MAE116 – Noções de Estatística

Grupo B/D - 2º semestre de 2020

Lista de exercícios 6 – Distribuição Normal – C L A S S E – G A B A R I T O

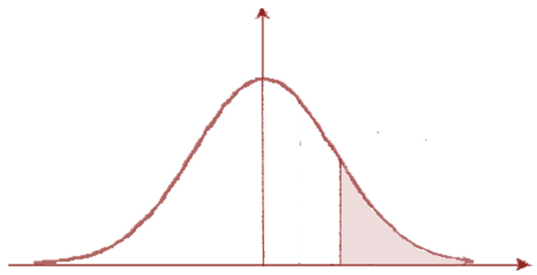
Exercício 1

Durante o processo de admissão para uma determinada universidade, é realizado um teste preliminar de conhecimentos gerais. Na segunda fase, são realizadas entrevistas com os 25% dos candidatos que obtiveram as pontuações mais altas no teste preliminar. Considere que as notas deste teste preliminar são normalmente distribuídas com uma média de 4,5 pontos e um desvio padrão de 1,6 pontos.

a) Escolhido ao acaso um aluno que fez o teste preliminar, qual é a probabilidade de que sua nota seja maior do que 6,1? E menor do que 3,8?

Seja X a *v.a.* que representa a nota do teste preliminar.

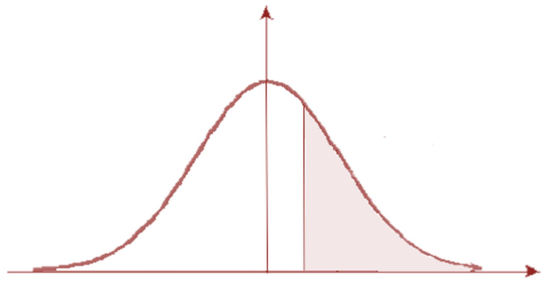
Então, temos que $X \sim N(\mu;\sigma^2) = N(4{,}5; 1{,}6^2)$. Assim,



$$P(X > 6{,}1) = P\left(\frac{X-4{,}5}{1{,}6} > \frac{6{,}1-4{,}5}{1{,}6}\right) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - A(1) = 1 - 0{,}8413$$

$$= 0{,}1587.$$



$$P(X < 3{,}8) = P\left(\frac{X-4{,}5}{1{,}6} < \frac{3{,}8-4{,}5}{1{,}6}\right) = P(Z < -0{,}44)$$

$$= P(Z > 0{,}44) = 1 - P(Z < 0{,}44)$$

$$= 1 - A(0{,}44) \ = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$$

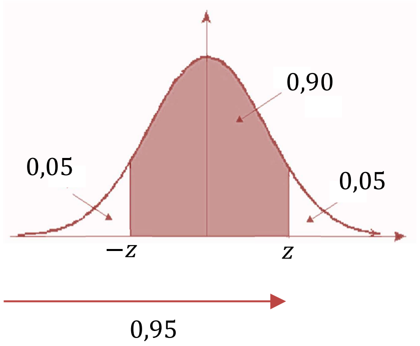
b) Encontre um intervalo simétrico em torno da média que contenha 90% das possíveis notas obtidas no teste preliminar de conhecimentos gerais.

Intervalo simétrico em torno da média: $(\mu - c;\ \mu + c)$

$$P(\mu - c < X < \mu + c) = 0{,}90 \rightarrow P(4{,}5 - c < X < 4{,}5 + c) = 0{,}90$$

Vamos calcular o valor de c

$$P\left(\frac{4{,}5-c-4{,}5}{1{,}6}<\frac{X-4{,}5}{1{,}6}<\frac{4{,}5+c-4{,}5}{1{,}6}\right)=P\left(\frac{-c}{1{,}6}<Z<\frac{c}{1{,}6}\right)=0{,}90 \leftrightarrow P(-z<Z<z)=0{,}90$$



$P(Z<z)=A(z)=0{,}95 \rightarrow z=1{,}64$ (tabela).

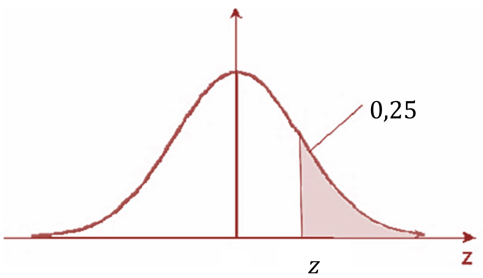
Logo, $z=1{,}64=\frac{c}{1{,}6} \rightarrow c=1{,}64\times1{,}6=2{,}624.$

Logo, o intervalo procurado é

$$(4{,}5-2{,}624;\ 4{,}5+2{,}624)=(\mathbf{1{,}876};\mathbf{7{,}124})$$

c) Uma aluna fez o teste de conhecimentos gerais e obteve uma nota de 5,8. Ela participaria da segunda fase? Justifique

Sabe-se que na segunda fase, são realizadas entrevistas com os 25% dos candidatos que obtiveram as pontuações mais altas no teste preliminar



$x=?$ tal que $P(X>x)=0{,}25$

$$P(X>x)=P\left(Z>\frac{x-4{,}5}{1{,}6}\right)=P(Z>z)=0{,}25$$

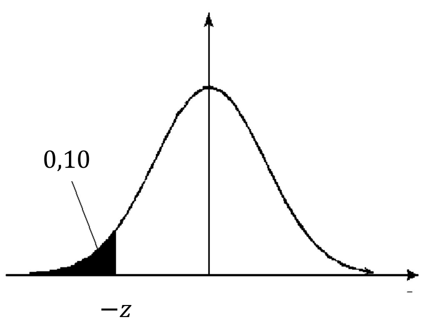
$P(Z>z)=0{,}25 \rightarrow P(Z<z)=0{,}75.$ Logo, $z=0{,}67.$

Portanto,

$$z=0{,}67=\frac{x-4{,}5}{1{,}6} \rightarrow x=0{,}67\times1{,}6+4{,}5=5{,}572.$$

Assim, os alunos que com notas superiores a 5,572 pontos participarão da segunda fase. Como a nota da aluna foi de 5,8 pontos, então **ela participará da segunda fase**.

d) Sabe-se que os 10% dos alunos que tiveram as menores notas não poderão se candidatar no próximo ano. A partir de qual pontuação não se aplica essa punição?



