MAE0116 – Noções de Estatística

Grupos B e D - 2º semestre de 2020

Lista de exercícios 7- Estimação I – CLASSE

Exercício 1

Experimentos prévios indicam que o tempo de reação de um novo medicamento pode ser considerado como tendo distribuição Normal com desvio padrão igual a 2 minutos (a média é desconhecida). O objetivo de uma pesquisa é estimar o tempo médio μ de reação desse novo medicamento.

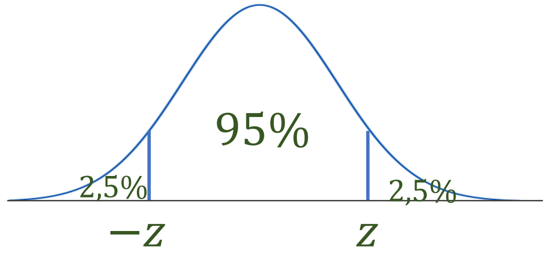
(a) Qual deve ser o tamanho da amostra para que o erro cometido ao estimarmos o tempo médio μ, não seja superior a 30 segundos, com probabilidade 0,95?

$$n = ? \qquad n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \sigma^2$$

Considere a variável aleatória X, tempo (em minutos) de reação do medicamento

Informações: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, em que $\sigma^2 = 4\, min^2$; $\varepsilon = 0{,}5\, minutos$;

$\gamma = 0{,}95 \rightarrow A(z) = 0{,}975 \rightarrow z = 1{,}96$



$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \sigma^2 = \left(\frac{1{,}96}{0{,}5}\right)^2 \cdot 4 = 61{,}4656 \cong 62\, pacientes$$

Exercício 1

Experimentos prévios indicam que o tempo de reação de um novo medicamento pode ser considerado como tendo distribuição Normal com desvio padrão igual a 2 minutos (a média é desconhecida). O objetivo de uma pesquisa é estimar o tempo médio μ de reação desse novo medicamento.

Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos):

2,9; 3,4; 3,5; 4,1; 4,6; 4,7; 4,5; 3,8; 5,3; 4,9; 4,8; 5,7; 5,8; 5,0; 3,4; 5,9; 6,3; 4,6; 5,5 e 6,2

(b) Qual é a estimativa pontual do tempo de reação médio μ?

$$\bar{x} = \frac{2{,}9 + 3{,}4 + 3{,}5 + \cdots + 5{,}5 + 6{,}2}{20} = \frac{94{,}9}{20} = 4{,}745\ min$$

Exercício 1

Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos):

2,9; 3,4; 3,5; 4,1; 4,6; 4,7; 4,5; 3,8; 5,3; 4,9; 4,8; 5,7; 5,8; 5,0; 3,4; 5,9; 6,3; 4,6; 5,5 e 6,2

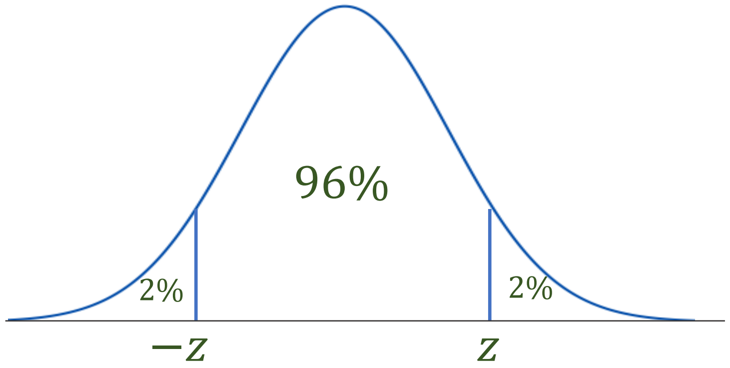
(c) Encontre uma estimativa intervalar de 96% de confiança para μ Qual é o erro amostral de sua estimativa pontual?

$$[\bar{x}-\varepsilon; \bar{x}+\varepsilon] = [\bar{x}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Informações na amostra : $n = 20;\ \bar{x} = 4{,}745\ min$

