MAE116 – Noções de Estatística

Grupos B e D – II Semestre de 2020

Lista de Exercícios 9 – Teste de Hipóteses II – CASA (gabarito)

Exercício 1.

Dados da CET-SP (`http://www.cetsp.com.br/media/186829/fat%20e%20est%202011.pdf`) de 2011 relatam que quase a totalidade (97%) dos motoristas utilizam o cinto de segurança. No entanto, com relação ao banco traseiro, o cinto é usado por apenas 23% dos veículos com passageiros no banco traseiro. Para saber se a proporção de veículos em que passageiros do banco traseiro utilizam o cinto aumentou em 2018, foram selecionados ao acaso 125 veículos com passageiros no banco traseiro e verificou-se que em 35 desses veículos os passageiros do banco traseiro estavam utilizando o cinto de segurança.

Solução

(a) Formule as hipóteses adequadas ao problema, especificando o parâmetro a ser testado.

O parâmetro de interesse é a a proporção de veículos em que passageiros do banco traseiro utilizam o cinto em 2018. Vamos denotá-lo por p.

As hipóteses de interesse são:

$$\mathrm{H}_0 : p = 0,23 \quad \text{versus} \quad \mathrm{H}_1 : p > 0,23.$$

As hipóteses possuem a seguinte interpretação:

H_0 : A proporção de veículos em que passageiros do banco traseiro utilizam o cinto em 2018 não difere da proporção de veículos em que passageiros do banco traseiro utilizavam o cinto em 2011.

H_1 : A proporção de veículos em que passageiros do banco traseiro utilizam o cinto em 2018 é maior do que essa proporção em 2011

(b) Qual é a estimativa pontual do parâmetro de interesse?

A estimativa pontual para p é dada por $\widehat{p}_{obs} = \frac{35}{125} = 0,28$.

(c) Calcule o nível descritivo (valor-p) do teste. Qual é a conclusão para $\alpha = 4\%$?

O nível descritivo do teste é dado por

$$\text{valor-}p = \mathrm{P}(\widehat{p} \geqslant \widehat{p}_{obs}, \text{ sendo } H_0 \text{ verdadeira }) = \mathrm{P}(\widehat{p} \geqslant 0,28, \text{ sendo } p = 0,23).$$

Utilizando o Teorema Limite Central para aproximar a distribuição amostral de $\widehat{p}$, temos que

$$\widehat{p} \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right), \quad \text{aproximadamente,}$$

e, consequentemente,

$$Z = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p \times (1-p)}{n}}} \sim \mathrm{N}\left(0,1\right), \quad \text{aproximadamente.}$$

Assim, sob a hipótese nula,

$$\begin{aligned}
\text{valor-}p &= \mathrm{P}(\widehat{p} \geqslant 0,28, \text{ sendo } p = 0,23) \approx \mathrm{P}\left(Z \geqslant \frac{0,28 - 0,23}{\sqrt{\frac{0,23 \times (1-0,23)}{125}}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \geqslant \frac{0,05}{0,037640}\right) \\
&= \mathrm{P}(Z \geqslant 1,328359) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 1,328359) = 1 - A(1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918
\end{aligned}$$

Decisão: Como o nível descritivo do teste é maior do que o nível de significância considerado de 4%, decidimos não rejeitar H_0.

Conclusão: Ou seja, ao nível de significância de 4%, concluímos que não temos evidências suficientes de que a proporção de veículos em que passageiros do banco traseiro utilizam o cinto em 2018 difira da proporção de anos anteriores.

Exercício 2.

Em uma fábrica, o tempo que um produto leva para ser montado tem distribuição normal com média igual a 30 min. O departamento de produção fez uma série de modificações para aprimorar o processo de produção e a qualidade do produto, mas não sabe como essas modificações irão afetar o tempo médio de montagem.

Solução

(a) Estabeleça as hipóteses estatísticas adequadas ao problema. Especifique o parâmetro de interesse.

