MAE116 – Noções de Estatística

Grupos B e D – II Semestre de 2020

Lista de exercícios 4 – Distribuição binomial – CASA (gabarito)

Exercício 1.

Discuta a validade do modelo binomial para as variáveis aleatórias mencionadas nos seguintes casos:

Solução:

O modelo binomial consiste na repetição de ensaios de Bernoulli de maneira independente e com probabilidade de sucesso constante de ensaio para ensaio. Estamos interessados em contar quantos sucessos obtivemos no experimento.

(a) dos pacientes de um grande hospital, sorteamos 8 e contamos quantos se declaram diabéticos

Nesse exemplo, o ensaio é sortear um paciente; o sucesso é "o paciente declarar ser diabético" e $n = 8$ repetições. Então, seja X a variável que denota ao número de pacientes diabéticos na amostra de 8. As suposições do modelo binomial são válidas, já que a seleção de um paciente não depende de outro paciente (suposição de independência) e todos os pacientes têm a mesma probabilidade de serem selecionados. Portanto o modelo binomial neste caso é válido.

(b) da prateleira de biscoitos em um supermercado, escolhemos 30 pacotes de biscoitos, ao acaso, sendo 15 de uma fábrica e 15 de outra. Contamos o número total de pacotes com biscoitos quebrados;

Ensaio: "escolher o pacote de biscoito"; sucesso: "o pacote possui biscoitos quebrados"; e $n = 30$ ensaios. Então, considere que X seja a variável que conta o número pacotes com biscoitos quebrados dentre os 30 pacotes selecionados. Cada ensaio é independente do anterior, mas a probabilidade do pacote conter biscoitos quebrados pode depender do fabricante, e portanto o modelo binomial não é válido.

(c) selecionamos um habitante, ao acaso, de cada localidade em uma região com 80 localidades. Registramos o número de mulheres selecionadas;

Ensaio: "selecionar um habitante"; sucesso: "mulher ser selecionada"; e $n = 80$ habitantes. Então, denote por X o número de mulheres dentre os 80 habitantes selecionados. A seleção dos habitantes é independente de uma localidade a outra, mas a probabilidade de ser mulher pode variar com a localidade e portanto o modelo binomial não é válido.

(d) um teste, que consiste em preencher um formulário no computador em menos de três minutos, será aplicado a um candidato a funcionário de uma empresa. Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o candidato preencheu corretamente.

Ensaio: "realizar o teste"; sucesso: "preencher o formulário corretamente em uma tentativa"; e $n = 10$ repetições. Então, seja X o número de vezes em que o candidato a funcionário prencheu corretamente o formulario. Note que, o modelo binomial não é válido, pois como o mesmo candidato realiza os testes ele pode acumular a experiência da vez anterior e, portanto não temos independência entre os resultados do teste.

Exercício 2.

Um agricultor cultiva laranjas e também produz mudas para vender. Após alguns meses a muda pode ser atacada por fungos com probabilidade 0,02 e, nesse caso, ela tem probabilidade 0,5 de ser recuperável. O custo de cada muda produzida é R$1,20, que será acrescido de mais R$0,50 se precisar ser recuperada. As irrecuperáveis são descartadas. Sabendo que cada muda é vendida a R$3,50,

Solução:

(a) encontre a distribuição de probabilidade da variável aleatória L: lucro por muda produzida.

Definindo a variável aleatória

$$L : \text{lucro por muda produzida},$$

os possíveis valores que L pode assumir são

$$\begin{cases} 3,50 - 1,20 = 2,30, & \text{muda sadia, muda não atacada} \\ 3,50 - 1,70 = 1,80, & \text{muda atacada e recuperada} \\ 0 - 1,20 = -1,20, & \text{muda atacada e descartada} \end{cases}$$

Consideremos também os eventos:

