MODEL

de test final la Algebră Liniară

1. Să se defineasca urmatoarele noţiuni: relaţie de ordine, funcţie inversabilă, subinel, baza a unui spaţiu vectoarial, aplicaţie liniară.
b) Să se dea câte un exemplu de relaţie de ordine pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe, funcţie inversabilă de la $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ la A, subinel netrivial al inelului $\mathbb{Z}$, bază a spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^2$, aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^4$.
c) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ o aplicaţie liniară şi $\{x, y\} \subseteq \mathbb{R}^2$ o bază în $\mathrm{Ker}(f)$. Dacă $z \in \mathbb{R}^3$ este ales astfel încât $\{x, y, z\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$ să se arate că $\{f(z)\}$ este o bază în $\mathrm{Im}(f)$.
2. Se consideră funcţiile: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ 3x - 2, & x < 2 \end{cases} \text{ şi } g(x) = x^2 - 6x + 5.$$

a) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea acestor funcţii.
b) Dacă există să se determine inversele acestor funcţii.
c) Dacă sunt definite să se calculeze compunerile $f \circ g$ şi $g \circ f$.
d) Să se găsească două funcţii h_1, h_2 astfel încât $g \circ h_1$ şi $g \circ h_2$ să fie definite, $g \circ h_1 = g \circ h_2$, dar $h_1 \neq h_2$.

3. Fie $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
a) Să se arate că G este un subgrup al grupului $\mathbb{C}^*$.
b) Să se arată că $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ este un morfism surjectiv de grupuri şi că relaţia $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \sim)$ dată prin $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ este o relaţie de echivalenţă.
c) Să se găsească un exemplu de subgrup H al lui $\mathbb{C}^*$ astfel cu proprietatea că $G \cup H$ nu este subgrup al lui $\mathbb{C}^*$.

4. Se consideră $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_3 = 2x_2 = x_1\}$ şi $T = \{(t, -t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
a) Să se arate că S şi T sunt subspaţii în $\mathbb{R}^3$.
b) Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru S, T, $S + T$ şi $S \cap T$.
c) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi V_1, V_2 subspaţii ale lui V care verifică egalitatea $\dim_K(V1 + V2) = \dim_K(V_1 \cap V_2) + 1$. Să se arate că $V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.

5. Se dă aplicaţia liniară $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ definită pe baza canonică $f(e_1) = (1, 2, 3, 4)$, $f(e_2) = (4, 3, 2, 1)$, $f(e_3) = (-2, 1, 4, 1)$. Să se determine:
a) $f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$.
b) Matricea lui f în perechea de baze canonice.
c) Matricea aplicaţiei f în perechea de baze (b, c) unde $b = [e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]^t$ şi $c = [c_1, c_2, c_3, c_4]^t$, unde $c_1 = (1, 1, 1, 1), c_2 = (0, 1, 1, 1), c_3 = (0, 0, 1, 1), c_4 = (0, 0, 0, 1)$. (se va arăta şi că b şi c sunt baze în $\mathbb{R}^3$, respectiv R^4).
d) Câte o baza şi dimensiunea pentru $\mathrm{Ker}(f)$ şi $\mathrm{Im}(f)$.