Estatística Descritiva (III)

Associação entre Variáveis

Associação entre variáveis qualitativas

↓

Tabelas de Contingência

Podemos construir tabelas de frequências conjuntas (***tabelas de contingência***), relacionando duas variáveis qualitativas.

Exemplo 1: Dados ***CEA06P24***, do projeto ***Caracterização Postural de Crianças de 7 e 8 anos das Escolas Municipais da Cidade de Amparo/SP***

- Estudo realizado pelo Departamento de Fisioterapia, Fonoaudiologia e Terapia Ocupacional da Faculdade de Medicina da *USP*;
- Ano de realização: 2006;
- Finalidade: mestrado;
- Análise estatística: Centro de Estatística Aplicada (*CEA*), *IME-USP*.

Objetivo: caracterizar a postura de crianças da cidade de Amparo/SP, entre sete e oito anos, de ambos os sexos

Amostra: 230 crianças com 7 e 8 anos.

Algumas variáveis coletadas:

- **Sexo** (feminino, masculino);
- **Peso** (em kg);
- **Altura** (em metros);
- **Índice de Massa Corpórea** – IMC (em kg/m^2);
- **Atividade Física** (em horas/semana);
- **Tipo de Mochila Utilizada** (com fixação escapular, com fixação lateral, de carrinho, outros);
- **Dominância** (destro, canhoto);
- **Região da escola**.

Algumas variáveis relativas à postura:

• **Postura do ombro no plano frontal** (cm): avaliado pelo desnível entre os ombros, conforme figura; anota-se a diferença Direito-Esquerdo;

• **Lordose Lombar** (graus): avaliada pelo aumento e diminuição (retificação) da lordose lombar, medindo-se o ângulo formado entre os pontos de maior convexidade da coluna torácica e da região glútea e o ponto de maior concavidade da coluna lombar, em ambos lados (Direito e Esquerdo).

• **Lado da escoliose**

Banco de Dados *CEA06P24*

criança	sexomf	idade78	idade	peso	altura	tipomochila	carrmochila	escollado
1	F	7	7,25	24,9	1,239	C	4	D
2	F	7	7,58	27,5	1,303	C	4	E
3	F	7	7,08	25,7	1,34	C	4	D
4	F	7	7,42	22,3	1,291	C	5	E
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
67	F	8	8,33	21,7	1,27	C	5	D
68	F	8	8,08	22,2	1,36	C	4	E
69	F	8	8,25	27,8	1,333	E	1	E
70	F	8	8,25	23,9	1,346	C	4	D
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
131	M	7	7,5	23,2	1,26	E	4	A
132	M	7	7,25	24,9	1,27	E	1	A
133	M	7	7,42	20,5	1,2	C	4	A
134	M	7	7,17	29,3	1,293	E	1	E
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
180	M	8	8,66	26,5	1,245	C	4	D
181	M	8	8	21,6	1,263	E	1	D
182	M	8	8,08	33	1,38	C	4	D
183	M	8	8,08	27,3	1,293	E	1	E
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
229	M	8	7,92	22,9	1,208	E	1	E
230	M	8	8	31,3	1,333	E	1	E

A) Há indícios de associação entre Lado da escoliose e Tipo de mochila?

Tipo de Mochila	Lado da Escoliose			Total
	Ausente	Direito	Esquerdo	
Carrinho	**8**	**37**	**35**	**80**
Escapular	**16**	**35**	**72**	**123**
Lateral	**2**	**10**	**11**	**23**
Total	**26**	**82**	**118**	**226**

4 dados excluídos

Qual é o significado dos valores desta tabela?

No *Rcmdr*:

- **Dados → Importar arquivos de dados →**

  → de conjunto de dados do Excel, Access ou dBase...

(Defina o nome do conjunto de dados: *dados*)

- **Estatísticas → Tabelas de Contingência → Tabelas de dupla entrada**

(Variável linha: "*tipomochila*" ; Variável coluna: "*escollado*")

Saída editada do *Rcmdr*

	Lado da escoliose			
Tipo de mochila	**Ausente**	**Direito**	**Esquerdo**	**Total**
Carrinho	8	37	35	80
Escapular	16	35	72	123
Lateral	2	10	11	23
Total	26	82	118	226

Verificar associação através da:

- porcentagem segundo as colunas, ou
- porcentagem segundo as linhas.

	Lado da Escoliose			
Tipo de Mochila	Ausente	Direito	Esquerdo	Total
Carrinho	10,0%	46,2%	43,8%	100,0%
Escapular	13,0%	28,5%	58,5%	100,0%
Lateral	8,7%	43,5%	47,8%	100,0%
Total	11,5%	36,3%	52,2%	100,0%

→ Como concluir? Será que o Tipo de Mochila utilizada influencia o Lado da Escoliose (caso tenha) de uma criança?

Comparando as porcentagens de cada uma das linhas, observamos uma diferença com relação à porcentagem total. Aparentemente, há influência do tipo de mochila utilizada no lado de ocorrência da escoliose.

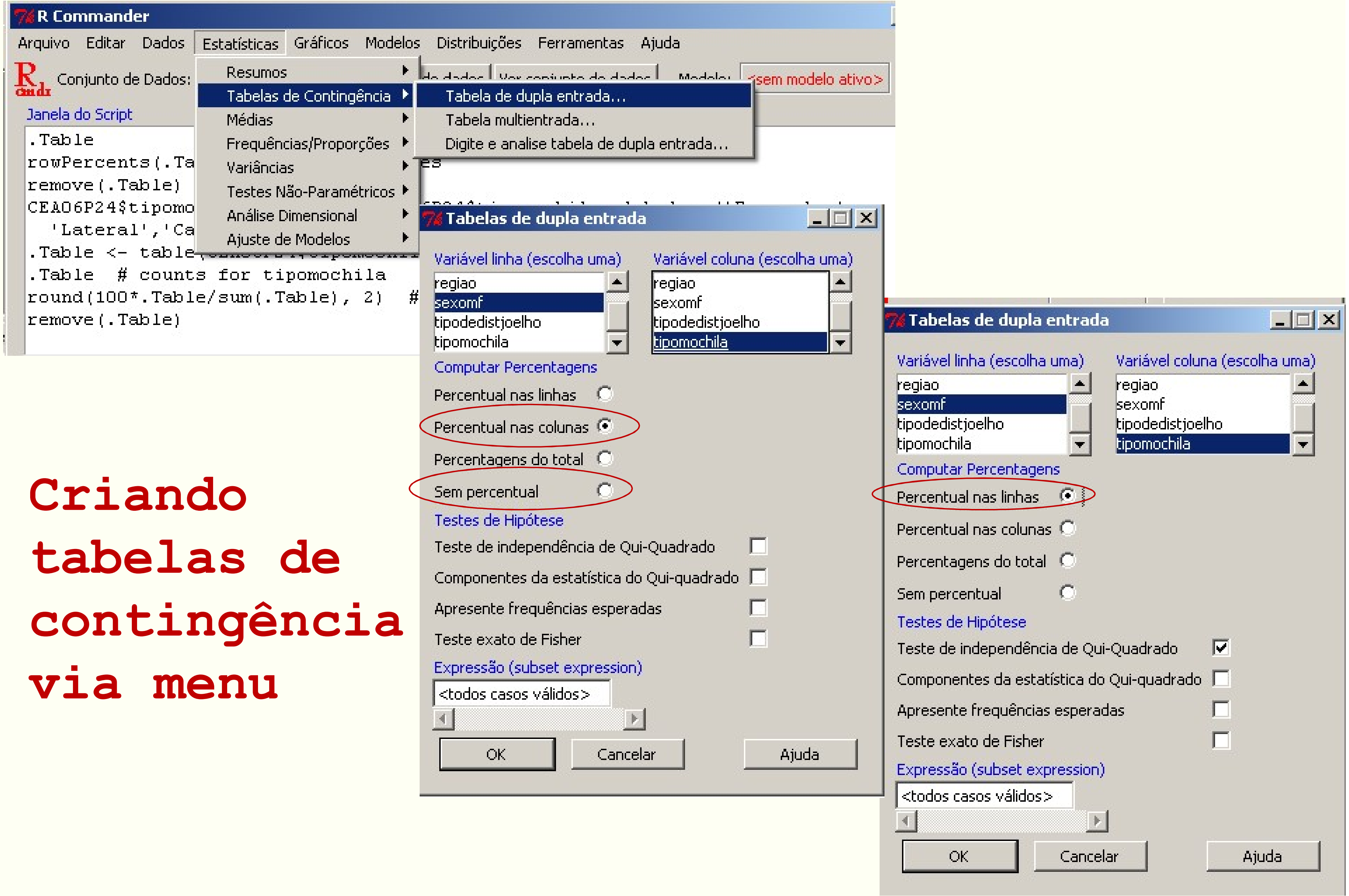
• **Estatísticas → Tabelas de Contingência → Tabelas de dupla entrada**

(Variável linha: *tipomochila*; Variável coluna: *escollado*)

Marcar opção *Percentual nas linhas*

Saída editada do *software Rcmdr*

	Lado escoliose			
Tipo de mochila	**Ausente**	**Direito**	**Esquerdo**	**Total**
Carrinho	**10,0**	**46,2**	**43,8**	**100**
Escapular	**13,0**	**28,5**	**58,5**	**100**
Lateral	**8,7**	**43,5**	**47,8**	**100**
Total	**11,5**	**36,3**	**52,2**	**100**



Criando tabelas de contingência via menu

B) Será que existe relação entre o Sexo das crianças e o Tipo de Mochila utilizada por elas?

Sexo	Tipo de Mochila			Total
	Carrinho	Escapular	Lateral	
Feminino	**53 (41,4%)**	**59 (46,1%)**	**16 (12,5%)**	**128 (100%)**
Masculino	**27 (27,6%)**	**64 (65,3%)**	**7 (7,1%)**	**98 (100%)**
Total	**80 (35,4%)**	**123 (54,4%)**	**23 (10,2%)**	**226 (100%)**

Parece existir relação entre Sexo e Tipo de Mochila.
A maioria dos meninos (65,3%) prefere mochila escapular. Por outro lado, a preferência da maioria das meninas é dividida entre mochila escapular (46,1%) e carrinho (41,4%).