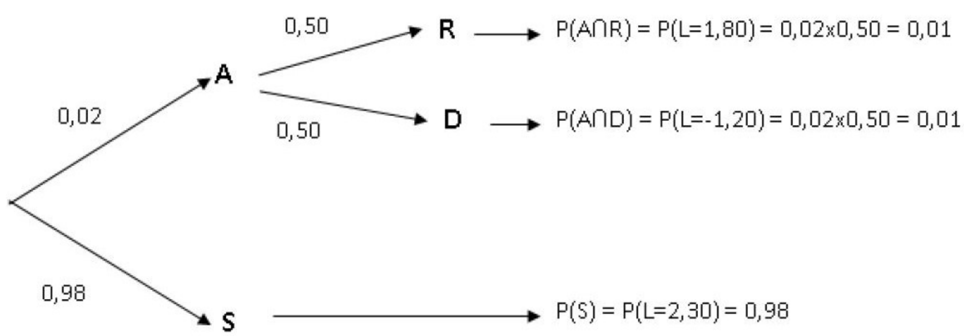
A: muda atacada por fungo $\Rightarrow P(A) = 0,02$;

S: muda sadia não atacada por fungo $\Rightarrow P(S) = 1 - P(A) = 0,98$;

R: muda recuperável $\Rightarrow P(R) = 0,50$;

D: muda descartada $\Rightarrow P(D) = 1 - P(R) = 0,50$.

O diagrama de árvores (ou árvore de probabilidades), será



Assim, a distribuição da variável aleatória "lucro por muda produzida" é dada por:

l	$-1,20$	$1,80$	$2,30$
$P(L=l)$	$0,01$	$0,01$	$0,98$

(b) Qual é o lucro médio por muda produzida?

O lucro médio por muda produzida é dado por:

$$\begin{aligned} E(L) &= -1,20 \times P(L=-1,20) + 1,80 \times P(L=1,80) + 2,30 \times P(L=2;,30) \\ &= -1,20 \times 0,01 + 1,80 \times 0,01 + 2,30 \times 0,98 \\ &= 2,26. \end{aligned}$$

Assim, o lucro médio por muda produzida é de R$ 2,26.

(c) Em uma plantação de 10.000 mudas, qual é o lucro esperado?

No item (b), calculamos que o lucro esperado por muda produzida é de R$ 2,26. Logo,

$$10.000 \times E(L) = 10.000 \times 2,26 = 22.600$$

Assim, em uma plantação de 10.000 mudas, o lucro esperado é de R$22.600,00.

(d) Em um lote de 50 mudas, qual é a probabilidade de que pelo menos 45 sejam aproveitáveis?

Seja X o número de mudas aproveitáveis, dentre 50 selecionadas e seja p a probabilidade de uma muda, selecionada ao acaso, ser aproveitável.

Então, a variável aleatória X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 50$ e $p = 0,99$, ou seja, $X \sim b(50; 0,99)$.

Assim, a probabilidade de que pelo menos 45 sejam aproveitáveis é dada por:

$$\begin{aligned} P(X \geq 45) &= P(X = 45) + P(X = 46) + P(X = 47) + P(X = 48) + P(X = 49) + P(X = 50) \\ &= 0,00013 + 0,00145 + 0,01222 + 0,07562 + 0,30556 + 0,60501 \\ &\cong 0,99999. \end{aligned}$$

O resultado acima foi calculado utilizando o programa `Rcmdr` e seguindo os passos; Distribuições $\rightarrow$ Distribuições discretas $\rightarrow$ distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades da Binomial

```
Probability
0 1.000000e-100
1 4.950000e-97
2 1.200623e-93
.
.
.
43 6.483523e-07
44 1.021155e-05
45 1.347924e-04
46 1.450484e-03
47 1.222110e-02
48 7.561804e-02
49 3.055586e-01
50 6.050061e-01
```

Ou pela cauda superior no R: $P(X \geq 45) = P(X > 44)$, seguindo os passos (Distribuições $\rightarrow$ Distribuições Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades das caudas da Binomial - marcando “Valores da Variável” igual a 44, “Experimentos da Binomial” igual a 50, “Probabilidade de Sucesso” igual a 0.99 e escolhendo “Cauda superior”).

Exercício 3.

