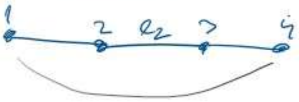
$K_{2,3}$

Grafuri Euleriene



lanț = o succesiune de muchii

ciclu = lanț în care extremitățile coincid

lanț simplu = nu trece de 2 ori prin aceeași muchie

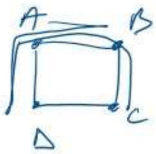
elementar = nu trece de 2 ori prin același vf.

G este un graf simplu

lanț Eulerian

ciclu Eulerian

graf —u—



T caracterizare

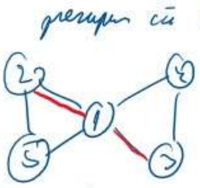
pt un graf conex $G=(V,E)$ următoarele afirmații sunt echivalente

1) G este eulerian

2) fiecare vf al lui G are grad par

3) muchiile lui G pot fi partiționate în cicluri care nu au muchii în comun

$1 \to 2$ presupun că G e eulerian $\Leftrightarrow \exists$ ciclu eulerian



$d(1)=4$

$d(2)=d(3)=d(4)=d(5)=2$

ciclul Eulerian intră într-un vf v pe o muchie și trebuie să plece din acel vf. pe altă muchie

$d(v)$ = par $\quad v \in V$

$1,3,4,1,5,2,1$

$2 \to 3$ p.p. că $d(v)=$ par $\quad v \in V$

G nu are noduri de grad 1 $\Rightarrow$ G nu e arbore $\Rightarrow$ G are cel puțin un ciclu C_{n_1}

G' graful rezultat din G prin eliminarea muchiilor ciclului C_{n_1}

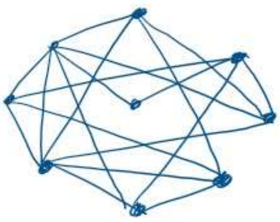
toate vf. din G' au grad par $\Rightarrow$ G' poate fi partiționat în cicluri disjuncte

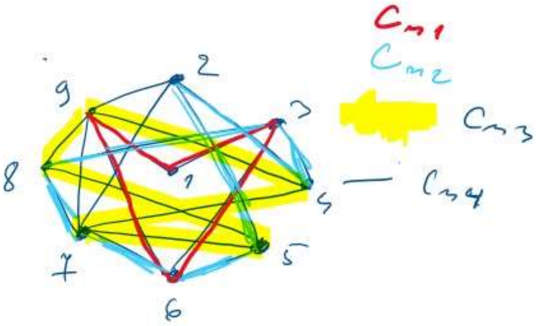
$C_{n_2}, \dots, C_{n_k}$

C_{n_1}

$C_{n \dots}$

$C_{m2}, \dots, C_{mk}$





$3 \to 1$

muchiile lui G pot fi partiționate în k cicluri disjuncte $C_{m1}, \dots, C_{mk}$

G conex => ciclu simplu care are un nod comun cu alt ciclu

ciclurile pot fi înlănțuite până se obține un ciclu eulerian

$Q_1 = 3, 8, 7, 6, 5, 2, 4, 3$

$Q_2 = 3, 6, 9, 1, 3$

$Q_3 = 4, 9, 8, 5, 7, 4$

$Q_4 = 2, 7, 9, 2$

$3, 6, 9, 1, 3, 8, 7, 6, 5, 2, 7, 9, 2, 4, 9, 8, 5, 7, 4, 3$

Grafuri Hamiltoniene

T Dirac

fie un graf G de ordinul $n \geq 3$. Dacă $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ atunci G este Hamiltonian

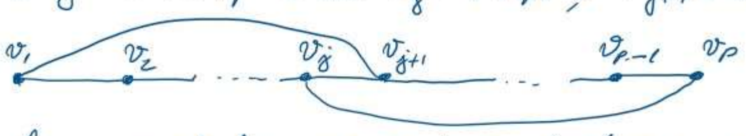
sau

fie G un graf de ordinul $n \geq 3$. Dacă $\forall u \in V$ și $d(u) \geq \frac{n}{2}$ => G este H

Dem.

pp. G satisface $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, $n \geq 3$, G nu este H

- fie $P = \langle v_1, \dots, v_p \rangle$ lanț simplu de lungime max în G
- v_1 și v_p au cel puțin $\frac{n}{2}$ vecini în P deoarece $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$
- dem. că $\exists\, j \in \{1, \dots, p-1\}$ a.î. $v_j \in N(v_p)$ și $v_{j+1} \in N(v_1)$



