Teorema do limite central e estimação da proporção populacional p

Relembrando resultados importantes

RESULTADO 1:

Seja uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável X, com média μ e variância σ^2.Temos que:

$$E(\overline{X}) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

RESULTADO 2:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, para uma amostra aleatória de tamanho n de X, temos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Logo,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1).$$

RESULTADO 3:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sendo σ^2 desconhecida, então, para uma amostra aleatória de tamanho n de X,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1},$$

onde, $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ é a variância amostral e $t_{n\text{-}1}$ representa a distribuicão *t de Student* com *n-1 graus de liberdade*.

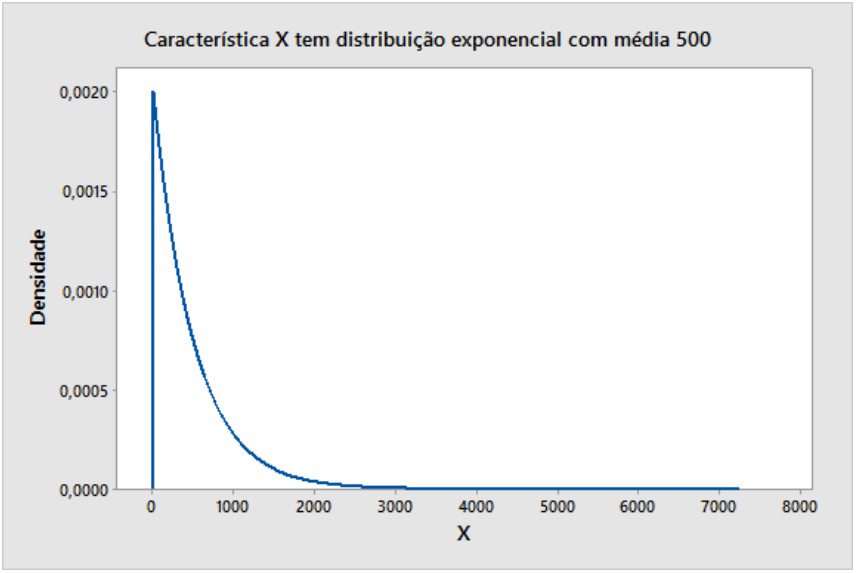
Teorema Limite Central (TLC)

