

Logică computațională

Curs 6

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Metoda rezoluției (Robinson, 1965)

- metodă de demonstrare automată *sintactică*, prin *respingere*
- este o metodă corectă și completă de demonstrare automată
- verificarea *consistenței/inconsistenței* unei mulțimi de clauze (scop)

Sistem formal (axiomatic) asociat Rezoluției propoziționale

- $\text{Res} = (\Sigma_{\text{Res}}, F_{\text{Res}}, A_{\text{Res}}, R_{\text{Res}})$
- $\Sigma_{\text{Res}} = \Sigma_P \setminus \{ \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ – **alfabetul**
- $F_{\text{Res}} \cup \{ \square \}$ – **mulțimea formulelor bine-formate**
 - F_{Res} mulțimea tuturor clauzelor ce se pot forma folosind alfabetul Σ_{Res}
 - \square - **clauza vidă** care nu conține nici un literal, simbolizează inconsistența
- $A_{\text{Res}} = \emptyset$ – **mulțimea axiomelor**
- $R_{\text{Res}} = \{ res \}$ **mulțimea regulilor de inferență** care conține doar
 - **regula rezoluției:** $A \vee l, B \vee \neg l \vdash_{res} A \vee B$, unde l este un literal, iar $A, B \in F_{\text{Res}}$

Terminologie

- clauzele $C_1 = A \vee l$, $C_2 = B \vee \neg l$ **rezolvă** deoarece conțin doi literali opuși (complementari)
- **Notatie:** $C_3 = \text{Res}_l (C_1, C_2)$
- C_3 **rezolventul** clauzelor C_1 și C_2
- clauzele C_1 , C_2 **clauze părinte**
- caz particular: $C_1 = l$, $C_2 = \neg l$, $\text{Res}_l (C_1, C_2) = \square$ - inconsistentă

Observație:

- Rezoluția ca și regulă de inferență este o generalizare a regulilor *modus ponens*, *modus tollens* și a *silogismului*.
- $mp: U, U \rightarrow V \vdash V \Rightarrow U, \neg U \vee V \vdash V$
- $mt: U \rightarrow V \vdash \neg V \rightarrow \neg U \xRightarrow{\text{ITD}} U \rightarrow V, \neg V \vdash \neg U \Rightarrow \neg U \vee V, \neg V \vdash \neg U$
- $sil.: U \rightarrow V, V \rightarrow Z \vdash U \rightarrow Z \Rightarrow \neg U \vee V, \neg V \vee Z \vdash \neg U \vee Z$

Algoritmul rezoluției propoziționale:

Date de intrare: S – o mulțime de clauze

Date de ieșire: S consistentă sau inconsistentă

$$S_0 = S$$

$$i = 0$$

Repetă

@ se aleg două clauze $C_1, C_2 \in S$ care rezolvă

$$C_3 = \text{Res}(C_1, C_2)$$

$$S_{i+1} = S_i \cup \{C_3\}$$

Dacă $C_3 = \square$

Atunci Scrie ” S este inconsistentă”; **STOP**

Altfel $i = i + 1$

Sfârșit_dacă

Până când $S_i = S_{i-1}$ //nu se mai pot deriva clauze noi

Scrie ” S este consistentă”

Sfârșit algoritm

Notăție:

- $S \vdash_{\text{Res}} \square$ ”din mulțimea S de clauze s-a derivat clauza vidă prin aplicarea algoritmului rezoluției propoziționale”

Teorema de corectitudine și completitudine

- Teorema de corectitudine

Dacă $S \vdash_{\text{Res}} \Box$ atunci S este inconsistentă.

- Teorema de completitudine

Dacă S este inconsistentă atunci $S \vdash_{\text{Res}} \Box$.

- Teorema de corectitudine și completitudine

Mulțimea S este inconsistentă dacă și numai dacă $S \vdash_{\text{Res}} \Box$.

Teoreme

- U este tautologie dacă și numai dacă $FNC(\neg U) \vdash_{\text{Res}} \square$
- $U_1, U_2, \dots, U_n \not\models V$ dacă și numai dacă
 $U_1, U_2, \dots, U_n \not\vdash V$ dacă și numai dacă
 $FNC(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \wedge \neg V) \vdash_{\text{Res}} \square$

