UNIVERSITAT DE BARCELONA

# Ramificació i Poda

**Algorísmica Avançada | Enginyeria Informàtica**

Santi Seguí | 2021-2022

# Ramificació i poda

*més conegut com* ***Branch and Bound***

# Ramificació i poda

- Els algoritmes de **ramificació i poda implementen** l'algoritme de **backtracking**, però no a l'inversa.

- L'objectiu de ramificació i poda consisteix en reduir l'espai de cerca, per això s'introdueixen **cotes.** Podem fer ús d'aquestes cotes per **ramificar** i **podar** l'espai de cerca.

- Els podem veure com una variant millorada del backtracking aplicada majoritàriament a problemes **optimització** combinatòria o matemàtica.

  - Utilitzat per a problemes **d'optimització**:

    - e.g.: $min_{x \in X} f(x)$

# Ramificació i poda

- Un dels punts principals dels algoritmes de ramificació i poda és **trobar i definir una funció que determinarà la cota inferior i/o superior al problema optimització** que volem resoldre. Un cop definida aquesta funció s'explora el node més prometedor en cada etapa i es rebutja (poda) l'exploració de tots aquells nodes quan la cota superior és menor (o bé la cota inferior és major en cas d'un problema de minimització) a una solució ja trobada.

- No limita l'exploració a la cerca amb profunditat (DFS).

# Ramificació i poda

Que ens diuen les cotes:

- La **cota superior** ens indica la solució màxima que podríem (no assegura) arribar a trobar si seguim el node donat.
- La **cota inferior** ens indica la solució mínima que podríem (no assegura) arribar a trobar si seguim el node donat.
- En problemes de **maximització**, ens interessa explorar tots aquells nodes on la seva cota superior sigui més gran que la millor solució trobada fins el moment
- En problemes de **minimització**, ens interessa explorar tots aquells nodes on la seva cota inferior sigui més petita que la millor solució trobada fins el moment

# Ramificació i poda

- A la **ramificació i poda** tenim tres tipus de nodes:
  - **Nodes actius**: és un node que s'ha generat però té els fills sense generar.
  - **E-Node**: és un node viu amb els fills que s'estan generant actualment.
  - **Dead node**: és un node generat que no s'expandirà ni explorarà més.

# Ramificació i poda

El **pseudocodi** d'un algoritme de ramificació i poda pot seguir el següent esquema:

```
def branch_and_bound():
    activeset = [root_node]
    best_solution = None

    while(activset not empty):
        choose the most promising node k from activeset
        remove the node k from activeset
        generate the children of node k and estimate its lower and upper bound
        for each child i of node k:
            if (upper bound of child i is worse than bestval):
                kill child i
            elif(child i is a complete solution):
                bestval = solution
            else:
                add child i to activeset
```

# Ramificació i poda

## Problema assignació de tasques

- **Problema**: Tenim 4 tasques i 4 empreses disponibles que poden realitzar-les. Cada empresa ens ha ofert una solució a cada una de les tasques amb un cost X. Volem assignar una única tasca diferent a cada empresa tal que el **cost total sigui el mínim**.

  → **Objectiu**: assignar un projecte a cada empresa **minimitzant** el cost total.

- El cost de les tasques per a cada una de les empreses està definit segons la següent taula:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

*Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.*

# Ramificació i poda

- **Cota inferior:** suma mínims de cada columna. És a dir, assignem a cada tasca l'empresa més econòmica sense tindre en compte una de les restriccions del problema.

$$z^* \geq 11 + 12 + 13 + 22 = 58$$

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

*Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.*

- **Cota superior: Una solució qualsevol**

$$a \rightarrow A, b \rightarrow B, c \rightarrow C, d \rightarrow D$$
$$z^* \leq 11 + 15 + 19 + 28 = 73$$

# Ramificació i poda

- Comencem la cerca
  - El primer pas consisteix en assignar una tasca a l'empresa **a**

$$z^* \geq 11 + 12 + 13 + 22 = 58$$

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

*Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.*

$$58 \leq z^* \leq 73$$

# Ramificació i poda

- Comencem la cerca
  - El primer pas consisteix en assignar una tasca a l'empresa **a**

$$z^* \geq 11 + 12 + 13 + 22 = 58$$

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

*Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.*

$$58 \leq z^* \leq 73$$

# Ramificació i poda

- Comencem la cerca
  - El primer pas consisteix en assignar una tasca a l'empresa **a**

$$z^* \geq 11 + 12 + 13 + 22 = 58$$

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

*Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.*

$$58 \leq z^* \leq 73$$

# Ramificació i poda

- ***Branching***: quina rama resulta més interessant per a ser explorada?