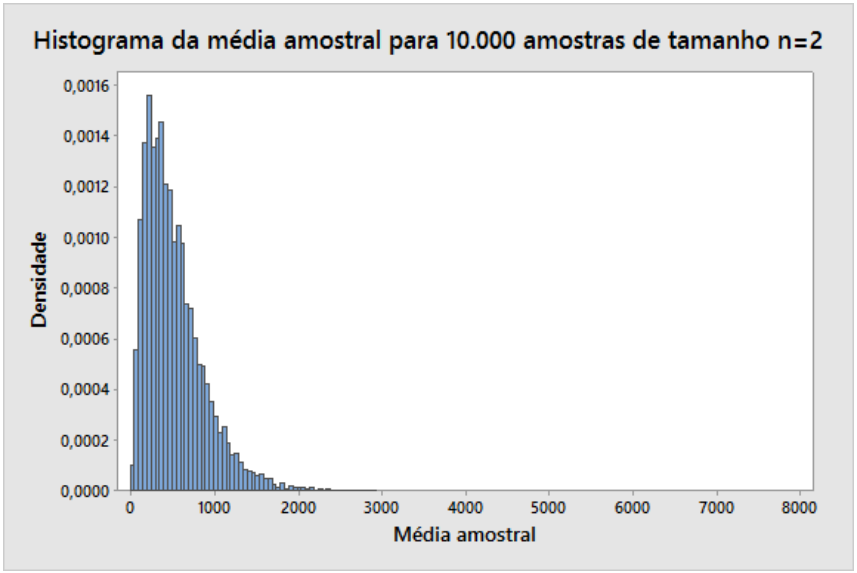
RESULTADO 4

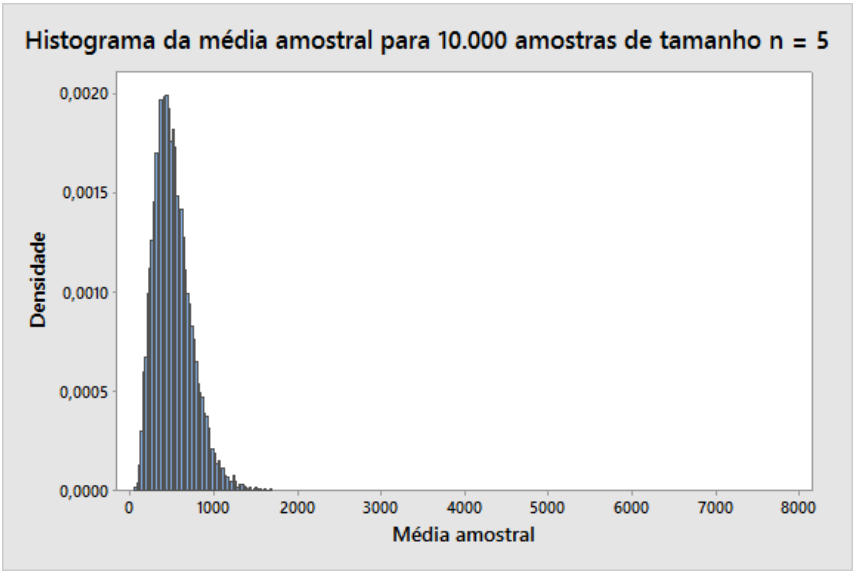
Seja X uma variável com média μ e variância σ^2.

Para amostras (X_1, X_2, ..., X_n), retiradas ao acaso e com reposição de X, a distribuição de probabilidade da média amostral $\overline{X}$ *aproxima-se*, *para n grande*, de uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2/n , ou seja,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ para } n \text{ grande, aproximadamente.}$$


Característica X tem distribuição exponencial com média 500
Densidade
0,0020
0,0015
0,0010
0,0005
0,0000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
X


Histograma da média amostral para 10.000 amostras de tamanho n=2
Densidade
0,0016
0,0014
0,0012
0,0010
0,0008
0,0006
0,0004
0,0002
0,0000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
Média amostral


Histograma da média amostral para 10.000 amostras de tamanho n = 5
Densidade
0,0020
0,0015
0,0010
0,0005
0,0000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
Média amostral