Denote por X o tempo, em minutos, que um produto dessa fábrica leva para ser montado **após as modificações** no processo.

Pelo enunciado,

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),$$

com μ e σ^2 desconhecidos.

O parâmetro de interesse é μ, o tempo médio que um produto dessa fábrica leva para ser montado **após as modificações** no processo. As hipóteses de interesse são:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 30 \quad \text{versus} \quad \mathrm{H}_1 : \mu \neq 0,30.$$

As hipóteses possuem a seguinte interpretação:

H_0: O tempo médio que um produto dessa fábrica leva para ser montado após as modificações no processo é igual ao tempo médio antes das modificações do processo, ou seja, as modificações não afetaram o tempo médio de montagem.

H_1: As modificações alteraram o tempo médio de montagem.

(b) Foram anotados os tempos de montagem de 25 produtos sob o novo processo de produção, e obteve-se um tempo médio de montagem igual a 31,9 min. e variância igual a 31,7 min². Calcule o nível descritivo (valor-p) do teste e conclua ao nível de significância de 5%.

Recorde que para testar hipóteses sobre a média populacional μ utilizamos a média amostral $\overline{X}$ como evidência amostral. Pelo resultado apresentado na Aula 10, a distribuição da variável aleatória $\overline{X}$ é dada por

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \text{para qualquer } n.$$

Como não temos informação sobre σ^2, é necessário estimá-lo para que o teste seja expresso apenas em termos de quantidades conhecidas. Para isso, iremos utilizar a distribuição t-Student através da seguinte padronização:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1} \quad (t - \text{Student com } n-1 \text{ graus de liberdade})$$

Da amostra temos que $\overline{x} = 31,9$ e $s^2 = 31,7$.

Recorde que o cálculo do nível descritivo para o teste de hipóteses sobre a média populacional depende da hipótese alternativa. Como a hipótese alternativa é bilateral, e $\overline{x} = 31,9 > \mu_0 = 30$, o nível descritivo do teste é dado por

$$\begin{aligned}
\text{valor-}p &= 2 \times \text{P}(\overline{X} \geqslant \overline{x}, \text{ sendo } H_0 \text{ verdadeira }) = 2 \times \text{P}(\overline{X} \geqslant 31,9, \text{ sendo } \mu = 30) \\
&= 2 \times \text{P}\left(T \geqslant \frac{31,9 - 30}{\sqrt{\frac{31,7}{25}}}\right) = 2 \times \text{P}(T \geqslant 1,687306) = 2 \times 0,052251 = 0,104502,
\end{aligned}$$

sendo $T \sim t_{24}$.

Para calcular $\text{P}(T \geqslant 1,687306)$ há 2 maneiras:

(i) pelo Rcmdr: clique no menu `Distribuições` $\rightarrow$ `Distribuições Contínuas` $\rightarrow$ `Distribuição` t $\rightarrow$ `Probabilidades da distribuição t`. Em `Valores da variável` coloque 1.687306, em `Graus de liberdade` coloque 24 $(= 25 - 1)$ e clique em `cauda superior`. A saída é apresentada a seguir:

```
Rcmdr>  pt(c(1.687306), df=24, lower.tail=FALSE)
[1] 0.05225037
```

(ii) pela tabela $t-$Student: na linha 24 (graus de liberdade) o valor $1,687$ está bem próximo de $1,711$ que corresponde a probabilidade, na cauda inferior, a 0,95. Portanto, a cauda superior tem probabilidade aproximada de 0,05, sendo levemente maior do que isso.

Decisão e conclusão: como o nível descritivo do teste é maior do que o nível de significância considerado de 5%, então decidimos não rejeitar H_0. Ou seja, concluímos que não temos evidências suficientes de que as modificações afetaram o processo.

Exercício 3.