Associação entre variáveis quantitativas

↓

Correlação e Regressão

Objetivo

Estudar a relação entre duas variáveis quantitativas.

Exemplos:

Idade e altura das crianças

Tempo de prática de esportes e ritmo cardíaco

Tempo de estudo e nota na prova

Taxa de desemprego e taxa de criminalidade

Expectativa de vida e taxa de analfabetismo

Investigaremos a presença ou ausência de relação linear sob dois pontos de vista:

a) Quantificando a força dessa relação: correlação.

b) Explicitando a forma dessa relação: regressão.

Representação gráfica de duas variáveis quantitativas:
Diagrama de dispersão

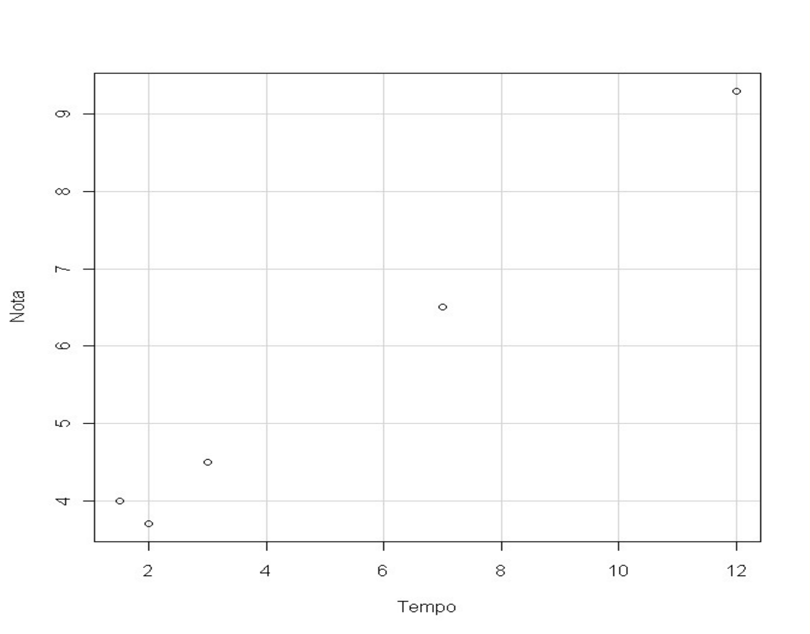
Exemplo 2: nota da prova e tempo de estudo

X : **tempo de estudo (em horas)**

Y : **nota da prova**

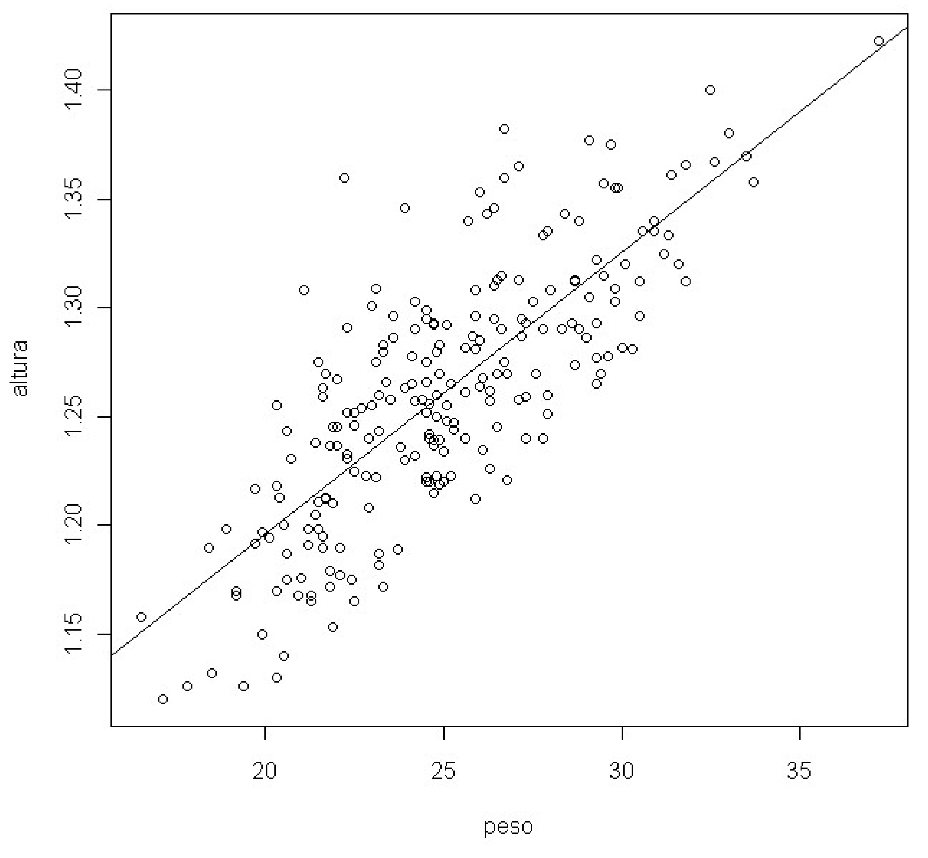
Pares de observações (X_i , Y_i) para cada estudante

Tempo(X)	Nota(Y)
3,0	4,5
7,0	6,5
2,0	3,7
1,5	4,0
12,0	9,3



Coeficiente de correlação linear de *Pearson*

É uma medida que avalia o quanto a “nuvem de pontos” no diagrama de dispersão aproxima-se de uma reta.



O **coeficiente de correlação linear de *Pearson*** é calculado por:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{(n-1)S_X S_Y}$$

sendo que

$\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são as médias amostrais de X e Y, respectivamente,

S_X e S_Y são os desvios padrão de X e Y, respectivamente.

Fórmula alternativa para o coeficiente de correlação linear de *Pearson*:

$$\boxed{r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{(n-1) S_X S_Y}} \; ,$$

sendo, $S_X^2 = \dfrac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} X_i^{\,2} - n\overline{X}^2}{n-1}.$

Voltando ao Exemplo 2:

Tempo (X)	Nota (Y)	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$
3,0	4,5	-2,1	-1,1	2,31
7,0	6,5	1,9	0,9	1,71
2,0	3,7	-3,1	-1,9	5,89
1,5	4,0	-3,6	-1,6	5,76
12,0	9,3	6,9	3,7	25,53
25,5	28,0	0	0	41,2

$\bar{X} = 5{,}1$ $\bar{Y} = 5{,}6$

$$S_x^2 = \frac{(-2{,}1)^2 + \ldots + (6{,}9)^2}{4} = \frac{78{,}2}{4} = 19{,}55 \Rightarrow S_x = 4{,}42$$

$$S_y^2 = \frac{(-1{,}1)^2 + \ldots + (3{,}7)^2}{4} = \frac{21{,}9}{4} = 5{,}47 \Rightarrow S_y = 2{,}34$$

Então,

$$r = \frac{41{,}2}{4\,.\,4{,}42\,.\,2{,}34} = 0{,}9959$$

No *R* temos:

```
> cor(tempoxnota$Tempo, tempoxnota$Nota)

[1] 0.9960249
```

ou ainda no *Rcmdr*

- **Estatísticas → Resumos → Matriz de Correlação**

(Selecione *Tempo* e *Nota* no conjunto de dados *tempoxnota*)

```
            Nota     Tempo
Nota  1.0000000 0.9960249
Tempo 0.9960249 1.0000000
```

Propriedade: $-1 \le r \le 1$

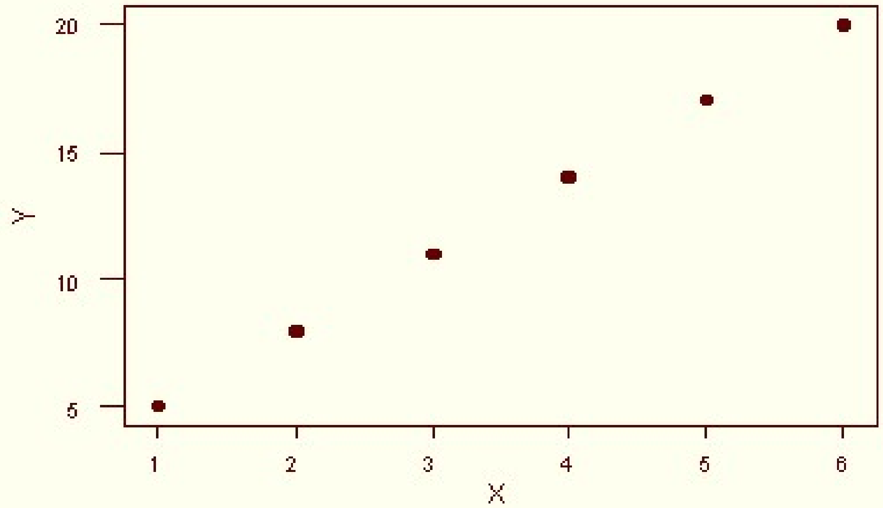
Casos particulares:

$r = 1 \Rightarrow$ correlação linear positiva e perfeita

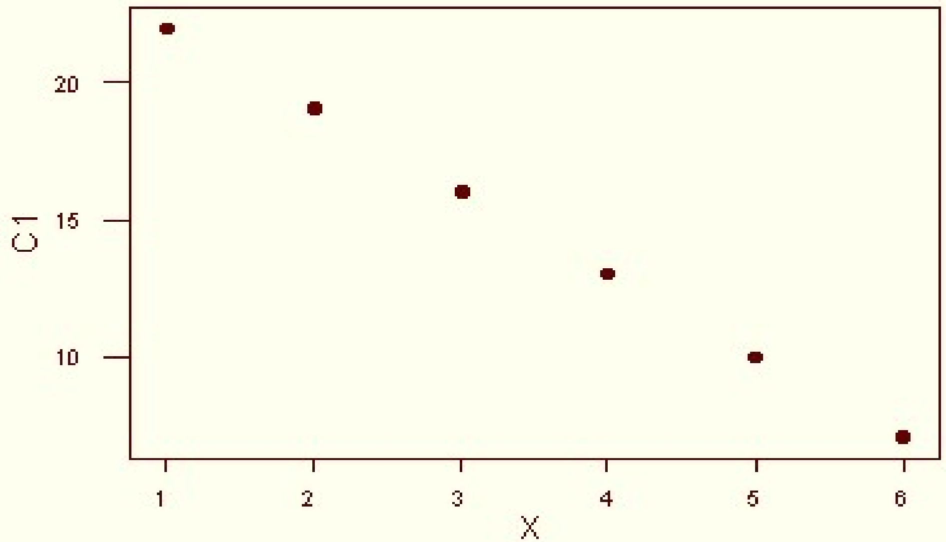
$r = -1 \Rightarrow$ correlação linear negativa e perfeita

$r = 0 \Rightarrow$ inexistência de correlação linear

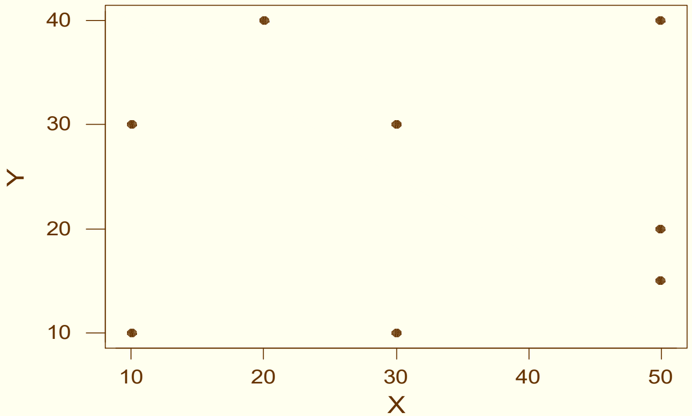
r = 1, correlação linear positiva e perfeita



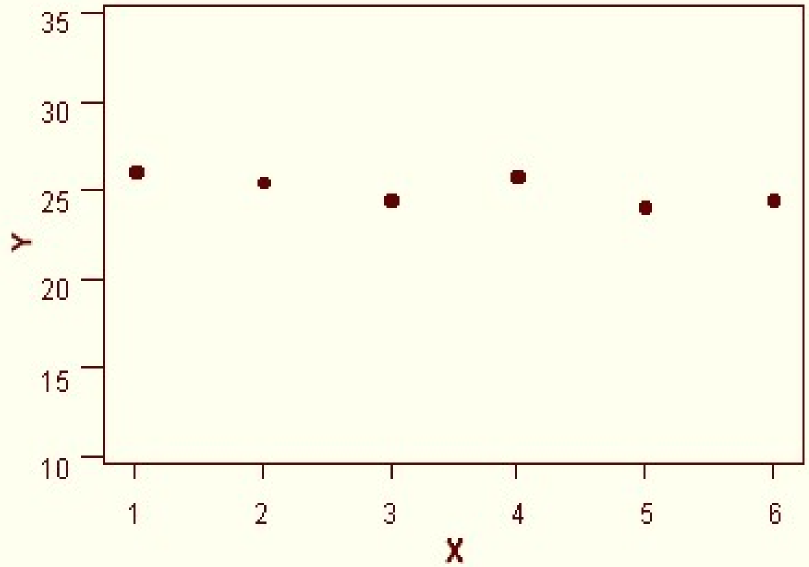
r = -1, correlação linear negativa e perfeita