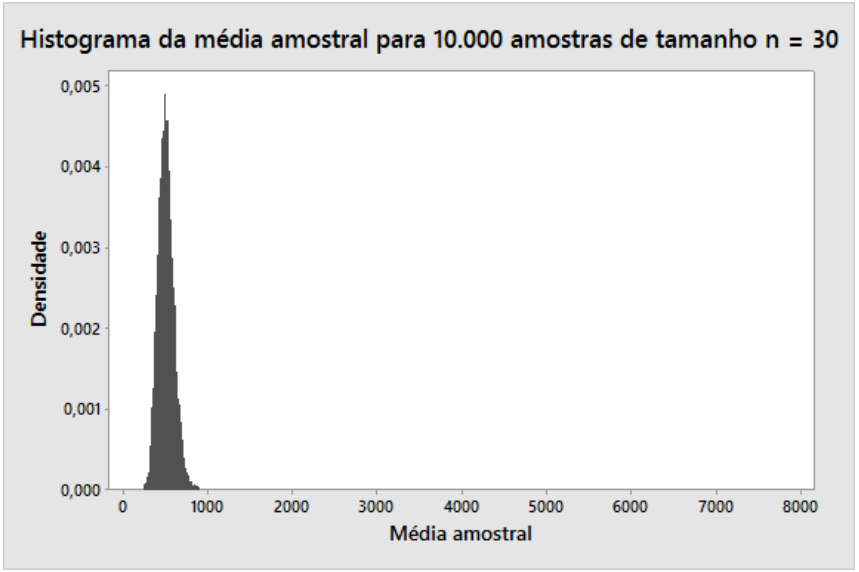
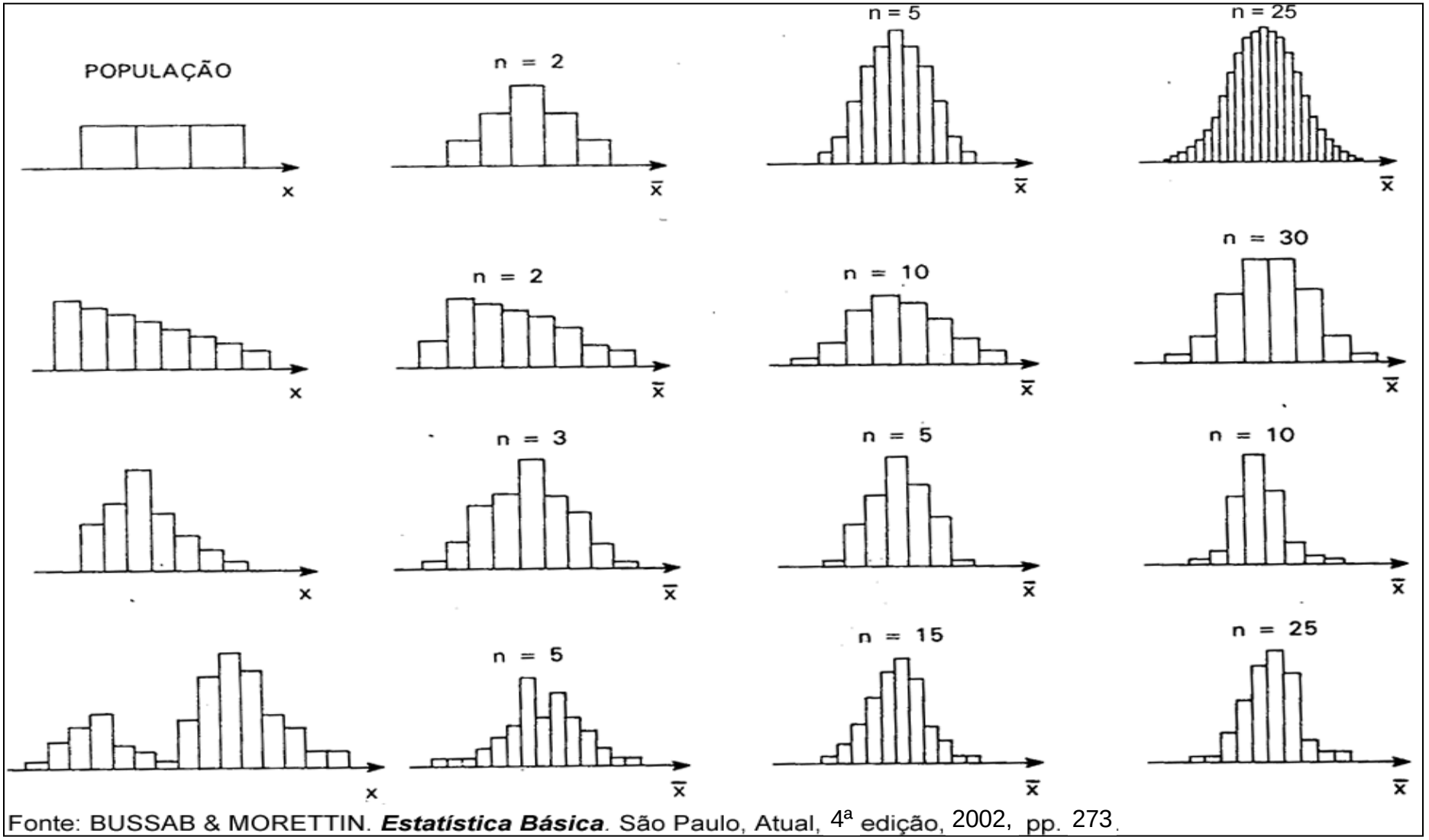

Histograma da média amostral para 10.000 amostras de tamanho n = 30
Densidade
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
0,000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
Média amostral

Figura 2: Histogramas correspondentes às *distribuições de* $\overline{X}$ para amostras de algumas populações.



