CURS 3

Ecuații diferențiale de ordinul 2 rezolvabile

$$y'' = f(x, y, y') \qquad y = y(x)$$

1) Ecuații de forma $y'' = f(x)$.

$$y'' = f(x) \Rightarrow (y')' = f(x) \Rightarrow y' = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = F(x) + c_1 \Rightarrow y = \int (F(x) + c_1)\,dx + c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \int F(x)\,dx + c_1 x + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad \text{sol. gen.}$$

2) Ecuații de forma $y'' = f(x, y')$

subst $y' = z$ $\qquad y'(x) = z(x) \Rightarrow y''(x) = z'(x)$

$\Rightarrow \boxed{z' = f(x, z)}$

dacă ecuația de ordinul 1, $z' = f(x, z)$, este rezolvabilă și soluția este obținută în formă explicită, adică

$$z(x) = \varphi(x, c_1)$$

atunci $y' = z \Rightarrow y' = \varphi(x, c_1)$

$$\boxed{y(x) = \int \varphi(x, c_1)\,dx + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

3) Ecuații liniare de ordinul 2

$$\boxed{y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = f(x)}$$

a, b fct. continue.

$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = f$ ec. liniară neomogenă

$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$ ec. liniară omogenă.

I. Cazul omogen

$$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$$

$$L : C^2[\alpha, \beta] \to C[\alpha, \beta]$$

$$Ly(x) = y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y$$

L op. liniar $\Leftrightarrow L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L(y_1) + \lambda_2 L(y_2)$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\forall y_1, y_2 \in C^2[\alpha, \beta]$.

S_0 – mulțimea soluțiilor ecuației liniare omogene

$$S_0 = \ker L = \{ y \in C^2[\alpha,\beta] \mid Ly = 0 \}$$

S – mulțimea soluțiilor ecuației liniare neomogene.

$$S = \{ y \in C^2[\alpha,\beta] \mid Ly = f \}.$$

<u>Teorema 1</u>. (T ∃! a soluției probl. Cauchy atașate ecuației lin.).

Problema Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = f(x) \\ y(x_0) = r_1 \\ y'(x_0) = r_2 \end{cases} , x_0 \in [\alpha,\beta]$$

are o unică soluție $y(\cdot\, ; x_0, f, r)$ pt $\forall\, r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 2 Mulțimea soluțiilor ecuației liniare omogene, S_0, este un subspațiu liniar al sp. liniar $C^2[\alpha, \beta]$ cu $\dim S_0 = 2$.

Dem. S_0 subspațiu liniar al sp. $C^2[\alpha, \beta] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_1, y_2 \in S_0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ atunci $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in S_0$

$\dim S_0 \stackrel{?}{=} 2$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \to S_0$ izomorfism de sp. liniare

$r \longmapsto y(\cdot; \alpha, 0, r)$ sol. probl. Cauchy

$r = (r_1, r_2)$

$$\begin{cases} y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 \\ y(\alpha) = r_1 \\ y'(\alpha) = r_2 \end{cases}$$

T1 $\Rightarrow \varphi$ bijecție

φ izomorfism:
$$\varphi(r^1 + r^2) = \varphi(r^1) + \varphi(r^2), \quad \forall r^1, r^2 \in \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(\lambda r) = \lambda \cdot \varphi(r), \quad \forall r \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\varphi(r^1+r^2)$: sol. PC.

$r^1=(r^1_1, r^1_2)$

$r^2=(r^2_1, r^2_2)$

$$(1)\begin{cases} Ly=0 \\ y(\alpha)=r^1_1+r^2_1 \\ y'(\alpha)=r^1_2+r^2_2 \end{cases} \rightarrow y(\cdot;\alpha,0,r^1+r^2)$$

$\varphi(r^1)$: sol. PC

$$(2)\begin{cases} Ly=0 \\ y(\alpha)=r^1_1 \\ y'(\alpha)=r^1_2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$y(\cdot;\alpha,0,r^1)$$

$\varphi(r^2)$: sol. PC

$$(3)\begin{cases} Ly=0 \\ y(\alpha)=r^2_1 \\ y'(\alpha)=r^2_2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$y(\cdot;\alpha,0,r^2)$$

$\Rightarrow$ $y(\cdot;\alpha,0,r^1)+y(\cdot;\alpha,0,r^2)$ este o sol. a ec $Ly=0$

a satisf. cond. inițiale:

$$y(\alpha)=r^1_1+r^2_1$$

$$y'(\alpha)=r^1_2+r^2_2$$

$\Rightarrow$ este sol. a probl. Cauchy (1) $\underset{T1}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ $y(\cdot;\alpha,0,r^1+r^2)=y(\cdot;\alpha,0,r^1)+y(\cdot;\alpha,0,r^2)$

similar se arată că $\varphi(\lambda x) = \lambda \cdot \varphi(x)$.

