Tm 10.6

Să se scrie ecuația cilindrului circumscris sferei $x^2+y^2+z^2=1$, știind că generatoarele sale fac unghiuri egale cu cele 3 axe de coordonate.

Scriem ~~ecuația~~ ecuatiile directoarei pt. cilindru:

$$d : x=y=z \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Deoarece cilindrul este circumscris sferei $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ generatoarele acestuia trebuie să fie tangente la sferă:

Ecuațiile generatoarelor se pot scrie: $\begin{cases} x-y=\lambda \\ x-z=\mu \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x-\lambda \\ z=x-\mu \end{cases}$$ (înlocuim în ec. sferei) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + (x-\lambda)^2 + (x-\mu)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \lambda^2 - 2x\lambda + \lambda^2 + x^2 - 2x\mu + \mu^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2(\lambda+\mu)x + (\lambda^2+\mu^2-1) = 0$$

Deoarece generatoarele sunt tangente $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Delta = 4(\lambda+\mu)^2 - 12(\lambda^2+\mu^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)^2 - 3(\lambda^2+\mu^2-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\lambda^2 - 2\mu^2 + 2\lambda\mu + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (1)\ 2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu - 3 = 0 \\ (2) \begin{cases} x - y = \lambda \\ x - z = \mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-y)^2 + 2(x-z)^2 - 2(x-y)(x-z) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 + \cancel{2x^2} - 4xz + 2z^2 - \cancel{2x^2} + 2xz + 2yx - 2yz - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 3 = 0$$

↳ ecuația cilindrului.