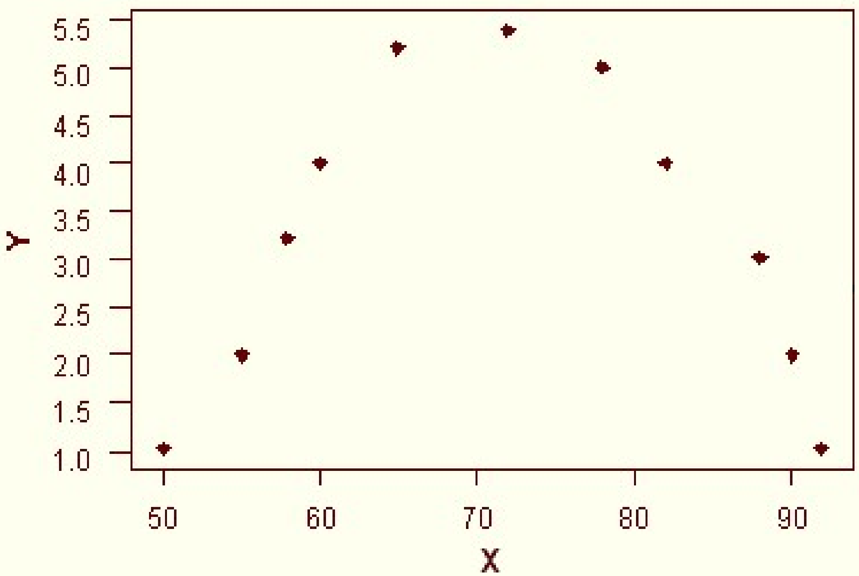
$r \cong 0$



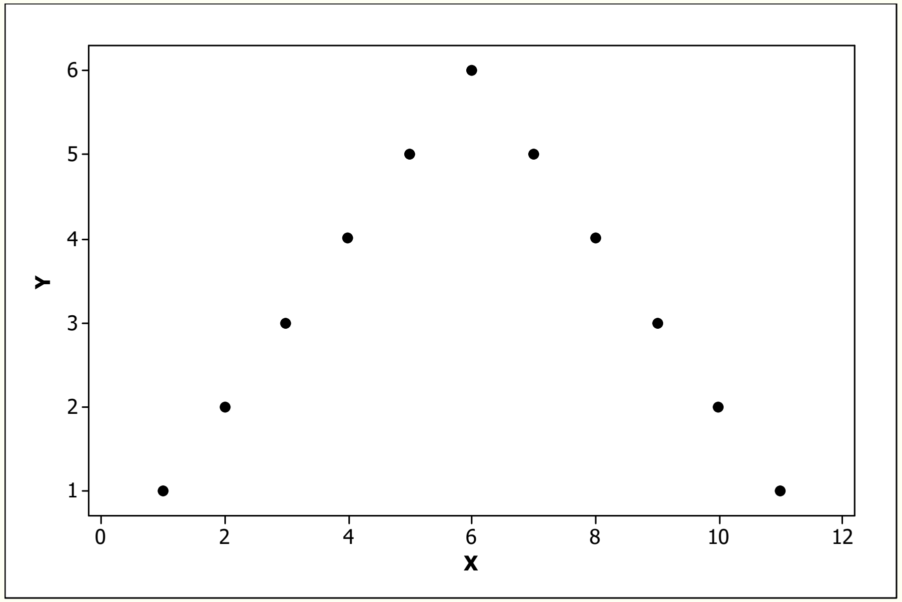
40
30
20
10
Y
10
20
30
40
50
X



35
30
25
20
15
10
Y
1
2
3
4
5
6
X

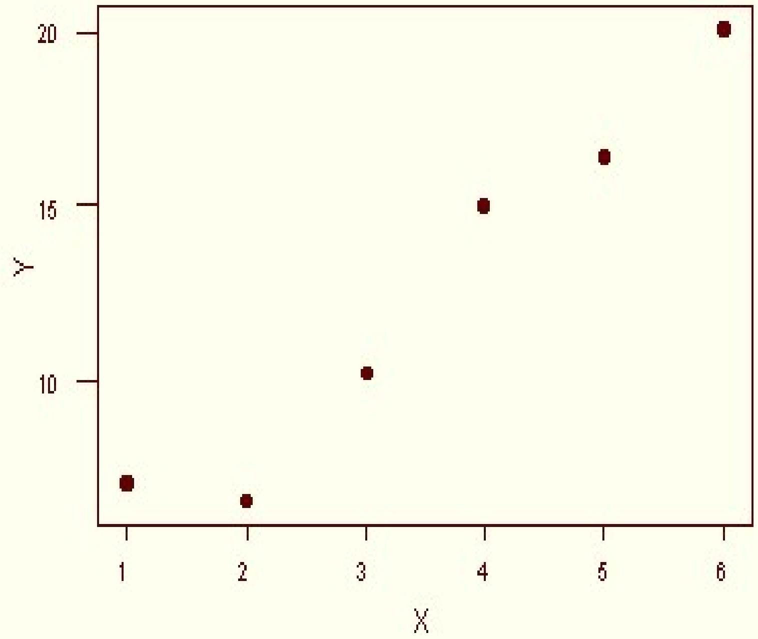


5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
Y
50
60
70
80
90
X

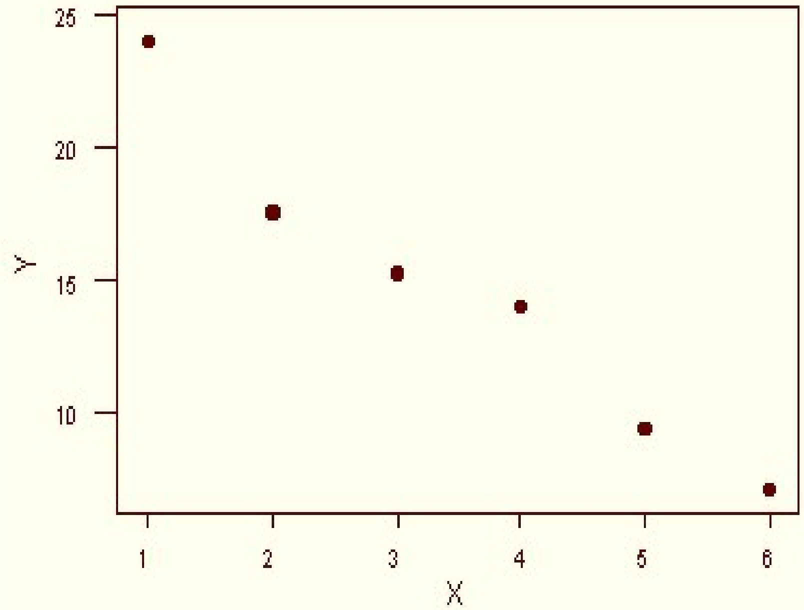


6
5
4
3
2
1
Y
0
2
4
6
8
10
12
X

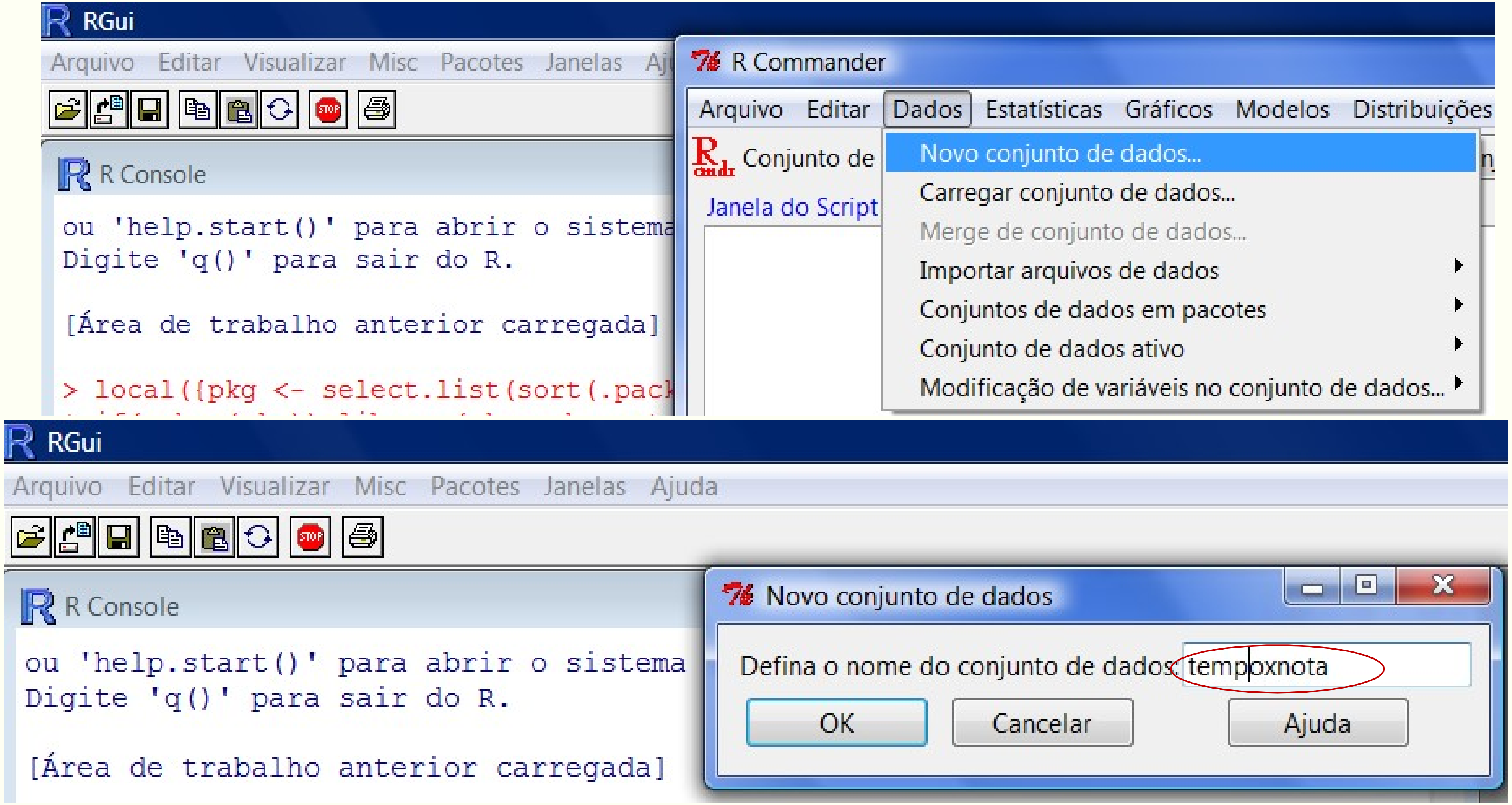
$r \cong 1$



$r \cong -1$

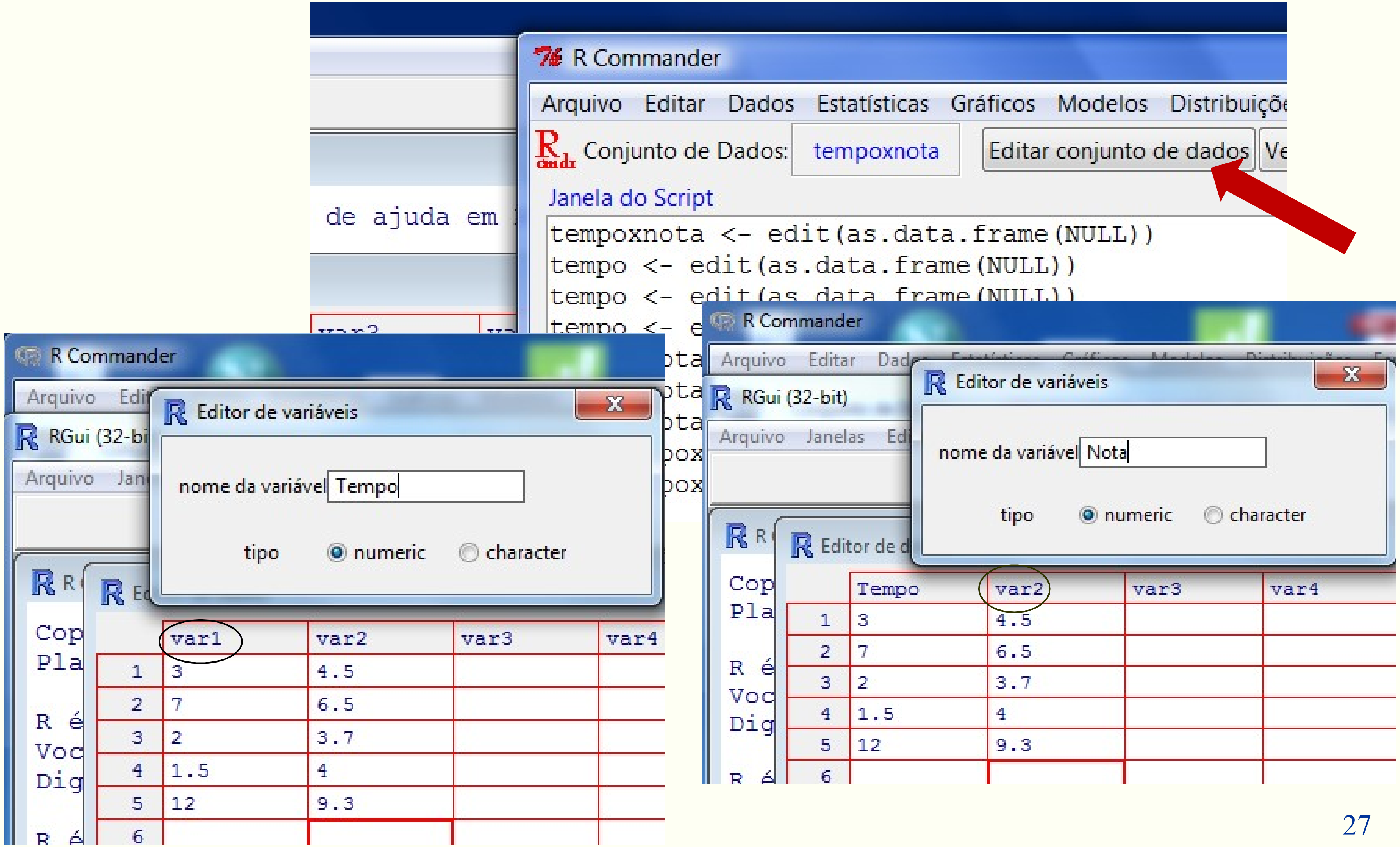


Criando arquivo de dados no *Rcmdr*



Criando arquivo de dados no *R*

Digitar os dados na janela do editor e dar nomes ("Tempo" e "Nota") às variáveis e fechar.



Exemplo 3: criminalidade e analfabetismo

Considere as duas variáveis observadas em 50 estados norte-americanos.

