

Conice pe ecuația canonică

Paul A. Blaga

Universitatea "Babeș-Bolyai"

30 martie 2021

Elipsa

Definiție și ecuație canonică

Definiție

Se numește *elipsă* locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor de la ele până la două puncte fixe F_1 și F_2 , numite *focare* este constantă, egală cu $2a$, presupunându-se că distanța dintre cele două focare este $2c$, unde c este un număr real pozitiv sau nul, verificând inegalitatea $c < a$.

- Dacă focarele sunt confundate, elipsa este un cerc.
- Pentru a deduce ecuația elipsei, construim un sistem de coordonate ortonormat în plan în modul următor.
- Alegem ca origine mijlocul segmentului $F_1 F_2$ și alegem ca axă Ox dreapta $F_1 F_2$ orientată astfel încât F_2 să aibă abscisă pozitivă. Prin urmare, focarele vor avea coordonatele $F_1(-c, 0)$ și $F_2(c, 0)$.

Elipsa

Definiție și ecuație canonică

- Axa Oy se alege astfel încât să se completeze un sistem ortonormat drept (deci, în particular, ca dreaptă, această axă nu este altceva decât mediatoarea segmentului $F_1 F_2$).
- Dacă cumva elipsa este un cerc (adică $c = 0$), atunci orice sistem de coordonate drept ortonormat, cu originea în centrul cercului, va satisface necesitățile noastre.
- Fie $M(x, y)$ un punct oarecare al elipsei. Atunci avem, pe de-o parte,

$$F_1 M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad F_2 M = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (1)$$

- Pe de altă parte, din definiția elipsei, trebuie să avem

$$F_1 M + F_2 M = 2a. \quad (2)$$

Elipsa

Definiție și ecuație canonică

- Combinând aceste două ecuații, obținem:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3)$$

Aceasta este, de fapt, ecuația elipsei, întrucât punctele elipsei, și numai ele, verifică această ecuație.

Vom stabili acum o altă formă, mai atractivă, pentru ecuația (3) a elipsei.

- Trecem ultimul termen din ecuație în membrul drept și ridicăm la pătrat.
- După reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$a\sqrt{(x-x)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

- Ridicând din nou la pătrat și regroupând termenii, obținem:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Elipsa

Definiție și ecuație canonică

sau, încă,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (4)$$

- Introducem acum o nouă cantitate,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2};$$

conform ipotezelor noastre, această cantitate este reală. Avem, prin urmare,

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad (5)$$

prin urmare ecuația (4) devine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Elipsa

Definiție și ecuație canonică

- Am demonstrat până acum că fiecare punct al elipsei verifică ecuația (6).
- Vom arăta acum că și afirmația inversă este adevărată, în sensul că orice punct $M(x, y)$ ale cărui coordonate verifică ecuația (6), este un punct al elipsei, adică verifică ecuația (2).
- Din ecuația (6), obținem

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

- Utilizând această relație și egalitatea (5), obținem

Elipsa

Definiție și ecuație canonică

$$\begin{aligned} F_1 M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} + \sqrt{\left(\frac{c}{a} + a\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

- Cum, în virtutea relației (6), $|x| \leq a$ și, în plus, $c < a$, avem

$$F_1 M = a + \frac{c}{a}x. \quad (7)$$

- Exact la fel se obține

$$F_1 M = a - \frac{c}{a}x. \quad (8)$$

- Însușind ultimele două egalități, obținem egalitatea (2). Astfel, relația (6) este ecuația elipsei. Ea se numește *ecuația canonică a elipsei*.

Elipsa

Definiție și ecuație canonică

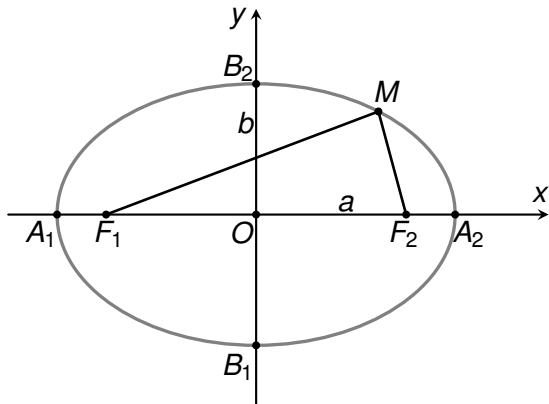


Figura: Elipsa

Elipsa

Studiul formei

Plecând de la ecuația (6), vom studia forma elipsei.

- Coordonatele punctelor de pe elipsă sunt supuse restricțiilor $|x| \leq a$ și $|y| \leq b$. Prin urmare, elipsa este mărginită de un dreptunghi de laturi $2a$ și $2b$, cu laturile paralele cu axele și cu centrul în origine.
- Mai departe, remarcăm că în ecuația (6) a elipsei apar numai puteri pare ale coordonatelor, de aceea elipsa este simetrică față de axe și, deci, și față de origine. Aceasta înseamnă că dacă punctul $M(x, y)$ aparține elipsei, atunci același lucru este valabil pentru punctele $M(-x, y)$, $M(x, -y)$ și $M(-x, -y)$.

Prin urmare, pentru a determina forma elipsei, este suficient să considerăm porțiunea ei cuprinsă în primul cadran al axelor de coordonate, iar în celelalte cadrane construcția ei se poate face prin simetrie.

Elipsa

Studiul formei

Plecând de la ecuația (6), vom studia forma elipsei. Pentru primul cadran, din ecuația (6) se obține:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (9)$$

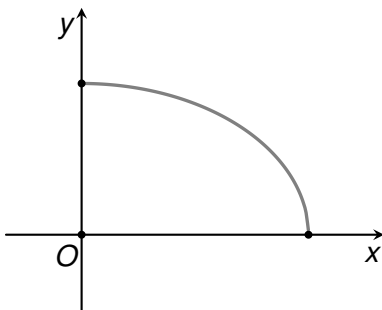


Figura: Porțiunea din elipsă cuprinsă în cadranul I

Elipsa

Studiul formei

Plecând de la ecuația (6), vom studia forma elipsei. Prin urmare, avem de studiat graficul funcției

$$f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Este cât se poate de clar că nu avem de studiat limite la $\pm\infty$ sau asimptote, deci începem prin a calcula derivatele. Avem:

$$f'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

În ceea ce privește derivata a doua, se obține:

$$f''(x) = \frac{ab}{(x - a)(x + a)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Elipsa

Studiul formei

Plecând de la ecuația (6), vom studia forma elipsei.