Fonte: BUSSAB & MORETTIN. ***Estatística Básica***. São Paulo, Atual, 4ª edição, 2002, pp. 273.

Estes gráficos mostram que,

• quando n aumenta, *independentemente da forma da distribuição de* X, a distribuição de probabilidade da média amostral $\overline{X}$ *aproxima-se* de uma distribuição normal.

• conforme n aumenta, os valores de $\overline{X}$ tendem a se concentrar cada vez mais em torno de média μ, uma vez que a variância vai diminuindo;

No ***R***

Pacote: ***RcmdrPlugin.TeachingDemos*** $\Rightarrow$

Simulação do Teorema Limite Central

Portanto, se a variável X na população não tem necessariamente distribuição normal, e n é grande, usando o TLC o **intervalo de confiança aproximado para μ**, com nível de confiança γ, é

para σ **conhecido**:

$$\left[\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

para σ **desconhecido**:

$$\left[\overline{X} - z\frac{S}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + z\frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

sendo z tal que $\gamma = P(-z \leq \boldsymbol{Z} \leq z)$, com $\boldsymbol{Z} \sim N(0, 1)$, σ é o desvio padrão da população, e S é o desvio padrão amostral.

Exemplo 1:

Não se conhece o consumo médio de combustível de automóveis da marca T. Sabe-se, no entanto, que o desvio padrão do consumo de combustível de automóveis dessa marca é 10 km/L. Na análise de 150 automóveis da marca T, obteve-se consumo médio de combustível de 8 km/L. Encontre um intervalo de confiança para o consumo médio de combustível dessa marca de carro. Adote um nível de confiança de 95%.

X: consumo de combustível de automóveis da marca T

σ = 10 km/L

Amostra: n = 150 $\Rightarrow$ $\overline{x}$ (média amostral) = 8 km/L

γ = 0,95 $\Rightarrow$ z = 1,96

Pelo Teorema Limite Central, o intervalo de confiança é dado, aproximadamente, por

$$\left[\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[8 - 1{,}96\frac{10}{\sqrt{150}}; 8 + 1{,}96\frac{10}{\sqrt{150}}\right]$$

$$= [8 - 1{,}96 \text{ x } 0{,}82;\ 8 + 1{,}96 \text{ x } 0{,}82] = [8 - 1{,}60; 8 + 1{,}60]$$

$$= [6{,}40; 9{,}60]$$

Observe que a margem de erro ε é 1,60 km / l.

Exemplo 2:

A quantidade de colesterol X no sangue das alunas de uma universidade tem uma distribuição com desvio padrão σ = 50 mg/dL e média μ desconhecida. Se desejamos estimar a quantidade média μ de colesterol com erro ε = 10 mg / dL e confiança de 95%, quantas alunas devem formar a amostra para realizar o exame de sangue?

X: quantidade de colesterol no sangue das alunas da universidade

σ = 50 mg / dL

ε = 10 mg / dL

γ = 0,95 $\Rightarrow$ z = 1,96

n = ??

Supondo que o tamanho da amostra a ser selecionada é suficientemente grande, pelo Teorema Limite Central (TLC) temos:

$$
\begin{aligned}
n &= \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \sigma^2, \\
&= \left(\frac{1{,}96}{10}\right)^2 \times (50)^2 \\
&= 96{,}04
\end{aligned}
$$

Assim, aproximadamente 97 alunas devem ser selecionadas para realizar o exame de sangue.

Exemplo 3:

Para estimar a renda semanal média de garçons de restaurantes em uma grande cidade, é colhida uma amostra da renda semanal de 75 garçons. A média e o desvio padrão amostrais encontrados são R$ 527 e R$ 50, respectivamente. Determine um intervalo de confiança, com coeficiente de confiança de 90%, para a renda média semanal de garçons dessa cidade.

