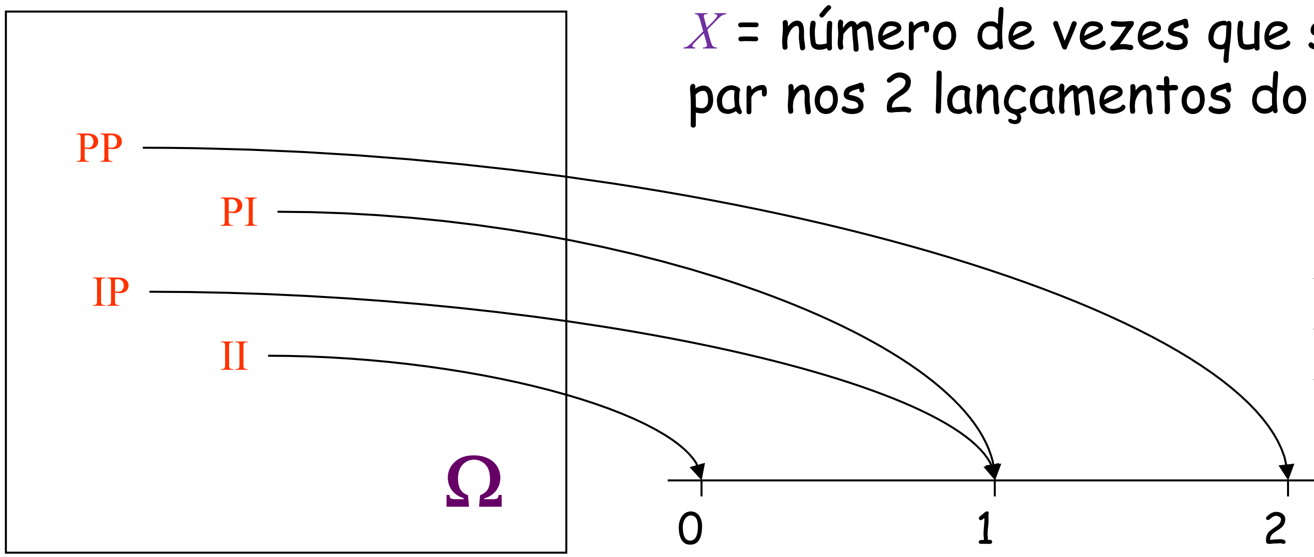
VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
e
DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Variável Aleatória

Experimento aleatório: jogar 1 dado duas vezes e observar o resultado (P = par e I= impar)

X = número de vezes que saiu um número par nos 2 lançamentos do dado



$$X = 0 \Leftrightarrow \{\ II\ \}$$
$$X = 1 \Leftrightarrow \{\ IP\ ,\ PI\ \}$$
$$X = 2 \Leftrightarrow \{\ PP\ \}$$

Genericamente, uma **variável aleatória** é uma *função* X que associa cada elemento ω do espaço amostral Ω a um número real.

Variável Aleatória

Uma variável aleatória pode ser classificada como:

- Variável aleatória **discreta**

Uma variável aleatória é discreta quando o conjunto de valores possíveis de ela assumir for finito ou infinito enumerável.

- Variável aleatória **contínua**

Uma variável aleatória é contínua quando o conjunto de valores possíveis de ela assumir for não enumerável.

Exemplos:

1) Observa-se o gênero das crianças em uma família com três filhos escolhida ao acaso dentre uma população de tais famílias.

Espaço amostral (M: masculino e F: feminino) :

$$\Omega = \{\underset{\omega_1}{(MMM)}, \underset{\omega_2}{(MMF)}, \underset{\omega_3}{(MFM)}, \underset{\omega_4}{(FMM)}, \underset{\omega_5}{(MFF)}, \underset{\omega_6}{(FMF)}, \underset{\omega_7}{(FFM)}, \underset{\omega_8}{(FFF)}\}$$

Defina $\boldsymbol{X}$ = número de crianças do gênero masculino na família sorteada.

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

$\rightarrow$ Então $\boldsymbol{X}$ assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}; logo, é uma variável aleatória **discreta**.

Exemplos:

2) No mesmo experimento...

