MAE116 – Noções de Estatística

Grupos B e D – II Semestre de 2020

Lista de exercícios 3 – Noções de probabilidade – CASA (gabarito)

Exercício 1.

De três eventos A, B e C, de um mesmo espaço amostral Ω, suponha que A e B são independentes e que B e C são mutuamente exclusivos. Considere as seguintes probabilidades: $\mathrm{P}(A) = 0,50$, $\mathrm{P}(B) = 0,30$, $\mathrm{P}(C) = 0,10$ e $\mathrm{P}(A|C) = 0,30$. Calcular as probabilidades de:

Solução:

(a) B e C ocorrerem simultaneamente.

A ocorrência simultânea dos eventos B e C é representada por $B \cap C$, mas como B e C são mutuamente exclusivos temos que:

$$B \cap \mathrm{C} = \emptyset.$$

Logo,

$$\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0.$$

(b) Ocorrer ao menos um dentre A e B.

A probabilidade de ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B, é representada por

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Mas, sendo A e B eventos independentes, segue que

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) = 0,5 \times 0,3 = 0,15.$$

Logo,

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0,5 + 0,3 - 0,15 = 0,65.$$

(c) B não ocorrer.

A probabilidade de B não ocorrer pode ser representada por P(B^c), e para qualquer evento $B \subset \Omega$, temos que

$$\text{P}(B) = 1 - \text{P}(B^c).$$

Logo,

$$\text{P}(B^c) = 1 - \text{P}(B) = 1 - 0,3 = 0,70$$

(d) Ocorrerem os três simultaneamente.

A ocorrência dos três eventos simultaneamente é representada por $A \cap B \cap C$. Sendo B e C multualmente exclusivos, temos que

$$A \cap B \cap C = A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Portanto,

$$\text{P}(A \cap B \cap C) = \text{P}(\emptyset) = 0.$$

(e) Ocorrer A ou B ou C.

A probabilidade de ocorrência de A ou B ou C pode ser representada por

$$\text{P}(A \cup B \cup C) = \text{P}(A) + \text{P}(B) + \text{P}(C) - \text{P}(A \cap B) - \text{P}(A \cap C) - \text{P}(B \cap C) + \text{P}(A \cap B \cap C).$$

Destes componentes, o enunciado fornece os valores das probabilidades P(A), P(B) e P(C); dos itens anteriores, calculamos P$(B \cap C)$ e P$(A \cap B \cap C)$. Assim, para obtermos a probabilidade desejada (P$(A \cup B \cup C)$), precisamos calcular o valor de P$(A \cap C)$.

Pela definição da probabilidade condicional, temos que

$$\text{P}(A|C) = \frac{\text{P}(A \cap C)}{\text{P}(C)}.$$

Como sabemos os valores de P$(A|C)$ e P(C), podemos calcular P$(A \cap C)$ como

$$\text{P}(A \cap C) = \text{P}(C)\text{P}(A|C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{P}(A \cup B \cup C) &= \text{P}(A) + \text{P}(B) + \text{P}(C) - \text{P}(A \cap B) - \text{P}(A \cap C) - \text{P}(B \cap C) + \text{P}(A \cap B \cap C) \\ &= 0,5 + 0,3 + 0,1 - 0,15 - 0,03 - 0 + 0 \\ &= 0,72. \end{aligned}$$

Exercício 2.

Temos três profissionais: um agrônomo, um biólogo e um engenheiro. Cada um deles plantou dez mudas de álamos em vasos numa casa de vegetação. Sobreviveram nove das plantadas pelo agrônomo, cinco pelo biólogo e duas pelo engenheiro. Dos trinta vasos, escolhe-se um ao acaso.

Solução:

Definamos os eventos:

- S="A muda sobreviveu"
- A="Muda Plantada pelo Agrônomo"
- E="Muda Plantada pelo Engenheiro"

note que

	Sobrevivência		
Profissional	S	S^c	Total
A	9	1	10
B	5	5	10
E	2	8	10
Total	16	14	30

(a) Qual é a probabilidade da muda do vaso escolhido ter sobrevivido?

