Ejercicio 1. Determinar si las siguientes fórmulas son satisfactibles, tautologías o contradicciones.

$\varphi_1 = P \to (Q \to \neg P)$,
$\varphi_2 = (P \to Q) \wedge (P \vee Q)$,
$\varphi_3 = ((P \wedge Q) \to R) \to (P \to (\neg Q \vee R))$,
$\varphi_4 = (P \wedge Q) \to (P \vee Q)$,
$\varphi_5 = ((P \to Q) \to P) \to Q$,
$\varphi_6 = (P \to \neg(Q \vee R)) \wedge (P \wedge (\neg Q \to R))$.

Solución:

(a) $\varphi_1 \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \equiv \neg P \vee \neg Q$. Por tanto, ϕ_1 es satisfactible pero no tautología.

$\varphi_2 \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \equiv Q \vee (P \wedge \neg P) \equiv Q \vee F \equiv Q$. Por tanto, ϕ_2 es satisfactible pero no tautología.

φ_3 es tautología. Para comprobarlo, consideremos una σ-interpretación I donde $\sigma = \{P, Q, R\}$. Supongamos que $I((P \wedge Q) \to R)) = V$ y que $I(P) = V$. Tenemos que demostrar que $I(\neg Q \vee R) = V$. Si $I(Q) = F$, se sigue que $I(\neg Q \vee R) = V$. Supongamos entonces que $I(Q) = V$. Como $I((P \wedge Q) \to R)) = V$, $I(P) = V$ e $I(Q) = V$, se tiene que $I(R) = V$, y por tanto $I(\neg Q \vee R) = V$.

$\varphi_4 \equiv \neg P \vee \neg Q \vee P \vee Q$. Como $\neg P \vee P$ es una tautología, ϕ_1 es una tautología.

φ_5 es satisfactible pero no tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = V$, tenemos que $I(\phi_2) = V$. Y si tomamos la interpretación I' definida por $I'(P) = V$ e $I'(Q) = F$, tenemos que $I'(\phi_2) = ((V \to F) \to V) \to F = (F \to V) \to F = V \to F = F$.

φ_6 es contradicción, ya que $\neg(P \to \neg(Q \vee R)) \equiv P \wedge \neg\neg(Q \vee R) \equiv P \wedge (Q \vee R) \equiv P \wedge (\neg Q \to R)$. Por tanto, tenemos que $\phi_3 \equiv \psi \wedge \neg\psi$ donde $\psi = P \to \neg(Q \vee R)$, y por consiguiente ϕ_3 es insatisfactible.

Exercicio 2. Consideremos las siguientes fórmulas:

$\varphi_1 = (P \vee \neg Q) \to (P \vee R)$,
$\varphi_2 = (\neg P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (R \wedge P)$,
$\varphi_3 = (P \to (\neg Q \vee \neg R \vee S)) \to ((P \wedge Q \wedge R) \to S)$.

Se pide entonces:

(1) Determinar si φ_1, φ_2 y φ_3 son tautologías, satisfactibles o contradicciones.

(2) Calcular formas normales conjuntivas de φ_1, φ_2, y φ_3.

Solución:

(1) La fórmula φ_1 es satisfactible, pero no es tautología. Si tomamos la interpretación I definida por $I(P) = I(Q) = I(R) = V$, tenemos que $I(\varphi_1) = V$. Y si $I(P) = I(Q) = I(R) = F$, tenemos $I(\varphi_1) = F$.

La fórmula φ_2 es satisfactible, pero no es tautología. Si $I(P) = I(R) = V$, tenemos que $I(\varphi_2) = V$ con independencia del valor de $I(Q)$. Y si $I(P) = I(Q) = F$, tenemos que $I(\varphi_2) = F$ con independencia del valor de $I(R)$.

La fórmula φ_3 es tautología, debido a que el antecedente de la implicación principal es equivalente al consecuente, ya que tenemos por un lado que

$$P \to (\neg Q \vee \neg R \vee S) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S,$$

y por otra parte tenemos que

$$(P \wedge Q \wedge R) \to S \equiv \neg(P \wedge Q \wedge R) \vee S \equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S.$$

Así pues, $\varphi_3 \equiv (\varphi \to \varphi)$ donde $\varphi = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S$, y por tanto φ_3 es una tautología.

(2) Tenemos que $\varphi_1 = (P \vee \neg Q) \to (P \vee R) \equiv \neg(P \vee \neg Q) \vee (P \vee R) \equiv (\neg P \wedge Q) \vee (P \vee R) \equiv (P \vee R \vee \neg P) \wedge (P \vee R \vee Q) \equiv V \wedge (P \vee R \vee Q) \equiv P \vee R \vee Q$.

Por tanto, $P \vee R \vee Q$ es una forma normal conjuntiva de φ_1.

