10.4) Să se afle ecuația suprafeței conice cu vârful în punctul $A(0,-a,0)$ și având curba directoare $x^2=2\lambda y$, $z=h$.

1) Ecuațiile vârfului A:

$$A:\begin{cases} x=0 \\ y=-a \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow A:\begin{cases} x=0 & \equiv P_1 \\ y+a=0 & \equiv P_2 \\ z=0 & \equiv P_3 \end{cases}$$

2) Ecuațiile generatoarelor:

$$(G_{\alpha,\beta})\begin{cases} P_1=\alpha P_3 \\ P_2=\beta P_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (G_{\alpha,\beta})\begin{cases} x=\alpha\cdot z \\ y+a=\beta\cdot z \end{cases}, \alpha,\beta\in R$$

3) Curba directoare:

$$(C)\begin{cases} x^2-2\lambda y=0 \\ z-h=0 \end{cases}$$

4/ Sistemul format din ec. generatoarelor și ec. curbei directoare:

$$\begin{array}{c} (2) \\ (3) \end{array} \Big| \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha z \\ y + a = \beta z \\ x^2 - 2px y = 0 \\ z - h = 0 \end{cases}$$

5/ Scriem sist. format din ecuațiile generatoarelor și una dintre ecuațiile curbei directoare.

Alegem: $z - h = 0$ pentru ușurință și obținem sistemul:

$$\begin{cases} x = \alpha z \\ y + a = \beta z \\ z - h = 0 \end{cases} \Big| \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha z \\ y = \beta z - a \\ z = h \end{cases} \Big| \overset{z=h}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \alpha h \\ y = \beta h - a \\ z = h \end{cases}$$

6/ Înlocuind în ~~ceastea~~ prima ecuație a curbei directoare: $x^2 - 2py = 0$, obținem ecuația:

$$(\alpha \cdot h)^2 - 2p(\beta h - a) = 0 \quad (1)$$

7/ Deducem α și β în funcție de x, y, z:

$$(G_{\alpha,\beta}) \begin{cases} x = \alpha \cdot z \\ y + a = \beta \cdot z \end{cases} \Big| \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{z} \\ \beta = \frac{y + a}{z} \end{cases}$$

8) Înlocuim în 1:

$$\left(\frac{x}{z}\cdot h\right)^2 - 2p\left(\frac{y+a}{z}\cdot h - a\right)=0$$

$$\frac{x^2}{z^2}\cdot h^2 - 2p\,\frac{y+a}{z}\,h + 2pa = 0 \quad /\cdot z^2$$

$$x^2h^2 - 2pzyh - 2pzah + 2paz^2 = 0$$

$$x^2h^2 - 2pzh(y+a) + 2paz^2 = 0$$

În concluzie, ecuația suprafeței conice este:

$$x^2h^2 - 2pzh(y+a) + 2paz^2 = 0$$