Seminar 11

May 12, 2021

Triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$

Problema 11.6. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală (2, 1), relativ la punctul $Q(2,2)$, urmată de o rotație de unghi $60°$, relativ la același punct. Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Soluție. Matricea unei scalări neuniforme, de factori de scală(s_x, s_y), relativ la punctul $Q(q_1, q_2)$ este:

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1-s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1-s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

adică, în cazul nostru concret:

$$\text{Scale}(2,2,2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pe de altă parte, matricea de rotaţie se scrie, în forma generală, ca

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta) + q_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta + q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

În cazul nostru concret, avem:

$$\text{Rot}(2,2,60°) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor dreptunghiului dat este:

$$[ABC] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă aplicăm mai întâi scalarea, urmată de rotație, obținem transformarea de matrice:

$$T_1 = \mathrm{Rot}(2,2,60°) \cdot \mathrm{Scale}(2,2,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} & -2\sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor triunghiului în urma transformării este:

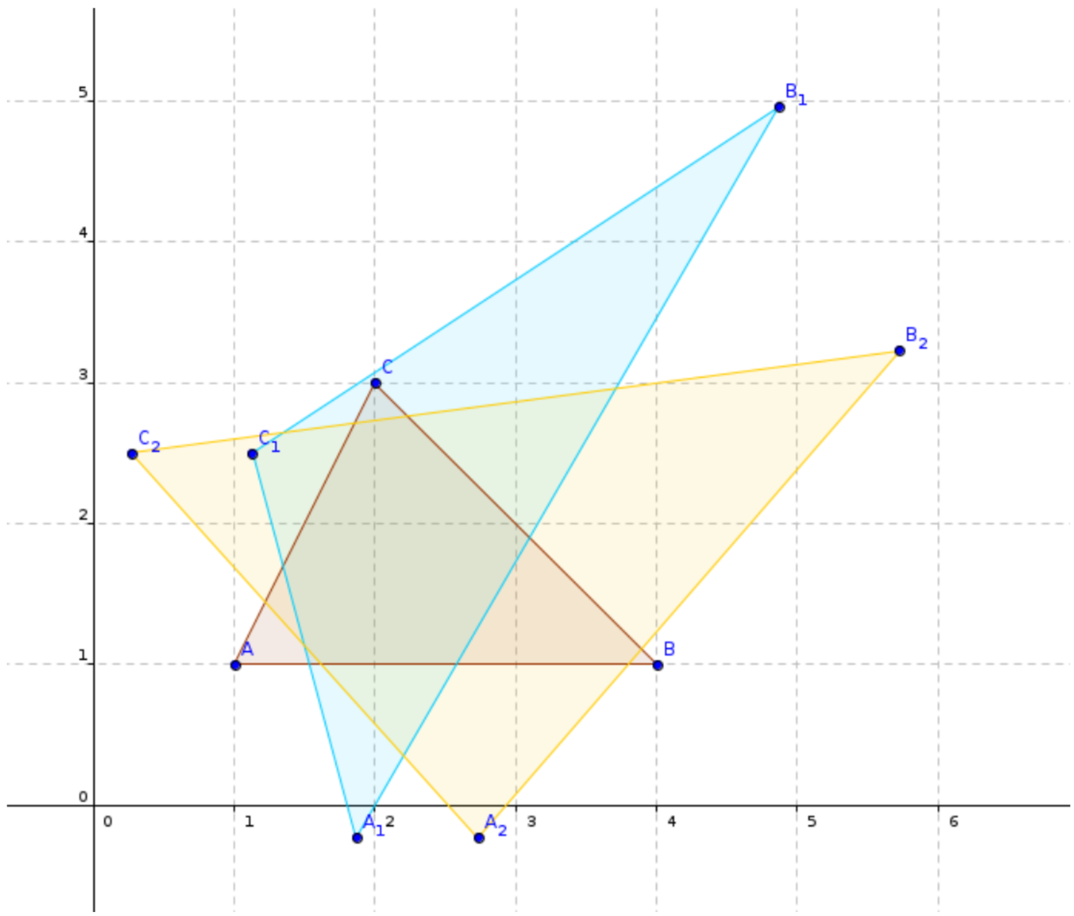
$$[A_1B_1C_1] = T_1 \cdot [ABC] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}+4 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}+2 \\ -\sqrt{3}+\frac{3}{2} & 2\sqrt{3}+\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă aplicăm mai întâi rotația, urmată de transformare, obținem transformarea de matrice:

$$T_2 = \mathrm{Scale}(2,2,2,1) \cdot \mathrm{Rot}(2,2,60°) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor triunghiului în urma transformării este:

$$[A_2B_2C_2] = T_2 \cdot [ABC] = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+4 & -\sqrt{3}+2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2} & \sqrt{3}+\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



B1
B2
C
C2
C1
A
B
A1
A2
0
1
2
3
4
5
6