Algebră, specializarea informatică

Seminar 1

- O funcție (aplicație) este un triplet $(A, B, f)$, unde A și B sunt mulțimi oarecare, iar f este o lege de corespondență a.î. fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B.

A - domeniu de definiție

B - codomeniul

$$f : A \to B$$

- Funcția $f : A \to B$ se numește injectivă dacă

$$x_1, x_2 \in A \text{ a.î. } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Obs.: $x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- Funcția $f : A \to B$ se numește surjectivă dacă

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y$$

- Funcția $f : A \to B$ este bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

$$\forall y \in B, \exists! x \in A \text{ a.î. } f(x) = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists f^{-1} : B \to A, \ f^{-1}(y) = x \quad \text{(inversa există)}$$

1.3.35

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f_1(x) = x^2$

- nu este injectivă

$x_1 = -1 \Rightarrow f_1(x_1) = 1$

$x_2 = 1 \Rightarrow f_1(x_2) = 1$

$x_1 \neq x_2$ , $f_1(x_1) = f_1(x_2)$

- nu este surjectivă

$y = -1 \in \mathbb{R}$ (codomeniu)

$\forall x \in \mathbb{R}$ , $f_1(x) = x^2 > 0$

(2) $f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ , $f_2(x) = x^2$

- injectivă, dar nu surj.

injectivă : $f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \\ \text{Avem } x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2$$

(Observația de la injectivitate)

(3) $f_3 : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ , $f_3(x) = x^2$

- surjectivă, dar nu injectivă

surjectivă : $\forall y \in [0,\infty)$ , $\exists x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}$

a.î. $f(x) = y$

(4) $f_4 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ , $f_4(x) = x^2$

- bijectivă și inversabilă

$f_4^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ , $f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$

1.3.36

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ x+2, & 1 < x \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, 1) \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$ $\qquad f'(1)$ nu există

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 3 = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$f(x) = y \iff \begin{cases} 2x+1 = y, & x \in (-\infty, 1] \\ x+2 = y, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & \frac{y-1}{2} \in (-\infty, 1] \quad \left(\frac{y-1}{2} \leq 1\right) \\ x = y-2, & y-2 \in (1, \infty) \quad (y-2 > 1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \leq 3 \quad (y \in (-\infty, 3]) \\ x = y-2, & y > 3 \quad (y \in (3, \infty)) \end{cases}$$

$(-\infty, 3] \cup (3, \infty) = \mathbb{R} \Rightarrow$ surj.

$\left.\begin{array}{l} \underline{(-\infty, 3] \cap (3, \infty) = \emptyset} \\ \text{sol. unică per ramură} \end{array}\right\} \Rightarrow$ inj.

1.3.36

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0\\ x+2, & 0<x\end{cases}$

$f((0,\infty)) = (2,\infty)$

$f((-\infty,0]) = (-\infty,1]$

$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = f((0,\infty)\cup(-\infty,0]) \overset{?}{=} f((0,\infty))\cup f((-\infty,0])$

$= (2,\infty)\cup(-\infty,1] = \mathbb{R}\setminus(1,2]$

$\Rightarrow$ nu e surj.

$f([0,\infty))\cap f((-\infty,0)) = \emptyset \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1\in[0,\infty)\\ x_2\in(-\infty,0)\end{array}\right\} \Rightarrow f$ inj.

Metoda II

$f(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1=y, & x\le 0\\ x+2=y, & x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{y-1}{2}, & \frac{y-1}{2}\le 0\\ x=y-2, & y-2>0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{y-1}{2}, & y<1\\ x=y-2, & y>2\end{cases}$

Aceleași concluzii

- Compunerea funcțiilor

$f : A \to B$, $g : B \to C$

$g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

1.3.37

(2) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = |x|$

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$\mathbb{N}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} [0, \infty) \implies \exists\, f \circ g : \mathbb{N}^* \to [0, \infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$

$(x \in \mathbb{N}^*)$

$\nexists\, g \circ f$

1.3.45

$f : A \to B$

$C \subseteq A$

$f(C) = \{ y \in B \mid \exists x \in C : f(x) = y \}$

$= \{ f(x) \mid x \in C \}$

$\forall D \subseteq B$

$f^{-1}(D) = \{ x \in A \mid f(x) \in D \}$

(1) $C \subseteq A \Rightarrow C \subseteq f^{-1}(f(C))$

Fie $x \in C$, notăm $y = f(x) \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in f(C) := D \subseteq B$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(C))$

(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$, $X_1, X_2 \subseteq A$

Metoda dublei incluziuni

„$\subseteq$" Fie $y \in f(X_1 \cup X_2) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} (\exists x \in X_1 \cup X_2) : f(x) = y$

$\Longleftrightarrow \exists x \in A : (x \in X_1$ sau $x \in X_2)$, $f(x) = y$

$\overset{?}{\Longleftrightarrow} (\exists x \in A, x \in X_1, f(x) = y)$ sau $(\exists x \in A, x \in X_2, f(x) = y)$

$\Longleftrightarrow y \in f(X_1)$ sau $y \in f(X_2) \Longleftrightarrow y \in f(X_1) \cup f(X_2)$

Obs. $P(x)$, $Q(x)$ predicate logice

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$$

(4) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Fie $y \in f(\underbrace{f^{-1}(Y)}_{:= X \subseteq A}) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(Y) : f(x) = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{y}{\underset{\parallel}{f(x)}} \in Y$$