

Seminar 4

1. Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi utilizând criteriile indicate

i) criteriul comparației

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

ii) consecințe ale criteriului lui Kummer

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right]^2$

iii) criteriul radicalului

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

iv) criteriul condensării

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p > 0$$

2. Studiați convergența și absolut convergența următoarelor serii cu termeni oarecare

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$

3. (**criteriul raportului pentru siruri**) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir cu termeni strict pozitivi pentru care $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = l$. Au loc afirmațiile

i) Dacă $l > 1$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

ii) Dacă $l < 1$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

4. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Arătați că

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1 + x_n}$$

Exercitii suplimentare

1. Studiați natura următoarelor serii cu termeni pozitivi

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \frac{1}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}, \quad a > 0$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}, \quad a > 0$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

2. Studiați convergența și absolut convergența următoarelor serii cu termeni oarecare

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{2}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

3. Calculați limita sirului $x_n = \frac{3^n n!}{n^n}$.

4. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Care din următoarele afirmații sunt întotdeauna adevărate?

i) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ este convergentă

ii) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$ este convergentă

5. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir cu termeni pozitivi. Care din următoarele implicații sunt adevărate?

i) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă \Rightarrow seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ este convergentă

ii) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă \Rightarrow seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ este divergentă