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}$$

$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4 \quad \omega_5 \quad \omega_6 \quad \omega_7 \quad \omega_8$$

... podemos definir uma outra variável aleatória

$\boldsymbol{Y}$: número de crianças do gênero feminino (F)

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
Y	0	1	1	1	2	2	2	3

→ Então $\boldsymbol{Y}$ também assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, porém associados a outros elementos de **Ω,** em comparação com X. Também se trata de uma variável aleatória **discreta**.

Exemplos:

3) Observar ao acaso o tempo de vida, em horas, de uma lâmpada produzida por uma fábrica.

Defina T: tempo de vida, em horas, da lâmpada.

$\rightarrow$ Então, T é uma variável aleatória **contínua**, que assume qualquer valor real não negativo --- o conjunto de valores possíveis de T é o intervalo numérico $[0,\infty)$.

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Caracterização

Função (ou distribuição) de probabilidade:

É a função que atribui a **cada valor x_i da v. a. discreta X** sua probabilidade de ocorrência. Pode ser representada pela seguinte tabela.

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função de probabilidade deve satisfazer:

$$\boxed{0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1}$$

Exemplo 1:

- Um Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres.
- Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando-se, ao acaso, três membros do departamento.

Qual é a probabilidade de a comissão ser formada por ***pelo menos duas mulheres***?

Vamos definir a v.a.

X: número de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que X pode assumir?

Espaço amostral	Probabilidade	X
(HHH)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$	0
(HHM)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$	1
(HMH)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(MHH)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(HMM)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MHM)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MMH)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$	2
(MMM)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$	3

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, $P(X \geq 2)$ = P(X=2) + P(X=3) = 0,291 + 0,056 = 0,347.

Exemplo 2: Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade de a ***soma das faces nos dois lançamentos ser menor do que 6***?

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Qual é a probabilidade de cada ponto ω_i de Ω ?

Admitindo-se que o dado seja equilibrado e sendo os lançamentos independentes,

$$P(\omega_i) = 1/36 \text{ , para qualquer } \omega_i \in \Omega.$$

Defina X : soma das faces nos dois lançamentos do dado.

Função de probabilidade de X: $\Rightarrow$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{P}(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então,

$$P(X < 6) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{10}{36} = 0{,}278$$

Podemos considerar outras variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço amostral.

Y: valor máximo obtido entre os dois lançamentos

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$\Leftarrow$

Z: diferença entre as faces do 2º. e do 1º. lançamento

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

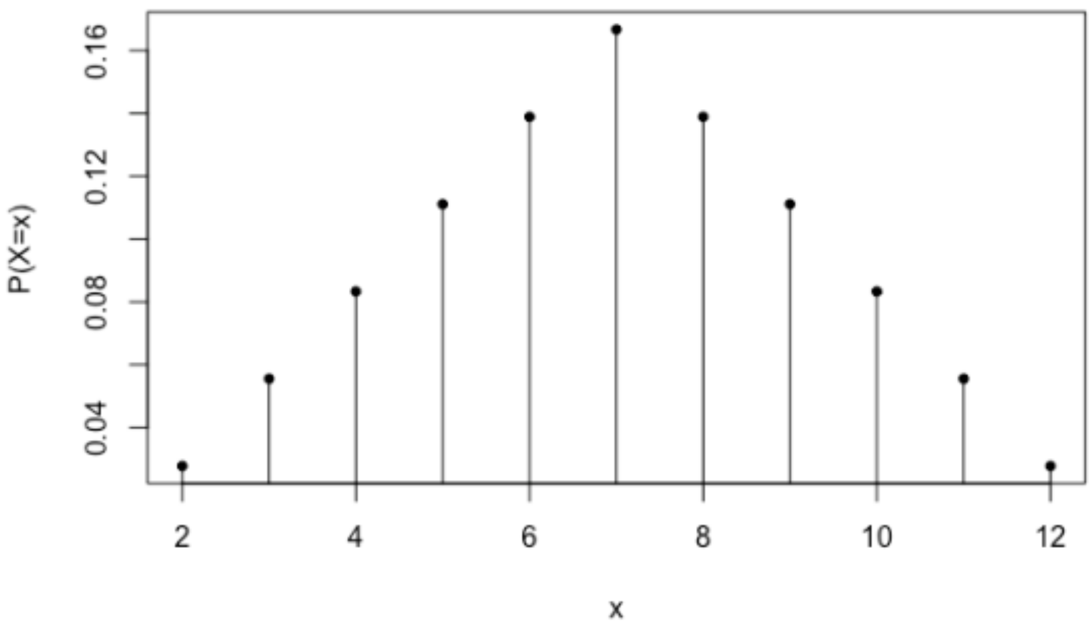
VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA

Qual é o valor médio da soma das faces (X) no lançamento de dois dados?

