ÀLGEBRA (EI)
Curs 2018-2019
Matrius, Sistemes d'equacions i Determinants
LLista 1

1. Per a les matrius següents, indiqueu quines parelles es poden sumar i quines es poden multiplicar i en quin ordre. Feu tots els productes possibles entre parelles d'aquestes matrius.

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Per a les matrius de l'exercici anterior, decidiu si les operacions següents són possibles i, per a les que ho siguin, feu el càlcul.

$$A \cdot D^T + E + F \cdot C, \qquad (A + D) \cdot E, \qquad B \cdot E \cdot C \cdot F, \qquad (B + E) \cdot C.$$

3. Per a les matrius següents, indiqueu quines parelles es poden sumar i quines es poden multiplicar i en quin ordre.

$$A1 := \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \\ 13 \\ 44 \end{pmatrix}, \quad A2 := \begin{pmatrix} 54 & 12 & -16 & 4 \end{pmatrix}, \quad A3 := \begin{pmatrix} 15 & 27 & 32 \\ -2 & -43 & -85 \\ 39 & -23 & 17 \end{pmatrix},$$

$$A4 := \begin{pmatrix} 77 \\ 13 \\ 0 \\ 99 \end{pmatrix}, \quad A5 := \begin{pmatrix} 56 & 23 & -14 & 56 \\ 13 & 3 & 34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A6 := \begin{pmatrix} 10 & 75 & 28 & -14 \\ -2 & 45 & 19 & -87 \end{pmatrix}.$$

4. Per a les matrius de l'exercici anterior, decidiu si les operacions següents són possibles.

$$A1 \cdot A4^T + A5 + A6 \cdot A3, \qquad (A1 + A2) \cdot A3, \qquad A2 \cdot A5 \cdot A3 \cdot A6, \qquad (A1 + A4) \cdot A2.$$

5. Comproveu que les matrius següents no commuten entre si.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Digueu quines de les matrius següents admeten inversa i, en aquest cas, calculeu-la.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Resoleu utilitzant eliminació de Gauss el sistema de dues equacions

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ 3x + 6y &= 18 \end{cases}$$

8. Utilitzeu el mètode de Gauss per resoldre

a) $\begin{cases} 2x-3y &= 3\\ 4x-5y+z &= 7\\ 2x-y-3z &= 5.\end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z &= 2\\ x+3y+3z &= 0\\ x+3y+5z &= 2.\end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z &= 6\\ x+2y+2z &= 11\\ 2x+3y-4z &= 3.\end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+2y+3z &= 0\\ x-4y-13z &= 0\\ -3x+5y+4z &= 0.\end{cases}$ e) $\begin{cases} x-y+2z+3t &= 1\\ -x+y+2w-5t &= 5\\ x-y+4z+2w+4t &= 13\\ -2x+2y-5z-w-3t &= -1.\end{cases}$

f) $\begin{cases} x+3y+2z &= 5\\ 2x-y-z &= 1\\ -x+2y+z &= 3.\end{cases}$

9. En la següent taula, files i columnes sumen el que s'indica en negreta. Busqueu el valor de les indeterminades.

x_1	x_2	x_3	**30**
x_4	x_5	x_6	**12**
16	**14**	**12**	

10. Trobeu els valors del paràmetre **m** que fan compatibles els sistemes següents.

a) $\begin{cases} 5x + 3y = 3\\ 5x + 2y = 2\\ 5x + \mathbf{m}y = 2\end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7\\ 7x + 2y = 5\\ (\mathbf{m}+3)x - \mathbf{m}y = 3\end{cases}$

11. Discutiu els sistemes d'equacions següents en funció dels valors dels paràmetres **a** i **b**. Calculeu la solució quan sigui possible.

a) $\begin{cases} x + y + \mathbf{a}z = 1\\ x - \mathbf{a}y + z = -1\\ x + \mathbf{a}y + z = \mathbf{b}\end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathbf{a}x + y + \mathbf{a}z = 1\\ x - y + z = \mathbf{b}\\ \mathbf{a}x + (\mathbf{a}-1)y - z = -1\end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + \mathbf{a}z = \mathbf{b}\\ -x - \mathbf{a}y - z = 2\\ x + \mathbf{a}y + \mathbf{b}z = -2\end{cases}$ d) $\begin{cases} x + \mathbf{a}\,y - z = 1\\ -\mathbf{a}\,x - y + (2+\mathbf{a})\,z = 2-\mathbf{a}\\ -x - \mathbf{a}\,y - \mathbf{a}\,z = \mathbf{b}.\end{cases}$

12. Trobeu tots els valors de **a** i **b** pels quals el sistema d'equacions següent sigui compatible determinat, i $(x,y,z)=(0,-2,2)$ és la (única) solució:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6\\ x - \mathbf{a}y - \mathbf{a}\,z = 0\\ -\mathbf{a}\,x + y + 7z = \mathbf{b}.\end{cases}$$

13. Escriviu els sistemes d'equacions lineals de l' exercici 8 en notació matricial $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$, i resoleu-ho utilitzant la regla de Cramer en els casos en què això sigui possible.

14. (Examen Final 2013) Discutiu, en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$, el següent sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + a\,x_2 - 2\,x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 & = & -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3\,x_4 & = & 1 \\ (2a-2)\,x_2 - 4\,x_3 + 3\,x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

15. Utilitzeu el mètode de Gauss per a calcular el rang de les matrius següents i calculeu la inversa de les que en tinguin.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 13 & -30 & -49 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & -6 \\ -5 & -10 & 9 & -15 \\ -6 & -12 & 27 & -18 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & -6 \\ -5 & -10 & 9 & -15 \\ -6 & -12 & 12 & -19 \end{pmatrix},$$

16. Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$, calculeu els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

17. Calculeu els determinants següents:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

18. Calculeu el següents determinants:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

19. Resoleu l'equació:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 3 & x \end{vmatrix} = -1.$$

20. Trobeu par a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matriu M és invertible:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -3 \\ 5 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 3 & \alpha & 4 \\ 5 & 5 & \alpha \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 3 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & -8 & \alpha-1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

21. (Parcial 2013) Calculeu el determinant de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1+x & x & x \\ 1+x & x & x & x \\ x & x & 1+x & x \\ x & x & & 1+x \end{pmatrix}$$

22. (Examen Final 2013) Calculeu, en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$, el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2a-2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

23. (Examen Parcial 2014) Calculeu el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

24. (Examen Parcial 2014) Discutiu, en funció dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$, el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + a\,x_3 & = & 1 \\ x_1 + a\,x_2 + x_3 & = & 1 \\ a\,x_1 + x_2 + x_3 & = & b \end{cases}$$

25. (Examen Final 2014)

(a) (7 punts) Discutiu, en funció dels parmetres $a, b \in \mathbb{R}$, el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + a\,z &= &1 \\ x - a\,y + z &= &-1 \\ x + a\,y + z &= &b. \end{cases}$$

(b) (3 punts) Calculeu el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

26. (Examen Reavaluació 2014)

(a) (7 punts) Discutiu, en funció dels parmetres $a, b \in \mathbb{R}$, el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x & +y & & = 2 \\ & ay & +z & = 3 \\ x & +ay & -z & = b. \end{cases}$$

Trobeu les solucions per al cas en qu sigui compatible indeterminat.

(b) (3 punts) Calculeu el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$