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

*Coste de las empresas a,b,c y d, por los proyectos A,B,C y D.*

# Ramificació i poda

**Hem trobat una solució, per tant tenim una nova cota superior**

$$58 \leq z^* \leq 64$$

# Ramificació i poda

$$58 \leq z^* \leq 64$$

# Ramificació i poda

- ***Solució:*** *61*

# Ramificació i poda

Solució: 61

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 11 | 12 | 18 | 40 |
| b | 14 | 15 | 13 | 22 |
| c | 11 | 17 | 19 | 23 |
| d | 17 | 14 | 20 | 28 |

# Ramificació i poda

- Fes l'arbre de ramificació i poda de la següent taula (seguint el problema de l'exemple anterior). Numera els passos i actualitza els valors de les cotes.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 13 | 3 | 12 |
| b | 3 | 5 | 9 | 20 |
| c | 5 | 10 | 2 | 17 |
| d | 7 | 2 | 10 | 21 |

# Ramificació i poda

## Problema de la motxilla

Solució amb **ramificació i poda?**

Ens trobem en front un problema de **maximització**.

# Ramificació i poda

## Problema de la motxilla

- Definim com calcular la cota inferior i la cota superior. Les podem calcular de la següent manera:

  - **Cota superior**: Agafem tots els objectes que **individualment** càpiguen dins la motxilla. En el nostre cas, donat que la motxilla té una capacitat màxima de 15kg, podrem considerar tots els objectes que individualment pesin menys de 15kg. Per tant, en el nostre exemple, la cota superior inicial equival a 4+2+1+10+2 = 19$.

  - **Cota inferior**: Agafem els primers objectes de la llista fins a arribar a la capacitat màxima de la motxilla. En el nostre exemple, la cota inferior inicial equival a 4+2+1 = 7$.

# Ramificació i poda

## Problema de la motxilla

- Considerem un primer objecte, en aquest cas l'objecte de verd amb valor de $4 i pes de 12kg.

- Calculem la cota superior i inferior de les dues opcions (agafar i no agafar l'objecte) i en cas que la seva cota superior sigui millor que el millor resultat obtingut fins aleshores afegim el fill a la llista de nodes a explorar.

- **Si agafem l'objecte verd:**
  - **Cota superior**: 4$ + el valor de la resta d'objectes que **individualment** càpiguen dins la motxilla (4+2+2+1). L'objecte groc no es considerat ja que la capacitat restant de la motxilla és 3kg i l'objecte groc pesa 4 kg. Cota Superior: 9$
  - **Cota inferior**: 4$ + el valor dels objectes següents fins arribar a la capacitat màxima. Cota Inferior: 4 + 2 + 1 = 7$
  - –> La cota superior és més gran que la cota inferior actual-> afegim l'opció com a opció a explorar

**cota inferior:** 7$

# Ramificació i poda

## Problema de la motxilla

- Considerem un primer objecte, en aquest cas l'objecte de verd  amb valor de $4 i pes de 12kg.

- Calculem la cota superior i inferior de les dues opcions (agafar i no agafar l'objecte) i en cas que la seva cota superior sigui millor que el millor resultat obtingut fins aleshores afegim el fill a la llista de nodes a explorar.

- **Si NO agafem l'objecte verd:**
    - **Cota superior**: El valor de la resta d'objectes que **individualment** càpiguen dins la motxilla (2+10+2+1). Cota Superior: 15$
    - **Cota inferior**: El valor dels objectes següents fins arribar a la capacitat màxima. Cota Inferior: 2 + 10 +2 +1 = 15$
  - –> La cota superior és més gran que la cota inferior actual-> afegim l'opció com a opció a explorar
  - -> Actualitzem la cota inferior.

**cota inferior:** 7$

# Ramificació i poda

## Problema de la motxilla

- Tercer pas: Decidim el següent node a explorar tenint en compte la cota inferior i/o la cota superior de tots els nodes actius. En el nostre cas tenim 2 nodes actius. Explorem el node corresponent a no agafar l'objecte verd, ja que aquest node té una cota superior més gran.