- Se observă imediat că ambele derivate sunt negative, deci funcția este strict descrescătoare și concavă pe întreg domeniul de definiție, ceea ce înseamnă că graficul său este cel din figura 2.
- Axele de simetrie ale elipsei (axele Ox și Oy), se numesc, pur și simplu, *axe*, iar centrul de simetrie (originea coordonatelor), se numește *centrul elipsei*.
- Punctele A_1, A_2, B_1 și B_2 , în care axele se intersectează cu elipsa, se numesc *vârfuri* ale elipsei.
- Termenul de *semiaxe* se folosește atât pentru segmentele OA_1, OA_2, OB_1 și OB_2 , cât și pentru lungimile lor, a și b .
- În ipotezele noastre, când focarele elipsei sunt pe axa Ox , din relația (5) rezultă că $a > b$. În acest caz, a se numește *semiaxă mare*, iar b – *semiaxă mică*.

Elipsa

Studiul formei

- Totuși, ecuația (6) are sens și în cazul în care $a < b$; aceasta va fi, însă, ecuația unei elipse care are focarele pe axa Oy , în loc de Ox , iar semi-axa mare va fi egală cu b .
- Un al treilea caz posibil este cel în care $a = b$. În acest caz, ecuația (6) se transformă în

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (10)$$

- În cele ce urmează vom privi cercul ca un caz particular de elipsă, în care cele două semi-axe sunt egale, iar focarele coincid cu centrul cercului.

Elipsa

Excentricitatea

Se numește *excentricitate* a elipsei numărul real

$$\varepsilon = c/a. \quad (11)$$

Întrucât, din ipoteza făcută inițial, $c < a$, rezultă că $\varepsilon < 1$. În cazul cercului, focarele coincid, de aceea $c = 0$, iar excentricitatea este $\varepsilon = 0$.

Rescriem egalitatea (11) sub forma

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}.$$

De aici se observă că excentricitatea determină forma elipsei: cu cât ε este mai aproape de zero, cu atât elipsa este mai apropiată de un cerc; dacă excentricitatea elipsei crește, elipsa devine tot mai turtită.

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Vom studia numărul de puncte de intersecție pe care îl poate avea o dreaptă cu o elipsă. Vom presupune, mai întâi, că dreapta nu este paralelă cu axa Oy . Atunci ecuația sa se poate scrie cu ajutorul pantei:

$$y = kx + m. \quad (12)$$

Pentru a determina punctele de intersecție ale acestei drepte cu elipsa (6), înlocuim expresia lui y din formula (12) în ecuația (6).

Obținem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + m)^2}{b^2} = 1$$

sau

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0.$$

Această ecuație ne dă abscisele punctelor de intersecție. Întrucât este o ecuație de gradul doi, vor fi întotdeauna două puncte de intersecție (distincte, confundate sau imaginare).

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Discriminantul ecuației este:

$$\Delta = 4a^4k^2m^2 - 4a^2(m^2 - b^2)(a^2k^2 + b^2) = 4a^4k^2m^2 - 4a^4k^2m^2 - 4a^2m^2b^2 + 4a^2b^2k^2 + 4a^2b^4 = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - m^2).$$

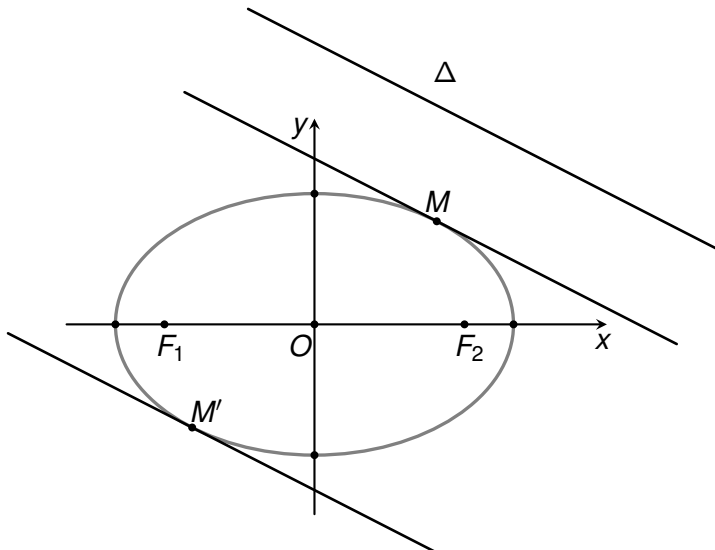
Semnul discriminantului este dat de factorul $s = a^2k^2 + b^2 - m^2$.

Putem avea, deci, următoarele situații:

- 1 dacă $-\sqrt{a^2k^2 + b^2} < m < \sqrt{a^2k^2 + b^2}$, atunci $\Delta > 0$, iar dreapta și elipsa au două puncte comune;
- 2 dacă $m = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$, atunci $\Delta = 0$, adică dreapta are un singur punct comun cu elipsa (dreapta este tangentă elipsei);
- 3 dacă $m \in (-\infty, -\sqrt{a^2k^2 + b^2}) \cup (\sqrt{a^2k^2 + b^2}, \infty)$, atunci $\Delta < 0$, iar dreapta și elipsa nu au puncte comune.

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă



Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Prin urmare, pentru orice pantă k există două tangente la elipsă, având această pantă, anume

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \quad (13)$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy , atunci ecuația sa este de forma $x = h$. Dacă înlocuim în ecuația elipsei, obținem

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de unde

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2} \right).$$

De aici se observă imediat că dreapta $x = h$ intersectează elipsa în două puncte distincte dacă $h \in (-a, a)$, este tangentă elipsei dacă $h = \pm a$ și nu intersectează elipsa dacă $h \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Problema tangentei la o elipsă se poate aborda și într-un alt mod. Anume, presupunem că vrem să determinăm ecuația tangentei într-un punct dat (x_0, y_0) al elipsei. Pentru a fixa ideile, presupunem că x_0 și y_0 sunt ambele pozitive. Atunci ele se află pe o ramură a elipsei care poate fi descrisă prin ecuația

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pentru a scrie ecuația tangentei, avem nevoie, mai întâi, de derivata lui y în x_0 :

$$y'(x_0) = b \frac{-\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0},$$

unde am ținut cont de faptul că punctul (x_0, y_0) verifică ecuația elipsei.