Informações da população : $\sigma^2 = 4\ min^2 \rightarrow \sigma = 2\ min$

Confiança de 96% $\rightarrow A(z) = 0{,}98 \rightarrow z = 2{,}05$



$$IC(\mu; 96\%) = \left[4{,}745 - 2{,}05\frac{2}{\sqrt{20}};\ 4{,}745 + 2{,}05\frac{2}{\sqrt{20}}\right]$$

$$= [4{,}745 - 0{,}9168;\ 4{,}745 + 0{,}9168]$$

$$= [3{,}8282;\ 5{,}6618], \quad com\ \varepsilon = 0{,}9168.$$

Exercício 1

Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos):

2,9; 3,4; 3,5; 4,1; 4,6; 4,7; 4,5; 3,8; 5,3; 4,9; 4,8; 5,7; 5,8; 5,0; 3,4; 5,9; 6,3; 4,6; 5,5 e 6,2

(d) Suponha que no item (c) não fosse conhecido o desvio padrão populacional. Como você procederia para determinar o intervalo de confiança? Justifique

Como σ, o desvio padrão populacional, é desconhecido podemos estimá-lo usando os valores dos vinte pacientes sorteados calculando o desvio padrão amostral (s).

$$\left[\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad \left[\bar{x} - t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Exercício 1

Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos):

2,9; 3,4; 3,5; 4,1; 4,6; 4,7; 4,5; 3,8; 5,3; 4,9; 4,8; 5,7; 5,8; 5,0; 3,4; 5,9; 6,3; 4,6; 5,5 e 6,2

(d) Suponha que no item (c) não fosse conhecido o desvio padrão populacional. Como você procederia para determinar o intervalo de confiança? Justifique

$$\left[\bar{x} - t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Informação na amostra: $\bar{x} = 4{,}745\ min; n = 20;\ \ s = ?$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(2{,}9 - 4{,}745)^2 + \cdots + (6{,}2 - 4{,}745)^2}{20 - 1} = \frac{18{,}8495}{19} = 0{,}9921.$$

$$s = \sqrt{0{,}9921} = 0{,}9960\ min$$

Exercício 1

Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos):

2,9; 3,4; 3,5; 4,1; 4,6; 4,7; 4,5; 3,8; 5,3; 4,9; 4,8; 5,7; 5,8; 5,0; 3,4; 5,9; 6,3; 4,6; 5,5 e 6,2

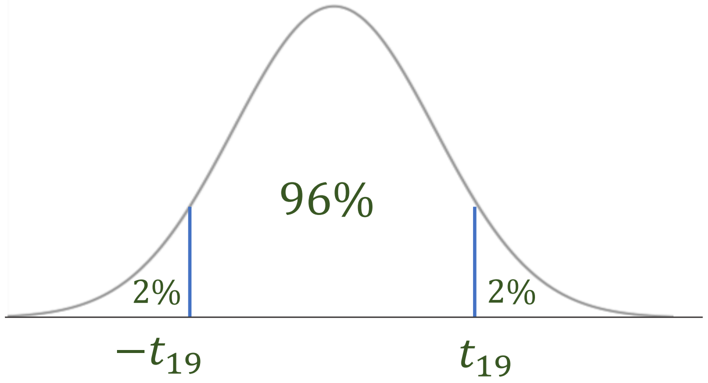
(d) Suponha que no item (c) não fosse conhecido o desvio padrão populacional. Como você procederia para determinar o intervalo de confiança? Justifique

$$\left[\bar{x} - t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Informação na amostra: $\bar{x} = 4{,}745\, min; n = 20;\ \ s = 0{,}9960\, min$

$t_{n-1} = ?$

Confiança de 96% $\rightarrow A(t_{19}) = 0{,}98 \rightarrow t_{19} = 2{,}205$



Exercício 1

Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos):

2,9; 3,4; 3,5; 4,1; 4,6; 4,7; 4,5; 3,8; 5,3; 4,9; 4,8; 5,7; 5,8; 5,0; 3,4; 5,9; 6,3; 4,6; 5,5 e 6,2

