CURS 2

Clase de ecuații diferențiale de ord. 1 rezolvabile

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

1) Ecuații cu variabile separabile

forma generală: $\boxed{y' = f(x)\cdot g(y)}$ (1) f, g cont, $g \neq 0$

$$y = y(x) \Rightarrow dy = y'(x)\cdot dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{g(y)}}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\cdot dx}_{F(x)} + c \Rightarrow \boxed{G(y) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}}$$

soluția generală în formă implicită

$M(x, y)$

$$\exists\, G^{-1} \Rightarrow \boxed{y(x) = G^{-1}(F(x)+c)\,,\ c\in\mathbb{R}}$$

sol. generală în formă explicită.

<u>Obs</u>. Dacă $\exists\, y_0\in\mathbb{R}$ a.î. $g(y_0)=0$ atunci funcția constantă $y(x)\equiv y_0$ este o soluție a ecuației cu variabile separabile, numită <u>soluție singulară</u>.

2) <u>Ecuații omogene în sens Euler</u>

(2) $\quad y' = f(x,y)$

unde f este omogenă de grad 0 în raport cu ambele variab.

(f este omogenă de grad $k \Leftrightarrow f(tx,ty) = t^k\cdot f(x,y)$

$k=0$ $\quad f$ este omogenă de grad 0 $\Leftrightarrow f(tx,ty) = f(x,y)$.)

$$y' = f(x,y) \Rightarrow \boxed{y' = F\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (2')$$

subst $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ $\quad z(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow \boxed{y(x) = x \cdot z(x)}$

$$\boxed{y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x)}$$

$$\Rightarrow z + x \cdot z' = F(z) \Rightarrow \boxed{z' = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\left(F(z) - z\right)}_{g(z)}} \quad (3)$$

o ec. cu variab. separabile.

- dacă $\exists\, z_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $F(z_0) - z_0 = 0 \Leftrightarrow F(z_0) = z_0 \rightarrow$
  $\Rightarrow z(x) \equiv z_0$ sol. sing. a ec. (3). $\rightarrow$
  $\Rightarrow y(x) = z_0 \cdot x$ sol. singulară a ec. (2) (sau (2'))

- dacă $z(x) = \varphi(x, c)$, $c \in \mathbb{R}$, sol. gen în formă explicită a ec. (3) $\Rightarrow y(x) = x \cdot z(x) = x \cdot \varphi(x, c)$, $c \in \mathbb{R}$ sol. gen. în formă explicită a ec. (2)

- dacă $\Phi(x, z, c) = 0$, $c \in \mathbb{R}$, sol. gen. în formă implicită a ec. (3) $\Rightarrow \Phi\left(x, \frac{y}{x}, c\right) = 0$ sol. gen. în f. implicită a ec. (2).

3) Ecuații liniare

forma generală: (4) $\boxed{y' + P(x)\cdot y = Q(x)} \Big| \cdot \rho(x)$ P, Q cont.

I Metoda factorului integrant.

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x) \Big| \cdot \rho(x)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \left(\quad \right)' = \rho(x)\cdot Q(x).$$

$$\boxed{\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}}$$

$$\left(e^{\int P(x)dx}\right)' = e^{\int P(x)dx} \cdot \left(\int P(x)dx\right)' =$$

$$= e^{\int P(x)dx} \cdot P(x)$$

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x) \Big| \cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$e^{\int P(x)dx}\cdot y' + P(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot y = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\int P(x)dx}\cdot y\right)' = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$e^{\int P(x)dx}\cdot y = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\,dx + c.$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} + c\right)}$$

II Tehnica operatorilor liniari

$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$

$y' + P(x)\cdot y = 0$ ec. liniară omogenă $\Leftrightarrow Ly = 0$

$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$ ec. liniară neomogenă $\Leftrightarrow Ly = Q$

$L : C^1(I) \to C(I)$

$y \mapsto Ly = y' + P(x)\cdot y$ L op. liniar.

$\left(L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L y_1 + \beta L y_2\right)$

$Ly = Q \Rightarrow S' = \ker L + \{y_p\}$

y_p – o sol. partic. a ec. $Ly = Q$.