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Prin urmare, după cum se știe din analiză, ecuația tangentei este

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} x + \frac{b^2}{y_0} \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Dacă înmulțim această ecuație cu $\frac{y_0}{b^2}$ obținem

$$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

sau, folosind din nou ecuația elipsei (pentru (x_0, y_0)),

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

adică ecuația tangentei într-un punct al unei elipse se poate scrie prin dedublare. Același rezultat se obține, fără dificultate, și dacă punctul de pe elipsă se află pe una dintre celelalte ramuri.

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Vom descrie, în cele ce urmează, o altă metodă de a obține ecuația tangentei într-un punct al unei elipse. Fie, prin urmare, $M_0(x_0, y_0)$ un punct al elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuațiile parametrice ale unei drepte care trece prin M_0 vor fi:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuația elipsei, obținem:

$$b^2(x_0^2 + 2tlx_0 + l^2t^2) + a^2(y_0^2 + 2tmy_0 + m^2t^2) - a^2b^2 = 0$$

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

sau, grupând după puterile lui t ,

$$t^2 (b^2 l^2 + a^2 m^2) + 2t(a^2 l x_0 + b^2 m y_0) + b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Cum punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber al ecuației trebuie să fie egal cu zero, deci ecuația se reduce la

$$t^2 (b^2 l^2 + a^2 m^2) + 2t(b^2 l x_0 + a^2 m y_0) = 0.$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă elipsei, este necesar ca ecuația de mai sus să aibă rădăcină dublă. Aceasta se poate întâmpla dacă și numai dacă termenul de gradul întâi dispăre, adică dacă avem

$$b^2 l x_0 + a^2 m y_0 = 0.$$

Dacă vectorul director al dreptei este $\mathbf{v}(l, m)$, ecuația de mai sus înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(b^2 x_0, a^2 y_0)$ este perpendicular pe dreaptă, adică acest vector este vectorul perpendicular pe tangentă.

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

De aici rezultă că ecuația tangentei se poate scrie sub forma

$$b^2 x_0(x - x_0) + a^2 y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = 0.$$

Cum, din nou, punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber este $-a^2 b^2$, deci ecuația tangentei se scrie

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0$$

sau

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (14)$$

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

În fine, vom discuta cazul în care ni se cere să determinăm tangentele duse dintr-un punct la o elipsă. Plecăm, din nou, de la ecuația canonică a elipsei,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

După cum am văzut mai sus, ecuația unei tangente neverticale la această elipsă se poate scrie sub forma

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$

Cerem ca această tangentă să treacă printr-un punct $M(x_1, y_1)$. Asta înseamnă că

$$y_1 = kx_1 + \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

sau

$$(y_1 - kx_1)^2 - a^2k^2 - b^2 = 0$$

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

sau, încă,

$$k^2(x_1^2 - a^2) - 2kx_1y_1 + y_1^2 - b^2 = 0. \quad (15)$$

Discriminantul ecuației (15) este

$$\Delta = 4(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2). \quad (16)$$

Pentru a avea două tangente prin punctul M trebuie să avem $\Delta > 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0. \quad (17)$$

Aceasta înseamnă că punctul M este exterior elipsei. Pantele celor două tangente vor fi

$$k_{1,2} = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}.$$

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Pentru a avea o singură tangentă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (18)$$

De data asta, punctul trebuie să fie pe elipsă, iar panta unicei tangente va fi

$$k = \frac{-x_1 y_1}{x_1^2 - a^2}.$$

Este ușor de constatat că, în acest caz, ecuația tangentei este chiar cea care se obține prin dedublare, adică

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

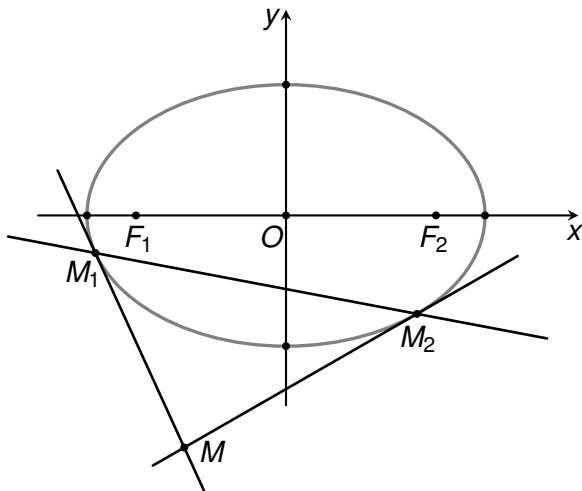
În fine, nu avem tangente dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0 \quad (19)$$

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

(punctul M este în interiorul elipsei).



Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

Examinăm acum cazul în care una dintre tangentele duse din punctul M este verticală. Este clar, atunci, că această tangentă trebuie să aibă ecuația

$$x = \pm a.$$

Așadar, vom avea $M = M(\pm a, y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuația sa trebuie să fie de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \quad (20)$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M , trebuie să avem

$$y_1 = \pm ka \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2} \quad (21)$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 \mp ka)^2 = a^2k^2 + b^2, \quad (22)$$

Elipsa

Intersecția cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă

adică

$$y_1^2 \mp 2y_1ka + a^2k^2 = a^2k^2 + b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak = y_1^2 - b^2. \quad (23)$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuația de mai sus (în k) nu are soluție, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. În caz contrar, din ecuația (23) rezultă că

$$k = \pm \frac{y_1^2 - b^2}{2ay_1}, \quad (24)$$

semnul alegându-se în funcție de vârful prin care trece tangenta verticală.

