Temă

Problema 9.16: Să se determine planele care conțin dreapta:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$$

și sunt tangente la hiperboloidul cu două pânze: $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$.

„Ecuația generală" a unui hiperboloid cu două pânze:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Se obține astfel $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{2}$, $c^2 = 1$.

Fie un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al hiperboloidului. Ecuația planului tangent în M_0 la hiperboloid este:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - \frac{z z_0}{c^2} = -1 \iff x \cdot x_0 + 2 y \cdot y_0 - z \cdot z_0 = -1$$

Dar știm că dreapta $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$ este inclusă în plan.

Scriem ec. parametrice ale dreptei:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Înlocuim în ec. planului și obținem:

$$(2x_0 - 2y_0)t - x_0 + 1 = 0$$

Pentru ca dreapta să fie inclusă în plan trebuie ca:

$$\left.\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 = 0 \\ -x_0 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{x_0 = 1} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{y_0 = 1}$$

Înlocuim în ecuația hiperboloidului și obținem:

$$1^2 + 2 \cdot 1^2 - z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z_0 = \pm 2$$

Deci planele sunt: $x + 2y + 2z + 1 = 0$ și

$$x + 2y - 2z + 1 = 0$$