X : renda semanal de garçons da cidade

Amostra: $n = 75 \Rightarrow \bar{x} = 527$ e $s = 50$

$\gamma = 0{,}9 \Rightarrow z = 1{,}65$

O intervalo de 90% de confiança é dado, aproximadamente, por

$$\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right] =$$

$$\left[527 - 1{,}65 \frac{50}{\sqrt{75}} \; ; \; 527 + 1{,}65 \frac{50}{\sqrt{75}} \right] =$$

$$\left[527 - 9{,}53 \; ; \; 527 + 9{,}53 \right] =$$

$$\left[517{,}47 \; ; \; 536{,}53 \right]$$

Estimação da proporção

Objetivo

Estimar uma proporção p (desconhecida) de elementos em uma população, apresentando certa característica de interesse, a partir da informação fornecida por uma amostra.

Exemplos:

- p: proporção de alunos da USP que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês;

- p: proporção de consumidores satisfeitos com os serviços prestados por uma empresa telefônica;

- p: proporção de eleitores da cidade de São Paulo que votariam em um determinado candidato, caso a eleição para presidente se realizasse hoje;

- p: proporção de crianças de 2 a 6 anos, do estado de São Paulo, que não estão matriculadas em escola de educação infantil.

- Vamos observar n elementos, extraídos ao acaso da população, de forma independente;

- Para cada elemento selecionado da população, verificamos a presença (“sucesso”) ou não (“fracasso”) da característica de interesse.

Neste caso, temos uma amostra aleatória ($a.a.$) de tamanho n de X, sendo X uma $v.a.$ com distribuição de $Bernoulli$, que representamos por

$$X_1, X_2, ..., X_n,$$

onde X_i vale “1”, se ocorre sucesso, ou “0”, se ocorre fracasso para o i-ésimo elemento da amostra.

Estimador pontual

O ***estimador pontual para p***, também denominado ***proporção amostral***, é definido como

$$\hat{p} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}.$$

Note que:

- X_1 + ... + X_n é o número de elementos na amostra que apresentam a característica;
- $\hat{p} = \overline{X}$

Se observamos ***k*** elementos na amostra com a característica, obtemos $\hat{p}_{obs} = k / n$, que denominamos ***estimativa pontual para p***.

Exemplo 1:

Seja p a proporção de alunos da USP que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

Suponha que foram entrevistados n = 500 estudantes, e que, desses, k = 100 teriam afirmado que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

A ***estimativa pontual*** (***proporção amostral***) ***para*** p é dada por:

$$\hat{p}_{obs} = \frac{k}{n} = \frac{100}{500} = 0{,}20\,,$$

ou seja, 20% dos estudantes *entrevistados* afirmaram que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

$\rightarrow$ Note que outra amostra de mesmo tamanho pode levar a uma outra estimativa pontual para p.

Intervalo de confiança para p

Vimos que, para qualquer variável aleatória X, quando n é grande, usando o Resultado 4 (TLC), um ***intervalo de confiança*** para μ tem a forma

$$\left[\overline{X} - \varepsilon ; \overline{X} + \varepsilon\right],$$

onde $\varepsilon = z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, sendo σ^2 a variância de X.

Neste caso, como $X \sim Bernoulli(p)$, com $\sigma^2 = p(1-p)$ e $\hat{p} = \overline{X}$, o estimador intervalar para p é dado por

$$\left[\hat{p} - \varepsilon ; \hat{p} + \varepsilon\right],$$

com $\varepsilon = z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ e z tal que $\gamma = P(-z \leq Z \leq z)$ na $N(0,1)$.