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

$\Rightarrow$ 36 pontos amostrais igualmente prováveis

x	$P(X = x)$
2	1/36=0,028
3	2/36=0,056
4	3/36=0,083
5	4/36=0,111
6	5/36=0,139
7	6/36=0,167
8	5/36=0,139
9	4/36=0,111
10	3/36=0,083
11	2/36=0,056
12	1/36=0,028



VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA

Valor Esperado ("média"): Dada uma v.a. X, assumindo os valores x_1, x_2, ..., x_n, chamamos de **valor médio**, ou **valor esperado**, ou **esperança matemática** da distribuicão de X o valor

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + \cdots + x_n P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

Notação: $\mu = E(X)$

No exemplo, para média de X (soma das faces), temos:

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

ou seja, em média, a soma das faces no lançamento dos dois dados é igual a 7.

Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)\end{aligned}$$

Desenvolvendo a fórmula acima, e lembrando que $\boldsymbol{E(X) = \mu}$, obtemos a seguinte **fórmula alternativa**

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - \mu^2\end{aligned}$$

A notação usual de variância é

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

O **Desvio Padrão** é definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Notação: $\mathrm{DP}(X) = \sigma$

No exemplo,

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathrm{Var}(X) = (2-7)^2 \frac{1}{36} + (3-7)^2 \frac{2}{36} + \cdots + (11-7)^2 \frac{2}{36} + (12-7)^2 \frac{1}{36}$$

$$= \frac{210}{36} = 5{,}83.$$

Podemos também calcular pela fórmula alternativa

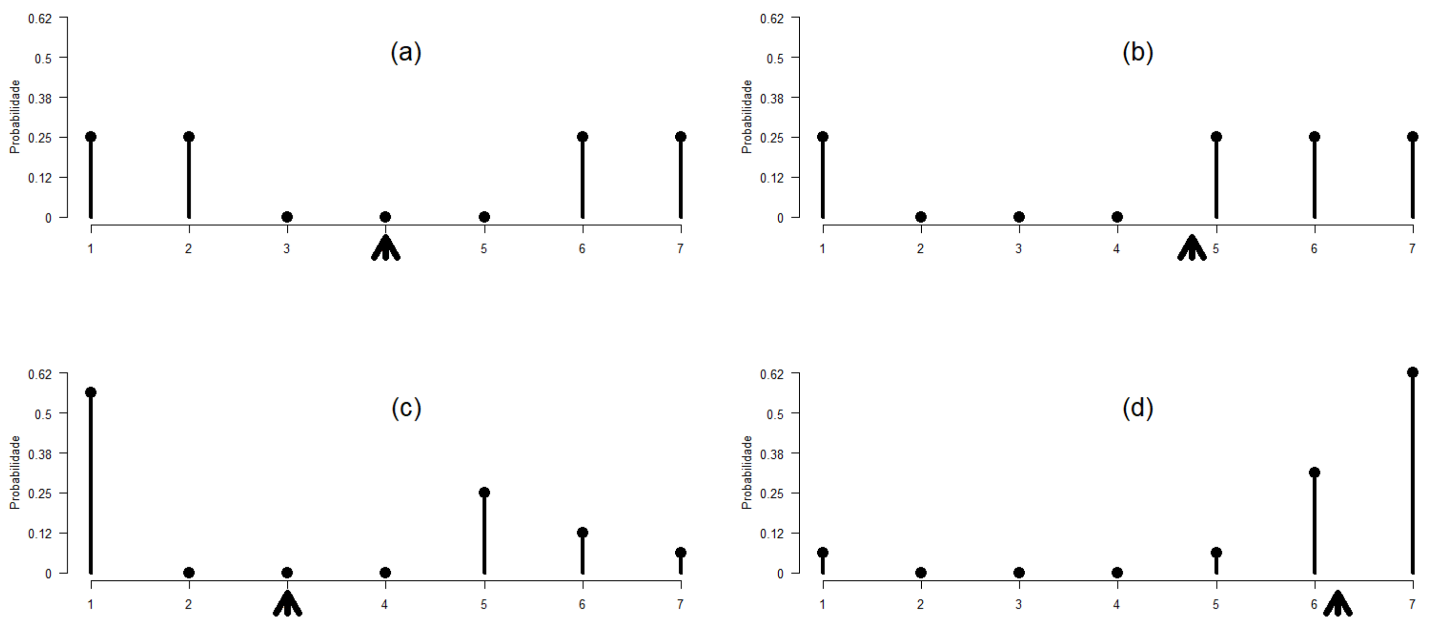
$$\mathrm{E}(X^2) = 2^2 \frac{1}{36} + 3^2 \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \frac{2}{36} + 12^2 \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