O crescimento de bebês durante os 6 primeiros meses de vida pode ser modelado por uma distribuição Normal. O crescimento médio no período para bebês saudáveis é de 15 cm. Deseja-se verificar se bebês com problemas de alergia têm menor crescimento no 1º semestre de vida. Para tanto, 10 bebês alérgicos foram selecionados, e após 6 meses forneceram as seguintes medidas de crescimento em centímetros:

$$14,5; \quad 12,7; \quad 14,9; \quad 13,8; \quad 15,1; \quad 12,2; \quad 15,1; \quad 14,7; \quad 15,2 \quad \text{e} \quad 13,8.$$

Solução

(a) Formule as hipóteses adequadas. Especifique o parâmetro a ser testado.

Denote por X o crescimento, em centímetros, de bebês **alérgicos** durante os 6 primeiros meses de vida.

Pelo enunciado,

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),$$

com μ e σ^2 desconhecidos.

O parâmetro de interesse é μ, o crescimento médio de bebês **alérgicos** durante os 6 primeiros meses de vida. As hipóteses de interesse são:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 15 \quad \text{versus} \quad \mathrm{H}_1 : \mu < 15.$$

As hipóteses possuem a seguinte interpretação:

H_0; O crescimento médio de bebês alérgicos nos 6 primeiros meses de vida é similar ao crescimento médio de bebês em geral.

H_1: O crescimento médio de bebês alérgicos nos 6 primeiros meses de vida é menor do que o crescimento médio de bebês em geral.

(b) Calcule o nível descritivo (valor-p) do teste e conclua para um nível de significância de 5%.

Para testar hipóteses sobre a média populacional μ utilizamos a média amostral $\overline{X}$ como evidência amostral. Pelo resultado apresentado na Aula 10, a distribuição da variável aleatória $\overline{X}$ é dada por

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \text{para qualquer } n.$$

Assim como no Exercício 2, não temos informação sobre σ^2 e é necessário estimá-lo. Utilizando a distribuição t-Student, temos que

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1} \quad (t - \text{Student com } n-1 \text{ graus de liberdade})$$

Da amostra de 10 bebês alérgicos, temos que $\overline{x} = 14,2$ e $s^2 = 1,11$.

O cálculo do nível descritivo para o teste de hipóteses sobre a média populacional depende da hipótese alternativa. Neste caso, para testar as hipóteses

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 15 \quad \text{versus} \quad \mathrm{H}_1 : \mu < 15,$$

o nível descritivo é dado por

$$\begin{aligned}
\text{valor-}p &= \text{P}(\overline{X} \leqslant \overline{x}, \text{ sendo } H_0 \text{ verdadeira }) = \text{P}(\overline{X} \leqslant 14,2, \text{ sendo } \mu = 15) \\
&= \text{P}\left(T \leqslant \frac{14,2-15}{\sqrt{\frac{1,11}{10}}}\right) = \text{P}\left(T \leqslant \frac{-0,8}{0,333167}\right) = P(T \leqslant -2,4012) = 0,019909,
\end{aligned}$$

sendo $T \sim t_9$.

$\rightarrow$ Para calcular $P(T_9 \leqslant -2,4012)$ há 2 maneiras:

(i) pelo Rcmdr clique no menu `Distribuições` $\rightarrow$ `Distribuições Contínuas` $\rightarrow$ `Distribuição t` $\rightarrow$ `Probabilidades da distribuição` t. Em `Valores da variável` coloque -2.4012, em `Graus de liberdade` coloque 9 $(= 10 - 1)$ e clique em `cauda inferior`. A saída é da forma:

```
Rcmdr>  pt(c(-2.4012), df=9, lower.tail=TRUE)
[1] 0.01990973
```

(ii) pela tabela $t-$Student: na linha 9 (graus de liberdade) o valor $+2,4012$ está bem próximo de $2,398$, que corresponde à probabilidade, na cauda inferior, de $0,98$. Portanto, por simetria, a cauda inferior a $-2,4012$ tem probabilidade aproximada $0,02$.