Assim, a probabilidade da muda do vaso escolhido ter sobrevivido é:

$$P(S) = \frac{16}{30} = 0,533$$

(b) Se a muda sobreviveu, qual é a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro?

Se a muda sobreviveu, a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro é dada por:

$$P(E|S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{2/30}{0,533} = 0,1250$$

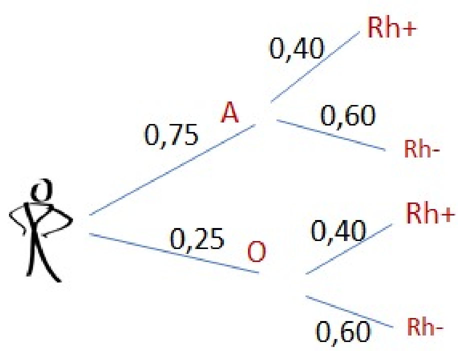
Exercício 3.

O estudo de uma tribo no Brasil revelou que 75% dos seus integrantes tinham sangue tipo A e o restante tinha sangue tipo O; 60% de toda a população tinha fator Rh^-. Usando estas informações e sabendo-se que os eventos fator Rh e o tipo de sangue são independentes, encontre a probabilidade de que um membro da tribo selecionado ao acaso tenha:

(a) Sangue tipo A ou Rh^+

Defina os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} A &: \text{O sangue do membro da tribo selecionado é tipo A;} \\ O &: \text{O sangue do membro da tribo selecionado é tipo O;} \\ Rh^+ &: \text{O fator Rh do membro da tribo selecionado é positivo;} \\ Rh^- &: \text{O fator Rh do membro da tribo selecionado é negativo.} \end{aligned}$$



A probabilidade de que um membro da tribo tenha sangue tipo A ou Rh^+ é representada por

$$\text{P}(A \cup Rh^+) = \text{P}(A) + \text{P}(Rh^+) - \text{P}(A \cap Rh^+).$$

Pelo enunciado, obtemos que $\text{P}(A) = 0,75$ e $\text{P}(Rh^+) = 0,4$. Além disso, como o tipo de sangue e o fator Rh são independentes, temos que $\text{P}(A \cap Rh^+) = \text{P}(A) \times \text{P}(Rh^+) = 0,3$. Logo,

$$\text{P}(A \cup Rh^+) = \text{P}(A) + \text{P}(Rh^+) - \text{P}(A \cap Rh^+) = 0,75 + 0,4 - 0,3 = 0,85.$$

(b) Sangue tipo A e Rh^-

A probabilidade de que o membro da tribo selecionado tenha sangue tipo A e fator Rh$^-$ é representada por

$$\mathrm{P}(A \cap Rh^-).$$

Temos que $\mathrm{P}(A) = 0,75$ e $\mathrm{P}(Rh^+) = 0,6$. Sendo o tipo de sangue e o fator Rh independentes, segue que

$$\mathrm{P}(A \cap Rh^-) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(Rh^-) = 0,75 \times 0,6 = 0,45$$

(c) Rh$^+$, mas não sangue tipo A

A probabilidade de que um membro da tribo tenha fator Rh positivo mas não sangue do tipo A é representada por

$$\mathrm{P}(Rh^+ \cap O),$$

pois neste caso, $A^c = O$. Mais uma vez sendo o tipo de sangue e o fator Rh independentes, segue que

$$\mathrm{P}(Rh^+ \cap O) = \mathrm{P}(Rh^+) \times \mathrm{P}(O).$$

Como $O = A^c$, podemos calcular que

$$\mathrm{P}(O) = \mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Assim,

$$\mathrm{P}(Rh^+ \cap O) = \mathrm{P}(Rh^+) \times \mathrm{P}(O) = 0,4 \times 0,25 = 0,1.$$

(d) Sangue tipo O e Rh$^-$

A probabilidade de que o membro da tribo selecionado tenha sangue tipo O e fator Rh negativo é representada por

$$\mathrm{P}(O \cap Rh^-) = \mathrm{P}(O) \times \mathrm{P}(Rh^-) = 0,25 \times 0,6 = 0,15,$$

pois $O = A^c$ e o tipo de sangue e o fator Rh independentes.