e, portanto, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83.$

Suponha uma característica que pode assumir os valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7, porém com diferentes funções de probabilidades, dependendo o caso.

P(X=x)	P(Y=y)	P(W=w)	P(Z=z)
0,25	0,25	0,56	0,06
0,25	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,25	0,25	0,06
0,25	0,25	0,13	0,29
0,25	0,25	0,06	0,59
E(X)=4 Var(X)=3,25	E(Y)=4,75 Var(Y)=3,52	E(W)=3 Var(W)=2,25	E(Y)=6,24 Var(Z)=1,61



Fonte:http://recologia.com.br/2017/05/valor-esperado-expected-value-a-famosa-media/

Propriedades:

1) Se $P(X = a) = 1$, onde a é uma constante, então

$$E(X) = a \qquad \text{e} \qquad Var(X) = 0.$$

2) Se $Y = aX + b$, onde a e b são constantes, então

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

e

$$Var(Y) = Var(aX + b) = a^2\,Var(X).$$

- MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS -

Modelo de Bernoulli ou Binário

Em situações práticas, existem muitos experimentos que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- o resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- um paciente é submetido a um tratamento: o tratamento é eficaz ou não;
- um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- no lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

Experimentos com alternativas *dicotômicas* produzem, genericamente, resultados que podemos classificar através do binômio sucesso-fracasso.

Esses experimentos recebem o nome de *Ensaios de Bernoulli* e originam uma variável aleatória com *distribuição de Bernoulli.*

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- **1** se ocorrer ***sucesso*** no ensaio de Bernoulli,
- **0** se ocorrer ***fracasso*** no ensaio de Bernoulli.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p, $0 \leq p \leq 1$.

"***X ~ Bernoulli (p)***" indica uma v.a. com ***distribuição de Bernoulli*** com parâmetro p, isto é,

$$X = \begin{cases} \mathbf{1}\text{, se ocorrer “sucesso”} \\ \mathbf{0}\text{, se ocorrer “fracasso”} \end{cases}$$

e sua função de probabilidade pode ser representada pela tabela

x	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

Segue que

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= p, \\ Var(X) &= p(1-p). \end{aligned}}$$

→ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de "sucesso", dão origem ao *modelo de probabilidade binomial.*

Modelo Binomial

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5* duas vezes?

