Suport/Transcript curs algoritmica grafurilor IX-X. Grafuri planare, colorarea grafurilor, cuplaje

9.1 Grafui planare

Definiţie 9.1.1 (Grafuri planare)**.**
un graf $G = (V, E)$ este planar dacă poate fi desenat în plan astfel încât muchiile să nu se intersecteze decât în vârfurile grafului. O astfel de desenare se numeşte reprezentare planară a lui G.

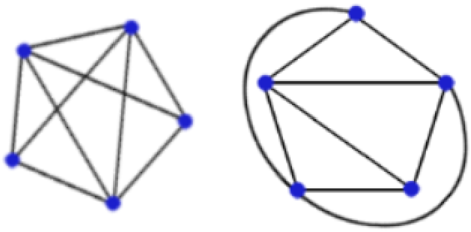


Figura 1: Graf planar.

O regiune a unei reprezentări planare a grafului este o porțiune din plan în care orice două vârfuri pot fi unite cu o curbă care nu intersectează graful G.

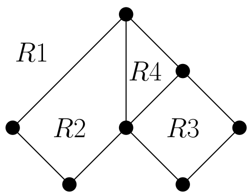


Figura 2: Regiunile unui graf planar.

Graful din figura 2 determină patru regiuni, $R1$ este regiune exterioară.

Oricare regiune este delimitată de muchii, oricare muchie este în contact cu una sau două regiuni. O muchie mărginește o regiune R dacă este în contact cu R și cu altă regiune.

Pentru graful din figura 3:

- e_1 este în contact cu regiunea R_1;
- e_6 este în contact cu regiunea R_2;

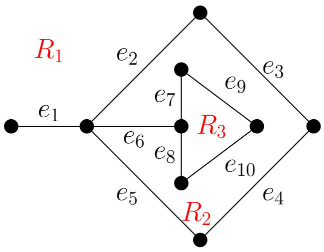


Figura 3: Regiunile unui graf planar.

- regiunea R_1 este mărginită de e_2, e_3, e_4, e_5;
- regiunea R_2 este mărginită de $e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}$;
- regiunea R_3 este mărginită de e_7, e_8, e_9, e_{10}.

Gradul de mărginire $b(R)$ al unei regiuni R este numărul de muchii care mărginesc R. Pentru graful din figura 3: $b(R_1) = 4$, $b(R_2) = 8$ și $b(R_3) = 4$.

Teorema 9.1 (Formula lui Euler)**.**
Dacă $G = (V, E)$ este un graf planar conex cu n vârfuri, m muchii şi r regiuni atunci:

$$n - m + r = 2.$$

Demonstraţie teorema 9.1.
Inducţie după m:

1. $m = 0 \Longrightarrow G = K_1; n = 1, m = 0, r = 1 \Longrightarrow n - m + r = 2$;
2. G este un arbore, atunci $m = n - 1$ şi $r = 1 \Longrightarrow n - m + r = n - (n - 1) + 1 = 2$;
3. G este un arbore conex cu cel puţin un ciclu. Fie o muchie din ciclul respectiv şi $G' = G - e$. G' este conex cu n vârfuri, $m - 1$ muchii $r - 1$ regiuni $\Longrightarrow n - (m - 1) - (r - 1) = 2$, $n - m + r = 2$ are loc şi în acest caz.

$\square$

Consecințe ale formulei lui Euler

Consecința 1 $K_{3,3}$ nu este un graf planar

Demonstraţie.
$K_{3,3}$ are $n = 6$ şi $m = 9$, dacă ar fi planar ar avea $r = m - n + 2 = 5$ regiuni R_i $(1 \leq i \leq 5)$, fie $C = \sum_{i=1}^{5} b(R_i)$.

Orice muchie mărgineşte două regiuni $\Longrightarrow C \leq 2m = 18$. $K_{3,3}$ este bipartit, nu conţine K_3 ca subgraf (cel mai scurt ciclu în $K_{3,3}$ are lungimea 4), deci $b(R_i) \geq 4$ pentru orice valoare a lui i şi prin urmare $C \geq 4 \cdot 5 = 20 \Longrightarrow$ contradicţie, deci $K_{3,3}$ nu poate fi graf planar. □

Consecința 2
Dacă G este un graf planar cu $n \geq 3$ vârfuri și m muchii atunci $m \leq 3n - 6$. Mai mult, dacă $m = 3n - 6$ atunci $b(R) = 3$ pentru orice regiune din graf.