Decisão e conclusão: como o nível descritivo $(0,0199)$ é menor do que o nível de significância considerado $(0,05)$, então decidimos rejeitar H_0. Ou seja, concluímos que há evidências suficientes de que o crescimento médio de bebês alérgicos nos 6 primeiros meses de vida é menor do que o crescimento médio dos bebês em geral.

(c) Construa um intervalo de confiança para o crescimento médio, durante o primeiro semestre de vida de bebês alérgicos, com coeficiente de confiança de 90%.

O intervalo de confiança para μ considerando σ desconhecido é dado por:

$$\left[\overline{x} - t^c_{n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}} \; ; \; \overline{x} - t^c_{n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right],$$

em que, t^c_{n-1} é o quantil da distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade tal que $\text{P}(-t^c_{n-1} \leq T \leq t^c_{n-1}) = \gamma$, sendo $T \sim t_{n-1}$.

Temos que $\overline{x} = 14,2$ e $s^2 = 1,11$ para uma amostra de $n = 10$ bebês. Para calcular o intervalo de confiança, ainda precisamos obter o valor do quantil $t^c_{n-1} = t^c_9$. Temos que $\gamma = 0,90$ e $n = 10$, e portanto t^c_9 é o quantil da distribuição t-Student com 9 graus de liberdade tal que

$$\text{P}(-t^c_9 \leq T \leq t^c_9) = 0,90.$$

Para utilizar a tabela da distribuição t-Student fornecida no e-disciplinas é necessário expressar t^c_9 em termos de sua probabilidade acumulada à esquerda. O quantil t^c_9 deixa uma probabilidade acumulada à sua esquerda igual a $0,95$. Com base na tabela obtemos que $t^c_9 = 1,833$.

Para utilizar o pacote `Rcmdr` siga os passoa abaixo:

`Distribuições` $\rightarrow$ `Distribuições contínuas` $\rightarrow$ `Distribuição t` $\rightarrow$ `quantis t.` Forneça a probabilidade 0.95 (Lembre que no `R`, o "." é separador decimal); graus de liberdade igual a 9; e deixe selecionado a cauda esquerda. A saída é:

```
Rcmdr>  qt(c(0.95), df=9, lower.tail=TRUE)
[1] 1.833113
```

Logo, o intervalo de confiança é dado por

$$\begin{aligned} & \left[14,2 - 1,833\sqrt{\frac{1,11}{10}};\quad 14,2 + 1,833\sqrt{\frac{1,11}{10}}\right] \\ = & \ [14,2 - 0,610694;\quad 14,2 + 0,610694] \\ = & \ [13,58931;\quad 14,81069]\,. \end{aligned}$$

Note que o intervalo estimado e formado por valores inferiores a 15.

Exercício 4.

A Federação Internacional de Tênis estabelece que as bolas de tênis devem ter peso médio de 57,70 gramas (especificações completas em `https://www.itftennis.com/media/278130/278130.pdf`). Um fabricante de bolas de tênis introduz nova tecnologia em sua produção mas desconfia que, em média, as novas bolas podem estar mais pesadas. Para averiguar essa conjectura, foram selecionadas 60 bolas produzidas sob a nova tecnologia, resultando em peso médio de 58,36 gramas e desvio padrão de 2,91 gramas.

Solução

(a) Formule as hipóteses adequadas ao problema, especificando o parâmetro de interesse.

Denote por X o peso, em gramas, das bolas de tênis deste fabricante **após a introdução da nova tecnologia** em sua produção. Diferentemente dos exercícios anteriores, não há informação sobre a distribuição de probabilidade de X, e sua média μ e variância σ^2 são desconhecidas

O parâmetro de interesse, desconhecido, é μ, o peso médio das bolas de tênis desse fabricante **após a introdução da nova tecnologia** em sua produção. As hipóteses de interesse são:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 57,7 \quad \text{versus} \quad \mathrm{H}_1 : \mu > 57,7.$$

As hipóteses possuem a seguinte interpretação:

H_0: O peso médio das bolas de tênis desse fabricante após a introdução da nova tecnologia em sua produção não difere do peso médio recomendado pela Federação Internacional de Tênis (FIT)).