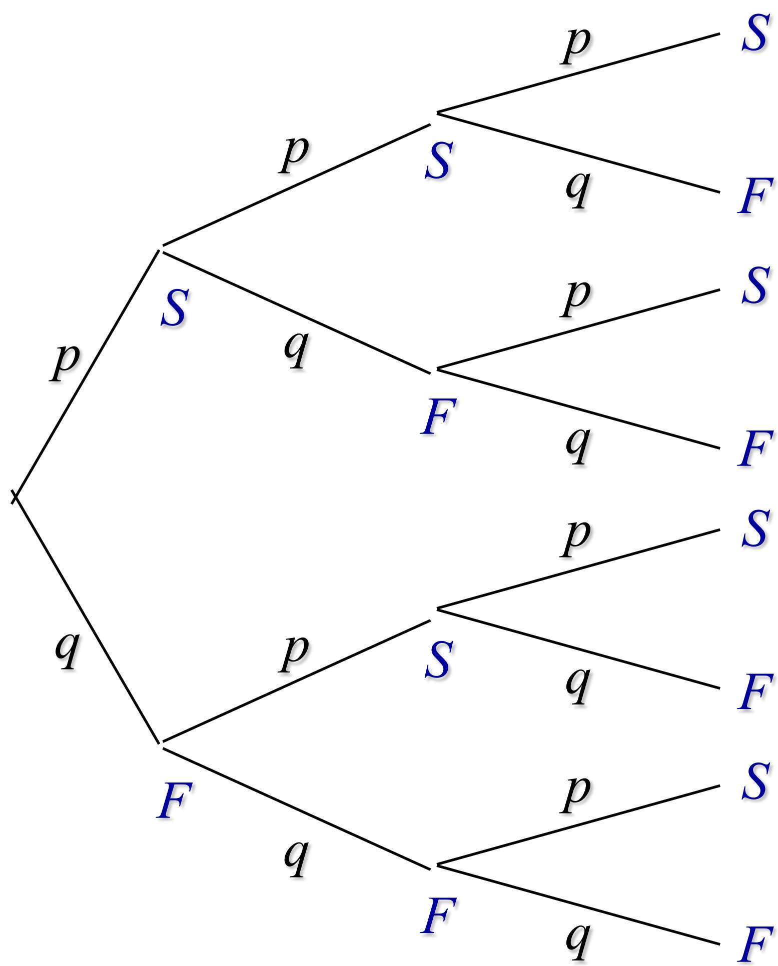
Denotamos,

$\boldsymbol{S}$: "sucesso", ocorrer face 5;
$\boldsymbol{F}$: "fracasso", não ocorrer face 5.

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e
$\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p} = P(\text{fracasso}) = 5/6$

$\Omega = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$

Estamos interessados no número total de **sucessos**, ou seja, o <u>*número de vezes que a face 5 é observada*</u> nos 3 lançamentos do dado.



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSF)	p^2q	2
(SFS)	p^2q	2
(SFF)	pq^2	1
(FSS)	p^2q	2
(FSF)	pq^2	1
(FFS)	pq^2	1
(FFF)	q^3	0

A função de probabilidade de X é dada por:

Probabilidades binomiais para n = 3 e $P(S) = p$		
nº. de sucessos	**probabilidades**	**p = 1/6**
0	q^3	125/216=0,5787
1	$3pq^2$	75/216=0,3472
2	$3p^2q$	15/216=0,0694
3	p^3	1/216=0,0046

Podemos escrever essa função como

$$\boxed{P(X=k)=\binom{3}{k}p^k q^{3-k}, \quad \text{para} \;\; k=0,1,2,3}$$

Assim, a probabilidade de obter a face 5 duas vezes é
$P(X=2) = 0,0694$

Distribuição binomial:

A v.a. X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso, tem *distribuição binomial com parâmetros n e p.*

Sua função de probabilidade é dada por

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{para } k = 0, 1, \; \ldots \;, n}$$

Notação: $X \sim b(n; p)$.

Resultado:

Se $X \sim b(n; p)$, então

valor esperado: $\mu = \mathrm{E}(X) = n\,p$
variância: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = n\,p\,(1 - p)$

Exemplo utilizando o R:

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele ***acerte pelo menos 6 questões***?

X: nº. de questões que o aluno acertará

X ϵ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12}

$X \sim b(12;\ 0{,}25)$

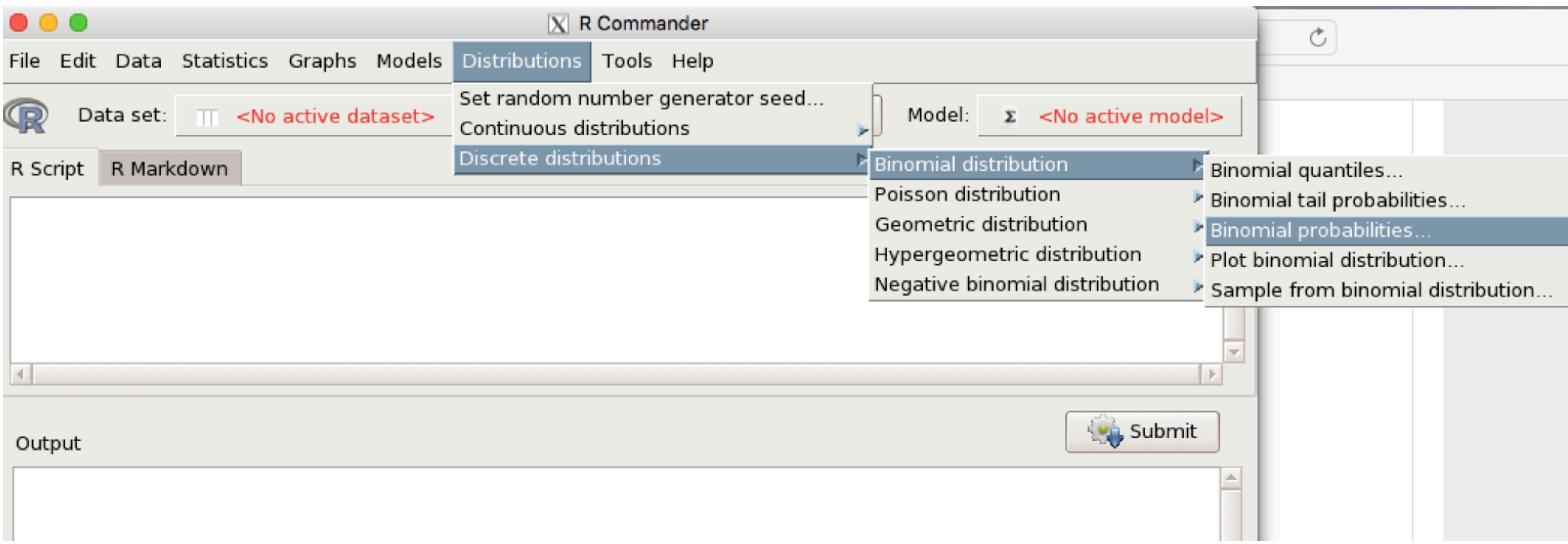
$$\boxed{P(X = x) = \binom{12}{x} 0{,}25^{x} (1 - 0{,}25)^{12-x}}$$

