Seminar 1

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Aratati ca

$$\max\{x, y\} = \frac{|x - y| + (x + y)}{2}$$

Formulati si demonstrati o relatie analoaga pentru $\min\{x, y\}$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrati urmatoarele proprietati ale functiei modul
   a) $|x + y| \leq |x| + |y|$
   b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

3. Determinati $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ si $\max A$ pentru multimile
   a) $A = [0, 7) \cup [8, +\infty)$
   b) $A = [-1, 2] \setminus \mathbb{Q}$
   c) $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^\star \right\}$
   d) $A = \left\{ \frac{1}{x - [x]} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \right\}$

4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Aratati ca
   a) Daca exista $\min A$ atunci $\min A = \inf A$
   b) Daca exista $\max A$ atunci $\max A = \sup A$

5. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ multimi nevide si marginite cu $A \subseteq B$.
   a) Aratati ca $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$
   b) Daca $\inf A = \inf B$ si $\sup A = \sup B$ rezulta $A = B$?

6. Demonstrati ca intre oricare doua numere reale distincte exista cel putin un numar rational (respectiv irational).

7. Demonstrati ca orice numar real este limita unui sir de numere rationale (respectiv irationale). Dati exemple pentru numerele $x = 2$ si $y = \sqrt{2}$.

8. Justificati ca $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercitii suplimentare

1. Determinati $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ si $\max A$ pentru multimile
   a) $A = [-\pi, \pi) \cap \mathbb{Z}$
   b) $A = \left\{ \frac{n}{1-n^2} \middle| \, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$
   c) $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \middle| \, x > 0 \right\}$
   d) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \, |x^2 - x| \leq 1 \right\}$

2. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ multimi nevide si marginite superior. Aratati ca $A \cup B$ este marginita superior si

$$\sup(A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}$$

3. Demonstrati ca intre oricare doua numere reale distincte exista o infinitate de numere rationale (respectiv irationale). Dati exemplu de o multime infinita de numere irationale toate situate in intervalul $[0, 1]$.

4. Justificati ca $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt[3]{2}} \notin \mathbb{Q}$.