O WhatsApp é aplicativo para troca de mensagens usado por 95% dos brasileiros portadores de smartphone (dados de julho de 2017 – fonte: https://www.statista.com/statistics/798131/brazil-use-mobile-messaging-apps/). Se sortearmos 10 portadores de smartphone ao acaso, calcule (usando 4 casas decimais):

Solução:

Seja X: “o número de usuários de WhatsApp dentre os 10 portadores de smartphone”. Assumimos, que

$$X \sim b(n = 10; p = 0,95).$$

(a) a probabilidade de exatamente 8 serem usuários do WhatsApp;

Esta probabilidade pode ser obtida no Rcmdr, clicando em: Distribuições $\rightarrow$ Distribuições Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades da Binomial, e no quadrinho escrever: 10 (em Experimentos da binomial) e 0,95 (em probabilidade de sucesso). A seguir a saída do programa

```
Probability
0 9.765625e-14
1 1.855469e-11
2 1.586426e-09
3 8.037891e-08
4 2.672599e-06
5 6.093525e-05
6 9.648081e-04
7 1.047506e-02
8 7.463480e-02
9 3.151247e-01
10 5.987369e-01
```

Observe na oitava linha que quando $X = 8$ a probablidade é $0,0746348 \approx 0,0746$.

(b) a probabilidade de pelo menos 6 serem usuários do WhatsApp;

A probabilidade de que pelo menos 6 dos usuários de smartphone usem WhatsApp é

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= 0,001 + 0,0105 + 0,0746 + 0,3151 + 0,5987 \\ &= 0,9999 \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos calcular essa probabilidade no Rcmdr escolhendo as opções: Distribuições $\rightarrow$ Distribuições Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades das caudas da distribuição binomial, e escrevendo no quadrinho 5 em Valores da Variável, 10 em Experimentos da binomial, 0,95 em Probabilidade de sucesso e cauda superior. Estas informações irão dizer ao R para calcular P$(X > 5) =$ P$(X \geq 6)$, pois estamos no caso discreto. A seguir a saída do programa

```
> pbinom(c(5), size=10, prob=0.95, lower.tail=FALSE)
[1] 0.9999363
```

(c) a probabilidade de no máximo 5 serem usuários do WhatsApp;

A probabilidade de que no máximo 6 dos usuários de smartphone usem WhatsApp é

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0,0001 \\ &= 0,0001 \end{aligned}$$

Para calcular essa probabilidade no Rcmdr clicamos em: Distribuições $\rightarrow$ Distribuiçõs Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades das caudas da distribuição binomial, e escrevemos no quadrinho 5 em Valores da Variável, 10 em Experimentos da binomial, 0,95 em Probabilidade de sucesso e cauda inferior. A seguir a saída do programa

```
> pbinom(c(5), size=10, prob=0.95, lower.tail=TRUE)
[1] 0.00006368983
```

Note que 0,00006368983 $\approx$ 0,0001.

(d) a probabilidade de que entre 5 e 8 (inclusive) serem usuários do WhatsApp.

A probabilidade de que entre 5 e 8 (inclusive) serem usuários do WhatsApp é

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 8) &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= 0,0001 + 0,0001 + 0,0105 + 0,0746 \\ &= 0,0862. \end{aligned}$$

Outra forma de calcular essa probabilidade é como segue:

$$P(5 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 4),$$

Em que $P(X \leq 8)$ e $P(X \leq 4)$ são calculadas no Rcmdr clicando em: Distribuições $\rightarrow$ Distribuições Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades das caudas da distribuição binomial, e escrevendo no quadrinho 8 ou 4 (fazer um e depois o outro) em Valores da Variável, 10 em Experimentos da binomial, 0,95 em Probabilidade de sucesso e cauda inferior.

```
> pbinom(c(8), size=10, prob=0.95, lower.tail=TRUE)
[1] 0.08613836

> pbinom(c(4), size=10, prob=0.95, lower.tail=TRUE)
[1] 2.754583e-06
```

Logo

$$P(5 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 4) = 0,0861 - 0 = 0,0861.$$

(e) o valor esperado e desvio padrão do número de usuários do WhatsApp.

