Noções de Probabilidade

ALEATORIEDADE

CARA OU COROA ?

Qual será o rendimento da Caderneta de Poupança no fim deste ano?

E qual será a taxa de inflação acumulada em 2020?

Quem será o próximo presidente do Brasil?

Vai chover amanhã ?

Quantas pessoas, para locomoção urbana, trocarão o uso de bicicleta por um patinete elétrico, alugado em App de celular, nos próximos 12 meses?

A sua sinusite é viral ou bacteriana?

Experimento Aleatório: é aquele que, mesmo quando realizado sob condições fixas, não possui necessariamente um resultado pré-determinado.

Exemplos

1. Lançar uma moeda e observar o resultado; lançar um dado e observar o resultado.
2. Sortear um aluno da USP e perguntar sobre seu hábito de fumar.
3. Sortear um doador de sangue e verificar o seu tipo sanguíneo.

Espaço Amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Doador de sangue (tipo sanguíneo) .

   $\Omega = \{A, B, AB, O\}$

3. Hábito de fumar.

   Ω = {Fumante, Não fumante}

4. Tempo de duração de uma lâmpada.

   $\Omega = \{t \in R: t \geq 0\}$

- Os elementos de Ω são chamados de **pontos amostrais**.

Eventos: ocorrências no experimento aleatório / subconjuntos do espaço amostral Ω

Notação: A, B, C, ...

$\varnothing$ (conjunto vazio): *evento impossível*

Ω: *evento certo*

Exemplo: Lançamento de um dado.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A: sair face par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

B: sair face maior que 3 $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

C: sair face 1 $\Rightarrow C = \{1\} \subset \Omega$

D: sair face ímpar $\Rightarrow D = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$

Composição de eventos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

***$A \cup B$*: união dos eventos A e B.**

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B (ou ambos).

Ex.: Sair face par ou maior que 3

$$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{4,5,6\} = \{2,4,5,6\}$$

***$A \cap B$*: interseção dos eventos A e B.**

Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Ex.: Sair face par e maior que 3

$$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\}$$

- A e B são ***disjuntos*** ou ***mutuamente exclusivos*** quando não têm elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \varnothing$$

Ex.: sair uma face par e igual a 1
$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \varnothing$

- A e B são ***complementares*** se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

Ex.: sair uma face par e sair uma face ímpar são eventos complementares
$A \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{1,3,5\} = \varnothing$
$A \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega$

O evento complementar de A, representado por A^c, é o evento em Ω em que A não ocorre.