- dacă nu ar fi așa => pt. fiecare vecin v_j din P al vf. v_p, v_{j+1} nu este vecin cu v_1

$$\Rightarrow d(v_1) \leq n - 1 - \frac{n}{2} < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$ contradicție cu $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$

- fie C ciclul $v_1, v_2, \dots, v_j, v_p, v_{p-1}, \dots, v_{j+1}, v_1$
- p.p. că G nu e H => există un vf. al lui G care nu este în P

$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ și $n \geq 3$ => $\delta(G) \geq 2$ G conex

$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ și $n \geq 3 \Rightarrow \delta(G) \geq 2$ G conex

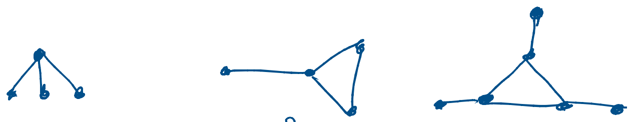
G are un vf w care nu este în p și este adiacent la un vf. v_i din p

lanțul care pornește cu $w, v_1, v_2, \dots$ e mai lung decât lanțul p

$\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow$ G este H

T Dirac generalizată

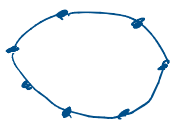
Fie G un graf de ordinul $n \geq 3$. Dacă $d(x) + d(y) \geq n$ pt. toate perechile de vf. neadiacente x și y atunci G este H.



$K_{1,3}$ Z_1 N

dacă este un graf 2 conectat și liber de $\{K_{1,3}, Z_1\} \Rightarrow$ G este H

k- conectat



2 - conectat

Rețele de flux

$G = (V, E)$ graf orientat, $(u, v) \in E$ are o capacitate pozitivă

$c(u, v) \geq 0$

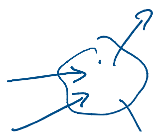
- $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E$
- $(u, v) \notin E \Rightarrow c(u, v) = 0$
- 2 vf. speciale $\begin{cases} s = \text{sursa (source)} \\ t = \text{destinație (sink)} \end{cases}$

- $\forall u \in V \setminus \{s, t\}$ $s \rightsquigarrow u \rightsquigarrow t$

Def.

Fie $G = (V, E)$ o rețea de flux cu funcția de capacitate c, G graf orientat. Fie s sursa din rețea și t vârful destinație. Un flux e o funcție $f : V \times V \to \mathbb{R}$ care satisface

- se respectă capacitatea unui arc $\forall u, v \in V$, $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$;
- conservarea fluxului: $\forall u \in V \setminus \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v)$



$(u,v) \notin E \Rightarrow f(u,v)=0$

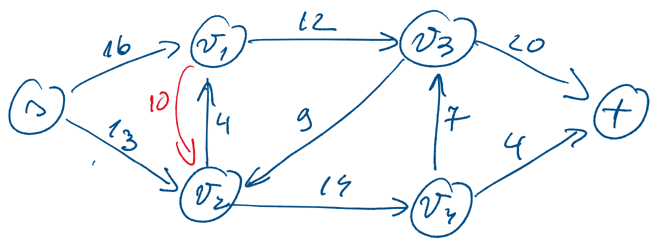
$f(u,v)$ $\qquad |f| = \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)$

$|\cdot|$

pt. o rețea de flux $\qquad \sum_{v\in V} f(v,s) = 0$

flux max $\qquad$ se dă G, s, t

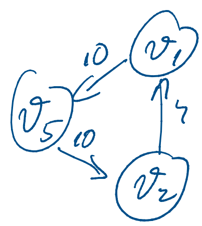
se cere $\max|f|$



s-fabrică

t-depozit

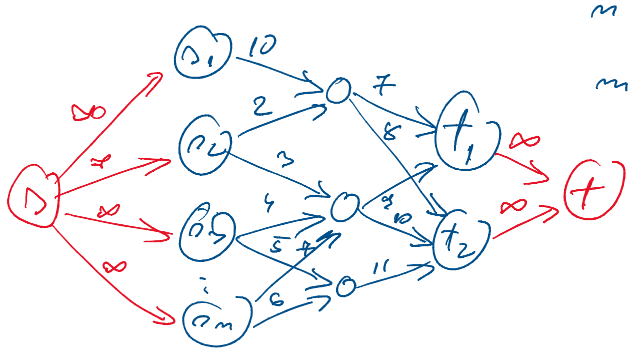
arce antiparalele



vf. sursă și destinație multiple

$m \in \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$

$n \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$



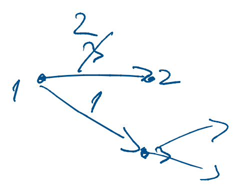
metoda Ford-Fulkerson

↳ rețea reziduală

↳ drum de creștere (cale reziduală)