$$S_i \stackrel{\text{not.}}{=} FNC(U_i), i = \overline{1, n}$$

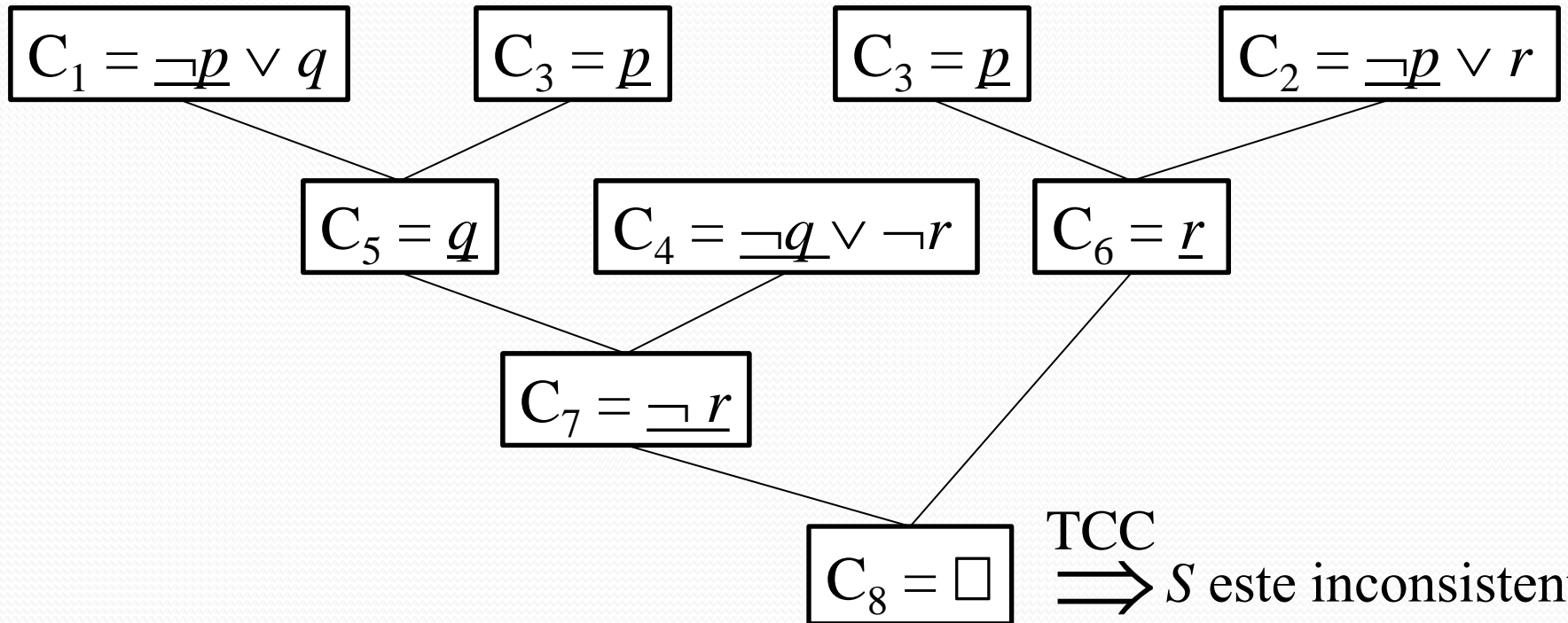
$$S_{n+1} \stackrel{\text{not.}}{=} FNC(\neg V)$$

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \cup S_{n+1} \vdash_{\text{Res}} \square$$

Exemplu

$$S = \{ \neg p \vee q, \neg p \vee r, p, \neg q \vee \neg r \}$$

$$C_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \neg p \vee q, \quad C_2 \stackrel{\text{not.}}{=} \neg p \vee r, \quad C_3 \stackrel{\text{not.}}{=} p, \quad C_4 \stackrel{\text{not.}}{=} \neg q \vee \neg r$$



Problemă propusă

Ion, Vasile și Gheorghe sunt studenți la Informatică. Ei au făcut următorul pact:

- Dacă Ion își face laboratorul atunci Ion sau Vasile au laboratorul făcut.
- Dacă Ion își face laboratorul, atunci și Vasile își face laboratorul.
- Dacă Vasile nu-și face laboratorul, atunci Gheorghe îl va face.
- Dacă Gheorghe nu își face laboratorul, atunci nu își face nici Ion laboratorul sau Vasile îl face.
- Știm că Gheorghe nu și-a făcut laboratorul.

1. Să se verifice dacă pactul nu este contradictoriu
2. Să se verifice dacă din cele de mai sus se poate deduce că Vasile a făcut laboratorul.

Notății

Ion și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} p$,

Vasile și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} q$,

Gheorghe și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} r$.