Ex.: não sair uma face par $\qquad A^c = \{1,3,5\}$

Diagrama de *Venn*

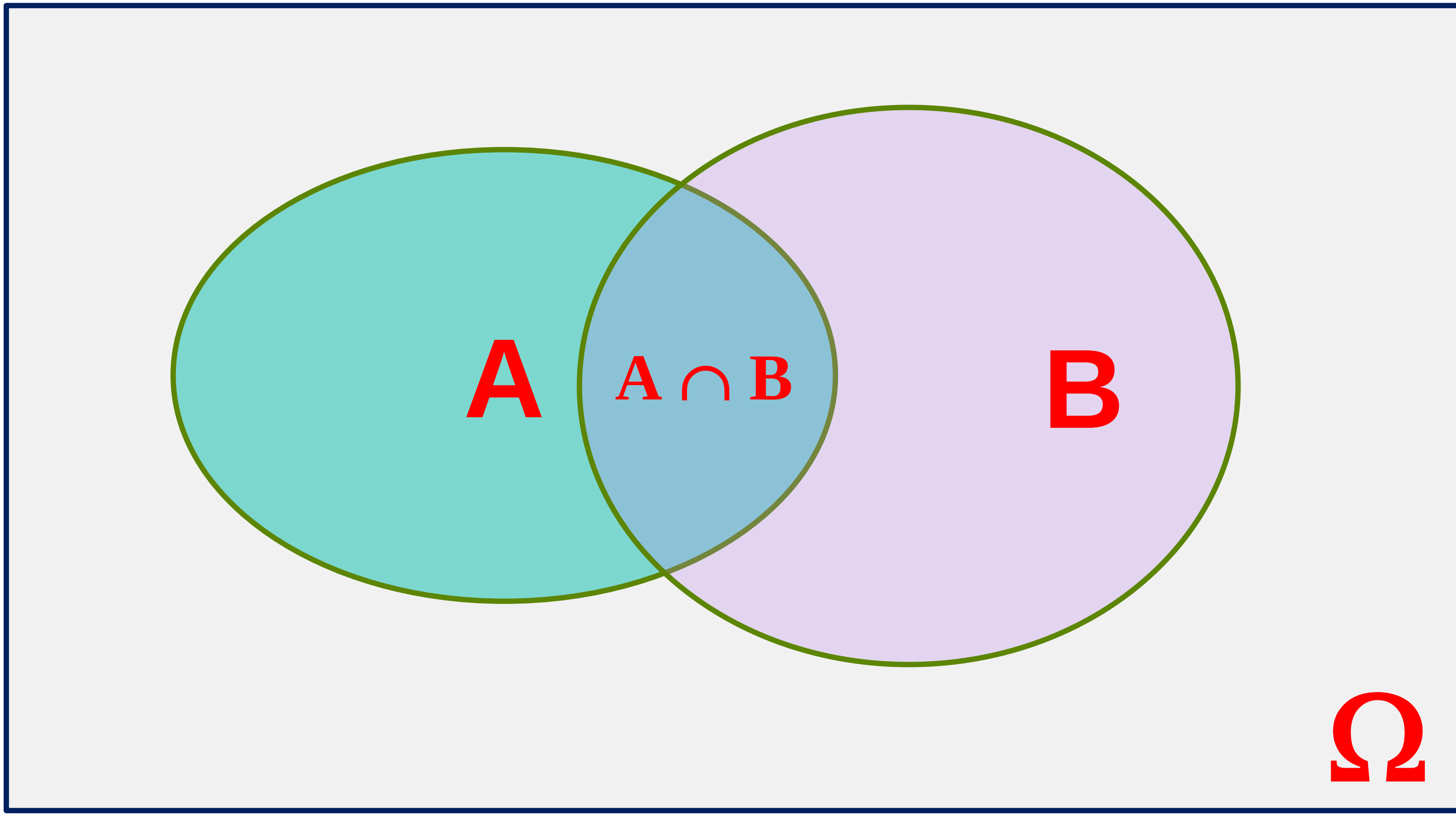
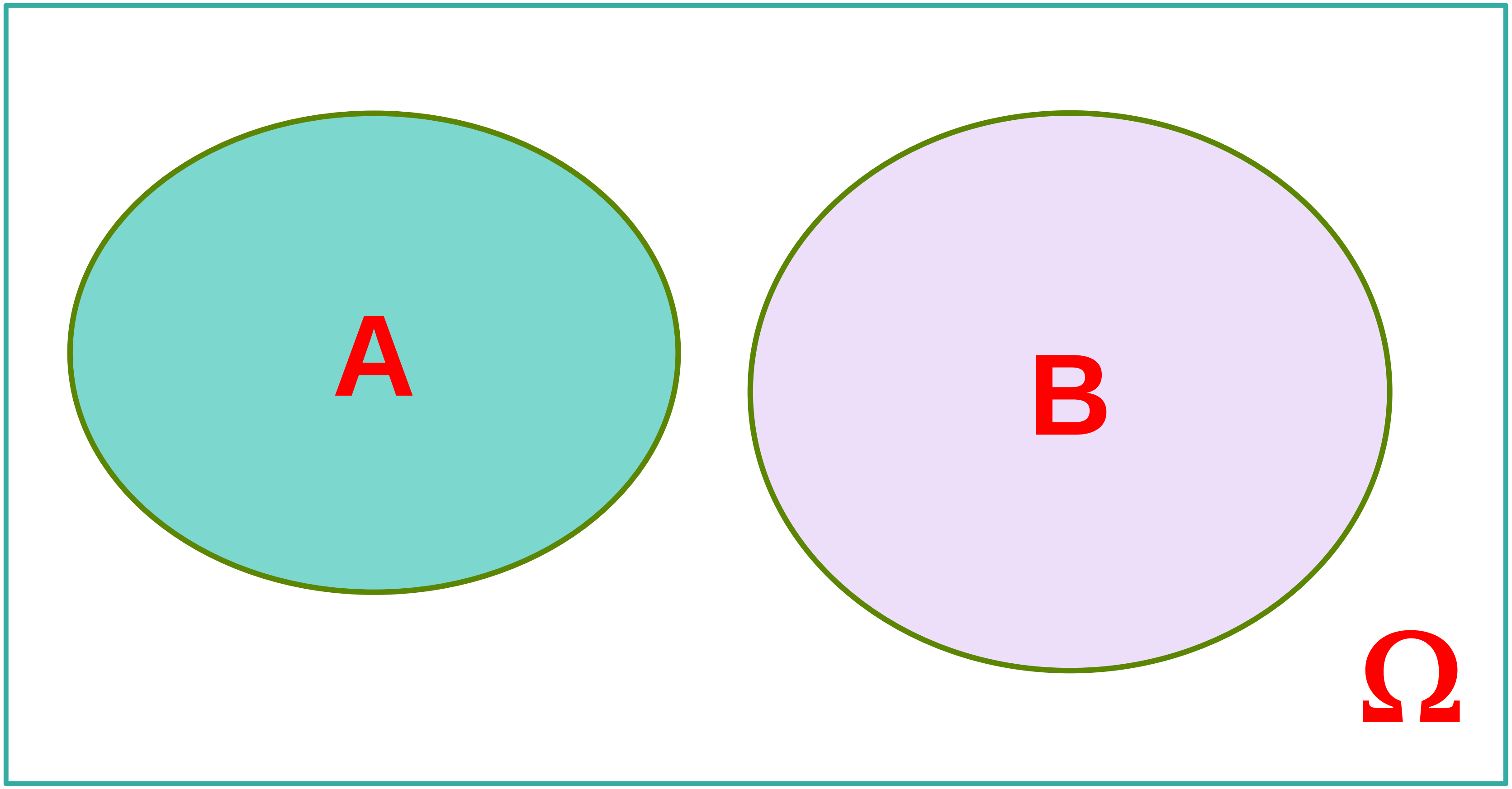