Y: taxa de criminalidade

X: taxa de analfabetismo

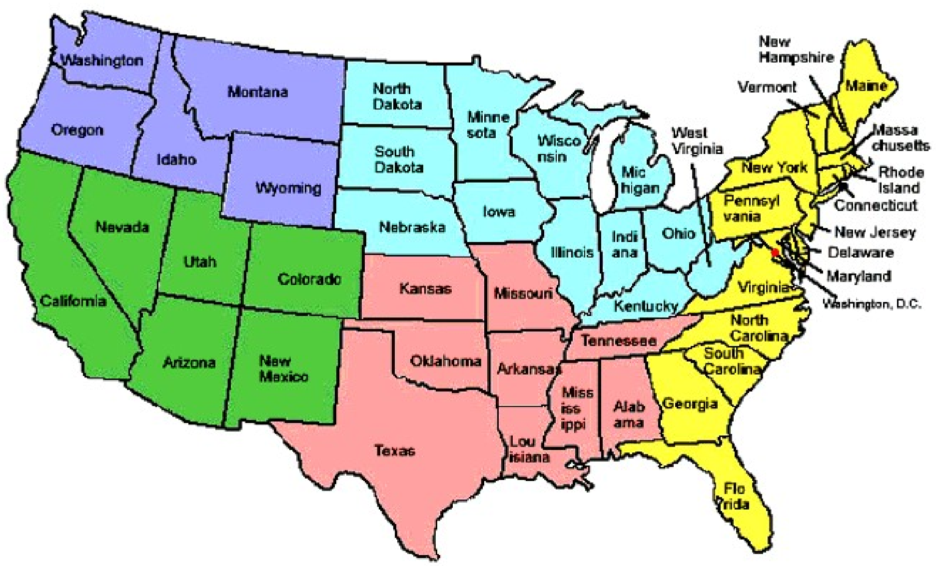
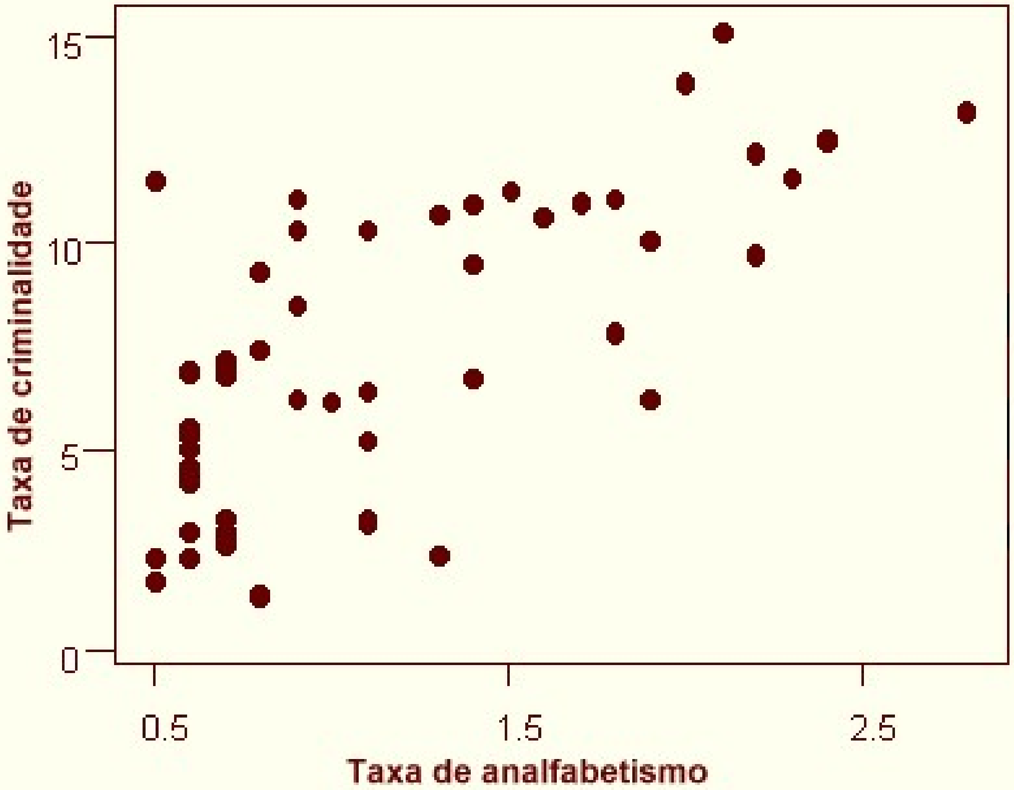


Diagrama de dispersão



Pode-se notar que, conforme aumenta a taxa de analfabetismo (X), a taxa de criminalidade (Y) tende a aumentar. Nota-se também uma tendência linear.

Cálculo do coeficiente de correlação de *Pearson*

$\overline{Y} = 7{,}38$ (média de Y) e $S_Y = 3{,}692$ (desvio padrão de Y)

$\overline{X} = 1{,}17$ (média de X) e $S_X = 0{,}609$ (desvio padrão de X)

$\Sigma X_i Y_i = 509{,}12$

Coeficiente de correlação entre *X* e *Y*:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{(n-1) S_X S_Y}$$

$$r = \frac{509{,}12 - 50 \times 7{,}38 \times 1{,}17}{49 \times 3{,}692 \times 0{,}609} = \frac{77{,}39}{110{,}17} = 0{,}702$$

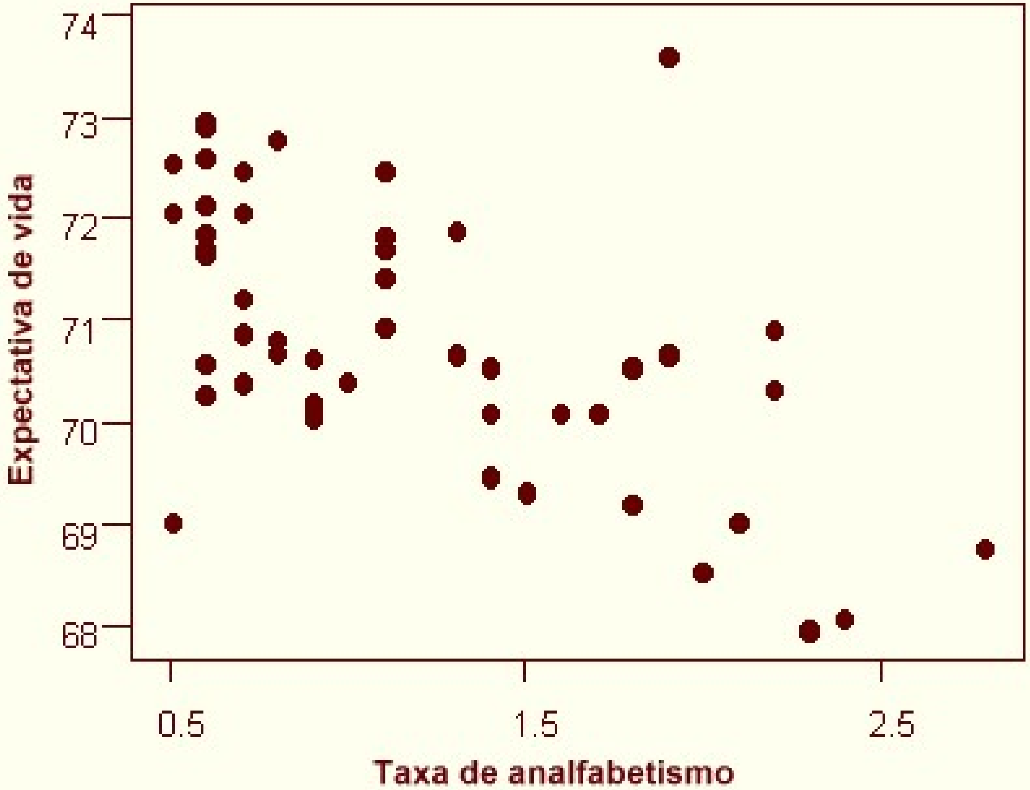
Exemplo 4: expectativa de vida e analfabetismo

Considere as duas variáveis observadas em 50 estados norte-americanos.

Y: expectativa de vida

X: taxa de analfabetismo

Diagrama de dispersão



Pode-se notar que, conforme aumenta a taxa de analfabetismo (X), a expectativa de vida (Y) tende a diminuir. Nota-se também uma tendência linear.

Cálculo do coeficiente de correlação de *Pearson*

$\overline{Y} = 70,88$ (média de Y) e $S_Y = 1,342$ (desvio padrão de Y)

$\overline{X} = 1,17$ (média de X) e $S_X = 0,609$ (desvio padrão de X)

$\Sigma X_i Y_i = 4122,8$

Coeficiente de correlação entre X e Y:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\overline{Y}}{(n-1)S_X S_Y}$$

$$r = \frac{4122,8 - 50 \times 70,88 \times 1,17}{49 \times 1,342 \times 0,609} = \frac{-23,68}{40,0466} = -0,59$$

Comentário:

- Na interpretação do coeficiente de correlação linear é importante visualizar o diagrama de dispersão.

Considere o seguinte exemplo: 6 variáveis são medidas em 11 indivíduos.

	X	$Y1$	$Y2$	$Y3$	$X4$	$Y4$
1	10	8,04	9,14	7,46	8	6,58
2	8	6,95	8,14	6,77	8	5,76
3	13	7,58	8,74	12,74	8	7,71
4	9	8,81	8,77	7,11	8	8,84
5	11	8,33	9,26	7,81	8	8,47
6	14	9,96	8,10	8,84	8	7,04
7	6	7,24	6,13	6,08	8	5,25
8	4	4,26	3,10	5,39	19	12,50
9	12	10,84	9,13	8,15	8	5,56
10	7	4,82	7,26	6,42	8	7,91
11	5	5,68	4,74	5,73	8	6,89

correlação linear entre X e $Y1 = 0{,}816$

correlação linear entre X e $Y2 = 0{,}816$

correlação linear entre X e $Y3 = 0{,}816$

correlação linear entre $X4$ e $Y4 = 0{,}817$

$\Rightarrow$ Mesmos valores de correlação.

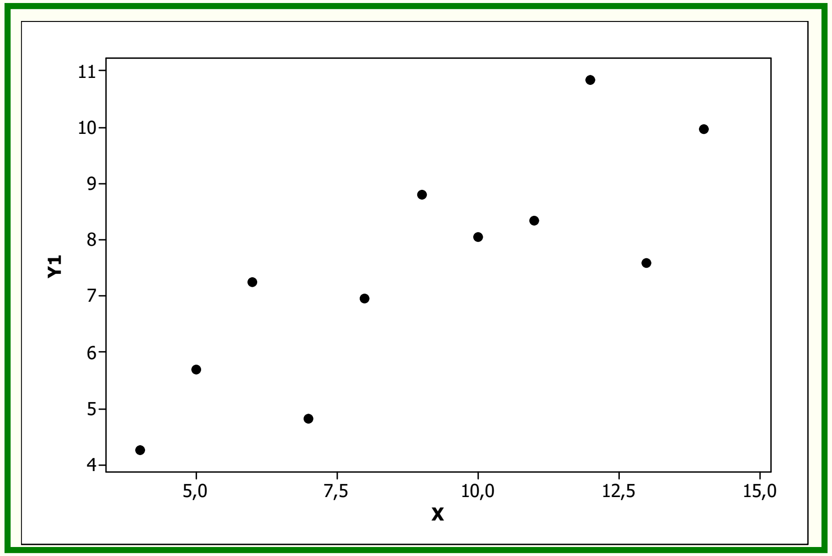
$\Rightarrow$ Qual é a forma esperada da dispersão conjunta destas variáveis?