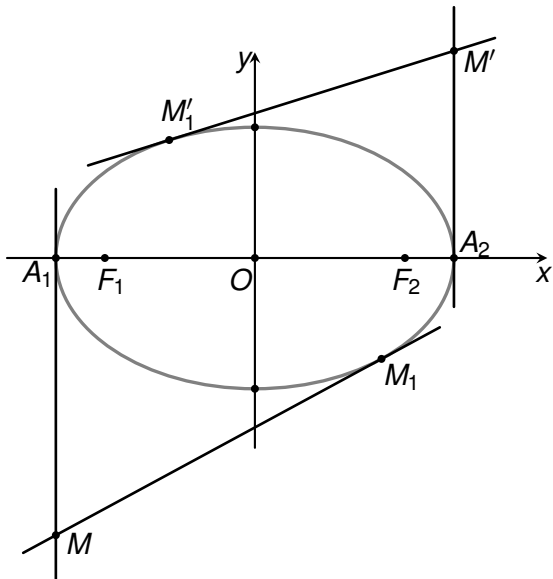


Figura: Tangente la elipsă, cu o tangentă verticală

Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice

Considerăm că se dau, în plan, două puncte F_1 și F_2 , distanța dintre care este egală cu $2c$. Mai alegem un număr real a , care verifică inegalitatea

$$0 < a < c. \quad (25)$$

Definiție

Se numește *hiperbolă* figura geometrică formată din toate punctele din plan pentru care valoarea absolută a diferenței distanțelor până la punctele fixe F_1 și F_2 este constantă, egală cu $2a$. Punctele F_1 și F_2 se numesc *focare* ale hiperbolei.

Este clar acum de ce am impus dubla inegalitate (25): dacă $a = 0$, atunci figura este neinteresantă, întrucât ea se reduce la o dreaptă (mediatoarea segmentului $F_1 F_2$), în timp ce dacă $a > c$, figura este mulțimea vidă.

Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice

Vom stabili acum ecuația hiperbolei. În acest scop, alegem un reper cartezian în care axa Ox să coincidă cu dreapta $F_1 F_2$, cu sensul de la F_1 înspre F_2 . Originea o alegem în mijlocul segmentului $F_1 F_2$. Prin urmare, coordonatele focarelor vor fi $F_1(-c, 0)$ și $F_2(c, 0)$. Dacă $M(x, y)$ este un punct oarecare al hiperbolei, atunci, în conformitate cu definiția, avem

$$|F_1 M - F_2 M| = 2a$$

sau

$$F_1 M - F_2 M = \pm 2a. \quad (26)$$

Dacă înlocuim în ecuația (26) expresiile

$$F_1 M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad F_2 M = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

obținem

Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (27)$$

Aceasta este ecuația hiperbolei. În cele ce urmează, vom obține o formă mai simplă a ei. Trecem al doilea radical în membrul drept și ridicăm ambii membrii la pătrat și obținem

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dacă ridicăm din nou la pătrat și reducem termenii asemenea, obținem

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \quad (28)$$

Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice

Introducem acum mărimea

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

În virtutea inegalității (25), ea este reală. Atunci

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad (29)$$

iar ecuația (28) capătă forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (30)$$

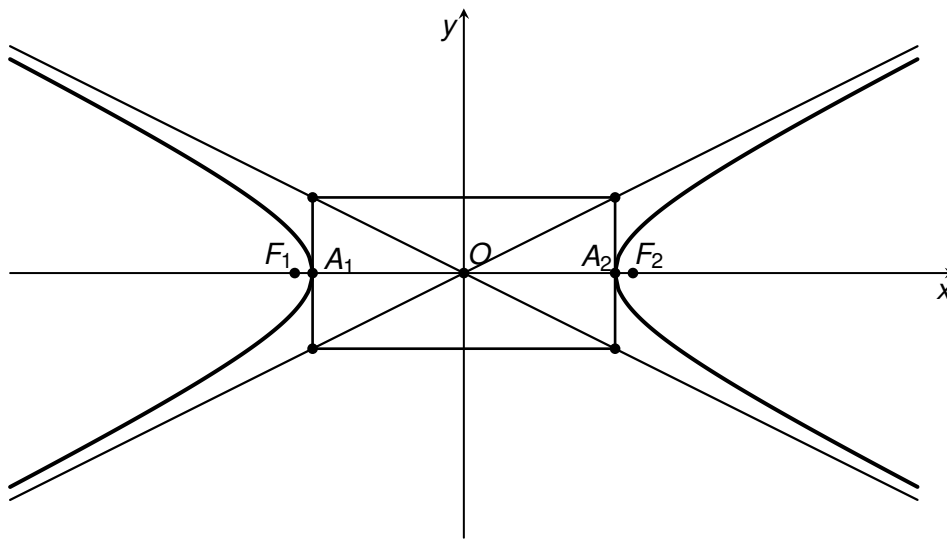


Figura: Hiperbola

Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice

Am demonstrat până acum că toate punctele hiperbolei, care verifică, deci, ecuația (27), verifică, de asemenea, ecuația (30). Vom demonstra, acum, că și afirmația inversă este adevărată. Fie, prin urmare, $M(x, y)$ un punct ce verifică ecuația (30). Atunci

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right).$$

Folosind această relație și egalitatea (29), obținem

$$\begin{aligned} F_1 M &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \left| \frac{c}{a}x + a \right|. \end{aligned} \quad (31)$$

Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice

În mod analog, se obține

$$F_2M = \left| \frac{c}{a}x - a \right|. \quad (32)$$

Cum din egalitatea (30) rezultă că $|x| \geq a$, iar, în virtutea inegalității (25), $c > a$, rezultă că pentru $x \geq a$ formulele (31) și (32) ne conduc la

$$F_1M = \frac{c}{a}x + a, \quad F_2M = \frac{c}{a}x - a. \quad (33)$$

Prin urmare,

$$F_1M - F_2M = 2a.$$

Pentru $x \leq -a$ avem

$$F_1M = -\frac{c}{a}x - a, \quad F_2M = -\frac{c}{a}x + a. \quad (34)$$

Prin urmare,

$$F_1M - F_2M = -2a.$$

Hiperbola

Definiția și deducerea formei canonice

Așadar, orice punct care verifică ecuația (30) verifică, de asemenea, ecuația (26), deci și ecuația (27). Prin urmare, ecuația (30) este echivalentă cu ecuația hiperbolei. Ea se numește *ecuația canonică a hiperbolei*.

Hiperbola

Studiul formei hiperbolei. Asimptote

Din ecuația (30) se vede imediat că $|x| \geq a$. Aceasta înseamnă că hiperbola este situată, în întregime, în afara benzii verticale delimitată de dreptele $x = -a$ și $x = a$.