Demonstraţie.
Fie $R_1, ..., R_n$ regiunile lui G şi $C = \sum_{i=1}^{n} b(R_i)$. Ştim că $C \leq 2m$ şi că $C \geq 3r$, $b(R_i) \geq 3$ pentru toate regiunile. Atunci

$$3r \leq 2m \Longrightarrow 3(2 + m - n) \leq 2m \Longrightarrow m \leq 3n - 6.$$

Dacă egalitatea are loc, atunci

$$3r = 2m \Longrightarrow C = \sum_{i=1}^{r} b(R_i) = 3 \Longrightarrow b(R_i) = 3$$

pentru toate regiunile (graf format din triunghiuri). □

Consecința 3 K_5 nu este graf planar

Demonstraţie.
K_5 are $n = 5$ vârfuri şi $m = 10$ muchii deci $3n - 6 = 9 < 10 = m \Longrightarrow K_5$ nu poate fi planar (Consecinţa 2). □

Consecința 4 $\delta(G) \leq 5$ pentru orice graf planar.

Demonstraţie.
Presupunem că $G = (V, E)$ este planar.

Dacă $n \leq 6$ orice vârf are gradul mai mic sau egal cu $5 \Longrightarrow \delta(G) \leq 5$.

Dacă $n > 6$, putem nota $D = \sum_{v \in V} d(v)$. Rezultă următoarele: $D = 2m \leq 2(3n - 6) = 6n - 12$. Dacă $\delta(G) \geq 6$ atunci $D = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6n \Longrightarrow$ contradicţie.

Deci $\delta(G) \leq 5$ are loc. □

Detecția unui graf planar

Teorema 9.2 (Kuratowski).
Graful $G = (V, E)$ este un graf planar dacă şi numai dacă nu conţine subdiviziuni ale lui $K_{3,3}$ şi ale lui K_5.

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat și $(u, v) \in E$. Putem defini următoarele:

- o subdiviziune a lui (u, v) în G este o înlocuire a muchiei (u, v) din G cu un lanț de la u la v prin vârfuri intermediare noi;
- un graf H este o subdiviziune a unui graf G dacă H se poate obține din G printr-o secvență finită de subdiviziuni de muchii.

(a) G (b) H

Figura 4: Graf subdiviziune.

Putem spune că un graf G conține un graf H dacă graful H se poate obține prin eliminarea de vârfuri și muchii din G.

Observație

- dacă H este subgraf al lui G atunci G conține H. Reciproca nu este adevărată (G conține H nu implică H este subgraf al lui G);
- H este un subgraf al lui G doar dacă se poate obține din G prin eliminarea de vârfuri.

De exemplu, fie graful din figura 5 unde dacă se elimină muchiile $(1, 7)$, $(6, 7)$, $(2, 3)$ și $(4, 5)$ se obține un graf ce poate fi redus la $K_{3,3}$, graful original nu este planar.

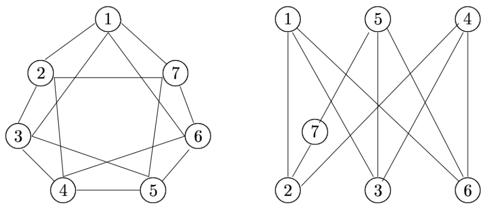


Figura 5: Exemplu Kuratowski.

Orice graf planar poate fi redesenat astfel încât muchiile sale sunt segmente de dreaptă, figura 6.

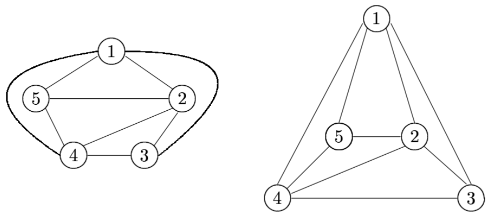


Figura 6: Exemplu graf planar.

9.2 Colorarea grafurilor

Definiţie 9.2.1 (Colorarea vârfurilor).
O $k-$colorare a vârfurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcţie $K : V \to \{1, 2, ..., k\}$ astfel încât $k(u) \neq k(v)$ dacă $(u, v) \in E$.

Definiţie 9.2.2 (Numărul cromatic).
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf G este valoarea minimă a lui k, $k \in \mathbb{N}$, pentru care există o $k-$colorare a lui G.