$\dim S_0 = 2 \iff \exists \{y_1, y_2\}$ bază în $S_0 \iff$

$\iff$ pt $\forall y_0 \in S_0$ $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$

soluția generală a ecuației liniare omogene:

$$\boxed{y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \;,\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

unde $\{y_1, y_2\}$ bază în S_0 (sistem fundam. de soluții)

$\{y_1, y_2\}$ bază în $S_0 \iff \{y_1, y_2\} \subset S_0$ și $\{y_1, y_2\}$ liniar indep.

$y_1, y_2 \in S_0$ sunt liniar dep. $\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ a.î. $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$

$y_1, y_2 \in S_0$ sunt liniar indep $\iff \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$ wronskianul (determinantul lui Wronski).

<u>Teorema 3</u>

a) dacă $y_1, y_2 \in C^1[\alpha, \beta]$ sunt liniar dependente $\Rightarrow$

$\Rightarrow W(x; y_1, y_2) \equiv 0$ pe $[\alpha, \beta]$.

b) dacă $y_1, y_2 \in S_0$ sunt liniar independente $\Rightarrow$

$\Rightarrow W(x; y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

În S_0 avem următ. posibilități:

- $y_1, y_2 \in S_0$ sunt l.d. $\Rightarrow W(x; y_1, y_2) = 0 \;\; \forall x \in [\alpha, \beta]$
- $y_1, y_2 \in S_0$ sunt l.i. $\Rightarrow W(x; y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$

__Teoremă__ (criteriul Wronskianului)

U.a.s.e:

(i) $\{y_1, y_2\}$ sist. fundam. de sol.

(ii) $W(x, y_1, y_2) \neq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

(iii) $\exists\ x_0 \in [\alpha, \beta]$ ai $W(x_0; y_1, y_2) \neq 0$.

__Obs__. În cazul general al ecuațiilor liniare cu coef. neconstanți nu există o metodă generală de constr. a sist. fundam. de sol.

Condiția minimală de rezolvabilitate a unei ec. liniare de ord. 2 omogene este det. unei soluții

$$y_1 \in S_0 \Rightarrow \text{subst } y = y_1 \cdot z \Rightarrow \dots \Rightarrow z'' + P(x) \cdot z' = 0$$

$$z' = u \Rightarrow u' + P(x) \cdot u = 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow u(x) = \varphi(x) \cdot c_1$$

$$z' = \varphi(x) \cdot c_1 \rightarrow z = c_1 \int \varphi(x) dx + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cdot y_1 \cdot \int \varphi_2(x) dx + c_2 y_1$$

II Cazul neomogen

$$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = f \iff Ly = f.$$

$S = \ker L + \{y_p\} = S_0 + \{y_p\}$

y_p este sol. partic a ec. $Ly = f$.

sol. gen:

$y = y_0 + y_p$ unde

y_0: sol. gen. a ec. lin. omogene

y_p: o sol. partic. a ec. lin. neomogene.

Dacă $\{y_1, y_2\}$ s.f.s. $\Rightarrow y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

și y_p se poate determina prin met. variației constantelor.

adică se caută $y_p = c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x)$.

