Sava Tudor
grupa 216

Seminarul 11

Problema 4.

Triunghiul ABC are vârfurile $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(2, 3)$. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de unghi $30°$ în jurul punctului $Q(2, 2)$, urmată de o translație de vector $(1, 2)$. Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Soluție:

Matricea de rotație în forma generală este:

$$Rot(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta) + q_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta + q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

În cazul nostru avem:

$$Rot(2, 2, 30°) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R,$$

și matricea vârfurilor triunghiului $[ABC] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

După rotație avem: $[A'B'C'] = R \cdot [ABC] =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5-\sqrt{3}}{2} & \frac{2\sqrt{3}+5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}+3}{2} & \frac{6-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+4}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Așadar punctele triunghiului după ~~translatie~~ rotație sunt $A'\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{2\sqrt{3}+5}{2}, \frac{6-\sqrt{3}}{2}\right)$, $C'\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right)$

În final, după translație, punctele triunghiului sunt $A'\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}, \frac{7-\sqrt{3}}{2}\right)$, $B'\left(\frac{2\sqrt{3}+7}{2}, \frac{10-\sqrt{3}}{2}\right)$ și $C'\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}+8}{2}\right)$.

Dacă aplicăm transformările în ordine inversă, prima dată vom avea punctele triunghiului după translație: $A'(2, 3)$, $B'(5, 3)$, $C'(3, 5)$.

Ca și în cazul precedent, avem matricea de rotație:

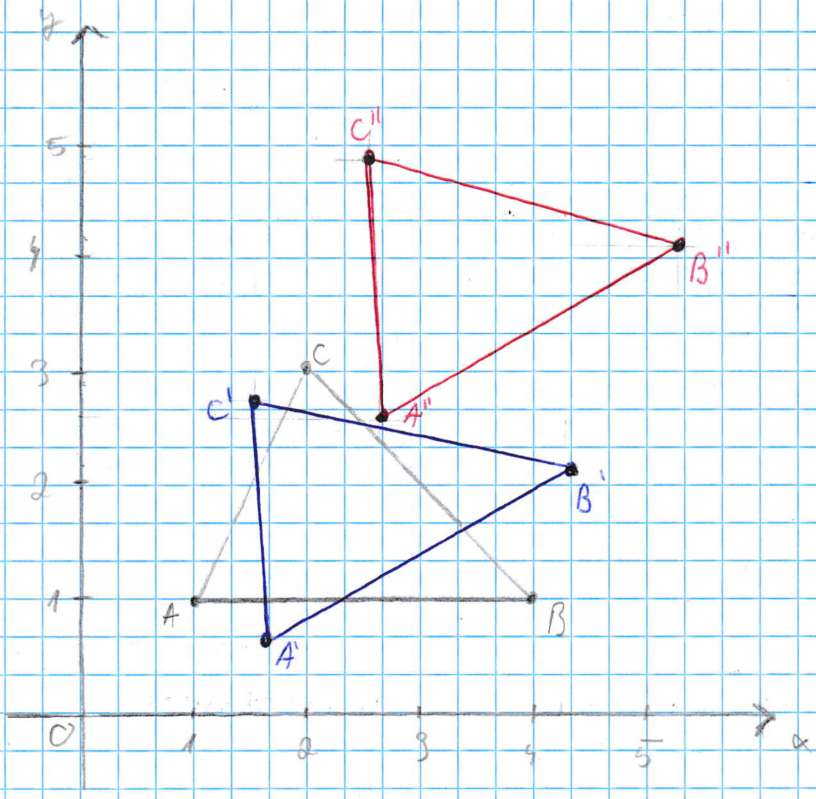
$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dar în cazul acesta matricea triunghiului este $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Aplicând rotația, obținem matricea

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}+3}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+4}{2} & \frac{\sqrt{3}+7}{2} & \frac{3\sqrt{3}+5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

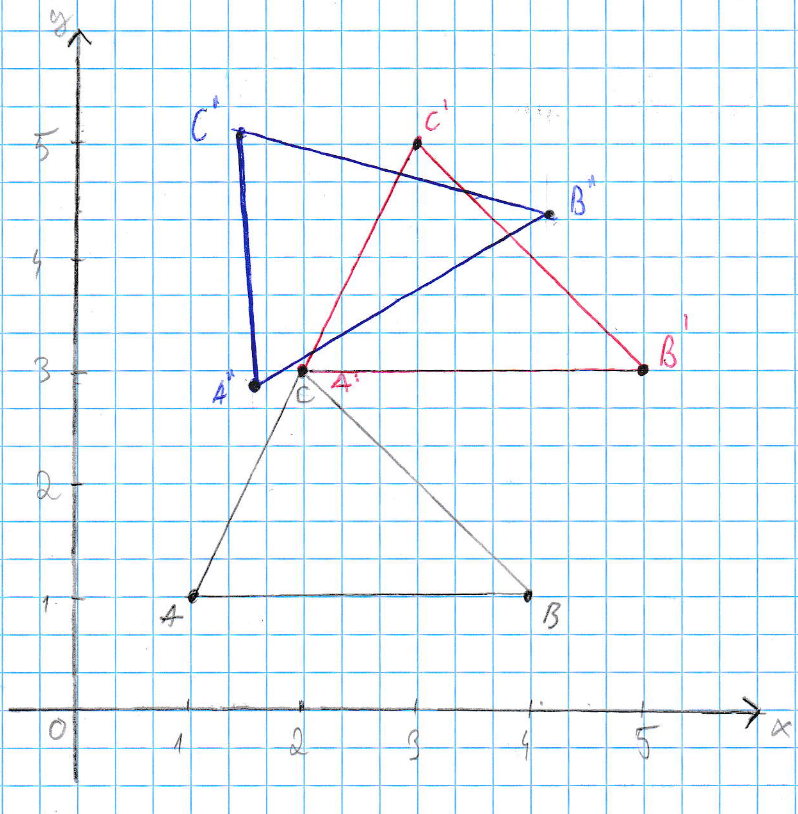
În concluzie, punctele triunghiului după transformări vor fi $A'\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+4}{2}\right)$, $B\left(\frac{3\sqrt{3}+3}{2}, \frac{\sqrt{3}+7}{2}\right)$, $C'\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{3\sqrt{3}+5}{2}\right)$.



• triunghiul inițial

• după rotație

• după translație



• triunghiul inițial

• după translație

• după rotație