Problema 8.7.

$A(4,-1)$

$d: x+4y-10=0$ tangentă la elipsă

Det. ecuația elipsei

Ecuația unei elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Știm că $A(4,-1)$ se află pe elipsă

$\Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

$\frac{16b^2+a^2}{a^2b^2}=1 \Leftrightarrow a^2+16b^2=a^2b^2$

Dreapta d este tangentă la elipsă

$d: x+4y-10=0$

$d: x=-4y+10$

Înlocuim în ec. elipsei:

$\frac{(-4y+10)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(-4y+10)^2\cdot b^2+a^2y^2=a^2b^2$

$(16y^2-80y+100)b^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

$16b^2y^2-80b^2y+100b^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

$y^2(a^2+16b^2)-80b^2y+100b^2-a^2b^2=0$

Cum d este tangentă la elipsă, soluția este una dublă $\Leftrightarrow \Delta=0$

$\Delta=(-80b^2)^2-4b^2(100-a^2)(a^2+16b^2)$

$\Delta=6400b^4-4b^2(100a^2+1600b^2-a^4-16b^2a^2)$

$\Delta=6400b^4-400b^2a^2-6400b^4+4a^4b^2+64a^2b^4$

$\Delta = 4a^2b^2(-100 + a^2 + 16b^2)$

$\Delta = 4a^2b^2(a^2 + 16b^2 - 100)$

$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 4a^2b^2 \neq 0$

$\Rightarrow a^2 + 16b^2 - 100 = 0$

$\Rightarrow$ Sistemul de ecuații

$\begin{cases} a^2 + 16b^2 = a^2b^2 \\ a^2 + 16b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow a^2b^2 = 100$

$a^2 = \frac{100}{b^2}$

$\frac{100}{b^2} + 16b^2 = 100 \mid \cdot \frac{1}{4}b^2$

$25 + 4b^4 = 25b^2$

$4b^4 - 25b^2 + 25 = 0$

$t \overset{n.}{=} b^2$, $\Delta = 625 - 400 = 225$

$t_{1,2} = \frac{25 \pm 15}{8} \begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = \frac{5}{4} \end{cases}$

I. $b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 20$

II. $b^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = 80$

$\Rightarrow$ Există 2 soluții ce satisfac condițiile

(1) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

(2) $\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$