↳ tăietura

$f(u,v)=0 \quad \forall u,v \in V$



metoda FF(G, s, t)

inițializare flux cu 0

while există o cale reziduală p în rețeaua reziduală G_f do

Metoda FF (G, s, t)

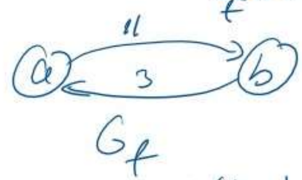
inițializare flux cu 0
while există o cale reziduală p în graful rezidual G_f do
  crește fluxul f de pe p
return f

Graf rezidual

$G=(V,E)$ și fluxul f

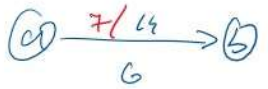
G_f

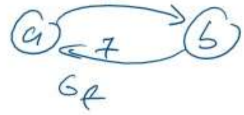
$c_f(a,b)=c(a,b)-f(a,b)$
$=14-3$



$c_f(b,a)=f(a,b)=3$

$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$





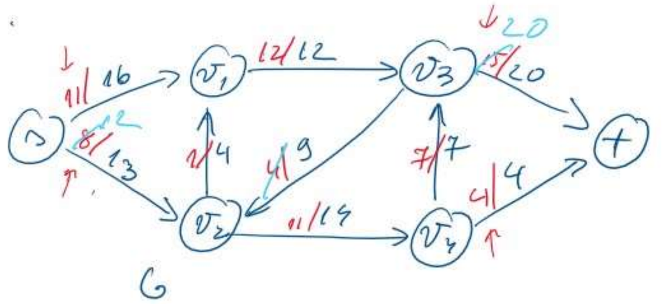
$G=(V,E)$ rețea de flux cu s și t. Fie f un flux în G și $u,v\in V$

Definim capacitatea reziduală $c_f(u,v)$

$$c_f(u,v)=\begin{cases} c(u,v)-f(u,v) & \text{dacă } (u,v)\in E\\ f(v,u) & \text{dacă } (v,u)\in E\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

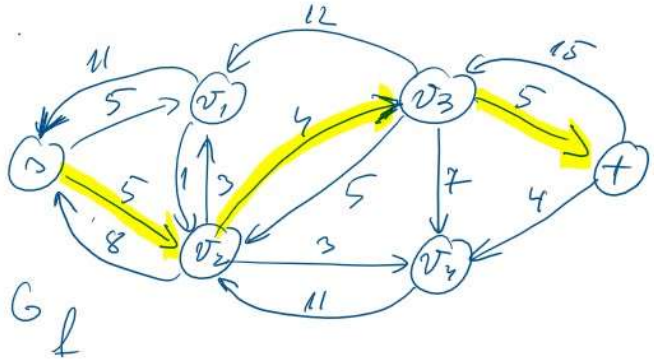
$G=(V,E)$ cu s și t o rețea de flux și fluxul f prin G, graful rezidual indus de f este o rețea de flux $G_f=(V,E_f)$

$$E_f=\{(u,v)\in V\times V \mid c_f(u,v)>0\}$$



flux / capacitate

$|f|=19$



G_f

Dacă f este un flux în G și f' este un flux în G_f, def $f \uparrow f'$ îmbunătățirea fluxului f de f' ca o fct. de la $V \times V$ la $\mathbb{R}$ def

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u), & \text{dacă } (u,v) \in E \\ 0 & \text{, în rest} \end{cases}$$

(u,v) cu $f'(u,v)$ scad $f'(v,u)$

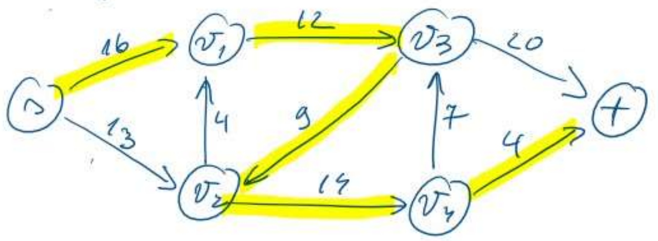
$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in p\}$$

