod M(0, 1, 2, 3, 4, 8, 12)$$



$$f = B \cdot D + B \cdot C + A \cdot D + A \cdot C$$

$$f = (A + B) \cdot (C + D)$$

Les simplificacions com a suma de productes o com a producte de sumes no tenen per què ser iguals en la seva complexitat.

$$f(a,b,c,d)=\sum_4 m(0,2,4,6,11,15)$$

cd / ab	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11			1	
10			1	

$$f(a,bc,d)=\overline{a}\,\overline{d}+acd$$

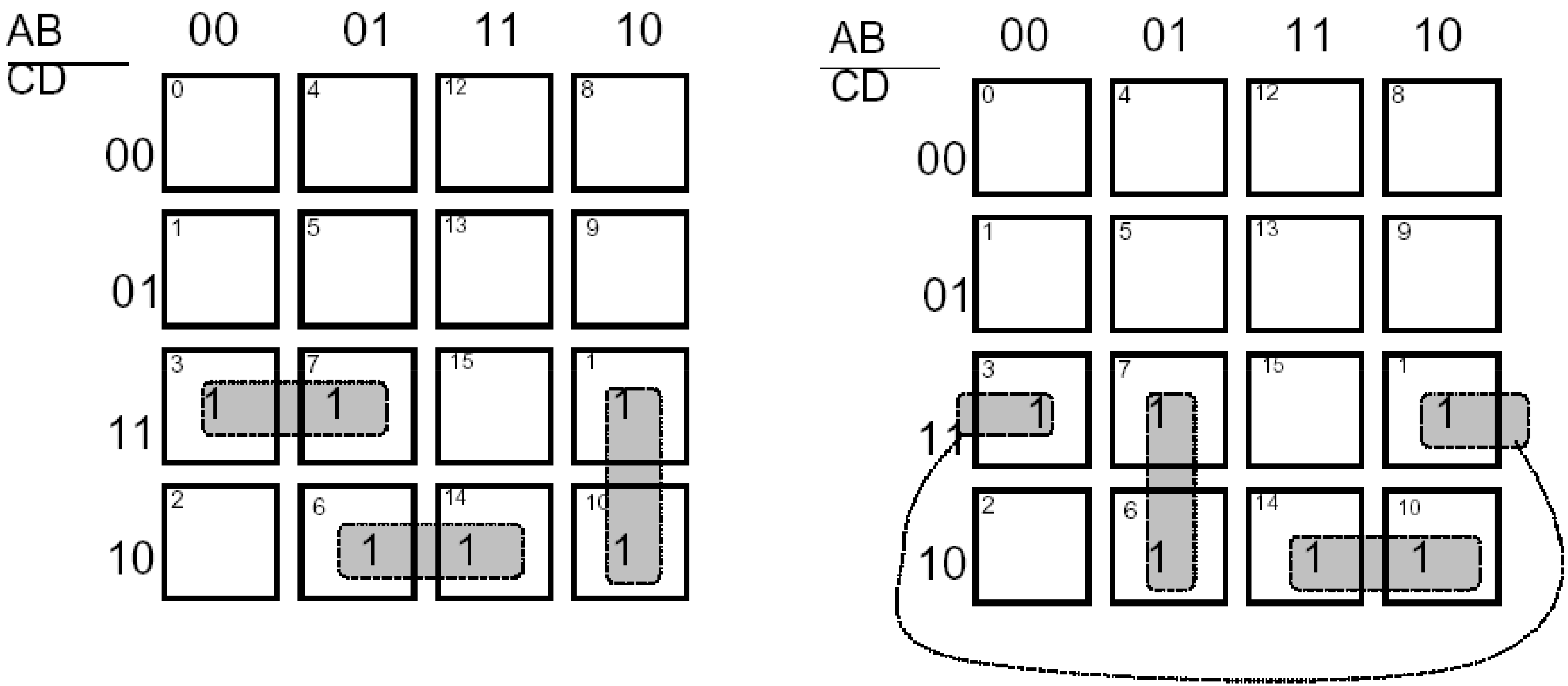
$$f(a,b,c,d)=\prod_4 M(1,3,5,7,8,9,10,12,13,14)$$

cd / ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$$f(a,b,c,d)=(\overline{a}+d)(\overline{a}+c)(a+\overline{d})$$

Les simplificacions no son úniques (en aquest cas són equivalents)

$$f = \sum m(3, 6, 7, 10, 11, 14)$$



(a) $\rightarrow$ $f = \overline{A} \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C$