# Problema de la motxilla

**Definim cota inferior:** 7$

# Problema de la motxilla

**Definim cota inferior:** 15$

# Problema de la motxilla

**Definim cota inferior:** 15$

# Ramificació i poda

## Puzzle 8

- Donat un taulell de 3x3 amb 8 números i un espai buit. L'objectiu és col·locar els números a les cel·les perquè coincideixin amb la configuració final. Podem lliscar les cel·les adjacents (dreta, esquerra, amunt i avall) a l'espai buit. Exemple:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 8 | | 4 |
| 7 | 6 | 5 |

Configuració Inicial

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 5 | 8 | 6 |
| | 7 | 4 |

Configuració Final

# Ramificació i poda

## Puzzle 8: **Solució per força bruta**

- Podem fer una cerca utilitzant el mètode DFS (Mirem de totes les configuracions d'un problema determinat, és a dir, tots els estats als quals es pot accedir des de l'estat inicial).

- Aquesta solució té un problema donat que els moviments successius ens poden allunyar de l'objectiu en lloc d'apropar-nos. Pot ser que no es trobi mai una solució amb aquest enfocament.

# Ramificació i poda

## Puzzle 8 - Solució amb ramificació i poda

Associem a cada node de l'arbre un cost. El cost ens permetrà determinar quin és el següent **E-node.** El següent **E-node** serà aquell amb un **cost menor**. Com podem definir el cost de cada node?

## Solució amb ramificació i poda

La funció de cost per al problema anterior:
Assumim que moure una cel·la cap a qualsevol direcció té un cost de 1.

- $C(X) = g(X) + h(X)$ on:
  - $g(X)$ és el cost d'arribar al node X des de l'arrel. És a dir, el número de moviments realitzats fins aleshores.
  - $h(X)$ és el cost d'arribar a una solució des de el Node X. Podem estimar el número de moviments mínims que s'han de realitzar mirant el número de posicions on tinguem un número i aquest sigui diferent del número objectiu de la solució.

**Configuració Inicial**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 5 | 6 | |
| 7 | 8 | 4 |

**Configuració Final**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 5 | 8 | 6 |
| | 7 | 4 |

# Problema del viatjant de comerç

# Problema del viatjant de comerç

- Problema: Trobar un recorregut de longitud mínima per a un viatger que hagi de visitar diverses ciutats i després tornar al punt d'inici, on la distancia existent entre cada parella de ciutats és coneguda.

- És a dir, donat un graf dirigit amb arestes amb cost positiu, es vol trobar un **circuit de longitud mínima** que **comenci i acabi** en el **mateix node passant** exactament un cop per a cada un dels **nodes restants.**

  - → Passar per tots els nodes **minimitzant** el cost de la ruta, passant només un cop per cada node i acabant en el node de sortida (circuit ***hamiltonià***)

Solució amb

**ramificació i poda**?

# Ramificació i poda

- La **clau**: funció de **prioritat i cota**

- Per tal de resoldre el problema del viatjant de comerç, mitjançant el mètode de ramificació i poda,haurem de construir un **arbre** on les **fulles** siguin **camins hamiltonians.**

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

- Formalitzem el problema
  - Sigui $G = (V, A)$ un graf dirigit

    $V = \{1,2,..,n\}$

    $D[i, j]$ el cost de l'aresta entre el node i i j on$(i, j) \in A$

    $D[i, j] = \inf$ si $(i, j) \notin A$
  - Comencem en nostre circuit en el node $i$
  - Els candidats seran: $E = \{1,X,1 \mid X$ es una permutació de (2,3,...,n)$\}$
    - **Solucions factibles:**
    - $E = \{1,X,1 \mid X = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},$ **es una permutació de (2,3,...n) tal que**$(i_j, i_{j+1}) \in A, 0 < j < n, (1,x_1) \in A, (x_{n-1,1}) \in A\}$
  - **Funció objectiu:**
    - $F(X) = D[1,x_1] + D[x_1, x_2] + D[x_2, x_3] + \ldots + D[x_{n-2}, x_{n-1}, D[x_{n-1},1]$

# Ramificació i poda

- Definició d'una **cota** ($X$,$k$) molt senzilla:
  - Suma de les arestes ja escollides

$$cota(X,k) = D[1,X_1] + \sum_{i=1,\ldots,k-2} D[X_i, X_{i+1}] + D[X_{k-1},1]$$

  - Exemple: (n=5)

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

- **Cota senzilla**: Suma de les arestes ja escollides

$$cota(X,k) = D[1,X_1] + \sum_{i=1,\ldots,k-2} D[X_i, X_{i+1}] + D[X_{k-1},1]$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Cota superior: Un camí qualsevol

Suposem el camí: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{20} & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & \boxed{16} & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \boxed{2} & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & \boxed{3} \\ \boxed{16} & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