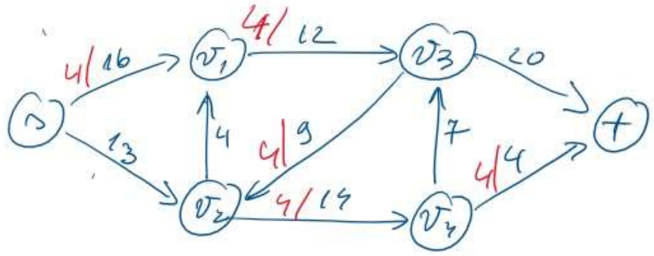
$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p), & \text{dacă } (u,v) \in p \\ 0 & \text{, în rest} \end{cases}$$

G_f

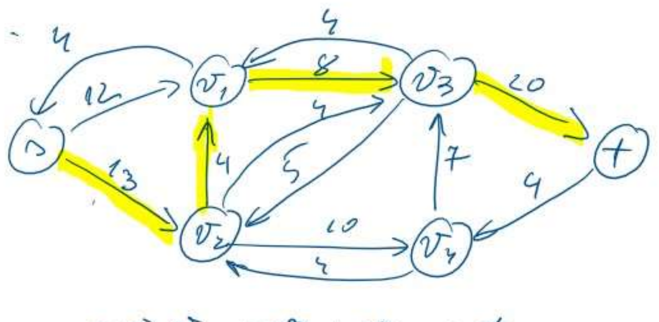
G

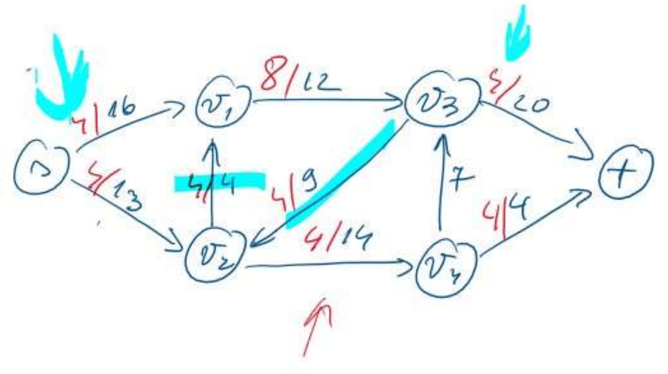
flux / capacitate





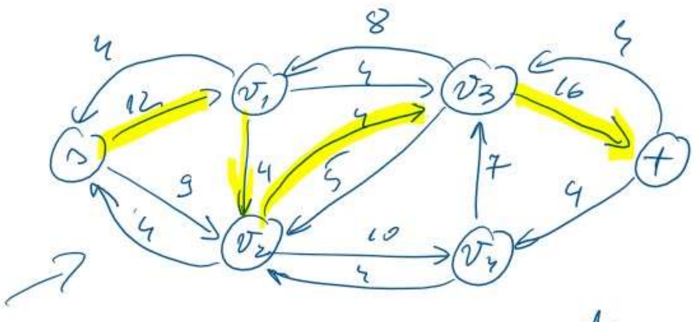
$s \to v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_4 \to t$

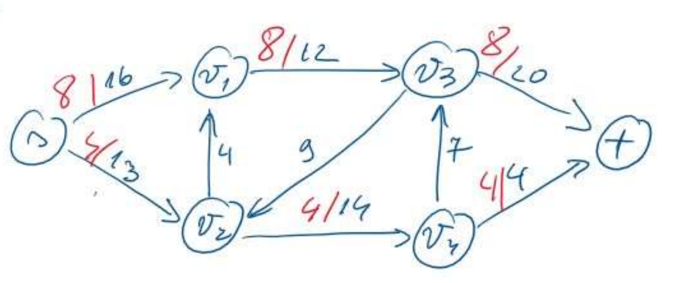




$s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to t$

$\Downarrow$

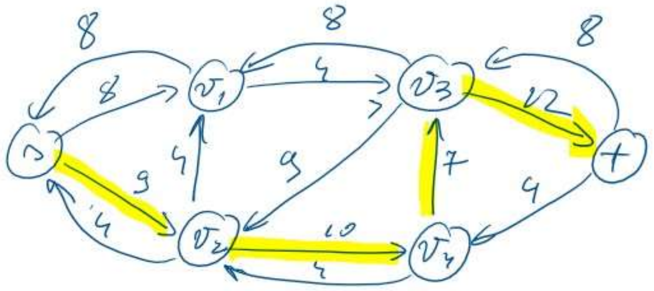




$s \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to t$

$s \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to t$

$c_f = 4$



$|f| = 23$

$O(E|f^*|)$