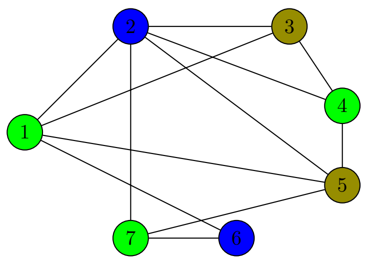


Figura 7: Exemplu de colorare a unui graf.

Pentru graful din figura 7 numărul minim de culori necesar pentru a colora graful este 3. $k(1) = k(4) = k(7) =$ verde, $k(2) = k(6) =$ albastru, $k(3) = k(5)$ maro.

Determinarea numărului cromatic χ pentru un graf G este o problemă dificilă, o variantă pentru a determina numărul cromatic este de a calcula polinomul cromatic $c_G(k)$ asociat grafului G. $c_G(k)$ este numărul de $k-$colorări de vârfuri a grafului G, $\chi(G)$ reprezintă valoarea minimă a lui k pentru care $c_G(k) > 0$.

Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

Graful vid E_n

Graful vid conține n vârfuri și $m = 0$ muchii. Având la dispoziție k culori, pentru fiecare vârf se pot alege oricare din cele k culori. Polinomul cromatic pentru graful vid este

$$c_{E_n}(k) = k^n$$

și numărul cromatic este

$$\chi(E_n) = 1.$$

Arbore de *n* vârfuri T_n

Rădăcina arborelui poate fi colorată în k moduri, orice alt vârf poate fi colorat cu orice culoare diferită de cea a vârfului părinte. Polinomul cromatic pentru un arbore de n vârfuri este

$$c_{T_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$$

și numărul cromatic pentru $n > 1$ este

$$\chi(T_n) = 2.$$

Graf complet K_n
Având la dispoziție k culori, un graf complet poate fi colorat în

$$c_{K_n} = k(k-1)...(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!} = A_k^n$$

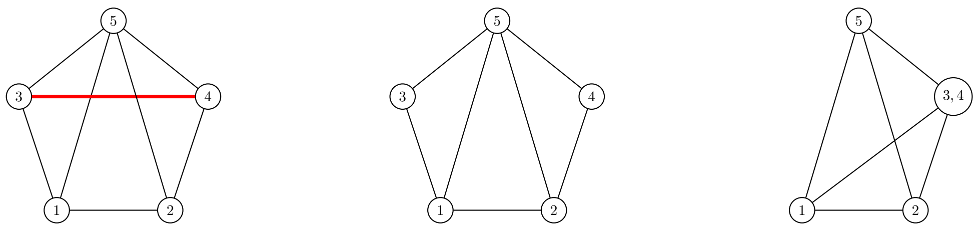
moduri și numărul cromatic este

$$\chi(K_n) = n.$$

Calculul polinomului cromatic
Pentru a determina polinomul cromatic al unui graf $G = (V, E)$ neorientat există două metode recursive:

1. $c_G(K) = c_{G-e}(k) - c_{G/e}(k)$
2. $c_G(K) = c_{\bar{G}}(k) + c_{\bar{G}/e}(k)$

unde $\bar{G} = G + e$. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat și $e = (u, v)$ o muchie din E. $G - e$ este graful obținut din G prin eliminarea muchiei e, G/e este graful obținut din G în care se înlocuiesc vârfurile u și v cu un singur vârf care se învecinează cu vecinii lui u și ai lui v. De exemplu graful din figura 8a și muchia $e = (3, 4)$, figura 8b prezintă graful $G - e$ iar figura 8c prezintă graful G/e.



(a) G (b) $G - (3, 4)$ (c) $G/(3, 4)$

Figura 8: Exemplu determinare polinom cromatic.

Metoda $c_G(K) = c_{G-e}(k) - c_{G/e}(k)$ presupune determinarea polinomului cromatic recursiv eliminând pe rând câte o muchie $e \in E$ până când se obțin grafuri speciale E_n, T_n sau K_n.

Metoda $c_G(K) = c_{\bar{G}}(k)+c_{\bar{G}/e}(k)$ presupune determinarea polinomului cromatic recursiv adăugând pe rând muchii e care lipsesc din graf până când se obțin grafuri speciale E_n, T_n sau K_n pentru care se cunoaște polinomul cromatic.