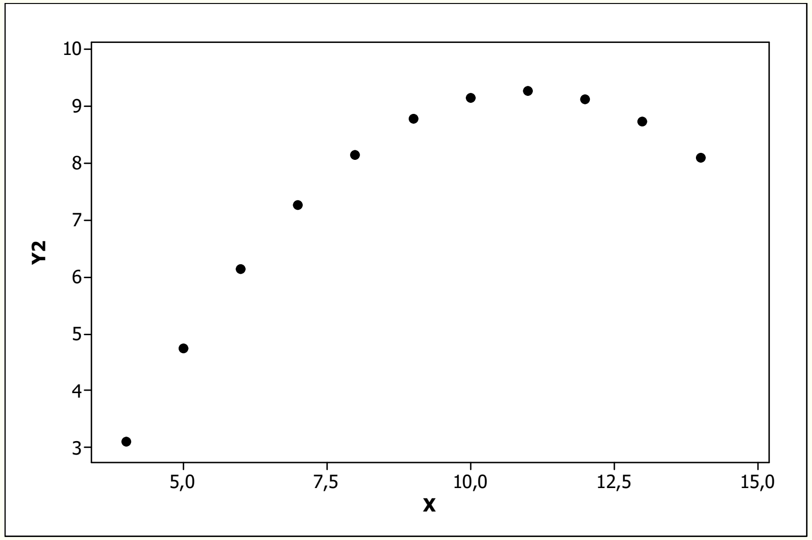
ARQUIVO *FA.xls*

Diagramas de dispersão e Coeficientes de Correlação Linear

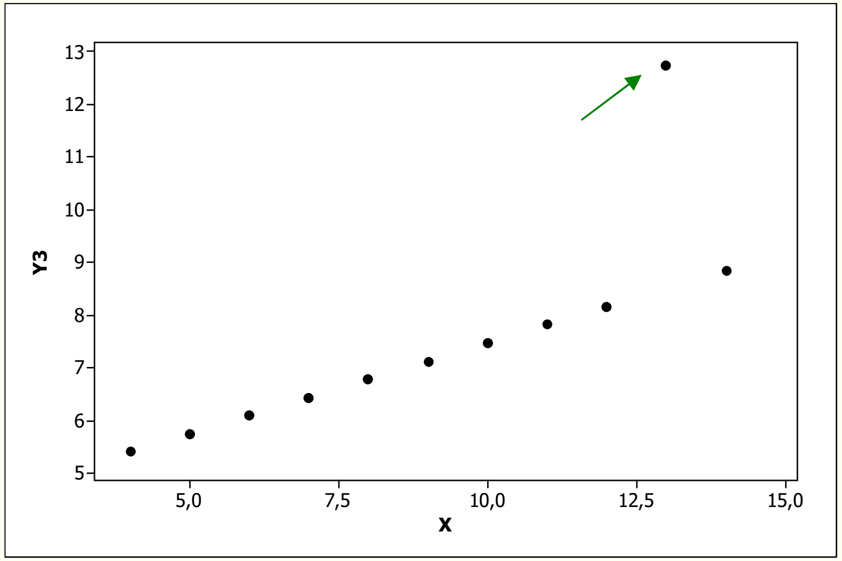
$$r = 0{,}816$$

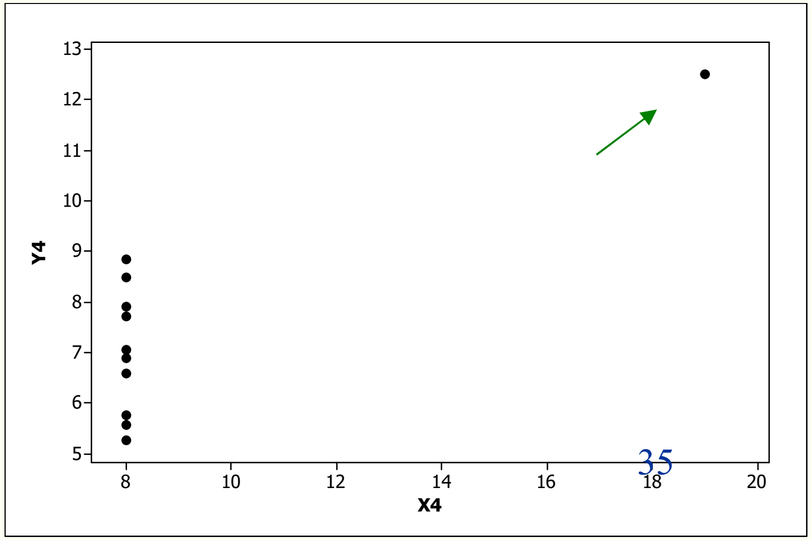
Dispersão esperada!





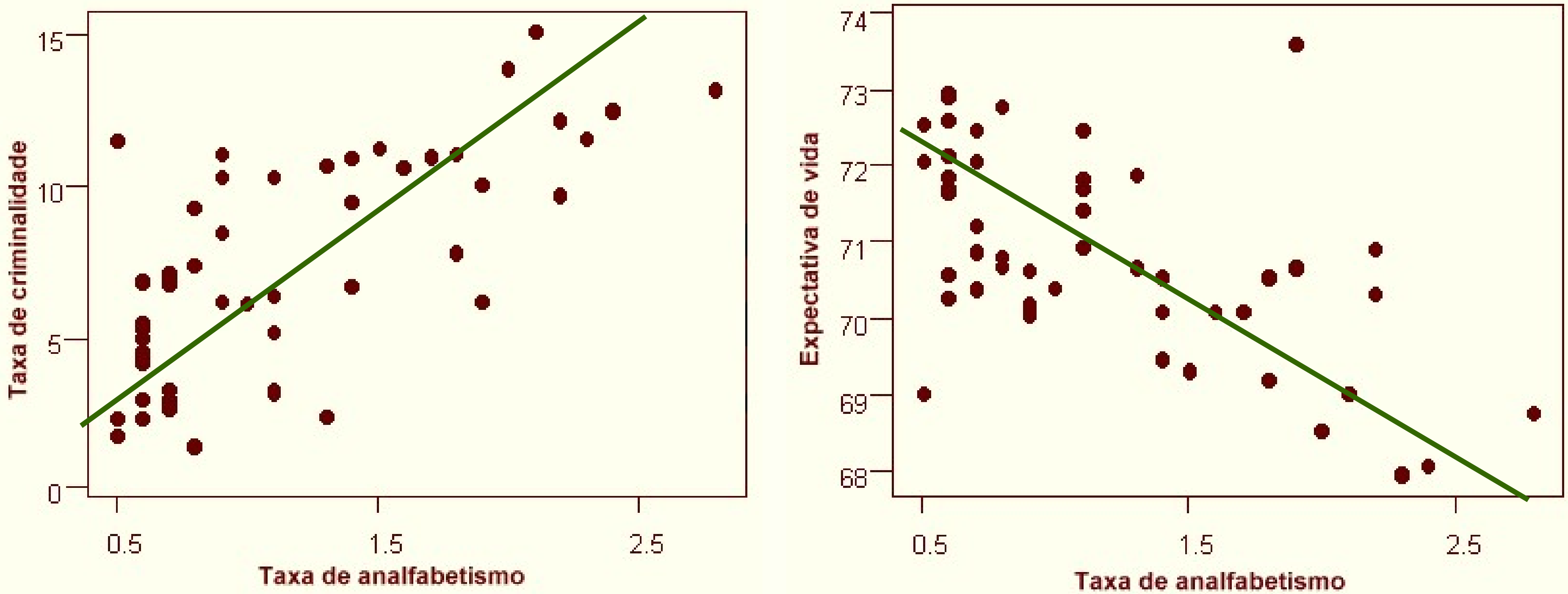
Pontos influentes!





Análise de Regressão

Diagramas de Dispersão



⇒ Explicar a forma da relação por meio de uma função matemática: $Y = a + bX$

Y: variável resposta e X: variável explicativa ou independente

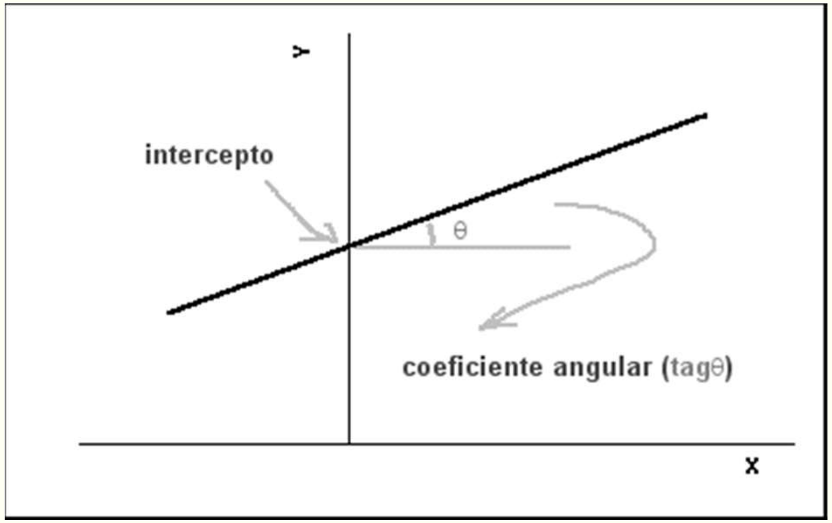
Análise de Regressão

Reta ajustada: $\hat{Y} = a + bX$

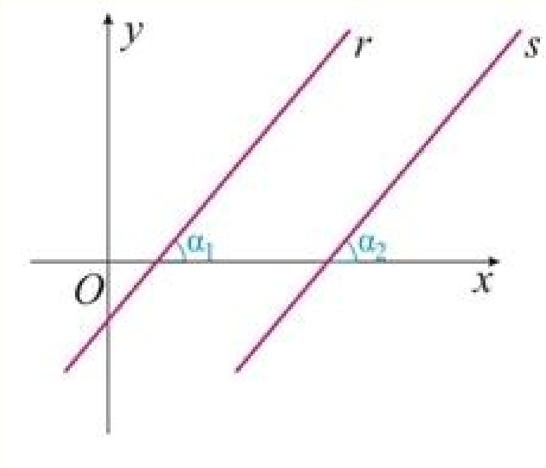
O que são a e b?