$\Downarrow$

Uso do R para os cálculos!

Para obter a distribuição de probabilidades de uma binomial no R Commander siga o menu

Distribuições -> Distribuições Discretas -> Distribuição Binomial -> Probabilidades da binomial



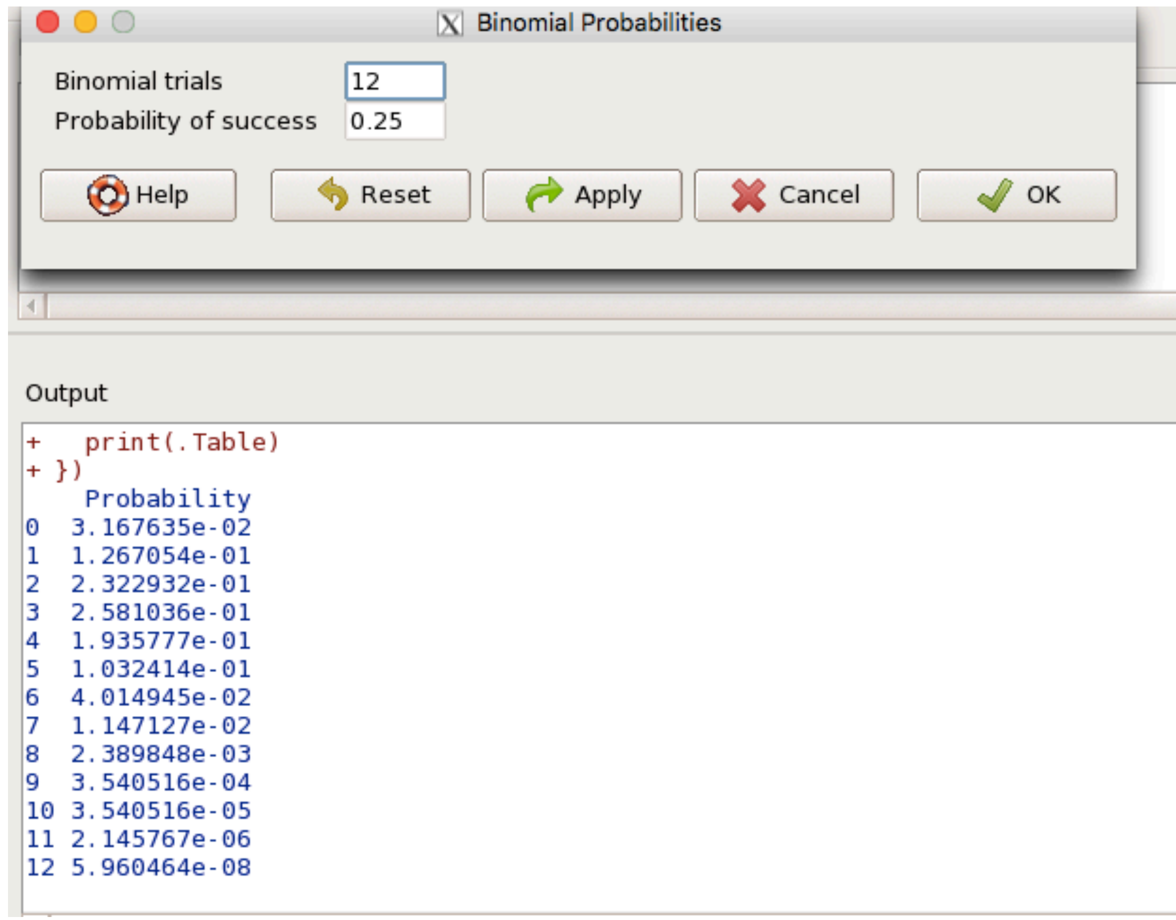
No exemplo, a variável aleatória

X: nº. de questões que o aluno acertará

$$X \sim b(n = 12;\, p = 0{,}25)$$

Observação:

- No Brasil, usa-se comumente “,” para decimal.
- No R (em inglês ou em português) usa-se sempre “.” para decimal.