$$y_p' = \underbrace{c_1'(x)\cdot y_1} + c_1\cdot y_1' + \underbrace{c_2' y_2} + c_2\cdot y_2'$$

impunem cond.: $\boxed{c_1'\cdot y_1 + c_2'\cdot y_2 = 0}$

$$\Rightarrow y_p' = c_1\cdot y_1' + c_2\cdot y_2' \Rightarrow$$

$$y_p'' = c_1' \cdot y_1' + c_1 \cdot y_1'' + c_2' \cdot y_2' + c_2 \cdot y_2''$$

$$c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 \cdot y_2'' + a(x)\left(c_1 y_1' + c_2 y_2'\right) +$$

$$+ b(x)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) = f.$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 \underbrace{\left(y_1'' + a \cdot y_1' + b \cdot y_1\right)}_{Ly_1 = 0} + c_2 \underbrace{\left(y_2'' + a \cdot y_2' + b \cdot y\right)}_{Ly_2 = 0} = f$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1' y_1' + c_2' y_2' = f.}$$

sist:
$$\begin{cases} c_1' \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f. \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} c_1' = \dots \\ c_2' = \dots \end{cases} \overset{\int}{\Rightarrow} \begin{cases} c_1 = \dots \\ c_2 = \dots \end{cases}$$

necunoscute c_1', c_2'

$$\Rightarrow y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x).$$

4) Ecuații liniare cu coef. constanți

$a(x) \equiv a$, $b(x) \equiv b$.

$$y'' + ay' + by = f, \quad \underline{\underline{a, b \in \mathbb{R}}}$$

I <u>Cazul omogen</u>

$$y'' + ay' + by = 0$$

se caută sol. $y(x) = e^{rx}$ $\Rightarrow$ $y' = re^{rx}$

$y'' = r^2 e^{rx}$

$$\Rightarrow r^2 e^{rx} + a \cdot r \cdot e^{rx} + b \cdot e^{rx} = 0 \quad |: e^{rx}$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 + ar + b = 0}$$ ecuație caracteristică

1. $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y_1(x) = e^{r_1 x} \\ y_2(x) = e^{r_2 x} \end{array} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

2. $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = e^{rx}$$

<u>Obs</u>: dacă r este răd. dublă a ec. caract $\Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = x \cdot e^{rx}$ este sol. a ec. liniare omog.

$$\underline{y_1(x) = e^{rx}}, \ \underline{y_2(x) = x \cdot e^{rx}}$$

$$\boxed{y_0(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

3. $\Delta < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$

<u>Obs</u>. $y(x) = u(x) + i v(x) \quad y: I \to \mathbb{C}$

y este sol. a ec. $Ly = 0 \Leftrightarrow u, v$ sunt sol. ale ec. $Ly = 0$

$$y(x) = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cos\beta x + i e^{\alpha x} \sin\beta x$$

$$\boxed{e^{u + iv} = e^{u}(\cos v + i \sin v)}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = e^{\alpha x} \cos\beta x, \ y_2(x) = e^{\alpha x} \sin\beta x$$

$$\boxed{y_0 = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

<u>II Cazul neomogen.</u>

$$y'' + a\cdot y' + b\cdot y = f \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

sol. gen: $y = y_0 + y_p$

y_0 sol. gen. a ec. $Ly = 0$

y_p o sol. partic. a ec. $Ly = f$

y_p se poate det. prin metoda variației constantelor sau în cazuri speciale pt f se poate aplica metoda coef. nedeterminați.

Cazuri speciale pt f.

1. Dacă $f(x) = P_m(x)$ atunci

   a) dacă $b \neq 0 \Rightarrow$ $y_p(x) = Q_m(x)$

   b) dacă $b = 0$ și $a \neq 0$ $\rightarrow$ $y_p(x) = x \cdot Q_m(x)$

2. Dacă $f(x) = e^{rx} \cdot P_m(x)$ atunci:

   a) dacă r nu este sol. a ec. caract $\Rightarrow$

   $$\Rightarrow y_p(x) = e^{rx} \cdot Q_m(x)$$

   b) dacă r este răd. a ec. caract de ordin μ ($\mu = 1$ sau $\mu = 2$)

   $$\Rightarrow y_p(x) = x^{\mu} \cdot e^{rx} Q_m(x)$$

3. Dacă $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x$ sau $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \sin \beta x$

   a) dacă $\alpha + i\beta$ nu este răd. a ec. caract. $\Rightarrow$

   $$\Rightarrow y_p(x) = e^{\alpha x} \left(Q_{1,m}(x) \cdot \cos \beta x + Q_{2,m}(x) \sin \beta x \right)$$

b) $\alpha+i\beta$ este răd. a ec. caract $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_p(x) = x \cdot e^{\alpha x}\left(Q_{1,m}(x)\cos\beta x + Q_{2,m}(x)\sin\beta x\right).$$