H_1: O peso médio das bolas de tênias após a introdução da nova tecnologia em sua produção é maior que o recomendado pela FIT).

(b) Calcule o valor-p. Baseado nesse nível descritivo, qual é a conclusão ao nível de significância de 8%?

Do enunciado, obtemos que o tamanho amostral foi de $n = 60$ bolas de tênis, a média amostral foi igual a $\overline{x} = 58,36$ gramas e o desvio padrão amostral foi de $s = 2,91$ gramas. O enunciado não nos fornece a distribuição da variável aleatória X.

Assumindo que $n = 60$ é um tamanho amostral suficientemente grande, podemos aproximar a distribuição da média amostral pela distribuição normal utilizando o Teorema Limite Central, de forma que

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \text{aproximadamente,}$$

e ainda que,

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1), \quad \text{aproximadamente.}$$

Neste caso, para testar as hipóteses

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 57,7 \quad \text{versus} \quad \mathrm{H}_1 : \mu > 57,7.$$

o nível descritivo é dado por

$$\begin{aligned}
\text{valor-}p &= \text{P}(\overline{X} \geqslant \overline{x}, \text{ sendo } H_0 \text{ verdadeira }) = \text{P}(\overline{X} \geq 58,36, \text{ sendo } \mu = 57,7) \\
&\approx \text{P}\left(T \geqslant \frac{58,36 - 57,7}{\sqrt{\frac{2,91^2}{60}}}\right) = \text{P}\left(T \geqslant \frac{0,66}{0,375679}\right) = \text{P}(T \geqslant 1,756817) \\
&= 1 - A(1,76) = 1 - 0,9608 = 0,0392.
\end{aligned}$$

Observar que $T \sim N(0,1)$, aproximadamente.

Alternativamente, podemos utilizar o Rcmdr para calcular a probabilidade P$(\overline{X} \geq 58,36$, sendo $\mu = 57,7)$ diretamente, ou podemos fazer a transformação para a distribuição normal padrão e calcular P$(T \geqslant 1,756817)$, sendo $T \sim N(0,1)$.

Então há duas possibilidades:

(i) Clique no menu `Distribuições` $\rightarrow$ `Distribuições Contínuas` $\rightarrow$ `Distribuição Normal` $\rightarrow$ `Probabilidades da Normal`. Em `Valores da variável` coloque 58.36, em `Média` coloque 57.7, em `Desvio Padrão` coloque $2.91/\sqrt{60} \approx 0.3757$ e clique em calda superior.

```
Rcmdr>  pnorm(c(58.36), mean=57.7, sd=0.3757, lower.tail=FALSE)
[1] 0.03948271
```

(ii) Clique no menu `Distribuições` $\rightarrow$ `Distribuições Contínuas` $\rightarrow$ `Distribuição Normal` $\rightarrow$ `Probabilidades da Normal`. Em `Valores da variável` coloque $1,756817$, em `Média` coloque 0, em `Desvio Padrão` coloque 1 e clique em calda superior.

```
Rcmdr>  pnorm(c(1.756817), mean=0, sd=1, lower.tail=FALSE)
[1] 0.0394745
```

Decisão e conclusão: como o nível descritivo (0,039) é menor do que o nível de significância considerado (0,08), então decidimos rejeitar H_0. Ou seja, ao nível de significância de 8%, concluímos que o fabricante possui evidências para afirmar que o peso médio das bolas de tênis após a introdução da nova tecnologia em sua produção é maior que o peso médio especificado pela FIT.