```
> .Table
          Pr
0  3.167635e-02
1  1.267054e-01
2  2.322932e-01
3  2.581036e-01
4  1.935777e-01
5  1.032414e-01
6  4.014945e-02
7  1.147127e-02
8  2.389848e-03
9  3.540516e-04
10 3.540516e-05
11 2.145767e-06
12 5.960464e-08
```

Portanto, a probabilidade de acertar pelo menos 6 questões é

$$P(X \geq 6) = 0{,}0544.$$

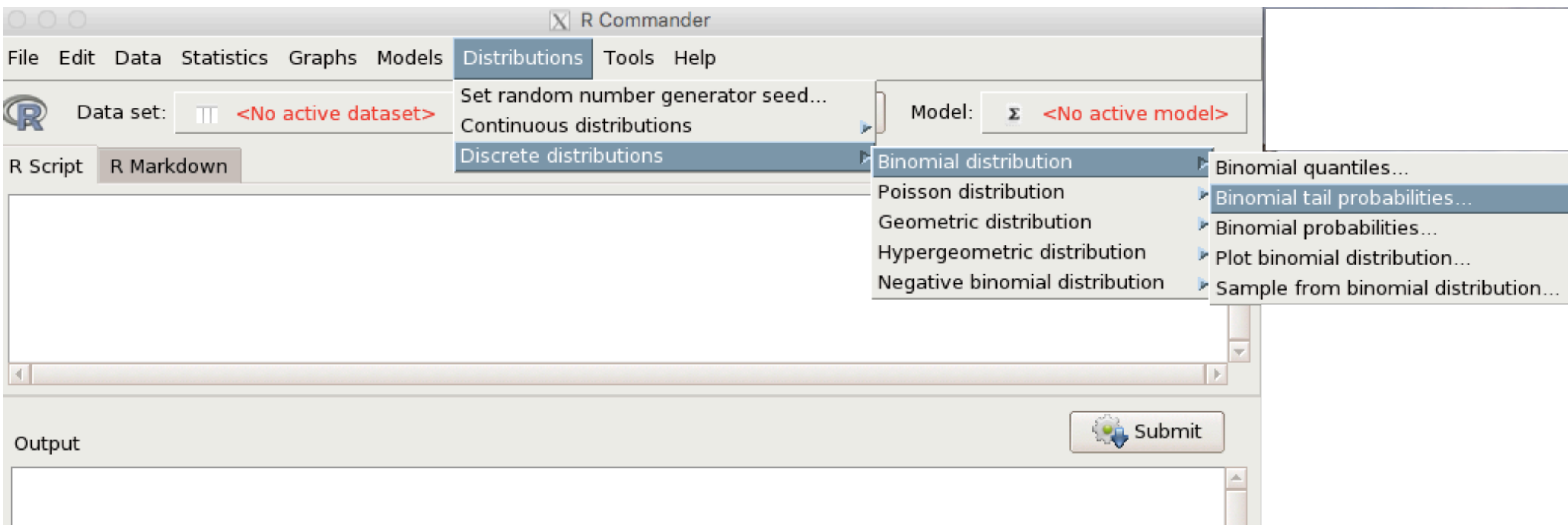
Além disso,

$$E(X) = n.p = 12\,(0{,}25) = 3.$$

Ou seja, o aluno que responder ao acaso todas as questões acertará, *em média*, 3 delas.