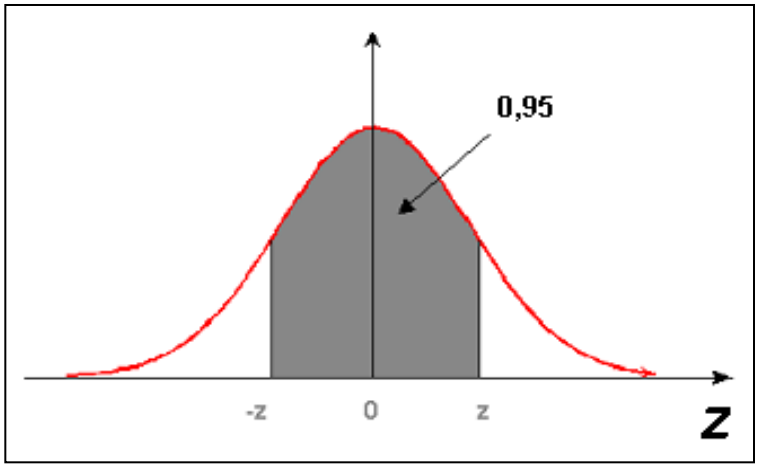
Intervalo de confiança para p

Na prática, substituímos a proporção desconhecida $\boldsymbol{p}$ *pela proporção amostral* $\hat{p}$*, obtendo o seguinte* ***intervalo de confiança aproximado com coeficiente de confiança*** γ:

$$IC(p;\gamma) = \left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Exemplo 1 (continuação):

No exemplo da *USP*, temos $n = 500$ e $\hat{p}_{obs} = 0{,}20$.
Construir um intervalo de confiança para p com coeficiente de confiança $\gamma = 0{,}95$.



Como $\gamma = 0{,}95$ fornece $z = 1{,}96$, o intervalo é dado por:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

$$= \left[0{,}20 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}20 \times 0{,}80}{500}} \; ; \; 0{,}20 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}20 \times 0{,}80}{500}} \right]$$

$$= [\, 0{,}20 - 0{,}035 \; ; \; 0{,}20 + 0{,}035 \,] = [\, 0{,}165 \; ; \; 0{,}235 \,].$$

Interpretação do IC com γ = 95%:

Se sortearmos 100 amostras de tamanho n = 500 e construirmos os respectivos 100 intervalos de confiança, com coeficiente de confiança de 95%, esperamos que, aproximadamente, 95 destes intervalos contenham o verdadeiro valor de p.

Comentários:

Da expressão $\varepsilon = z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, é possível concluir que:

- para γ fixado, o erro diminui com o aumento de n.
- para n fixado, o erro aumenta com o aumento de γ.

Dimensionamento da amostra

Da relação $\varepsilon = z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$,

segue que o **tamanho amostral** n, dados γ e a margem de erro ε, tem a

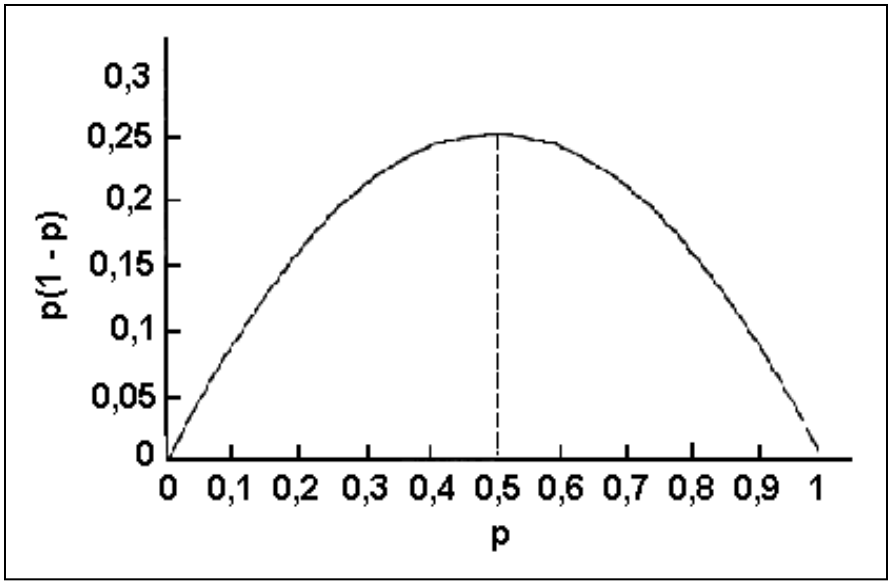
$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 p(1-p),$$

onde z é tal que $\gamma = P(-z \leq Z \leq z)$ e $Z \sim N(0,1)$.

Entretanto, nesta expressão, n depende de $p(1-p)$, que é desconhecido.

→ ***Como calcular o valor de n?***

Gráfico da função $p(1\text{-}p)$, para $0 \leq p \leq 1$.