(b) $\rightarrow$ $f = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D$

Funcions especificades incompletament

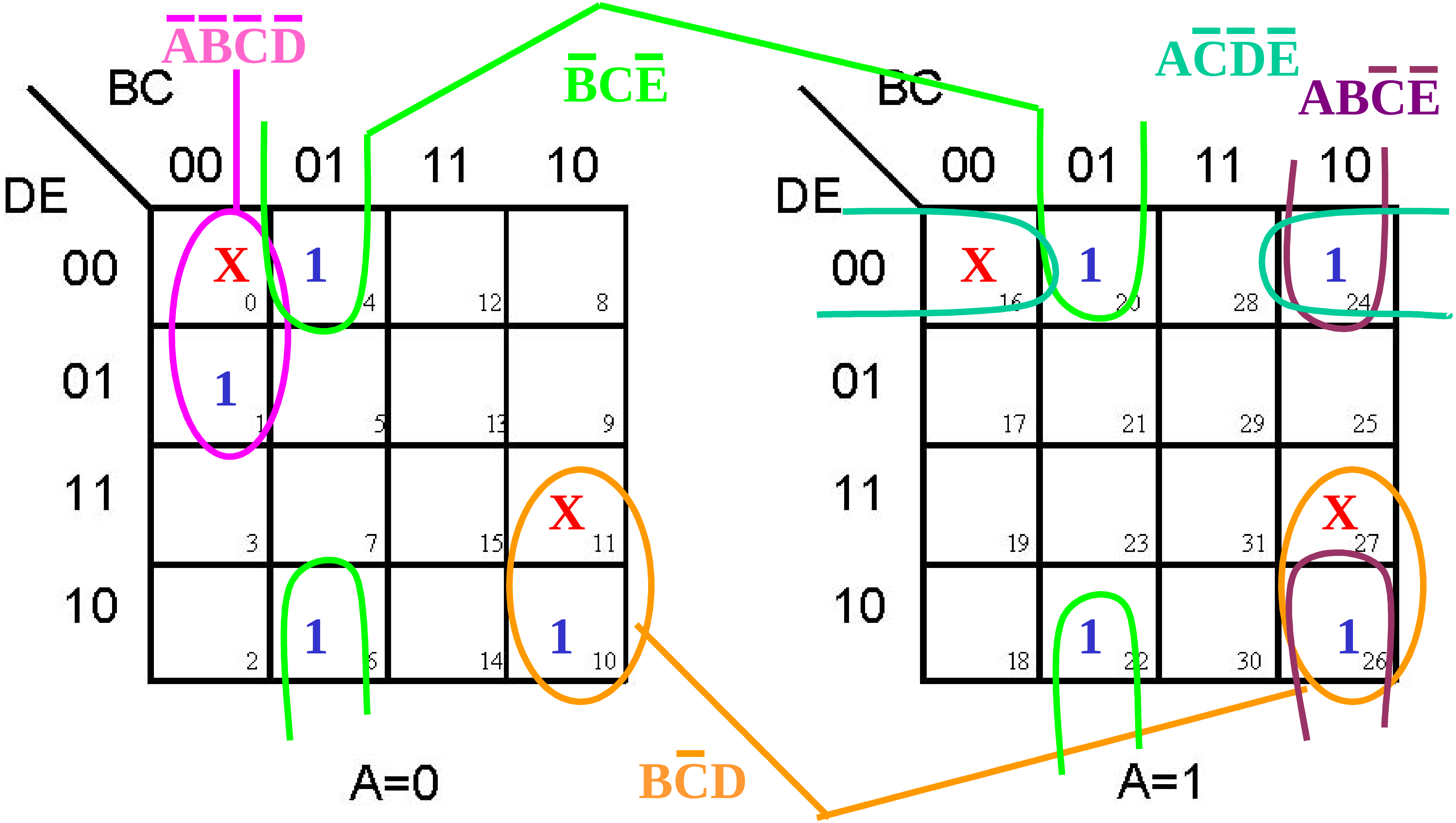
En alguns casos existeixen determinades combinacions dels bits d'entrada que no es donaran mai.

De cara a les simplificacions les podem interpretar com a 1 o com a 0, segons ens interessi i sense pressuposar el seu valor.

La representació com a SOP és:

$$\sum\phi\,(.....) \quad \text{o bé} \quad \sum d\,(....)$$

$$f(A, B, C, D, E) = \Sigma m\,(1, 4, 6, 10, 20, 22, 24, 26) + \Sigma\phi\,(0, 11, 16, 27)$$



$$f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{E} + B \cdot \overline{C} \cdot D$$