Por otra parte, tenemos que

$\varphi_2 = (\neg P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee (R \wedge P) \equiv [(R \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q)] \wedge [(R \wedge P) \vee (\neg P \vee \neg R)] \equiv [(R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)] \wedge [(\neg P \vee$

$\neg R \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee P)] \equiv [(R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge V \wedge (P \vee Q)] \wedge [V \wedge V] \equiv [(R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (P \vee Q)] \wedge V \equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (P \vee Q)$.

Por tanto, $(R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (P \vee Q)$ es una forma normal conjuntiva de φ_2.

Y como φ_3 es una tautología, tenemos que $\varphi_3 \equiv V$.

Ejercicio 3. Poner las siguientes fórmulas en forma normal conjuntiva:

$\varphi_1 = (P \wedge \neg Q) \vee R$,
$\varphi_2 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R)$,
$\varphi_3 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P)$,
$\varphi_4 = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q)$.

Solución:

$\varphi_1 = (P \wedge \neg Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$,

$\varphi_2 = P \vee (R \to Q) \vee ((\neg S \wedge \neg P) \to \neg R) \equiv P \vee (\neg R \vee Q) \vee (\neg(\neg S \wedge \neg P) \vee \neg R) \equiv (P \vee \neg R \vee Q) \vee (S \vee P \vee \neg R) \equiv P \vee \neg R \vee Q \vee S$,

$\varphi_3 = \neg(P \leftrightarrow R) \to (\neg Q \vee P) \equiv (P \leftrightarrow R) \vee (\neg Q \vee P) \equiv ((\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee P)) \vee (\neg Q \vee P) \equiv (\neg P \vee R \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P \vee \neg Q \vee P) \equiv \neg R \vee P \vee \neg Q$,

$\varphi_4 = ((P \vee Q) \to R) \vee (T \to Q) \equiv (\neg(P \vee Q) \vee R) \vee (\neg T \vee Q) \equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \vee (\neg T \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \vee \neg T \vee Q) \equiv (\neg P \vee R \vee \neg T \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R \vee \neg T \vee Q) \equiv \neg P \vee R \vee \neg T \vee Q$.

Ejercicio 4. En una empresa de artes gráficas se quiere pintar un mapa de n países con 4 colores de manera que no haya dos países vecinos que tengan el mismo color. Formalizar entonces este problema mediante una fórmula en forma normal conjuntiva para que pueda ser resuelto por un SAT-solver.

Solución:

Para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq 4$ consideramos la proposición Pij que significa que al país i le asignamos el color j.

(1) A cada país se le asigna un color.

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ ponemos la cláusula

$Pi1 \vee Pi2 \vee Pi3 \vee Pi4$.

(2) A ningún país se le asigna más de un color.

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para todo $j, j' \in \{1, \ldots, 4\}$ con $j \neq j'$ añadimos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pij'$.

(3) A dos países vecinos no se les asigna el mismo color.

Para cada par de países $i, i' \in \{1, \ldots, n\}$ tales que i, i' son países vecinos y para cada color $j \in \{1, \ldots, 4\}$ añadimos la cláusula

$\neg Pij \vee \neg Pi'j$.

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2) y (3).

Ejercicio 5. Tenemos m tareas (numeradas por $1, \ldots, m$) y n personas para llevarlas a cabo (numeradas por $1, \ldots, n$). Para cada tarea t tenemos la lista L_t de las personas que pueden realizar la tarea t. Fijamos un número $k < n$. Queremos saber si es posible formar un equipo de k personas de manera que para cada tarea haya al menos una persona en el equipo que la sepa realizar. Se pide entonces formalizar este problema mediante una fórmula en forma normal conjuntiva para que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para ello, para $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, considerar la proposición Pij que significa que "el miembro i-ésimo del equipo es la persona j".

Solución:

Tenemos que formalizar las siguientes condiciones:

(1) Cada miembro del equipo corresponde a una única persona.
Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ y para cada $j, j' \in \{1, \ldots, n\}$ con $j \neq j'$, ponemos la cláusula $\neg Pij \vee \neg Pij'$.

(2) Para cada tarea hay alguna persona en el equipo que la sabe realizar.
Para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, si $L_t = \{j_1, \ldots, j_r\}$, ponemos la cláusula
$P1j_1 \vee \ldots \vee P1j_r \vee P2j_1 \vee \ldots \vee P2j_r \vee \ldots \vee Pkj_1 \vee \ldots \vee Pkj_r$.

La FNC requerida es entonces la conjunción de las cláusulas de (1) y (2).

Ejercicio 6. Queremos organizar los turnos de guardia nocturna de 20 farmacias de una ciudad durante un período de 60 noches. Cada noche tiene que haber exactamente una farmacia de guardia. Cada farmacia k proporciona entonces una lista L_k de noches en las que no puede estar de guardia. Se trata entonces de asignar los turnos de guardia respetando las restricciones de las listas L_k de las farmacias.

Se pide representar el problema mediante una fórmula proposicional en forma normal conjuntiva de manera que pueda ser resuelto por un SAT-solver. Para hacer la representación, considerar para $1 \leq k \leq 20$ y para $1 \leq i \leq 60$, la proposición P_{ki} con el significado: "la farmacia k está de guardia la noche i".