Ca și în cazul elipsei, în ecuația canonică a hiperbolei intră numai puteri pare ale variabilelor x și y , ceea ce înseamnă că și hiperbola are două axe de simetrie (axele de coordonate) și un centru de simetrie (originea coordonatelor). De aceea, este suficient să studiem forma hiperbolei în primul cadran al axelor de coordonate, întrucât în celelalte trei se poate, apoi, deduce prin simetrie. În acest cadran, se obține, din ecuația (30):

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a. \quad (35)$$

Hiperbola

Studiul formei hiperbolei. Asimptote

Graficul acestei funcții, care începe din punctul $A(a, 0)$ este nemărginit la dreapta și superior. Este ușor de constatat că dreapta

$$y = \frac{b}{a}x \quad (36)$$

este asimptotă oblică la $+\infty$ a acestui grafic. Este, de asemenea, clar, din motive de simetrie, că dreptele

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

sunt, ambele, asimptote oblice la graficul hiperbolei, atât la $+\infty$, cât și la $-\infty$.

În cazul elipsei, am văzut că există un dreptunghi, cu centrul în origine și de laturi $2a$, respectiv $2b$, cu laturile paralele cu axele de coordonate, care conține întreaga elipsă și care este, de asemenea, tangent elipsei.

Hiperbola

Studiul formei hiperbolei. Asimptote

Un rol asemănător îl joacă în cazul hiperbolei același dreptunghi, atâta doar că:

- hiperbola se află în exteriorul dreptunghiului;
- doar două dintre laturile dreptunghiului sunt tangente la elipsă și
- diagonalele acestui dreptunghi (dreptele lor suport, de fapt) sunt chiar asimptotele hiperbolei.

Hiperbola este o figură alcătuită din două ramuri.

- Semnul “+” din egalitatea (26) corespunde ramurii din dreapta, în timp ce semnul “-” corespunde ramurii din stânga.
- Centrul de simetrie al hiperbolei se numește, pur și simplu, *centrul* hiperbolei.
- Axele sale de simetrie se numesc *axele hiperbolei*. Mai precis, axa care intersectează hiperbola se numește *axă reală*, în timp ce axa ce nu o intersectează se numește *axă imaginară*.

Hiperbola

Studiul formei hiperbolei. Asimptote

- Punctele A_1 și A_2 , în care axa reală intersectează hiperbola se numesc *vârfuri* ale hiperbolei.
- De asemenea, ca și în cazul elipsei, numerele a și b se numesc *semiaxe* ale hiperbolei.
- Dacă $a = b$, atunci hiperbola se numește *echilateră*.
- E ușor de constatat că în cazul unei hiperbole echilaterale asimptotele formează un unghi de 45° cu axa Ox .

Alături de hiperbola (30), se poate considera și curba de ecuație

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (37)$$

Se poate vedea cu ușurință că și această curbă este o hiperbolă, pentru care focarele sunt situate pe axa Oy . Vom spune despre cele două hiperbole (care au aceleași axe și aceleași asimptote) că sunt *conjugate*.

Hiperbola

Excentricitatea

Se numește *excentricitate* a hiperbolei numărul

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Este clar, din însăși definiția hiperbolei, că $\varepsilon > 1$. Excentricitatea determină forma dreptunghiului fundamental, deci, în ultimă instanță, forma hiperbolei. Astfel, cu cât excentricitatea este mai mare, cu atât cele două ramuri ale hiperbolei se apropie mai mult de axa Oy și, cu cât excentricitatea este mai apropiată de 1, cu atât hiperbola se apropie mai tare de axa Ox .

Hiperbola

Intersecția hiperbolei cu o dreaptă. Tangenta la o hiperbolă

Analog cu ceea ce am făcut în cazul elipsei, ne vom ocupa acum de problema intersecției dintre o hiperbolă dată de ecuația implicită (30) și o dreaptă.

Să presupunem, mai întâi, că dreapta nu este orizontală. Atunci ecuația ei se poate scrie cu ajutorul pantei, adică

$$y = kx + m. \quad (38)$$

Dacă înlocuim pe y din formula de mai sus în ecuația (30) a hiperbolei, obținem ecuația care ne dă abscisa (sau abscisele) punctului (sau punctelor) de intersecție:

$$(b^2 - a^2 k^2)x^2 - 2a^2 kmx - a^2(b^2 + m^2) = 0. \quad (39)$$

Această ecuație se numește *ecuația de intersecție*.

Hiperbola

Intersecția hiperbolei cu o dreaptă. Tangenta la o hiperbolă

Dacă $b^2 - a^2 k^2 \neq 0$, atunci ecuația (39) este de gradul doi, deci pentru a determina numărul rădăcinilor sale reale trebuie să facem apel la discriminantul ecuației. Avem

$$\Delta = -4 a^2 b^2 \left(-b^2 + a^2 k^2 - m^2 \right). \quad (40)$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă la hiperbolă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$a^2 k^2 = b^2 + m^2.$$

Este clar că, întrucât $b \neq 0$, vom avea, întotdeauna, două tangente, pentru un m dat.

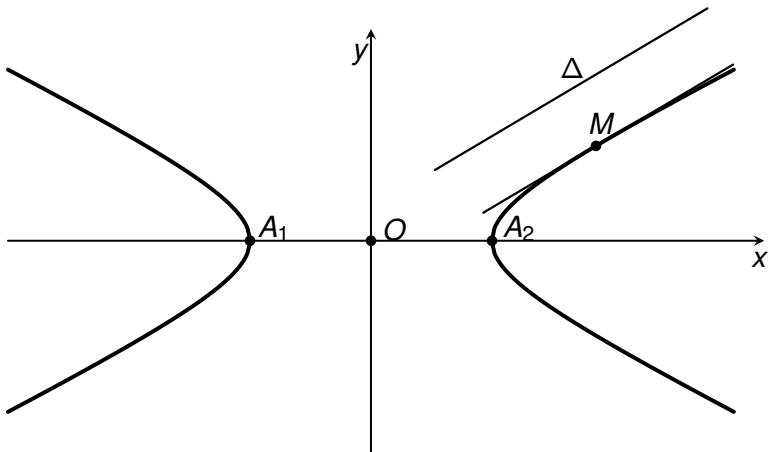


Figura: Tangenta la o hiperbolă, de direcție dată

Hiperbola

Intersecția hiperbolei cu o dreaptă. Tangenta la o hiperbolă

Dacă $\Delta > 0$, adică dacă

$$a^2 k^2 < b^2 + m^2,$$

atunci dreapta și hiperbola vor avea două puncte în comun.

Dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$a^2 k^2 > b^2 + m^2,$$

atunci dreapta și hiperbola nu vor avea puncte în comun.

Dacă, pe de altă parte, $b^2 - a^2 k^2 = 0$, atunci sunt posibile două situații:

1 $m = 0$;

2 $m \neq 0$.

Hiperbola

Intersecția hiperbolei cu o dreaptă. Tangenta la o hiperbolă

În prima situație, avem două drepte, de pante $k = \pm b/a$, care trec prin origine. Este clar că aceste două drepte nu sunt altceva decât asimptotele hiperbolei, despre care știm, deja, că nu au puncte comune cu hiperbola.

În ce-a de-a doua situație, avem de-a face cu drepte care sunt paralele cu asimptotele hiperbolei, așadar ele intersectează hiperbola exact într-un punct.

Hiperbola

Ecuția tangentei la hiperbolă prin dedublare

Utilizând exact aceeași metodă ca și în cazul elipsei, se obține

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

pentru ecuația tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ al hiperbolei.

Hiperbola

Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior

Procedăm exact ca și în cazul elipsei. Începem cu situația în care nici una dintre tangentele duse din $M(x_1, y_1)$ nu este verticală. Atunci, după cum am văzut, ecuația tangentei este de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}.$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M , trebuie să avem

$$y_1 - kx_1 = \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 - kx_1)^2 = a^2k^2 - b^2.$$

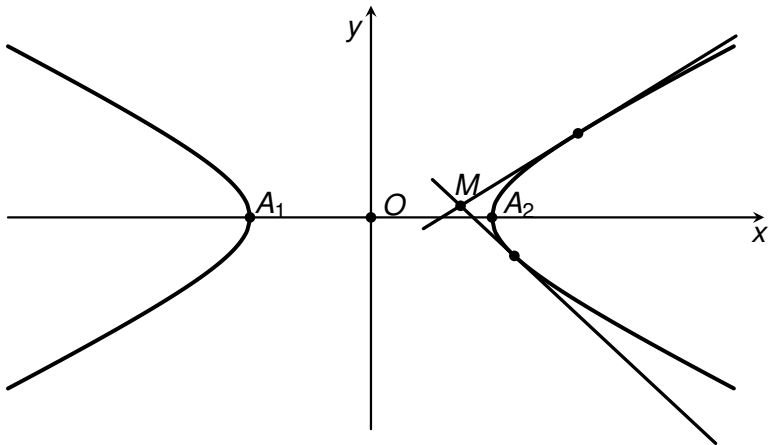


Figura: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (tangente neverticale)

Hiperbola

Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior

Se obține, astfel, ecuația

$$(x_1^2 - a^2)k^2 - 2x_1y_1k + (y_1^2 + b^2) = 0.$$

Aceasta este ecuația care ne dă pantele celor două tangente.
Discriminantul ei este:

$$\Delta = 4(a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + a^2b^2) = -4a^2b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right).$$

Se observă imediat că:

- avem două tangente dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0,$$

adică punctul este între cele două ramuri ale hiperbolei;

Hiperbola

Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior

- avem o singură tangentă dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$

adică dacă punctul este pe hiperbolă;

- nu avem tangente dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0,$$

adică dacă punctul este în interiorul uneia dintre ramurile hiperbolei.

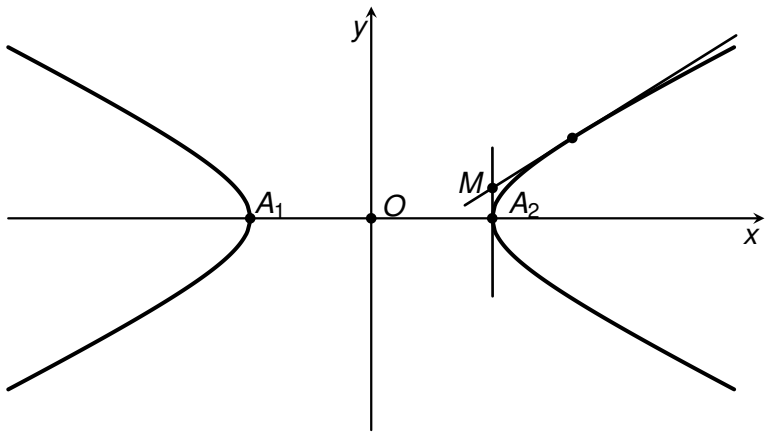


Figura: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

Hiperbola

Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior

Examinăm acum cazul în care una dintre tangente este verticală, ceea ce înseamnă că are ecuația

$$x = \pm a.$$

Așadar, vom avea $M = M(\pm a, y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuația sa trebuie să fie de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2}. \quad (41)$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M , trebuie să avem

$$y_1 = \pm ka \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2} \quad (42)$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 \mp ka)^2 = a^2 k^2 - b^2 \quad (43)$$

Hiperbola

Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior

adică

$$y_1^2 \mp 2y_1ka + a^2k^2 = a^2k^2 - b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak = y_1^2 + b^2. \quad (44)$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuația de mai sus (în k) nu are soluție, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. În caz contrar, din ecuația (23) rezultă că

$$k = \pm \frac{y_1^2 + b^2}{2ay_1}, \quad (45)$$

semnul alegându-se în funcție de vârful prin care trece tangenta verticală.

Parabola

Definiția și ecuația canonică

Definiție

Se numește *parabolă* locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de o dreaptă fixă Δ , numită *directoare* și de un punct fix F , numit *focar*.

Fie p distanța de la punctul F la dreapta Δ . Construim un sistem rectangular de coordonate în plan în modul următor. În calitate de axă Ox alegem perpendiculara coborâtă din punctul F pe dreapta Δ , cu sensul de la directoare înspre focar, în timp ce axa Oy va fi mediatoarea segmentului determinat de F și piciorul perpendicularei coborâte din F pe Δ , cu sensul ales astfel încât reperul xOy să fie drept, unde O este punctul de intersecție a celor două axe de coordonate. Aceasta înseamnă că punctul F are coordonatele $(p/2, 0)$, în timp ce ecuația dreptei Δ este $x = -p/2$.