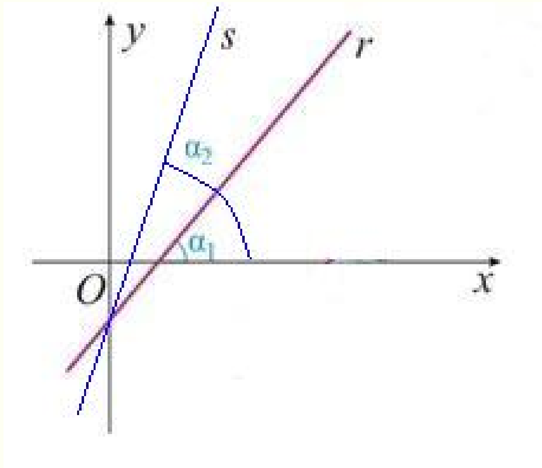
a : intercepto ou coeficiente linear

b : inclinação ou coeficiente angular



Análise de Regressão





- Iguais coeficientes angulares
- Diferentes interceptos

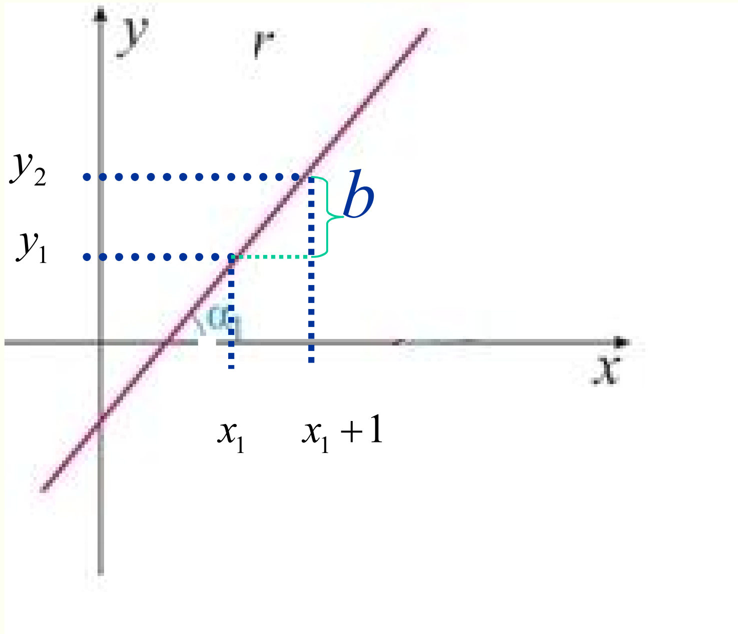
- Diferentes coeficientes angulares
- Iguais interceptos

Reta ajustada: $\hat{Y} = a + bX$

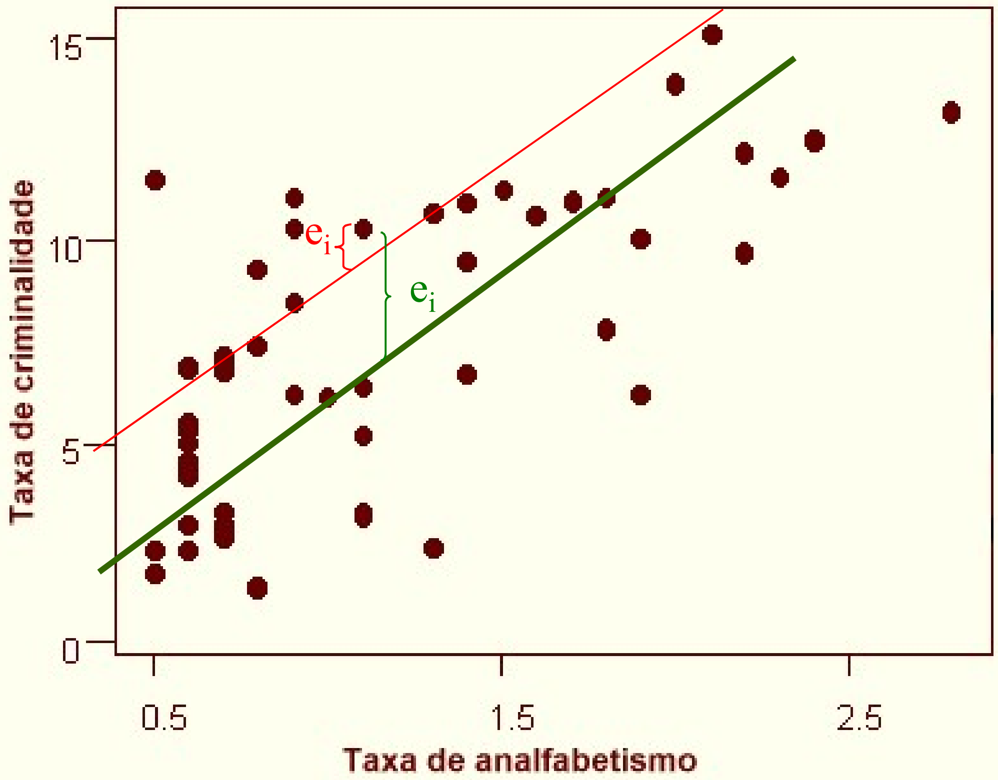
<u>Interpretação de *b*</u>:

Para cada aumento de uma unidade em X, tem-se um aumento, <u>em média</u>, de b unidades em Y.

$$tag(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 + 1 - x_1}$$
$$= y_2 - y_1 = b$$



Reta ajustada
(método de mínimos quadrados)



Reta ajustada (método de mínimos quadrados)

Os coeficientes a e b são calculados da seguinte maneira:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\,\bar{X}\,\bar{Y}}{(n-1)\,S_X^2}$$

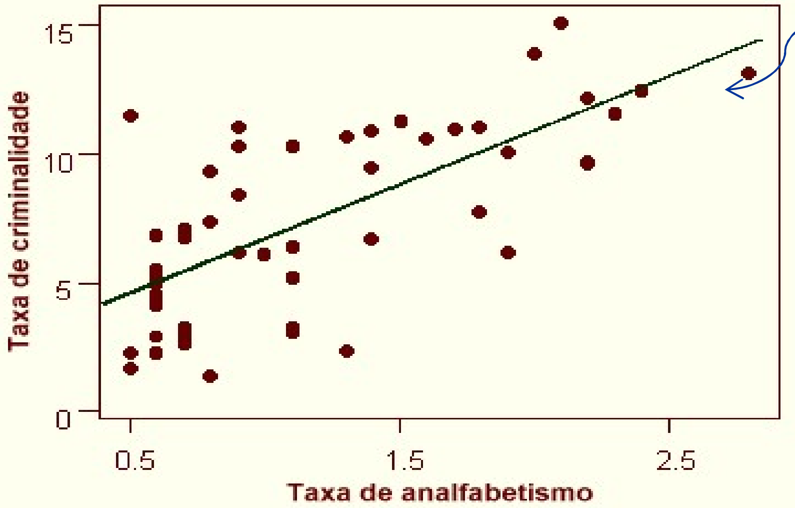
$$a = \bar{Y} - b\,\bar{X}$$

No Exemplo 3,

A reta ajustada é:

$$\boxed{\hat{Y} = 2{,}397 + 4{,}257\,X}$$

$\hat{Y} = 2{,}397 + 4{,}257\,X$



$\hat{Y}$: valor predito para a taxa de criminalidade

X : taxa de analfabetismo

Interpretação de *b*:

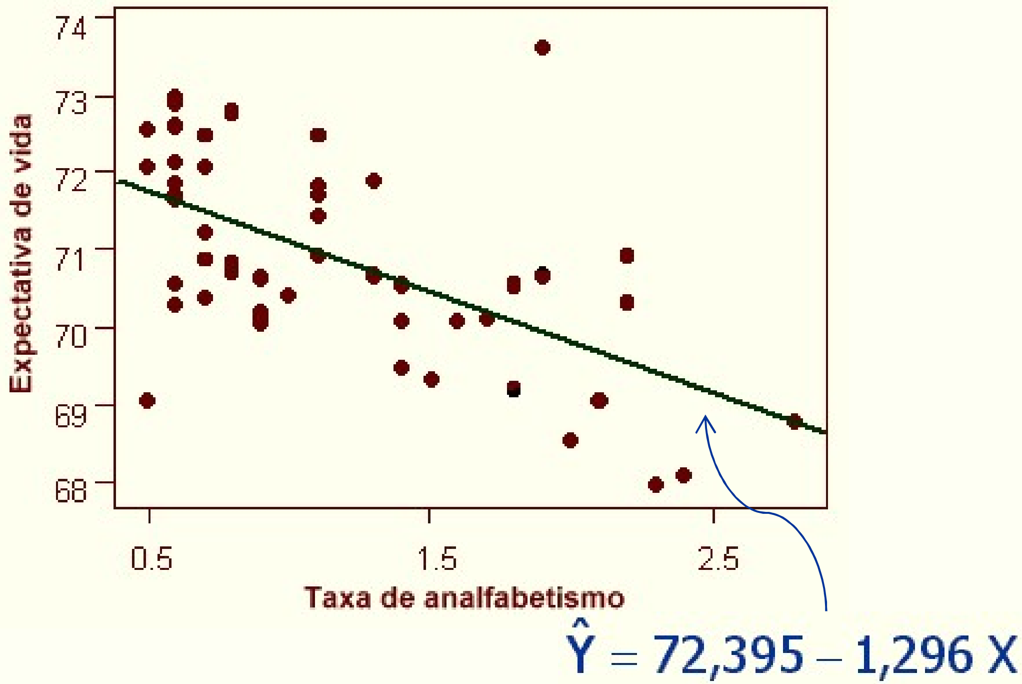
Para um aumento de uma unidade na taxa do analfabetismo (X), a taxa de criminalidade (Y) aumenta, em média, 4,257 unidades.