Pela figura observamos que:

- a função $p(1\text{-}p)$ é uma parábola simétrica em torno de $p = 0{,}5$;
- o máximo de $p(1\text{-}p)$ é 0,25, alcançado quando $p = 0{,}5$.

Assim, na prática, substituímos $p(1\text{-}p)$ por seu valor máximo, obtendo

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 0{,}25\,,$$

que pode fornecer um valor de n maior do que o necessário.

Exemplo 1 (continuação):

No exemplo da USP suponha que nenhuma amostra foi coletada. Quantos estudantes precisamos consultar de modo que a estimativa pontual esteja, no máximo, a 0,02 da proporção verdadeira p, com probabilidade de 0,95?

Dados do problema:

ε = 0,02 (erro da estimativa);

γ = 0,95 $\Rightarrow$ z = 1,96.

$$n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 p(1-p) \leq \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 0{,}25 = 2401 \text{ estudantes.}$$

Pergunta: ***É possível reduzir o tamanho da amostra quando temos alguma informação a respeito de p?***

Por exemplo, sabemos que:

- p não é superior a 0,30, ou
- p é pelo menos 0,80, ou
- p está entre 0,30 e 0,60.

Resposta: ***Depende do tipo de informação sobre p.***

Em alguns casos, podemos substituir a informação $p(1-p)$, que aparece na expressão de n, por um valor menor que 0,25.

Redução do tamanho da amostra

Vimos que, se nada sabemos sobre o valor de p, no cálculo de n, substituímos $p(1\text{-}p)$ por seu valor máximo, e calculamos

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}25\,.$$

Se temos a informação de que ***p é no máximo 0,30*** ($p \leq 0{,}30$) então o valor máximo de $p(1\text{-}p)$ será dado por 0,3x0,7 = 0,21.

Logo, reduzimos o valor de n para

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}21.$$

Agora, se ***p é pelo menos 0,80*** ($p \geq 0{,}80$), então o máximo valor de $p(1\text{-}p)$ é 0,8 x 0,2 = 0,16, e temos

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}16\,.$$

Mas, se ***0,30 ≤ p ≤ 0,60*** o máximo valor de $p(1\text{-}p)$ é 0,5 x 0,5 = 0,25 e, neste caso, não há redução, ou seja,

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}25.$$

Exemplo 1 (continuação):

No exemplo da *USP*, suponha que temos a informação de que no máximo 30% dos alunos da *USP* foram ao teatro no último mês.

Portanto, temos que $p \leq 0{,}30$ e, como vimos, o máximo valor de $p(1\text{-}p)$ neste caso é 0,21.

Assim, precisamos amostrar

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 0{,}21 = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 0{,}21 = 2017 \text{ estudantes,}$$

conseguindo uma redução de 2401- 2017 = 384 estudantes.

Exemplo 2:

Por ocasião do centenário da imigração japonesa no Brasil, um Instituto de Pesquisa conduziu uma pesquisa, com a finalidade de conhecer alguns aspectos dessa população vivendo no país.

Entre outras questões, desejou-se estimar a proporção $\boldsymbol{p}$ de japoneses e descendentes no Brasil que pertenciam a alguma associação de cultura japonesa.

Foram selecionados 610 japoneses e descendentes, com mais de 16 anos de idade.

Na amostra aleatória selecionada, 195 declararam frequentar ou pertencer a alguma associação de cultura japonesa.

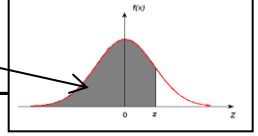
- Estimativa por ponto para p: $\hat{p}_{obs} = \frac{195}{610} \cong 0{,}32$

- Intervalo de confiança aproximado de 95% para p:

$$(0{,}32 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}32(1-0{,}32)}{610}}\,;\,0{,}32 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}32(1-0{,}32)}{610}})$$

$$= (0{,}32 - 0{,}037;0{,}32 + 0{,}037) = (0{,}283;0{,}357)$$

Distribuição Normal : Valores de P(Z ≤ z) = A(z)



Parte inteira e primeira decimal de z

	Segunda decimal de z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Volta