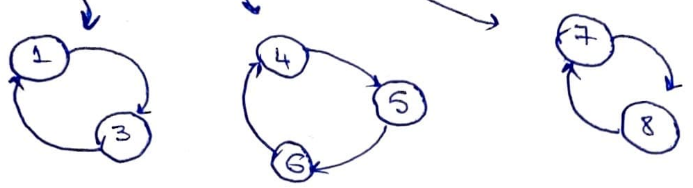
2.1.74.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)$$



2.1.75.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} ; \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$

(a) $\sigma = (1 3)(2 4 5)$; $\tau = (1 2 3 4 5)$

(b) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $\underbrace{\sigma = (1\ 3)}_{\text{2 elem.}}\ \underbrace{(2 4 5)}_{\text{3 elem.}}$;

$\Rightarrow \operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{lcm}(2,3) = 6$

(d) $m(\sigma) = 0 + 0 + 2 + 0 + 3 =$

$= 5 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$;

$m(\tau) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4 =$

$= 4 \Rightarrow \varepsilon(\tau) = 1.$

2.2.33.

A - mulțime oarecare ; $(R,+,\cdot)$ inel

$R^A = \{ f : A \to R \mid f$ este funcție $\}$

$+ : R^A \times R^A \to R^A$; $\cdot : R^A \times R^A \to R^A$

$+ (f,g) \mapsto f+g : A \to R$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\cdot (f,g) \mapsto f \cdot g : A \to R$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

→ asoc. pt. + ; Fie $f, g, h \in R^A$,

$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) , \forall x \in A$

$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) , \forall x \in A$

→ elem. neutru pt. + :

$0 : A \to R$, $0(x) = 0$, $\forall x \in A$

→ elem. simetric pt. + :

$-f : A \to R$, $(-f)(x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.

→ elem. neutru pt. $\cdot$ (pp. că R este unitar)

$1 : A \to R$, $1(x) = 1$, $\forall x \in A$.

→ asoc. pt. $\cdot$: Analog cu cazul pt. +

2.2.37.

Știm că $Sub(\mathbb{Z},+) = \{m\mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{N}\}$

Verificăm dacă $m\mathbb{Z}$ este p.s. a lui $\mathbb{Z}$ în rap. cu „$\cdot$", pentru m arbitrar:

$x, y \in m\mathbb{Z}$

$x = mz_1$
$y = mz_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow xy = mz_1 m z_2 \in m\mathbb{Z}$

Ne rămâne distributivitatea lui „$\cdot$" față de „+": temă.

2.2.38.

$k \in \mathbb{Z}_m^\times \iff \exists b \in \mathbb{Z} : \hat{b} \cdot \hat{k} = \hat{1} \iff \widehat{bk} = \hat{1} \iff$

$\iff \exists b \in \mathbb{Z} : m \mid (1 - bk) \iff \exists b, a \in \mathbb{Z}$:

$1 - bk = ma \iff ma + bk = 1,\ a, b \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff gcd(m, k) = 1$.

Dacă m este prim $\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, m-1\}$, $gcd(m,k) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}_m^\times = \mathbb{Z}_m^*$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ corp (m prim).

2.2.39.

- $\mathbb{Z}_6$: $\hat{4}x + \hat{5} = \hat{1} \iff \hat{4}x = \hat{1} - \hat{5} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2}$

$x = \hat{0}$ (X)

$x = \hat{1}$ (X)

$\boxed{x = \hat{2}\ (V)}$

$x = \hat{3}$ (X)

$x = \hat{4}$ (X)

$\boxed{x = \hat{5}\ (V)}$

- $\mathbb{Z}_6$: $\hat{5}x + \hat{3} = \hat{1}$

Met. 1 : verificarea tuturor posibilităților

Met. 2 :

$\hat{5}x = \hat{1} - \hat{3} = \hat{1} + \hat{3} = \hat{4}$

$(5, 6) = 1 \Rightarrow \exists\ \hat{5}^{-1} = \hat{5}$

$\hat{5}x = \hat{4} \mid \cdot \hat{5} \Rightarrow x = \hat{2}$. ✓

2.2.40.

Arătați că $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ este un inel comutativ cu unitate în raport cu „+" și „·" din $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ p.s. în raport cu $\mathbb{C}$ față de +
- $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ p.s. în raport cu $\mathbb{C}$ față de ·
- $0\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$
- $1\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$
- $x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow -x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

Așadar, vom arăta că $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)\leq(\mathbb{C},+,\cdot)$

- $x=a+ib,\ y=c+id\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

$$x+y=(a+c)+i(b+d)\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

$$xy=ac-bd+i(ad+bc)\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

$$0=0+0i\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

$$1=1+0i\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

$$-x=(-a)+i(-b)\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)\leq(\mathbb{C},+,\cdot)$$

<u>temă</u>: R subinel

$R \simeq (\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$; $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{Z} \right\}$

$f : \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \to R$

$f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

• Fie $x = a+ib$, $y = c+id \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$\to f(x+y) = f((a+c)+i(b+d)) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = f(x)+f(y)$ ✓

$\to f(xy) = f(ac-bd+i(ad+bc)) = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$

$f(x)f(y) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow$ f morfism de inele

$\to f(x) = f(y) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

$\Rightarrow x = y$ ✓

$\to \forall \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \exists\ a+ib \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ a.î.

$$f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$ ✓

$\Rightarrow f$ bijectivă

- $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ inel comutativ cu unitate

  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$ (adevărat datorită numerelor complexe)

  Dar $2 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, însă $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow$ nu e corp

- $R \simeq \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow$ referitor la structura de inel, cele două au aceleași proprietăți $\Rightarrow$

  $\Rightarrow R$ e domeniu de integritate, dar nu este corp