Solución:

Tenemos que formalizar lo siguiente:

(1) En cada noche hay una farmacia de guardia.

Para cada $i \leq 60$ ponemos la cláusula

$$P1i \vee P2i \vee \ldots \vee P20i.$$

(2) En cada noche no hay dos farmacias de guardia.

Para cada $i \leq 60$ y para $k, k' \leq 20$ con $k \neq k'$ ponemos la cláusula

$$\neg Pki \vee \neg Pk'i.$$

(3) Se respetan las restricciones de las farmacias.

Para cada $k \leq 20$ y para cada $i \in L_k$ ponemos la cláusula

$$\neg Pki.$$

La fórmula buscada es entonces la conjunción de las cláusulas de (1), (2) y (3).

Ejercicio 7. Demostrar por resolución que la cláusula vacía $\square$ se deduce del conjunto de cláusulas $\{P \vee Q \vee \neg R, \neg P, P \vee Q \vee R, P \vee \neg Q\}$.

Solución:

Tenemos la siguiente prueba por resolución:

1. $P \vee Q \vee \neg R$ entrada
2. $\neg P$ entrada
3. $P \vee Q \vee R$ entrada
4. $P \vee \neg Q$ entrada
5. $P \vee Q$ (1,3)
6. P (4,5)
7. $\square$ (2,6)

Ejercicio 8. Demostrar por resolución que la fórmula φ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ donde:

$\varphi_1 = \neg E \to (\neg O \vee (L \wedge R))$,

$\varphi_2 = \neg E$,

$\varphi_3 = O$,

$\varphi = L$.

Solución:

Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi\}$ es insatisfactible. En primer lugar, hemos de encontrar una forma normal conjuntiva de φ_1. Tenemos que $\varphi_1 \equiv E \vee (\neg O \vee (L \wedge R)) \equiv (E \vee \neg O \vee L) \wedge (E \vee \neg O \vee R)$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1. $E \vee \neg O \vee L$ input
2. $E \vee \neg O \vee R$ input
3. $\neg E$ input
4. O input
5. $\neg L$ input
6. $\neg O \vee L$ (1,3)
7. L (4,6)
8. $\square$ (5,7)

Ejercicio 9. Demostrar por resolución que la fórmula $P \to Q$ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{T \to \neg P, S \to R, \neg Q \to U, R \to T, U \to S\}$.

Solución:

Tenemos que demostrar por resolución que la fórmula $(T \to \neg P) \wedge (S \to R) \wedge (\neg Q \to U) \wedge (R \to T) \wedge (U \to S) \wedge \neg(P \to Q)$ es una contradicción. Tenemos que $T \to \neg P \equiv \neg T \vee \neg P$, $S \to R \equiv \neg S \vee R$, $\neg Q \to U \equiv Q \vee U$, $R \to T \equiv \neg R \vee T$, $U \to S \equiv \neg U \vee S$ y $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1. $\neg T \vee \neg P$ input
2. $\neg S \vee R$ input
3. $Q \vee U$ input
4. $\neg R \vee T$ input
5. $\neg U \vee S$ input
6. P input
7. $\neg Q$ input
8. $\neg T$ (1,6)
9. $\neg R$ (4,8)
10. $\neg S$ (2,9)
11. $\neg U$ (5,10)
12. Q (3,11)
13. $\square$ (7,12)

Ejercicio 10. Demostrar por resolución que la fórmula φ es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ donde
$\varphi_1 = A \to \neg B \vee C$,
$\varphi_2 = A \to \neg B \vee D$,
$\varphi_3 = \neg G \to \neg E \vee \neg F$,
$\varphi_4 = \neg H \to \neg G \vee \neg D$,
$\varphi_5 = A \wedge B \wedge F \wedge E$ y
$\varphi = H$.

Solución:

Hemos de demostrar por resolución que el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \neg\varphi\}$ es insatisfactible. En primer lugar, hemos de computar formas normales conjuntivas de las fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Tenemos que $\varphi_1 \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$, $\varphi_2 \equiv \neg A \vee \neg B \vee D$, $\varphi_3 \equiv G \vee \neg E \vee \neg F$ y $\varphi_4 \equiv H \vee \neg G \vee \neg D$. Tenemos entonces la siguiente prueba por resolución:

1. $\neg A \vee \neg B \vee C$ input
2. $\neg A \vee \neg B \vee D$ input
3. $G \vee \neg E \vee \neg F$ input
4. $H \vee \neg G \vee \neg D$ input
5. A input
6. B input
7. F input
8. E input
9. $\neg H$ input
10. $\neg B \vee D$ (2,5)
11. D (6,10)
12. $G \vee \neg F$ (3,8)
13. G (7,12)

14. $H \vee \neg D$ (4,13)

15. H (11,14)

16. $\square$ (9,15)