Sol. gen. $\boxed{y = y_0 + y_p}$ unde

y_0 – sol. gen. a ec. liniare omogene

y_p – o sol. particulară a ecuației liniare neomogene.

ec. liniară omogenă:

$y' + P(x) \cdot y = 0 \Rightarrow y' = -P(x) \cdot y$. ec. cu var. sep.

$y \equiv 0$ sol. sing.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -P(x) \cdot dx$

$\ln y = \int -P(x)\,dx + \ln c.$

$y = c \cdot e^{-\int P(x)dx}$

$\boxed{y_0(x) = c \cdot e^{-\int P(x)dx}, c \in \mathbb{R}}$ sol. gen. a ec. lin. omog.

$y_p = ?$ pt determinarea lui y_p se aplică metoda variației constantei (met. Lagrange).

$\Rightarrow$ căutăm $y_p(x) = \underline{c(x)} \cdot e^{-\int P(x)\,dx}$

$$y_p' + P(x) \cdot y_p = Q(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + c(x) \cdot \left(e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + \cancel{c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x))} + \cancel{P(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}} = Q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow c'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow c(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\,dx$$

$$\Rightarrow y_p(x) = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\,dx\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

sol. gen: $y = y_0 + y_p \Rightarrow \boxed{y(x) = c \cdot e^{-\int P(x)dx} + \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}}$

4) Ecuații de tip Bernoulli

forma generală:

$$(5)\quad \boxed{y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^{\alpha}}\ ,\ \alpha \neq \{0, 1\}$$

$\alpha = 0 \to$ ec. liniară neomogenă

$\alpha = 1 \to$ ec. liniară omogenă

subst: $z = y^{1-\alpha} \to \boxed{y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

$$y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot z'(x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot z(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cdot z'(x).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cdot z' + P(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} = Q(x)\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \ \Big|\cdot (1-\alpha)\cdot z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow z' + (1-\alpha)\cdot P(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-\alpha)\cdot Q(x).$$

$$\Rightarrow \boxed{z' + (1-\alpha)\cdot P(x)\cdot z = (1-\alpha)\cdot Q(x)}$$ ec. liniară neomogenă

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow z(x) = z_0(x) + z_p(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(x) = \left(z_0(x) + z_p(x)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

5) Ecuații cu diferențială totală exactă

Forma generală:

(6) $g(x,y) + h(x,y) \cdot y' = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow g(x,y) + h(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Big| \cdot dx$$

(6') $\boxed{g(x,y) \cdot dx + h(x,y) \cdot dy = 0}$

$$u = u(x,y) \Rightarrow du = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}_{g(x,y)} \cdot dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}_{h(x,y)} \cdot dy.$$

Spunem că ecuația (6') este o ecuație cu diferențială totală exactă dacă $\exists u = u(x,y)$ a.î.

$$du = g(x,y)\cdot dx + h(x,y)\cdot dy$$

$$(6') \Leftrightarrow du = 0 \Leftrightarrow \boxed{u(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}}$$

sol. gen. a ec. (6) în formă implicită.

condiția de diferențială totală exactă:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}}$$

(6) este cu dif. totală exactă $\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}}$

$u(x,y)$ se det. din:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = h(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x,y) \Rightarrow \boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} g(s,y)\,ds + c(y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{\partial g}{\partial y}(s,y)\,ds + c'(y) = h(x,y)$$

$$x = x_0 \Rightarrow c'(y) = h(x_0,y)$$

$$c(y) = \int_{y_0}^{y} h(x_0,t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} g(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} h(x_0,t)\,dt}$$

sau

$$\boxed{u(x,y) = \int_{y_0}^{y} h(x,t)\,dt + \int_{x_0}^{x} g(s,y_0)\,ds}$$

Nu întotdeauna expresia

$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy$ provine din diferențiala unei funcții $u=u(x,y)$

Metoda factorului integrant:

spunem că $\rho=\rho(x,y)$ este factor integrant pt ecuația

(6') $g\cdot dx + h\cdot dy = 0 \Longleftrightarrow \rho\cdot g\cdot dx + \rho\cdot h\cdot dy = 0$ este o dif. totală exactă $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial y}(\rho\cdot g) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho\cdot h).}$$