Podemos também calcular probabilidades **caudais** através de

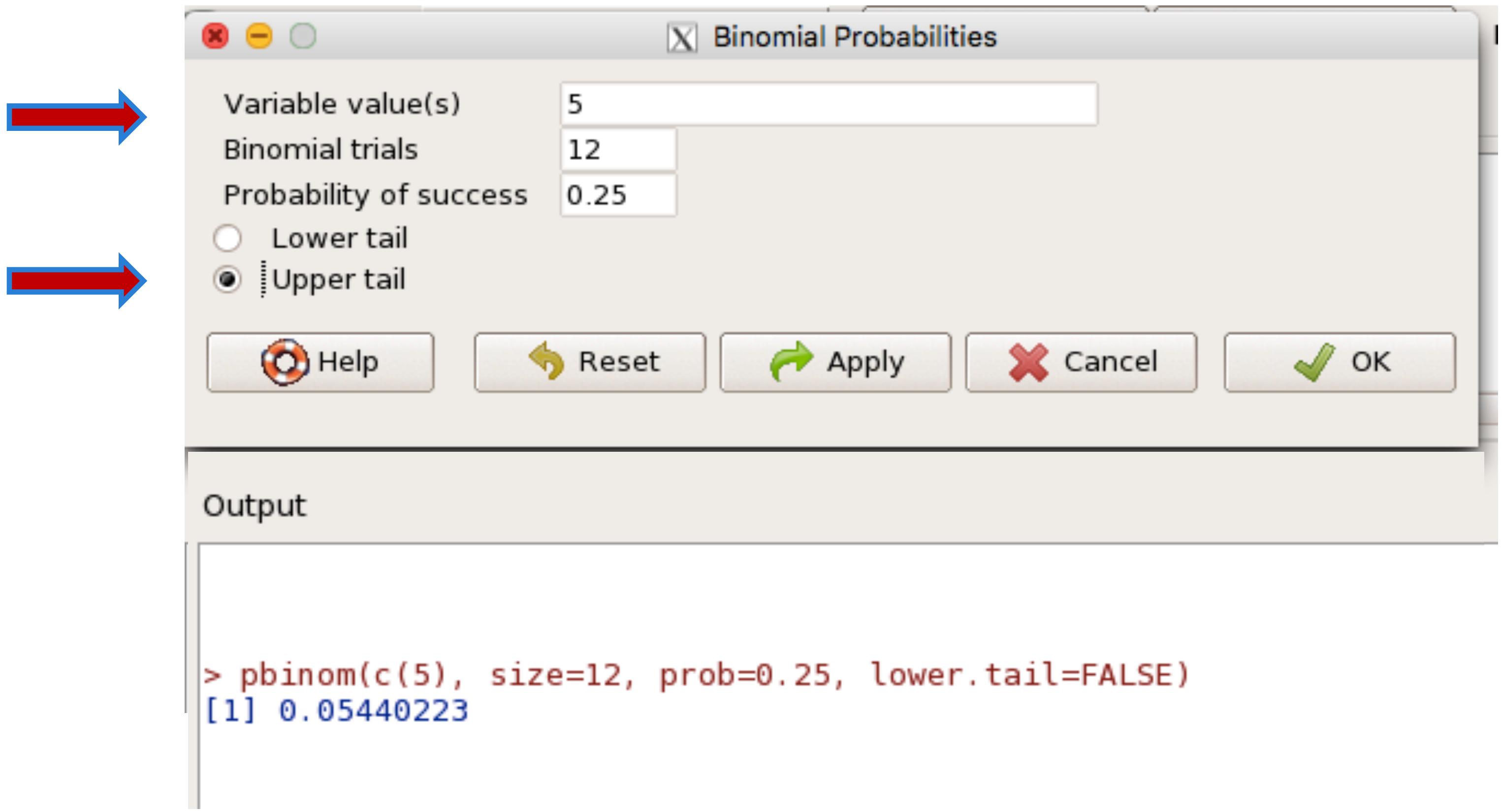
Distribuições -> Distribuições Discretas -> Distribuição Binomial -> Probabilidades das caudas da binomial



A probabilidade da cauda **inferior** a b é $P(X \leq b)$.

A probabilidade da cauda **superior** a b é $P(X > b)$.

Portanto, no exemplo, $P(X \geq 6) = P(X > 5)$



Portanto, $P(X \geq 6) = 0{,}0544$