Diagrama de *Venn* com dois eventos disjuntos



$$A \cap B = \varnothing$$

Probabilidade

Medida da incerteza associada aos eventos / resultados do experimento aleatório

Atribuímos probabilidade aos eventos.

Como?

Várias abordagens possíveis

1. Frequências relativas de ocorrências de cada resultado
2. Suposições teóricas
3. Experiência de especialistas

Atribuição da probabilidade:

1. Através das frequências relativas de ocorrências.

- O experimento aleatório é replicado várias vezes;
- Registra-se a frequência relativa com que o evento em questão ocorre.

→ Para um número grande de replicações, a frequência relativa de ocorrências do evento aproxima a probabilidade daquele evento.

Exemplo: N lançamentos de um dado

Resultado	1	2	3	4	5	6	N
Frequências relativas	0,180	0,180	0,200	0,130	0,130	0,180	100
	0,170	0,171	0,164	0,150	0,173	0,172	1000
	0,163	0,166	0,174	0,162	0,170	0,166	10000

2. Através de suposições teóricas.

Exemplo: Lançamento de um dado

Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

$$P(\text{face } 1) = \cdots = P(\text{face } 6) = 1/6.$$

3. Através da experiência de especialista.

Exemplo: Após exame clínico, o médico externa a probabilidade de que o paciente esteja com sinusite viral (em vez de bacteriana).

No **caso discreto**, todo experimento aleatório tem seu ***modelo probabilístico*** especificado quando estabelecemos:

- O *espaço amostral* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
- A *probabilidade $P(\omega)$ para cada ponto amostral*, de tal forma que:

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1.$$

- Neste caso, dado um evento A do experimento aleatório (lembre que $A \subset \Omega$), temos

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\omega_j)$$

Em particular:
$P(\varnothing) = 0$ e $P(\Omega) = 1$

Observação: Na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os pontos amostrais são iguais, temos:

$$P(A) = \frac{n^o.\ de\ elementos\ de\ A}{n^o.\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

Atenção: Sem equiprobabilidade, a expressão acima NÃO é válida.