Dacă $G = (V, E)$ este un graf neorientat cu n vârfuri și m muchii polinomul cromatic $c_G(k)$ trebuie să îndeplinească următoarele proprietăți:

- are gradul n;
- coeficientul lui k^n este 1;
- coeficientul lui k^{n-1} este $-m$.
- coeficienții săi au semne alternante;
- termenul liber este 0.

Algoritmic dacă se dorește colorarea unui graf se poate folosi metoda suboptimală *COLORARE(G)*. Algoritmul nu este optimal deoarece nu folosește $\chi(F)$ culori pentru a colora graful G. Fie un graf $G = (V, E)$ și funcția de colorare $K : V \to \mathbb{N}$ astfel încât dacă $e = (u, v) \in E$

atunci $k(u) \neq k(v)$, atributul k asociat unui vârf reprezintă culoarea asociată vârfului respectiv, algoritmul este:

COLORARE(G)
for $v \in V$ **do**
  $v.k = 0$
$v_1.k = 1$
for $j = 2, j \leq n$ **do**
  $v_j.k = min(k \in \mathbb{N} | k > 0 \wedge u.k \neq k \forall u \in A_{v_j})$

O altă metodă de a colora un graf presupune o abordare backtracking. Fie C setul culorilor posibile, algoritmul *COLORARE_B(G)* prezintă această abordare.

COLORARE_B(v)
for $x \in C$ **do**
  if $SIGUR(v, x)$ **then**
    $v.k = x$
    if $v + 1 < |V|$ **then**
      COLORARE_B(v+1)
    else
      stop

SIGUR(v, x)
for $0 < i < n$ **do**
  if $(a_{vi} = 1 \wedge x = i.k)$ **then**
    return FALSE
return TRUE

O altă variantă de a colora un graf a fost introdusă de Kempe și presupune utilizarea unei stive unde sunt salvate vârfurile din graf ce au gradul mai mic decât numărul culorilor disponibile pentru a colora graful. Astfel vor fi colorate în graf vârfurile în ordine descrescătoare a gradului unui nod.

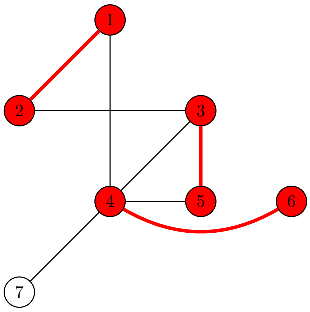
9.3 Cuplaje în grafuri

Fie un graf simplu neorientat $G = (V, E)$. Un cuplaj în G este o mulțime de muchii M în care nici o pereche de muchii nu are un vârf comun. Vârfurile adiacente la muchiile din M se numesc vârfuri saturate de M (sau M-saturate). Celelalte vârfuri se numesc M-nesaturate.

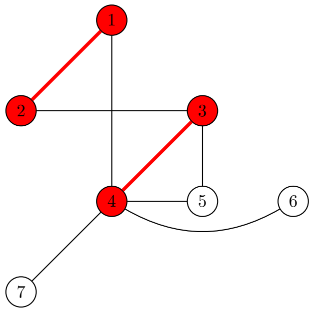
Figura 9 prezintă două cuplaje M_1 și M_2 pentru același graf G. Cuplajul M_1 este format din $M_1 = \{(1,2), (4,5), (4,6)\}$ având vârfurile saturate $1, 2, 3, 4, 5, 6$ iar cuplajul M_2 este format din muchiile $M_2 = \{(1,2), (3,4)\}$ având vârfurile saturate $1, 2, 3, 4$.

Se pot defini următoarele:

- un cuplaj perfect al lui G este un cuplaj care saturează toate vârfurile lui G;
- un cuplaj maxim al lui G este un cuplaj care are cel mai mare număr posibil de muchii;
- un cuplaj maximal al lui G este un cuplaj care nu poate fi lărgit prin adăugarea unei muchii.



(a) Cuplajul M_1



(b) Cuplajul M_2

Figura 9: Cuplaje în grafuri - exemple.

Definiţie 9.3.1 (Lanţ M-alternant, M-lanţ de creştere)**.**
Fie un graf G şi un cuplaj M, un lanţ M-alternant este un lanţ în G în care toate muchiile alternează între muchii din cuplajul M şi muchii ce nu aparţin cuplajului. Un $M-$lanţ de creştere este un lanţ $M-$alternant care are ambele capete $M-$nesaturate.