- Dacă Ion își face laboratorul atunci Ion sau Vasile au laboratorul făcut.
- Dacă Ion își face laboratorul, atunci și Vasile își face laboratorul.
- Dacă Vasile nu-și face laboratorul, atunci Gheorghe îl va face.
- Dacă Gheorghe nu își face laboratorul, atunci nu își face nici Ion laboratorul sau Vasile îl face.
- Știm că Gheorghe nu și-a făcut laboratorul.
? Vasile a făcut laboratorul.

Transformare limbaj natural în limbaj logic

Ion și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} p$,

Vasile și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} q$,

Gheorghe și-a făcut lab. $\stackrel{\text{not.}}{=} r$.

- Dacă Ion își face laboratorul atunci Ion sau Vasile au laboratorul făcut. $p \rightarrow p \vee q$
- Dacă Ion își face laboratorul, atunci și Vasile își face laboratorul $p \rightarrow q$
- Dacă Vasile nu-și face laboratorul, atunci Gheorghe îl va face. $\neg q \rightarrow r$
- Dacă Gheorghe nu își face laboratorul, atunci nu își face nici Ion laboratorul sau Vasile îl face. $\neg r \rightarrow \neg p \vee q$
- Știm că Gheorghe nu și-a făcut laboratorul. $\neg r$
? Vasile a făcut laboratorul. q

În limbaj logic

- $p \rightarrow p \vee q$
- $p \rightarrow q$
- $\neg q \rightarrow r$
- $\neg r \rightarrow \neg p \vee q$
- $\neg r$

? q

Obținerea mulțimilor de clauze

- $p \rightarrow p \vee q \equiv \neg p \vee p \vee q \stackrel{\text{not.}}{=} C_1$

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \stackrel{\text{not.}}{=} C_2$

- $\neg q \rightarrow r \equiv q \vee r \stackrel{\text{not.}}{=} C_3$

- $\neg r \rightarrow \neg p \vee q \equiv r \vee \neg p \vee q \stackrel{\text{not.}}{=} C_4$

- $\neg r \stackrel{\text{not.}}{=} C_5$

? q se neagă concluzia \Rightarrow

$$\neg q \stackrel{\text{not.}}{=} C_6$$

$$S_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$$

$$S_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$$

Aplicarea metodei rezoluției

$$S_1 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r \}$$

$$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

Aplicarea metodei rezoluției pt. S_1 :

$$S_1 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r \}$$

$$C_6 = \text{Res}_r (C_3, C_5) = q$$

$$\cancel{C_2 = \text{Res}_p (C_1, C_2) = \neg p \vee q} \text{ nu s-a obținut o clauză nouă}$$

$$\cancel{C_4 = \text{Res}_p (C_1, C_4) = \neg p \vee p \vee q} \text{ nu s-a obținut o clauză nouă}$$

$$\cancel{C_2 = \text{Res}_r (C_4, C_5) = \neg p \vee q} \text{ nu s-a obținut o clauză nouă}$$

Abandonăm fără a ajunge la o concluzie, am constatat că avem nevoie de o strategie.

Deci nu știm încă dacă ipotezele sunt contradictorii.

Aplicarea metodei rezoluției pt. S_2 :

$$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

$$C_7 = \text{Res}_r (C_3, C_5) = q_{\text{TCC}}$$

$$C_8 = \text{Res}_r (C_7, C_6) = \square \Rightarrow S_2 \text{ e inconsistentă adică, Vasile își face laboratorul}$$

Automatizarea procesului rezolutiv

- prin intermediul unor *strategii*
 - asigură exploatarea tuturor modurilor posibile de derivare a clauzei vide
 - evitarea deducerii unor clauze redundante sau irelevante pentru obținerea □

Strategia eliminării

- inspirată din procedura Davis-Putman
- O mulțime S de clauze poate fi simplificată, păstrând consistența/inconsistența ei prin aplicarea următoarelor transformări:
 - **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide): $\neg p \vee q \vee \underline{p} \vee \neg r$
 - **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din S** : clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:
 $\neg p \vee q \vee r$ este subsumată de $\neg p \vee q$
 - **Eliminarea clauzelor care conțin literal puri în S** : Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din S :

$$\{\neg p \vee q, \neg \underline{p} \vee \underline{r}, p, \neg \underline{q} \vee \underline{r}\}$$

- Dacă $C=l$ este o clauză unitate din S , se șterg toate clauzele *care-l conțin pe l și $\neg l$* din clauzele rămase.

$$\{\neg \underline{p} \vee q, \neg \underline{p} \vee r, \underline{p}, \neg q \vee \neg r, p \vee \neg r\}$$