$x=?$ tal que $P(X<x)=0{,}10$

$$P(X<x)=P\left(Z<\frac{x-4{,}5}{1{,}6}\right)=P(Z<-z)=0{,}10$$

$P(Z<-z)=0{,}10 \rightarrow P(Z>z)=0{,}10 \rightarrow P(Z<z)=0{,}90$

Logo, $z=1{,}28$ (tabela). Temos, então

$$-z=-1{,}28=\frac{x-4{,}5}{1{,}6} \rightarrow x=-1{,}28\times1{,}6+4{,}5=2{,}452.$$

Assim, essa punição não se aplica para os alunos que tiveram notas superiores a **2,452 pontos**.

Exercício 2

Sabe-se que a quantidade de açúcar nas barras de cereal de uma determinada marca segue uma distribuição normal com média 27 g e desvio padrão 3,9 g.

a) Escolhida uma barra de cereal, ao acaso, da marca em questão, qual é a probabilidade de que ela contenha entre 24 e 28 g de açúcar?

Seja X a *v.a.* que representa a quantidade de açúcar nas barras de cereal.

Então, temos que, $X \sim N(27; 3{,}9^2)$

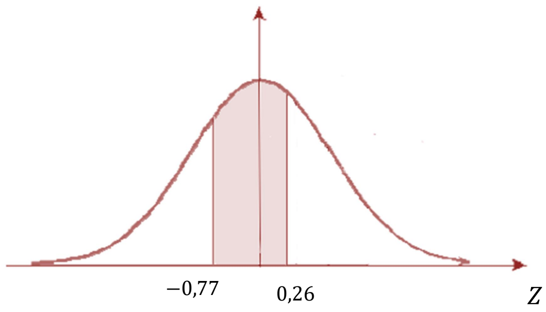
$$P(24 < X < 28) = P\left(\frac{24-27}{3{,}9} < \frac{X-27}{3{,}9} < \frac{28-27}{3{,}9}\right) = P(-0{,}77 < Z < 0{,}26)$$

$$= P(Z < 0{,}26) - P(Z < -0{,}77)$$

$$= P(Z < 0{,}26) - [1 - P(Z < 0{,}77)]$$

$$= A(0{,}26) - [1 - A(0{,}77)]$$

$$= 0{,}6026 - (1 - 0{,}779) = \mathbf{0{,}382}$$



b) Durante o processo de controle de qualidade da empresa, se uma barra de cereal apresenta mais de 34,8 g de açúcar, ela será descartada. Se cinco barras de cereais são selecionadas aleatoriamente, qual é a probabilidade de que nenhuma seja descartada?

Seja Y o número de barras de cereais descartadas, então $Y \sim b(n, p)$, em que

n é o número de barras analisadas e p a probabilidade de uma barra ser descartada ("sucesso").

Vamos calcular primeiro "p"

$$p = P(X > 34{,}8) = P\left(Z > \frac{34{,}8 - 27}{3{,}9}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - A(2)$$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$$

Assim, queremos calcular $P(Y = 0)$, sendo $Y \sim b(5; 0{,}0228)$.

Essa probabilidade pode ser calculada usando *Rcmdr* por:

Distribuições -> Distribuições Discretas -> Distribuição Binomial -> Probabilidades da binomial e dar os valores em *Experimento da binomial* → 5 e *Probabilidade de sucesso* → 0.0228, que irá produzir a seguinte saída:

```
  Probability
0 8.910812e-01
1 1.039534e-01
2 4.850875e-03
3 1.131805e-04
4 1.320361e-06
5 6.161327e-09
```

ou, equivalentemente,

	Probability
0	0.891081221486801
1	0.103953396694121
2	0.004850874835501
3	0.000113180460755
4	0.000001320361495
5	0.000000006161327

Logo, a probabilidade de que nenhuma barra de cereal seja descartada, isto é, $P(Y = 0)$, é $\mathbf{0,8911}$.

c) Sabendo-se que a quantidade de açúcar de uma determinada barra é maior que 27 g, qual é a probabilidade dessa barra de cereal ser descartada?

Sabe-se que uma barra de cereal será descartada se apresenta mais de 34,8 g de açúcar.

Logo, queremos calcular

$$P(X > 34{,}8 | X > 27\,) = \frac{P(X > 34{,}8 \cap X > 27)}{P(X > 27)} = \frac{P(X > 34{,}8)}{P(X > 27)} = \frac{P\left(Z > \frac{34{,}8 - 27}{3{,}9}\right)}{P\left(Z > \frac{27 - 27}{3{,}9}\right)}$$

$$= \frac{P(Z > 2)}{P(X > 0)} = \frac{1 - P(Z < 2)}{1 - P(X < 0)} = \frac{1 - 0{,}9772}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}0228}{0{,}5} = 0{,}0456.$$