Teorema 9.3 (Berge)**.**
Un cuplaj M al unui graf G este maxim dacă şi numai dacă G nu conţine $M-$lanţuri de creştere.

Demonstraţie.
" $\Longrightarrow$ ". Se presupune că M este un cuplaj maxim. Se demonstrează prin contradicţie că G nu are $M-$lanţuri de creştere. Dacă $L = (x_1, x_2, ..., x_k)$ ar fi un $M-$lanţ de creştere atunci, conform definiţiei, k ar trebui să fie par astfel încât $(x_2, x_3), (x_4, x_5), ..., (x_{k-2}, x_{k-1})$ sunt muchii din cuplaj iar muchiile $(x_1, x_2), (x_3, x_4), ..., (x_{k-1}, x_k)$ nu fac parte din cuplaj. Pentru acest lanţ se poate defini un cuplaj $M_1 = \{M \setminus \{(x_2, x_3), (x_4, x_5), ..., (x_{k-2}, x_{k-1})\}\} \cup \{(x_1, x_2), (x_3, x_4), ..., (x_{k-1}, x_k)\}$. Dar M_1 conţine cu o muchie mai mult decât M, ceea ce contrazice ipoteza că M este maxim.

" $\Longleftarrow$ ". Dacă M nu este maxim, există un cuplaj M' al lui G cu $|M'| > |M|$. Fie H subgraful lui G definit astfel: $V(H) = V(G)$ şi $E(H)$ este mulţimea muchiilor ce apar exact o dată în M şi M'.

Deoarece $|M'| > |M| \Longrightarrow H$ are mai multe muchii în M' decât în M. Orice vârf x al lui H aparţine la cel mult o muchie din M şi la cel mult o muchie din $M' \Longrightarrow d_H(x) \leq 2$ pentru toţi $x \in V(H)$, deci componentele conexe ale lui H cu mai multe M'-muchii decât $M-$muchii sunt lanţuri sau cicluri. Dacă este ciclu, trebuie să fie ciclu de lungime pară deoarece muchiile alternează între $M-$muchii şi $M'-$muchii $\Longrightarrow$ singurele componente conexe ale lui H care pot conţine mai multe $M'-$muchii decât $M-$muchii sunt lanţurile.

$|M'| > |M| \Longrightarrow$ există un lanţ P în H care începe şi se termină cu o muchie din $M' \Longrightarrow L$ este un $M-$lanţ de creştere ceea ce contrazice ipoteza. □

Teorema 9.4 (Hall)**.**
Fie G un graf bipartit cu mulţimile partite X şi Y. X poate fi cuplat în Y dacă şi numai dacă $|N(S)| \geq |S|$ pentru toate submulţimile S ale lui X.

9.4 Cuplaje în grafuri bipartite

Pentru un graf bipartit $G = (V, E)$ între submulțimile X și Y ale lui V se poate defini un cuplaj ca și o mulțime de muchii $C \subseteq E$ cu proprietatea că oricare două muchii din C nu au un capăt comun.

Pentru a determina un cuplaj într-un graf bipartit se pot folosi algoritmii de flux în felul următor:

- toate muchiile din G se transformă în arce de la X la Y cu capacitatea 1;

- graful G se extinde cu două vârfuri s (sursa) și t (destinație), s se leagă de toate vârfurile din X folosind arce de capacitate 1, toate vârfurile din Y se leagă de t folosind arce de capacitate 1;
- se determină fluxul maxim în rețeaua de flux obținută.

Teorema 9.5.
Fie $G = (V, E)$ reţeaua de flux construită pentru un graf bipartit şi f un flux maxim în G. Atunci mulţimea muchiilor (u, v) ale lui f cu $u \in X, v \in Y$ şi $f(u, v) = 1$ este un cuplaj maxim în graful bipartit.

9.5 Referințe

1. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press.
2. Geir Agnarsson and Raymond Greenlaw. 2006. Graph Theory: Modeling, Applications, and Algorithms. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
3. Mark Newman. 2010. Networks: An Introduction. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA.
4. Cristian A. Giumale. 2004. Introducere în analiza algoritmilor, teorie și aplicație. Polirom.
5. cursuri Teoria grafurilor: Zoltán Kása, Mircea Marin, Toadere Teodor.