Exemplo: A tabela a seguir apresenta a distribuição de alunos diplomados em 2002, segundo nível de ensino e tipo de instituição, no município de São Paulo.

Nível	Instituição		Total
	Pública	Privada	
Fundamental	144.548	32.299	176.847
Médio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.159	56.124	61.283
Total	267.652	117.845	385.497

Fonte: Min. Educação/INEP-Inst.Nacion. Estudos e Pesq. Educacionais; Fundação SEADE

Um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo.

Definimos os eventos

M: aluno se formou no ensino médio;
F: aluno se formou no ensino fundamental;
S: aluno se formou no ensino superior;
G: aluno se formou em instituição pública.

ir para a tabela

Temos

$$P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0{,}382 \qquad P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0{,}459$$

$$P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0{,}159 \qquad P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0{,}694$$

• *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio **e** em uma instituição pública?*

$M \cap G$: aluno formado no ensino médio **e** em inst.pública

$$P(M \cap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0{,}306$$

• *Qual é a probabilidade do aluno ter se formado no ensino médio **ou** em uma instituição pública?*

ir para a tabela

$M \cup G$: aluno formado no ensino médio **ou** em inst. pública

$$P(M \cup G) = (147.367 + 267.652 - 117.945\ ) / 385.497$$

$$= \frac{297.074}{385.497} = 0{,}771$$

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Em particular:

- Se A e B forem eventos **disjuntos**, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Para qualquer evento A de Ω,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Probabilidade condicional e independência

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por $P(A \mid B)$ e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a **regra do produto de probabilidades**

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B).}$$

e

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)\ .}$$

• *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?*

Olhando diretamente a tabela,

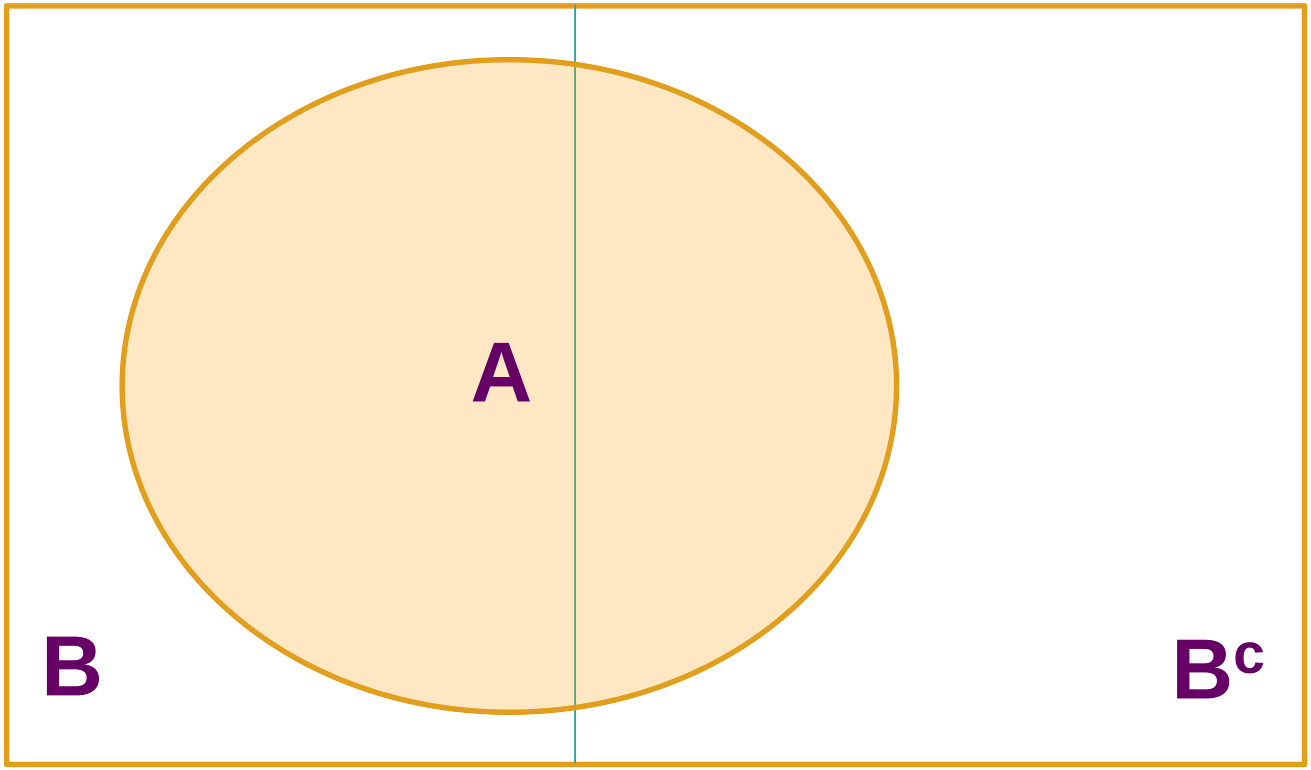
temos $$P(M|G) = \frac{117.945}{267.652} = 0{,}441$$