Sendo $X \sim b(n = 10; p = 0,95)$, temos que

$$E(X) = np = 10 \times 0,95 = 9,5$$

Portanto, dos 10 usuários de smartphone, espera-se que, em média, 9,5 usem WhatsApp.

O desvio padrão é dado por

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \times 0,95 \times 0,05} = 0,6892024 \approx 0,6892$$

Exercício 4.

Sabe-se que 70% dos bebês que nascem na região sudeste são portadores de icterícia, uma pigmentação amarelada na pele que tende a desaparecer nas primeiras semanas de vida. Contudo, 20% dos casos de icterícia devem ser tratados. Em 25 nascimentos escolhidos aleatoriamente na região sudeste,

Solução:

(a) Qual é a probabilidade de que um bebê, aleatoriamente selecionado dessa população, não necessite de tratamento?

Considere os eventos:

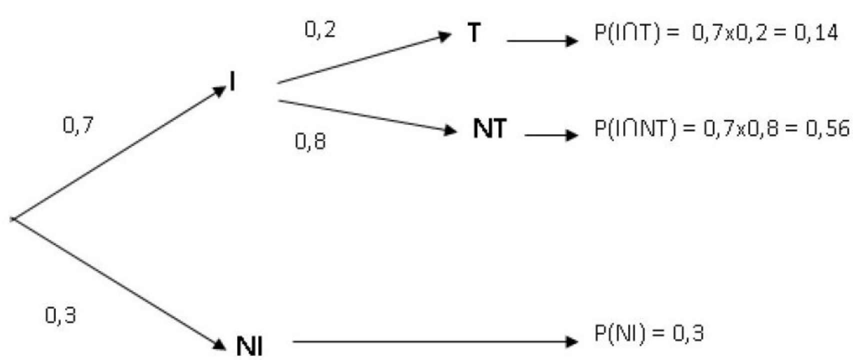
I: bebê é portador de icterícia $\Rightarrow P(I) = 0,7$;

NI: bebê não é portador de icterícia $\Rightarrow P(NI) = 1 - P(I) = 0,3$;

T: bebê necessita de tratamento, dado que é portador de ictericia $\Rightarrow P(T|I) = 0,2$;

NT : bebê não necessita de tratamento, dado que é portador de ictericia $\Rightarrow P(NT|I) = 0,8$.

Podemos construir o seguinte diagrama de árvores (ou árvore de probabilidades),



Logo, a probabilidade de um bebê, selecionado aleatoriamente da população, não precisar de tratamento é dada por

$$P(NT) = P(I \cap NT) + P(NI) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 = 0,56 + 0,3 = 0,86$$

(b) qual é a probabilidade de ao menos quinze não precisarem do tratamento?

Seja a variável aleatória X: "número de bebês que não precisam de tratamento, dentre 25 selecionados" e seja p "probabilidade de um bebê não precisar de tratamento". Logo, X é uma variável aleatória que segue uma distribuição binomial com parâmetros $n = 25$ e $p = 0,86$, ou seja, $X \sim b(25; 0,86)$

A probabilidade de ao menos 15 não precisarem de tratamento é dada por:

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) = {} & P(X = 15) + P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) \\ & + P(X = 21) + P(X = 22) + P(X = 23) + P(X = 24) + P(X = 25) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) = {} & 0,00098 + 0,00378 + 0,01229 + 0,03355 + 0,07594 + 0,13994 + 0,20468 \\ & + 0,22860 + 0,18317 + 0,09376 + 0,02304 \approx 0,99973. \end{aligned}$$

O resultado acima foi calculado utilizando o programa Rcmdr e seguindo os passos; Distribuições $\rightarrow$ Distribuições discretas $\rightarrow$ distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades da Binomial

```
Probability
0 4.499880e-22
1 6.910529e-20
2 5.094047e-18
.
.
.
15 9.843287e-04
16 3.779119e-03
17 1.229008e-02
18 3.355386e-02
19 7.593768e-02
20 1.399423e-01
21 2.046775e-01
22 2.286009e-01
23 1.831647e-01
24 9.376287e-02
25 2.303888e-02
```

Ou pela cauda superior no Rcmdr: $P(X \geq 15) = P(X > 14)$, seguindo os passos (Distribuições $\rightarrow$ Distribuições Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades das caudas da Binomial - marcando "Valores da Variável" igual a 14, "Experimentos da Binomial" igual a 25, "Probabilidade de Sucesso" igual a 0.86 e escolhendo "Cauda superior").