(d) Suponha que no item (c) não fosse conhecido o desvio padrão populacional. Como você procederia para determinar o intervalo de confiança? Justifique

$$\left[\bar{x} - t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$\bar{x} = 4{,}745\, min;\ n = 20;\ \ s = 0{,}996\, min;\ t_{19} = 2{,}205$

$$IC(\mu; 96\%) = \left[4{,}745 - 2{,}205\frac{0{,}996}{\sqrt{20}}; 4{,}745 + 2{,}205\frac{0{,}996}{\sqrt{20}}\right]$$

$$= [4{,}745 - 0{,}4911; 4{,}745 + 0{,}4911]$$

$$= [4{,}2539; 5{,}2361]$$

Exercício 2

O intervalo [2,936; 3,864] é o intervalo de 98% de confiança, construído a partir de uma amostra de tamanho 25, para a média populacional μ da concentração da substância A no sangue de indivíduos do gênero masculino de certa população.

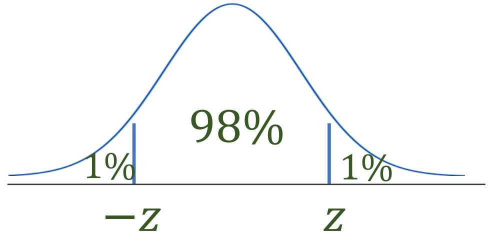
(a) Supondo que a concentração da substância A no sangue de indivíduos dessa população segue uma distribuição normal com desvio padrão σ conhecido, encontre σ e o erro amostral associado ao intervalo de confiança [2,936; 3,864] .

Temos que: $[\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon] = [2{,}936; 3{,}864]$

$\varepsilon = ?$

A amplitude (comprimento) do intervalo é dado por: $\bar{x} + \varepsilon - (\bar{x} - \varepsilon) = 2\varepsilon$

Logo, $3{,}864 - 2{,}936 = 0{,}928 = 2\varepsilon \rightarrow \varepsilon = 0{,}464$



Exercício 2

O intervalo [2,936; 3,864] é o intervalo de 98% de confiança, construído a partir de uma amostra de tamanho 25, para a média populacional μ da concentração da substância A no sangue de indivíduos do gênero masculino de certa população.

(a) Supondo que a concentração da substância A no sangue de indivíduos dessa população segue uma distribuição normal com desvio padrão σ conhecido, encontre σ e o erro amostral associado ao intervalo de confiança [2,936; 3,864] .

$$[\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon] = \left[\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [2{,}936; 3{,}864]$$

$\sigma = ?$

Informações: $\varepsilon = 0{,}464;\ n = 25$

Confiança de 98% $\rightarrow A(z) = 0{,}99 \rightarrow z = 2{,}33$

$$\varepsilon = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{z} = \frac{0{,}464\sqrt{25}}{2{,}33}$$

$$= 0{,}9957$$

Exercício 2

O intervalo [2,936; 3,864] é o intervalo de 98% de confiança, construído a partir de uma amostra de tamanho 25, para a média populacional μ da concentração da substância A no sangue de indivíduos do gênero masculino de certa população.

(b) Que tamanho deve ter a amostra para que o erro amostral calculado em (a) seja reduzido à metade?

$$n^* = ? \qquad n^* = \left(\frac{z}{\varepsilon^*}\right)^2 \sigma^2$$

Informações: $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{0,464}{2} = 0,232;\ z = 2,33; \quad \sigma = 0,9957;$

$$n^* = \left(\frac{z}{\varepsilon^*}\right)^2 \sigma^2 \quad = \left(\frac{2,33}{0,232}\right)^2 (0,9957)^2 \quad = 99,98$$

$$\approx 100\ indivíduos$$

Exercício 2

O intervalo [2,936; 3,864] é o intervalo de 98% de confiança, construído a partir de uma amostra de tamanho 25, para a média populacional μ da concentração da substância A no sangue de indivíduos do gênero masculino de certa população.