\emptyset

sau $\{\square\}$



$$\{q, r, \neg q \vee \neg r\}$$



Strategia eliminării aplicată la S_1 :

$$S_1 = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r \}$$

- **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide):

$$S_1 = \{ \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r \}$$

- **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din S :** clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:

$$S_1 = \{ \neg p \vee q, q \vee r, \neg r \}$$

- **Eliminarea clauzelor care conțin literal puri în S :** Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din S :

$$S_1 = \{ q \vee r, \neg r \}$$

$$S_1 = \{ \neg r \}$$

$$S_1 = \{ \} = \emptyset - \text{consistentă, deci pactul studenților este necontradictoriu}$$

Strategia eliminării aplicată la S_2 :

$$S_2 = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

- **Eliminarea clauzelor tautologice** (nu pot contribui la derivarea clauzei vide):

$$S_2 = \{ \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

- **Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din S :** clauza C_1 este subsumată de C_2 dacă există o clauză C_3 astfel încât $C_1 = C_2 \vee C_3$:

$$S_2 = \{ \neg p \vee q, q \vee r, \neg r, \neg q \}$$

- **Eliminarea clauzelor care conțin literal puri în S :** Un literal este pur dacă negația sa nu apare în nici o clauză din S :

$$S_2 = \{ q \vee r, \neg r, \neg q \}$$

- Dacă $C=l$ este o **clauză unitate** din S , se șterg toate clauzele care- l conțin pe l și $\neg l$ din clauzele rămase.

$$S_2 = \{ q, \neg q \vee \square \}$$

$$S_2 = \{ \square \} - \text{inconsistentă, deci Vasile și-a făcut laboratorul}$$

Strategia saturării pe nivele (algoritmul)

Date de intrare: S – o mulțime de clauze

Date de ieșire: S consistentă sau inconsistentă

//Se generează mulțimile de clauze S^0, S^1, \dots, S^k ce reprezintă nivelele

$$S^0 = S$$

$$k = 0$$

Repetă

$$k = k + 1$$

$$S^k = \{ \text{Res}(C_1, C_2) \mid C_1 \in S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^{k-1}, C_2 \in S^{k-1} \}$$

$$S^k = S^k \setminus (S^0 \cup S^1 \cup \dots \cup S^{k-1})$$

Până când $\square \in S^k$ **sau** $S^k = \emptyset$

Dacă $\square \in S^k$

Atunci Scrie ” S este inconsistentă”;

Altfel Scrie ” S este consistentă”

Sfârșit_dacă

Sfârșit algoritm

Strategia saturării pe nivele aplicată la $S_1(1)$:

$$S_1^0 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r \}$$

$$C_2 = \text{Res}_p (C_1, C_2) = \neg p \vee q$$

$$\text{Res}_? (C_1, C_3) \text{ NU}$$

$$C_4 = \text{Res}_p (C_1, C_4) = \neg p \vee q \vee r$$

$$\text{Res}_? (C_1, C_5) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_2, C_3) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_2, C_4) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_2, C_5) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_3, C_4) \text{ NU}$$

$$C_6 = \text{Res}_r (C_3, C_5) = q$$

$$C_2 = \text{Res}_r (C_4, C_5) = \neg p \vee q$$

$$S_1^1 = \{ C_6 \} = \{ q \}$$

Strategia saturării pe nivele aplicată la S_1 (2):

$$S_1^0 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r \}$$

$$S_1^1 = \{ C_6 \} = \{ q \}$$

$$\text{Res}_? (C_6, C_1) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_6, C_2) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_6, C_3) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_6, C_4) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_6, C_5) \text{ NU}$$

$$S_1^2 = \{ \} = \emptyset \Rightarrow S_1 \text{ este consistent}$$

Strategia saturării pe nivele aplicată la $S_2(1)$:

$$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

$$C_2 = \text{Res}_p(C_1, C_2) = \neg p \vee q$$

$$\text{Res}_?(C_1, C_3) \text{ NU}$$

$$C_4 = \text{Res}_p(C_1, C_4) = \neg p \vee q \vee r$$

$$\text{Res}_?(C_1, C_5) \text{ NU}$$

$$C_7 = \text{Res}_q(C_1, C_6) = \neg p \vee p$$

$$\text{Res}_?(C_2, C_3) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_?(C_2, C_4) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_?(C_2, C_5) \text{ NU}$$

$$C_8 = \text{Res}_q(C_2, C_6) = \neg p$$

$$\text{Res}_?(C_3, C_4) \text{ NU}$$

$$C_9 = \text{Res}_r(C_3, C_5) = q$$

$$C_{10} = \text{Res}_q(C_3, C_6) = r$$

$$C_2 = \text{Res}_r(C_4, C_5) = \neg p \vee q$$

$$C_{11} = \text{Res}_q(C_4, C_6) = r \vee \neg p$$

$$\text{Res}_?(C_5, C_6) \text{ NU}$$

$$S_2^1 = \{ C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11} \} = \{ \neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p \}$$