Usando a definição:

ir para a tabela

$$P(M \mid G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{117.945}{385.497}}{\frac{267.652}{385.497}} = 0{,}441$$

Regra da probabilidade total

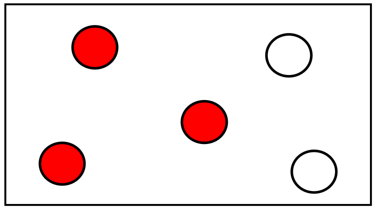


regra da soma (para eventos disjuntos)

regra do produto

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$
$$= P(B) \times P(A|B) + P(B^c) \times P(A|B^c)$$

Exemplo: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, ***sem reposição***.

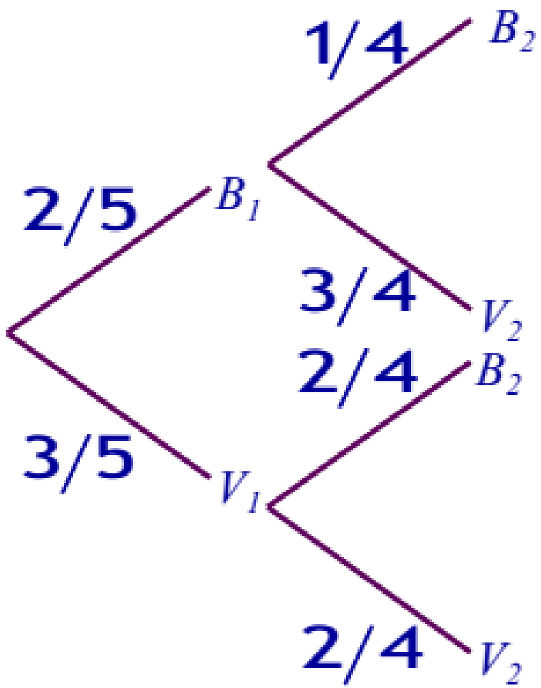


Consideremos os seguintes eventos:

B_1: a 1ª. bola sorteada é branca
B_2: a 2ª. bola sorteada é branca
V_1: a 1ª. bola sorteada é vermelha
V_2: a 2ª. bola sorteada é vermelha

$$P(B_2) = ???$$

Vamos representar todas os resultados possíveis do experimento, utilizando um diagrama conhecido como *diagrama de árvore* ou *árvore de probabilidades.*



Resultados	Probabilidades
$B_1 \cap B_2$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$
$B_1 \cap V_2$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
$V_1 \cap B_2$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
$V_1 \cap V_2$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
Total	1

Pela regra da probabilidade total (note que $V_1 = B_1^c$):

$$P(B_2) = P(B_1) \times P(B_2|B_1) + P(V_1) \times P(B_2|V_1)$$

Portanto,

$$P(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5}$$

Note que,

$$P(B_2) = P(\text{branca na 2}^{\text{a}}.) = \frac{2}{5} = P(\text{branca na 1}^{\text{a}}.) = P(B_1).$$