$\rightarrow$ Como desenhar a reta no gráfico?

No Exemplo 4,

A reta ajustada é:

$$\boxed{\hat{Y} = 72{,}395 - 1{,}296X}$$



$\hat{Y}$: valor predito para a expectativa de vida

X : taxa de analfabetismo

Interpretação de *b*:

Para um aumento de uma unidade na taxa do analfabetismo (X), a expectativa de vida (Y) diminui, em média, 1,296 anos.

Exemplo 5: consumo de cerveja e temperatura

Y: consumo de cerveja diário por mil habitantes, em litros.

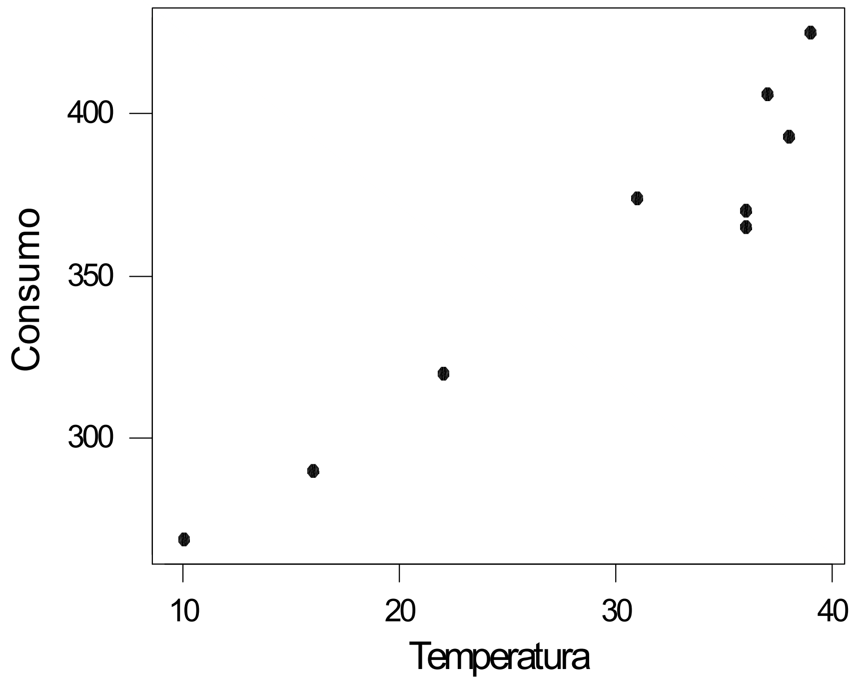
X: temperatura máxima (em ºC).

As variáveis foram observadas em nove localidades com as mesmas características demográficas e socioeconômicas.

Dados:

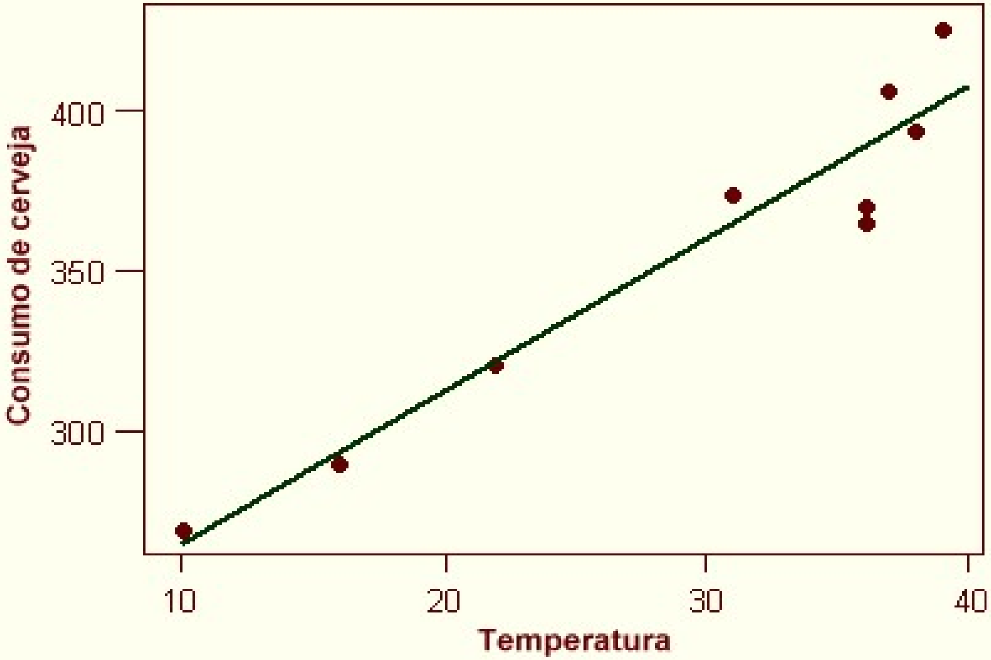
Localidade	Temperatura (X)	Consumo (Y)
1	16	290
2	31	374
3	38	393
4	39	425
5	37	406
6	36	370
7	36	365
8	22	320
9	10	269

Diagrama de dispersão



A <u>correlação linear</u> entre X e Y é $r = 0{,}962$.

A reta ajustada é: $\boxed{\hat{Y} = 217{,}37 + 4{,}74\,X}$



Qual é a interpretação de b?

Aumentando-se um grau na temperatura (X), o consumo de cerveja (Y) aumenta, **em média,** 4,74 litros por mil habitantes.

Qual é o consumo previsto para uma temperatura de 25ºC?

$$\hat{Y} = 217{,}37 + 4{,}74 \times 25 = 335{,}87 \text{ litros/mil hab}$$

Exemplo no *R*

O arquivo ***CEA05P11.xlsx*** contém dados sobre o projeto "Avaliação de um trabalho de Ginástica Laboral implantado em algumas unidades da USP".

Amostra: 143 funcionários que participaram de atividades de Ginástica Laboral.

Algumas variáveis registradas no estudo são:

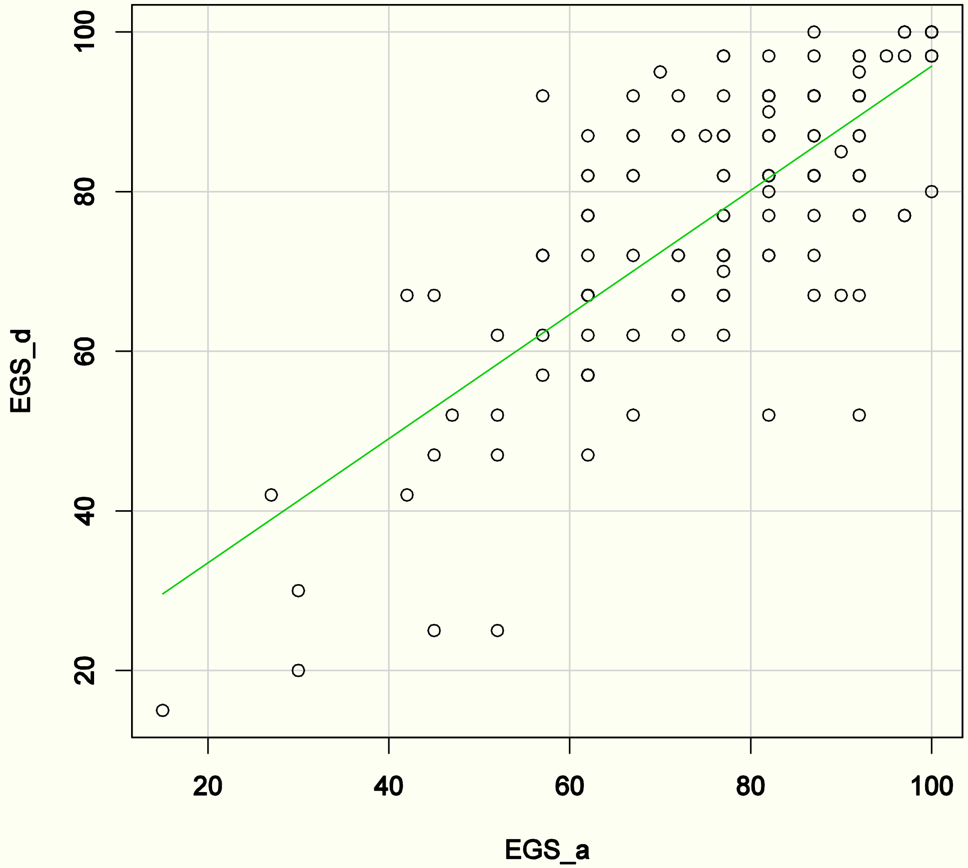
Sexo: Feminino e Masculino;

Idade: idade do funcionário, em anos;

Unidade da USP: EP, FAU, IAG, IF, IO e Reitoria

Estado Geral de Saúde antes (EGS_a) e **Estado Geral de Saúde depois** (EGS_d): auto-avaliação do funcionário a respeito do seu estado de saúde antes e depois do início das atividades, respectivamente. Quanto maior o índice, melhor a avaliação.

Gráficos → Diagrama de Dispersão
(variável-x: EGS_a ; variável-y: EGS_d; marcar opção *Linha de quadrados mínimos*)



Estatísticas → Ajuste de Modelos → Regressão Linear
(variável resposta: EGS_d ; variável explicativa: EGS_a)

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 17.94397    4.54712   3.946 0.000125 ***
EGS_a        0.77791    0.05894  13.198  < 2e-16 ***
```

$$a = 17{,}94397,\; b = 0{,}77791$$

Reta ajustada:

$$\hat{Y} = 17{,}94397 + 0{,}77791 EGS\_a$$