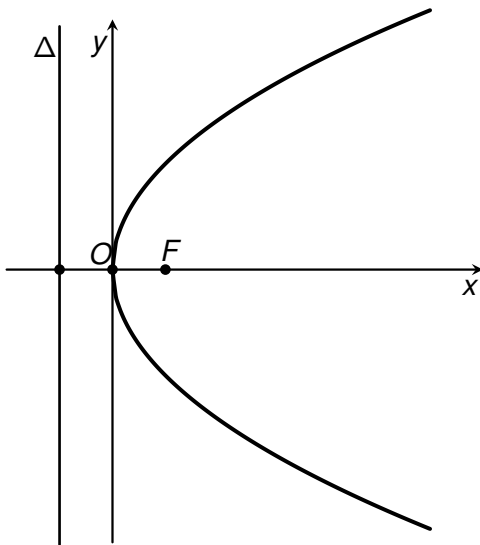


Figura: Parabola

Parabola

Definiția și ecuația canonică

Fie, acum, $M(x, y)$ un punct oarecare al parabolei. Atunci, distanța de la M la F este egală cu

$$d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

în timp ce distanța de la M la Δ este

$$d(M, \Delta) = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Așadar, ecuația parabolei este, conform definiției,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (46)$$

Este ușor de constatat că egalitatea (46) poate avea loc doar dacă

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2},$$

Parabola

Definiția și ecuația canonică

adică dacă

$$x \geq -\frac{p}{2}.$$

ceea ce înseamnă că ecuația parabolei, (46) se poate rescrie sub forma

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (47)$$

Prin ridicare la pătrat, această ecuație este echivalentă (în acest caz particular!!) cu ecuația

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

sau, după reducerea termenilor asemenea, cu ecuația

$$y^2 = 2px. \quad (48)$$

Ecuația (48) se numește *ecuația canonică a parabolei de parametru p*.

Parabola

Forma parabolei

Remarcăm, înainte de toate, că din ecuația canonică (48) rezultă imediat că x poate lua doar valori nenegative, prin urmare parabola dată de această ecuație este situată de partea dreaptă a axei Oy . Cum ecuația (48) conține variabila y doar la puterea a doua, rezultă că parabola este simetrică față de axa Ox și, deci, pentru studiul formei, este suficient să examinăm partea din parabolă situată în primul cadran. În acest cadran, ecuația parabolei se poate scrie sub forma

$$y = \sqrt{2px}. \quad (49)$$

Dacă se calculează primele două derivate ale lui y , se obține imediat că

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2px}}, \quad (50)$$

Parabola

Forma parabolei

respectiv

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}p^2}{4(px)^{3/2}}. \quad (51)$$

Așadar, pe intervalul $(0, \infty)$, $y' > 0$, în timp ce $y'' < 0$. Aceasta înseamnă că funcția y este strict crescătoare și concavă pe acest interval. Forma curbei în cadranul al patrulea se obține din cea din cadranul 1, printr-o reflexie față de axa Ox .

Axa de simetrie a parabolei (48), adică axa Ox , se numește *axa parabolei*, în timp ce punctul în care parabola intersectează axa (originea, în cazul nostru), se numește *vârful parabolei*.

Parabola

Parametrul parabolei

Mărimea p care apare în ecuația canonică (48) se numește *parametru focal* sau, pur și simplu, *parametru* al parabolei. Vom indica, șn cele ce urmează, o altă interpretare geometrică a acestui parametru.

Considerăm dreapta care trece prin focarul parabolei și este perpendiculară pe axa parabolei. Se observă, imediat, că ecuația acestei drepte este

$$x = \frac{p}{2}. \quad (52)$$

Fie M_1 și M_2 punctele de intersecție dintre această dreaptă și parabolă. Rezolvând sistemul de ecuații format de ecuațiile (48) și (52), obținem $y = \pm p$, prin urmare

$$p = FM_1. \quad (53)$$

Parabola

Parametrul parabolei

Astfel, parametrul p al parabolei este egal cu lungimea perpendicularei ridicate pe axa parabolei, între focarul parabolei și punctul în care perpendiculara intersectează parabola.

Parametrul este cel care definește forma și dimensiunile parabolei.

Observație

Alături de ecuația (48), tot parabole definesc și următoarele trei ecuații (canonice!):

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py. \quad (54)$$

Astfel, prima ecuație ne dă o parabolă simetrică față de axa Oy în raport cu parabola (48), iar celelalte două parabole se obțin aplicând o rotație de 90° , respectiv -90° , parabolei (48), în jurul originii.

Parabola

Intersecția parabolei cu o dreaptă. Tangenta la o parabolă

Considerăm parabola (48) și o dreaptă, pe care o considerăm, în prima instanță, neverticală. Pentru a determina punctele de intersecție, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Înlocuind cea de-a doua ecuație în prima, obținem ecuația în x :

$$k^2 x^2 + 2(kb - p)x + b^2 = 0. \quad (55)$$

Această ecuație se numește *ecuația de intersecție* dintre parabolă și dreaptă. Cum ea este o ecuație de gradul doi în x , înseamnă că parabola și dreapta pot avea în comun două puncte distincte, un singur punct (sau două puncte confundate) sau niciun punct, în funcție de discriminantul ecuației (55).

Parabola

Intersecția parabolei cu o dreaptă. Tangenta la o parabolă

Un calcul simplu ne arată că discriminantul este dat de

$$\Delta = 4p(p - 2bk). \quad (56)$$

Prin urmare,

- (i) Parabola și dreapta au două puncte distincte în comun dacă

$$\Delta > 0, \quad \text{adică} \quad kb < \frac{p}{2}.$$

- (ii) Parabola și dreapta au două puncte confundate în comun (adică, de fapt, un singur punct) dacă

$$\Delta = 0, \quad \text{adică} \quad kb = \frac{p}{2}.$$

În acest caz parabola și dreapta sunt tangente. De remarcat că, întrucât parametrul p al parabolei este strict pozitiv, rezultă că (de vreme ce $kb \neq 0$):

Parabola

Intersecția parabolei cu o dreaptă. Tangenta la o parabolă

- tangenta la o parabolă nu poate fi orizontală (mai precis, în cazul general, nu poate fi paralelă cu axa parabolei);
- nu există tangente neverticale la o parabolă care să treacă prin vârful parabolei.