(c) Compare o tamanho da amostra obtido no item (b) com o tamanho da amostra dado no item (a) Que resultado você pode estabelecer?

$n = 25 \qquad \varepsilon = 0{,}464$

$n^* = 100 \qquad \varepsilon^* = \dfrac{0{,}464}{2}$

Para diminuir o erro amostral pela metade é necessário quadruplicar o tamanho da amostra. Sendo assim, parece que o erro amostral é inversamente proporcional ao tamanho da amostra.

Exercício 3

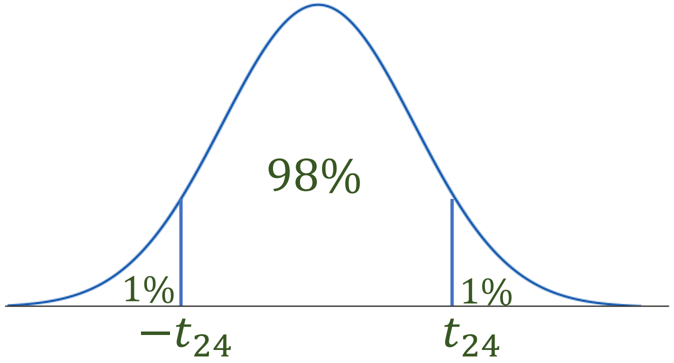
Supõe-se que o consumo mensal de água por residência em um certo bairro paulistano tem distribuição Normal. Selecionada uma amostra de 25 residências desse bairro, observou-se uma média de 10 m³ e um desvio padrão de 2 m³.

(a) Determine um intervalo de confiança para o consumo médio mensal de água desse bairro, considerando um coeficiente de confiança igual a 98%.

$$[\bar{x}-\varepsilon;\bar{x}+\varepsilon] = \left[\bar{x}-t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Informação na amostra: $n = 25;\ \bar{x} = 10\ m^3;\ s = 2\ m^3$

Confiança de 98% $\rightarrow$ $A(t_{24}) = 0{,}99 \rightarrow t_{24} = 2{,}492$



$$\left[10-2{,}492\frac{2}{\sqrt{25}};10+2{,}492\frac{2}{\sqrt{25}}\right]$$

$$= [10-0{,}9968;10+0{,}9968]$$

$$= [9{,}0032;\ 10{,}9968]$$

Exercício 3

Supõe-se que o consumo mensal de água por residência em um certo bairro paulistano tem distribuição Normal. Selecionada uma amostra de 25 residências desse bairro, observou-se uma média de 10 m^3 e um desvio padrão de 2 m^3.

(b) Qual é o erro associado ao intervalo construído no item anterior?

$$[\bar{x}-\varepsilon;\bar{x}+\varepsilon]=\left[\bar{x}-t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\left[10-2{,}492\frac{2}{\sqrt{25}};10+2{,}492\frac{2}{\sqrt{25}}\right]$$

$$=[10-0{,}9968;10+0{,}9968]$$

Logo, $\varepsilon=0{,}9968$.

Exercício 3

Supõe-se que o consumo mensal de água por residência em um certo bairro paulistano tem distribuição Normal. Selecionada uma amostra de 25 residências desse bairro, observou-se uma média de 10 m^3 e um desvio padrão de 2 m^3.

(c) Supondo que o desvio padrão populacional σ do consumo mensal seja igual a 1,8 m^3, que tamanho deve ter uma amostra para que o intervalo 10,0 mais ou menos 1,0 tenha 95% de confiança?

Informações:

$\sigma = 1{,}8 \text{ m}^3$

$[10 - 1; 10 + 1] \rightarrow \varepsilon = 1$

Confiança de 95% $\rightarrow z = ?\quad A(z) = 0{,}975 \rightarrow z = 1{,}96$

$n = ?\quad n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \sigma^2$

$$= \left(\frac{1{,}96}{1}\right)^2 (1{,}8)^2$$

$$= 12{,}45 \cong 13\, residências$$