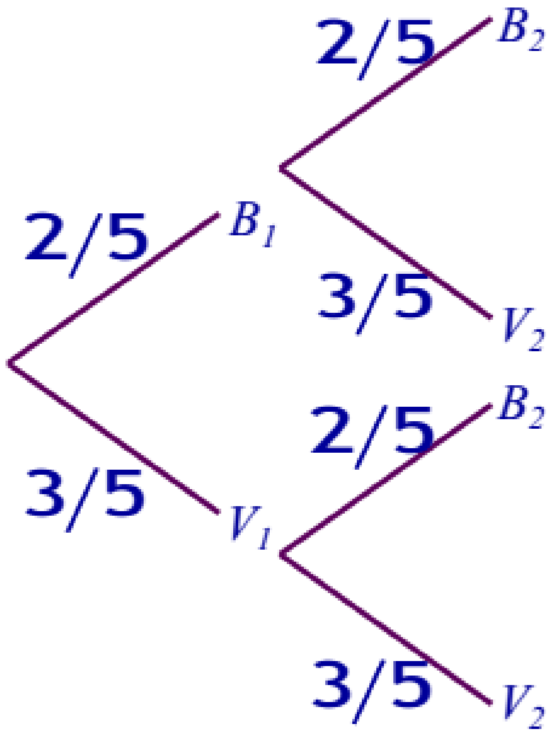
Além disso,

$$P(B_2 \mid B_1) = P(\text{ branca na 2}^{\text{a}}.|\text{ branca na 1}^{\text{a}}.) = \frac{1}{4} \neq P(B_2)$$

$$P(B_2 \mid V_1) = P(\text{branca na 2}^{\text{a}}.|\text{ vermelha na 1}^{\text{a}}.) = \frac{2}{4} \neq P(B_2)$$

ou seja, a probabilidade do resultado da 2ª. extração ***depende*** do resultado da 1ª. extração.

Considere agora que os sorteios são feitos **com reposição**, ou seja, a 1ª. bola sorteada é reposta na urna antes do 2º. sorteio. Nesta situação, temos



Resultados	Probabilidade
$B_1 \cap B_2$	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
$B_1 \cap V_2$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
$V_1 \cap B_2$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
$V_1 \cap V_2$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
Total	1

Neste caso,

$P(B_2)$ = P(branca na 2ª.) = $\frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{5}$

$P(B_2 \mid B_1)$ = P(branca na 2ª.| branca na 1ª.) = $\frac{2}{5} = P(B_2)$

$P(B_2 \mid V_1)$ = P(branca na 2ª.| vermelha na 1ª.) = $\frac{2}{5} = P(B_2)$

ou seja, a probabilidade do resultado na 2ª. extração ***independe*** do que ocorre na 1ª. extração.

Independência de eventos:

Dois eventos A e B são **independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.}$$

Temos a seguinte forma equivalente:

A e B são independentes se

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \ .}$$

Exemplo: A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

A: Jonas é aprovado

B: Madalena é aprovada

$$P(A \cap B) \stackrel{*}{=} P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$\rightarrow$ Qual foi a suposição feita?

Fizemos a suposição de **independência**.

Sem esta suposição, a igualdade $\stackrel{*}{=}$ acima **não** é válida.

Observação

Segue da definição de independência que se dois eventos A e B forem independentes, então são independentes também os pares de eventos

$$\boldsymbol{A^c} \textbf{ e } \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \textbf{ e } \boldsymbol{B^c}, \quad \boldsymbol{A^c} \textbf{ e } \boldsymbol{B^c}.$$

(Verifique!)

Apêndice: Regra do produto para 3 eventos

Sejam A, B e C três eventos quaisquer de um dado experimento aleatório. Seja $D = A \cap B$. Então,

$$P(A \cap B \cap C) = P(D \cap C) \overset{*}{=} P(D) \times P(C|D)$$
$$= P(A \cap B) \times P(C|A \cap B) \overset{**}{=} P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B),$$

onde usamos a regra do produto para 2 eventos em $\overset{*}{=}$ e $\overset{**}{=}$.

Em resumo,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B).$$