❸ Parabola și dreapta nu puncte în comun dacă

$$\Delta < 0, \quad \text{adică} \quad kb > \frac{p}{2}.$$

În particular, orice dreaptă paralelă cu axa parabolei (adică orizontală) intersectează parabola în două puncte distincte; de asemenea, orice dreaptă (nevertică) care trece prin origine intersectează parabola în două puncte distincte.

Parabola

Intersecția parabolei cu o dreaptă. Tangenta la o parabolă

Să analizăm, acum, intersecția dintre parabola (48) și o dreaptă verticală. În acest caz, avem de rezolvat sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = a, \end{cases}$$

care ne conduce la ecuația de intersecție (în y de data aceasta);

$$y^2 - 2ap = 0. \tag{57}$$

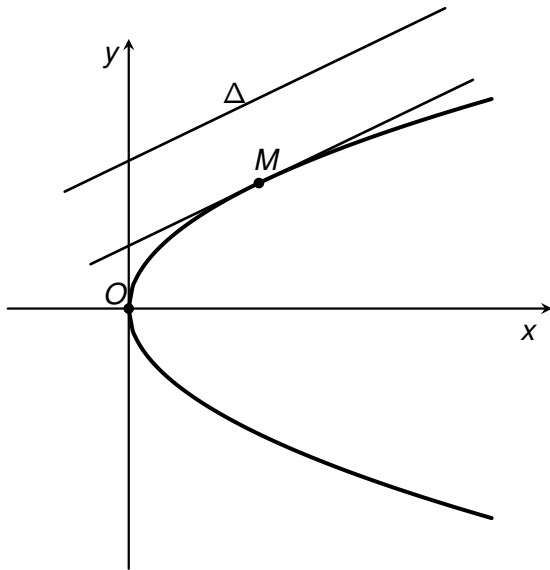


Figura: Tangenta la o parabolă, paralelă cu o direcție

Parabola

Intersecția parabolei cu o dreaptă. Tangenta la o parabolă

Cum, din nou, $p > 0$, intersecția este:

- ❶ o pereche de puncte distincte, dacă $a > 0$;
- ❷ o pereche de puncte confundate (adică un singur punct) dacă $a = 0$. Dreapta este, în acest caz tangentă parabolei. Ea coincide cu axa Oy .
- ❸ mulțimea vidă, dacă $a < 0$.

Parabola

Ecuatia tangentei într-un punct al parabolei

Plecăm, din nou, de la ecuația canonică a parabolei și considerăm o dreaptă care intersectează parabola într-un punct $M_0(x_0, y_0)$. Ecuațiile parametrice ale dreptei vor fi, deci

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuația parabolei, obținem

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt)$$

sau, după ce facem calculele,

$$m^2 t^2 + 2t(-pl + my_0) + y_0^2 - 2p_0 = 0.$$

Termenul liber se anulează, deoarece M_0 se află pe parabolă, deci ecuația se reduce

$$m^2 t^2 + 2t(-pl + my_0) = 0.$$

Parabola

Ecuatia tangentei într-un punct al parabolei

Condiția de tangență înseamnă, ca și în cazul celorlalte conice, că ecuația de intersecție trebuie să aibă soluție dublă, deci, în cazul nostru, coeficientul lui t trebuie să fie zero:

$$-pl + my_0 \equiv \mathbf{v}(l, m) \cdot \mathbf{n}(-p, y_0) = 0,$$

adică vectorul $\mathbf{n}(-p, y_0)$ este vectorul normal al tangentei. Prin urmare, ecuația tangentei este:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$yy_0 = p(x + x_0),$$

unde am utilizat, din nou, faptul că punctul M_0 aparține parabolei. Și de data aceasta, ca și în cazul conicelor cu centru, spunem că această formă a ecuației parabolei a fost obținută prin dedublare.

Parabola

Ecuția tangentei într-un punct al parabolei

E o mică diferență față de cazul celorlalte două conice, pentru că aici apare x la puterea întâi. De data asta, regula de dedublare înseamnă că:

- x se înlocuiește cu $(x + x_0)/2$;
- y^2 se înlocuiește cu yy_0 .

Parabola

Tangente duse dintr-un punct exterior parabolei

Considerăm un punct $M(x_1, y_1)$. Începem, ca de obicei, cu cazul tangentelor neverticale. Am văzut că ele au ecuația de forma

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Pentru ca M să se afle pe tangentă, trebuie să avem

$$y_1 = kx_1 + \frac{p}{2k},$$

de unde

$$2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

Discriminantul este

$$\Delta = 4(y_1^2 - 2px_1).$$

Parabola

Tangente duse dintr-un punct exterior parabolei

Prin urmare:

- avem două tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 > 0$ (punctul e în afara parabolei);
- avem o singură tangentă dacă $y_1^2 - 2px_1 = 0$ (punctul este pe parabolă);
- nu avem tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 < 0$ (punctul este în interiorul parabolei).

Ecuția tangentei este de forma

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

cu k dat de ecuația de gradul doi de mai sus.

Să vedem ce se întâmplă dacă una dintre tangente este verticală. Ea trebuie să aibă ecuația

$$x = 0.$$

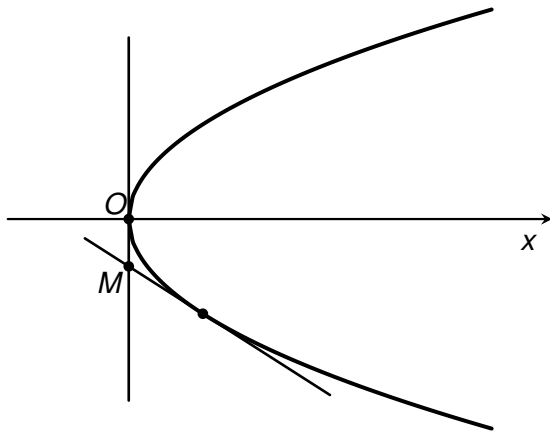


Figura: Tangente la parabolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

Parabola

Tangente duse dintr-un punct exterior parabolei

Căutăm panta celei de-a doua tangente. Remarcăm, mai întâi, că $x_1 = 0$. Ecuația tangentei trebuie să fie

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Ca să treacă prin M ,

$$y_1 = \frac{p}{2k}.$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci avem o singură tangentă (cea verticală). În caz contrar,

$$k = \frac{p}{2y_1},$$

adică ecuația tangentei este

$$y - y_1 = \frac{p}{2y_1}x.$$