(e) Rh+ dado que tem sangue tipo A.

A probabilidade de que um membro da tribo tenha fator Rh positivo dado que ele tem sangue tipo A é representada por $\mathrm{P}(Rh^+|A)$. Como o tipo de sangue e o fator Rh são independentes, a informação da ocorrência (ou não) do evento A não altera a probabilidade de ocorrência do evento Rh^+. Então

$$\mathrm{P}(Rh^+|A) = P(Rh^+) = 0,40$$

Exercício 4.

Uma escola fez um levantamento com seus 500 estudantes do ensino médio. Suponha que X represente o número de horas de atividade física por semana. As respostas foram tabuladas e encontram-se na tabela a seguir.

Sexo	Atividade		
	$0 \leq X < 3$	$3 \leq X < 5$	$X \geq 5$
Feminino	220	80	70
Masculino	30	40	60

Solução:

Temos que Ω é o conjunto dos 500 estudantes, agora, definimos os eventos:

- F: estudante do sexo feminino;
- M: estudante do sexo masculino;
- A: estudante que pratica $0 \leq x < 3$ horas de atividade física por semana;
- B: estudante que pratica $3 \leq x < 5$ horas de atividade física por semana;
- C: estudante que pratica $x \geq 5$ horas de atividade física por semana;

(a) Qual é a probabilidade de sortear aleatoriamente um estudante do sexo feminino com atividade física semanal na faixa de [3, 5) horas?

A probabilidade de um estudante do sexo feminino que pratica atividade física semanal na faixa de [3, 5) horas é representada por $P(F \cap B)$. Assim, temos que:

$$P(F \cap B) = \frac{80}{500} = 0,16.$$

(b) Calcule $P(X \geq 5)$.

A probabilidade de um estudante praticar atividade física semanal maior ou igual a 5 horas é representada por $P(C)$. Assim, temos que:

$$P(C) = \frac{130}{500} = 0,26$$

(c) Calcule a probabilidade de que um estudante do sexo feminino escolhido aleatoriamente dedique pelo menos 5 horas por semana à atividade física. Idem para um estudante do sexo masculino. Compare as respostas com a resposta do item (b).

A probabilidade de que um estudante do sexo feminino escolhido aleatoriamente dedique pelo menos 5 horas por semana à atividade física é representrada por $P(C|F)$. Assim temos que:

$$P(C|F) = \frac{70}{370} = 0,1892$$

Agora, para um estudante do sexo masculino, temos que:

$$P(C|M) = \frac{60}{130} = 0,4615$$

Comparando as respostas do item (c) com a resposta do item (b) vemos que a probabilidade de um estudante de sexo masculino praticar atividade fisica acima de 5 horas por semana é maior do que a probabilidade estimada no item (b). Por outro lado, estudantes de sexo feminino têm probabilidades menores do que as estimadas no item (b).

(d) Calcule a probabilidade de ter sido selecionado um estudante do sexo feminino sabendo que o estudante sorteado pratica atividade física na faixa de [3, 5) horas.

A probabilidade de ter sido selecionado um estudante do sexo feminino sabendo que o estudante sorteado pratica atividade física na faixa de [3, 5) é representada por $P(F|B)$. Assim, temos que:

$$P(F|B) = \frac{80}{120} = 0,6667$$

(e) Qual é a probabilidade de que o estudante selecionado pratique atividade física pelo menos 5 horas por semana ou seja do sexo feminino?

A probabilidade de que o estudante selecionado pratique atividade física pelo menos 5 horas por semana ou seja do sexo feminino é representada por $P(F \cup C)$, assim temos que:

$$P(F \cup C) = P(F) + P(C) - P(F \cap C) = \frac{370}{500} + \frac{130}{500} - \frac{70}{500} = 0,74 + 0,26 - 0,14 = 0,86$$