**Cota superior:**

**20** + 16 + 2 + 3 +16 = **57**

**30** + 4 + 4 + 19 + 4 = **54**

**10** + 2 + 3 + 6 + 7 = **28**

**11** + 15 + 5 + 18 +16 = **65**

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{20} & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & \boxed{16} & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \boxed{2} & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & \boxed{3} \\ \boxed{16} & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & \boxed{30} & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & \boxed{4} & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & \boxed{4} \\ \boxed{19} & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & \boxed{4} & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & \boxed{10} & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & \boxed{6} & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & \boxed{7} & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & \boxed{11} \\ \boxed{15} & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & \boxed{5} & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & \boxed{18} & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & \boxed{16} & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{20} & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & \boxed{16} & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \boxed{2} & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & \boxed{3} \\ \boxed{16} & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & \boxed{30} & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & \boxed{4} & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & \boxed{4} \\ \boxed{19} & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & \boxed{4} & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & \boxed{10} & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & \boxed{6} & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & \boxed{7} & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & \boxed{11} \\ \boxed{15} & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & \boxed{5} & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & \boxed{18} & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & \boxed{16} & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 4 \\ \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 16 & \infty & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \boxed{10} & \infty \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 4 \\ \infty & \boxed{6} & \infty & \infty & \infty \\ 16 & \infty & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \boxed{10} & \infty \\ 15 & \infty & \infty & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ \infty & \infty & \boxed{18} & \infty & \infty \\ 16 & 4 & \infty & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

# Ramificació i poda

Però que ens diu la cota superior???

Podem millorar aquesta solució utilitzant la **cota inferior** enlloc de la cota superior.

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

# Ramificació i poda

## Travelling Salesman Problem

**Cota superior** = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

**Cota inferior:**

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 15 & \infty & 16 & \infty & 2 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ 16 & \infty & 7 & \infty & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 15 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 18 & \infty & \infty \\ 16 & 4 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ 15 & \infty & 16 & \infty & \infty \\ 3 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

El problema està en com calcular, de la millor manera,
les **cotes**

# Una solució mitjançant la Matriu Reduïda

# Ramificació i poda

- Si s'escull *t* com el mínim dels elements de la fila (columna) i-essima i es resta *t* de tots els elements de la fila (columna), la fila resultant (columna) es reduïda.

- La reducció de la matriu s'aconseguix fent la reducció per files i columnes de la matriu.

- La quantitat total ***L*** restada de files i columnes és una **cota inferior** de la longitud d'un circuit hamiltonià de longitud mínima.

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Reducció de la matriu,
L = 25

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & \mathbf{12} & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & \mathbf{12} \\ 3 & \mathbf{1} & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Quina es la matriu reduïda?
Quin cost té la reducció?

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{10} & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$c^- = 25 + 10 = 35$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Totes les columnes i files tenen un 0

La matriu ja està reduïda

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & \boxed{17} & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 11 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

La matriu no està reduïda, l'hem de reduir

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 11)

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Totes les columnes i files
tenen un 0
La matriu està reduïda

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & \boxed{1} \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & 2 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 15 & 3 & 12 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

La matriu no està reduïda, l'hem de reduir

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 5)

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & \boxed{1} \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \boxed{3} & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$c^- = 25 + 3 = 28$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

La matriu està reduïda

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \boxed{12} & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Necessitem reduir matriu

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 13)

# Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & \boxed{0} \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Necessitem reduir matriu

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 11)

# Ramificació i poda

Es una fulla (solució)
S'actualitza UB = 28

El següent node en curs seria el 5,
però cost(5)>UB
per tant l'algoritme termina i el
hamiltonià mínim es
1,4,2,5,3,1

# Ramificació i poda

- Càlcul de la cota inferior. Suposarem que tots els camins comencen i acaben al **node 1**
  - Sigui **A** la matriu reduïda per a un **node *i***.
  - Sigui ***j*** un veí de ***i*:**.
  - La **matriu B** reduïda per **j**, i per tant la $c^{-}(j)$, és calcula de la següent forma:
    1. Canviar tots els elements de la fila ***i*** i de la columna ***j*** de ***A*** per ∞.

       Així evitem incloure més arestes que surtin de **i** o arribin a **j**
    2. Canviar l'element (***j***,**1**) de ***A*** per ∞.

       Així evitem considerar l'aresta (**j**,**1**).
    3. Reduïm la matriu resultat per obtenir **B**.

       Si ***r*** es el valor total de la reducció de la matriu en el pas (3): $c^{-}(j) = c^{-}(i) + A[i,j] + r$