Strategia saturării pe nivele aplicată la $S_2(1)$:

$$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

$$C_2 = \text{Res}_p(C_1, C_2) = \neg p \vee q$$

$$\text{Res}_?(C_1, C_3) \text{ NU}$$

$$C_4 = \text{Res}_p(C_1, C_4) = \neg p \vee q \vee r$$

$$\text{Res}_?(C_1, C_5) \text{ NU}$$

$$C_7 = \text{Res}_q(C_1, C_6) = \neg p \vee p$$

$$\text{Res}_?(C_2, C_3) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_?(C_2, C_4) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_?(C_2, C_5) \text{ NU}$$

$$C_8 = \text{Res}_q(C_2, C_6) = \neg p$$

$$\text{Res}_?(C_3, C_4) \text{ NU}$$

$$C_9 = \text{Res}_r(C_3, C_5) = q$$

$$C_{10} = \text{Res}_q(C_3, C_6) = r$$

$$C_2 = \text{Res}_r(C_4, C_5) = \neg p \vee q$$

$$C_{11} = \text{Res}_q(C_4, C_6) = r \vee \neg p$$

$$\text{Res}_?(C_5, C_6) \text{ NU}$$

$$S_2^1 = \{ C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11} \} = \{ \neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p \}$$

Strategia saturării pe nivele aplicată la $S_2(2)$:

$$S_2^0 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

$$S_2^1 = \{ C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11} \} = \\ = \{ \neg p \vee p, \neg p, q, r, r \vee \neg p \}$$

$$C_1 = \text{Res}_p (C_7, C_1) = \neg p \vee p \vee q$$

$$C_2 = \text{Res}_p (C_7, C_2) = \neg p \vee q$$

$$\text{Res}_? (C_7, C_3) \text{ NU}$$

$$C_4 = \text{Res}_p (C_7, C_4) = r \vee \neg p \vee q$$

$$\text{Res}_? (C_7, C_5) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_7, C_6) \text{ NU}$$

$$C_8 = \text{Res}_p (C_7, C_8) = \neg p$$

$$\text{Res}_? (C_7, C_9) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_7, C_{10}) \text{ NU}$$

$$C_{11} = \text{Res}_p (C_7, C_{11}) = r \vee \neg p$$

$$C_2 = \text{Res}_p (C_8, C_1) = \neg p \vee q$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_2) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_3) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_4) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_3) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_4) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_5) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_6) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_9) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_{10}) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_8, C_{11}) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_9, C_1) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_9, C_2) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_9, C_3) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_9, C_4) \text{ NU}$$

$$\text{Res}_? (C_9, C_5) \text{ NU}$$

$$C_{12} = \text{Res}_p (C_9, C_6) = \square$$

$\Rightarrow S_2$ este inconsistentă

Strategia mulțimii suport

- se *evită* aplicarea regulii de rezoluție asupra unor clauze dintr-o *submulțime consistentă* a mulțimii inițiale de clauze, deoarece rezolvenții obținuți sunt *irelevanți* în procesul de derivare a \square
- Această strategie a fost inspirată din faptul următor: în general mulțimea *premierelor* (faptelor) unei deducții este *consistentă*, deci rezolvarea unor clauze din această mulțime consistentă nu poate duce la derivarea clauzei vide (inconsistența)
- **Definiție:** Fie S o mulțime de clauze. O submulțime Y a lui S se numește *mulțime suport* a lui S , dacă $S \setminus Y$ este consistentă.
Rezoluția mulțimii suport este rezoluția a două clauze care nu aparțin ambele mulțimii $S \setminus Y$.

Aplicarea strategiei mulțimii suport pt. S_2 :

$$S_2 = \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \} = \\ = \{ \neg p \vee p \vee q, \neg p \vee q, q \vee r, r \vee \neg p \vee q, \neg r, \neg q \}$$

$Y = \{C_6\}$ mulțimea suport a lui S_2 . este formată din clauzele obținute din concluzie.

$S_2 \setminus Y = S_1$ și am demonstrat deja că S_1 este consistentă.

Așadar nu vom rezolva clauzele S_1 din între ele.

Vom începe de la o clauză din Y și nu vom rezolva deloc primele 5 clauze între ele:

$$C_7 = \text{Res}_r (C_5, C_3) = q_{\text{TCC}}$$

$$C_8 = \text{Res}_r (C_6, C_7) = \square \Rightarrow S_2 \text{ e inconsistentă adică, Vasile își face laboratorul}$$