(c) qual é a probabilidade de no máximo quatro precisarem do tratamento?

Seja Y : "número de bebês que precisam de tratamento, dentre os 25 selecionados" e seja p: "probabilidade de um bebê precisar de tratamento (p = 0,14)".

Logo Y é uma variável aleatória que segue uma distribuição binomial com parâmetros $n = 25$ e $p = 0,14$, ou seja, $Y \sim b(25; 0,14)$. A probabilidade de no máximo quatro precisarem do tratamento é dada por

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4)$$

Logo,

$$P(X \leq 4) = 0,02304 + 0,09376 + 0,18317 + 0,22860 + 0,20468 = 0,73325.$$

O resultado acima foi calculado utilizando o programa Rcmdr e siguindo os passos; Distribuições $\rightarrow$ Distribuições discretas $\rightarrow$ distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades da Binomial

```
Probability
0 2.303888e-02
1 9.376287e-02
2 1.831647e-01
3 2.286009e-01
4 2.046775e-01
.
.
.
24 6.910529e-20
25 4.499880e-22
```

Pela cauda inferior no Rcmdr: seguindo os passos (Distribuições $\rightarrow$ Distribuições Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades das caudas da Binomial - marcando "Valores da Variável" igual a 4, "Experimentos da Binomial" igual a 25, "Probabilidade de Sucesso" igual a 0.14 e escolhendo "Cauda inferior").

(d) qual é a probabilidade de nenhum precisar de tratamento?

A probabilidade de nenhum precisar de tratamento é dada por

$$P(Y = 0) = 0,02304 \quad \text{(obtida pela tabela do item anterior)}$$

(e) Em média, dentre 25 nascimentos aleatoriamente selecionados, quantos são esperados que não necessitem de tratamento?

Considerando a variável aletória X descrita no item (b) temos que,

$$E(X) = np = 25 \times 0,86 = 21,5.$$

Portanto, espera-se, em média, que 21,5 bebês não necessitem de tratamento.

Exercício 5.

Minha filha convidou para seu aniversário 20 amiguinhas da escola. Sabe-se que cada amiga virá com probabilidade 60% e independentemente das demais. Preparamos lembrancinhas em quantidade igual a 25% a mais do que o valor esperado do número de amiguinhas que comparecerão. Qual é a probabilidade de faltarem lembrancinhas?

Solução:

Seja X: "número de amigas que comparecerão ao aniversário, dentre as 20 convidadas. Então $X \sim b(20; 0,6)$. Logo, o valor esperado do número de amiguinhas que comparecerão é:

$$E(X) = np = 20 \times 0,6 = 12.$$

Foram preparadas $12 + 0,25 \times 12 = 15$ lembrancinhas.

A probabilidade de faltarem lembrancinhas é igual a

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) \\ &= 0,03499 + 0,01235 + 0,00309 + 0,00049 + 0,00004 \\ &= 0,05096 \end{aligned}$$

O resultado acima foi calculado utilizando o programa Rcmdr e siguindo os passos; Distribuições $\rightarrow$ Distribuições discretas $\rightarrow$ distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades da Binomial

```
Probability
0 1.099512e-08
1 3.298535e-07
.
.
.
16 3.499079e-02
17 1.234969e-02
18 3.087423e-03
19 4.874878e-04
20 3.656158e-05
```

Pela cauda superior no Rcmdr: seguindo os passos (Distribuições $\rightarrow$ Distribuições Discretas $\rightarrow$ Distribuição Binomial $\rightarrow$ Probabilidades das caudas da Binomial - marcando "Valores da Variável" igual a 15, "Experimentos da Binomial" igual a 20, "Probabilidade de Sucesso" igual a 0.6 e escolhendo "Cauda superior").