1.4.46

$A = \{a, b, c\}$; $(A, \le_i)$

cel mai mare + maximal

- $\begin{tikzcd} c \\ b \arrow[u] \\ a \arrow[u] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} b \\ c \arrow[u] \\ a \arrow[u] \end{tikzcd}$, ... (6 relații)

cel mai mic și minimal

$\le_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$

doar maximale

- $\begin{tikzcd} b & & c \\ & a \arrow[ul] \arrow[ur] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} a & & c \\ & b \arrow[ul] \arrow[ur] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} a & & b \\ & c \arrow[ul] \arrow[ur] \end{tikzcd}$ (3 relații)

cel mai mic și minimal

$\le_7 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c)\}$

cel mai mare + maximal

- $\begin{tikzcd} & a \\ b \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} & b \\ a \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} & c \\ a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \end{tikzcd}$ (3 rel.)

doar minimale

$\le_{10} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,a), (c,a)\}$

- $a \quad b \quad c$ (1 rel.)

$\le_{13} = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

sunt simultan maximale și minimale

nu avem cel mai mic sau cel mai mare elem.

- $\begin{tikzcd} b \\ a \arrow[u] \end{tikzcd}\ c$, $\begin{tikzcd} a \\ b \arrow[u] \end{tikzcd}\ c$, ... (6 relații)

$\le_{14} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b)\}$

a, c minimale

b, c maximale

TOTAL : 19 relații

1.4.48

$(A, \leq)$ mulțime ordonată

$\overset{?}{\Rightarrow} (A, \geq)$ ordonată

1. $x \leq x, \forall x \in A \Leftrightarrow x \geq x, \forall x \in A$ ✓ **REFLEXIVITATE**

2. $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$\Downarrow$ ✓ **TRANZITIVITATE**

$y \geq x$ și $z \geq y \Rightarrow z \geq x$

3. $$\left.\begin{array}{l} x \leq y \text{ și } y \leq x \\ \Downarrow \\ y \geq x \text{ și } x \geq y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$ în ambele variante ✓

ANTISIMETRIE

1.4.49

Orice latice finită este completă (?)

Fie $(A, \leq)$ latice finită $\Leftrightarrow \begin{cases} (A, \leq) \text{ latice} : \forall x, y \in A, \exists \inf\{x,y\}, \exists \sup\{x,y\} \\ A \text{ mulțime finită} \end{cases}$

- Trebuie dem. că $\forall X \subseteq A$, $\exists \inf(X)$, $\exists \sup(X)$

P.p. P_n : $\exists \inf\{a_1, \dots, a_n\}$ adevărat

Demonstrăm P_{n+1} : $\exists \inf\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$

$$\inf\{a_1, \dots, a_{n+1}\} = \inf\{\underbrace{\inf\{a_1, \dots, a_n\}}_{\in A}, \underbrace{a_{n+1}}_{\in A}\} \Rightarrow$$ există acest infimum

$\Rightarrow P_n$ adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq |A|$. Analog pt. sup

- $\inf \emptyset = \sup A$ și $\sup \emptyset = \inf A$ ✓

z z z

1.4.50

M mulțime oarecare

$(M, \leq)$ lanț $\Rightarrow \forall x, y \in M$, $x \leq y$ sau $y \leq x$

Tratăm cazul $x \leq y$. Celălalt caz este analog.

(?) $\forall x, y \in M$, $\exists \sup\{x, y\}$, $\exists \inf\{x, y\}$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ x \leq x \\ 2.\ x \leq y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists \sup\{x, y\} = y, \\ \exists \inf\{x, y\} = x \end{array}\right\| \Rightarrow (M, \leq) \text{ latice}$$

- contraexemple

$(\mathbb{R}, \leq)$ lanț $\Rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ latice

$\nexists \inf A$ pentru $A = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

1.4.51

Trebuie să existe infimum și supremum pentru fiecare submulțime, spre exemplu:

A mulțime oarecare

$\inf A = \emptyset = \sup \emptyset$

$\inf \emptyset = A = \sup A$

L.4.52

$(\mathbb{N}, |)$ latice (?)

I. $(\mathbb{N}, |)$ relație de ordine : $a|b$ ddacă $\exists k \in \mathbb{N}$ a.î. $b = k \cdot a$

1. $a = a \cdot 1 \Leftrightarrow a|a, \forall a \in \mathbb{N}$ ✓

2. $a|b$ și $b|a \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$:

$b = k_1 \cdot a$

$a = k_2 \cdot b \Rightarrow a = k_2 \cdot k_1 \cdot a$

i) $a \neq 0 \Rightarrow k_2 k_1 = 1 \Leftrightarrow$

$k_2 = k_1 = 1 \Rightarrow a = b$ ✓

ii) $a = 0 \Rightarrow b = k_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = b$ ✓

3. $a|b$: $b = k_1 \cdot a$

$b|c$: $c = k_2 \cdot b$

$\Rightarrow c = \underbrace{k_2 k_1}_{\in \mathbb{N}} \cdot a \Rightarrow a|c$ ✓

II. $(\mathbb{N}, |)$ latice

$a, b \in \mathbb{N}$

$d = \inf\{a,b\} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} d|a \text{ și } d|b \\ d' \in \mathbb{N} : d'|a, d'|b \Rightarrow d'|d \end{cases}$

$\Rightarrow d = (a,b)$ c.m.m.d.c.

$m = \sup\{a,b\} \Leftrightarrow \begin{cases} a|m \text{ și } b|m \\ m' \in \mathbb{N} : a|m' \text{ și } b|m' \Rightarrow m|m' \end{cases}$

$\Rightarrow m = [a,b]$ c.m.m.m.c

1.4.53

$(\mathbb{N}, \leq)$ latice care nu este completă

• ↳ $x \leq y$ sau $y \leq x, \forall x, y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ lanț $\overset{1.4.50}{\Longrightarrow}$ latice

(II) • $X = \emptyset \subseteq \mathbb{N}$

(nu contrazice 1.4.32)

$\inf \emptyset$ nu există în $\mathbb{N}$

(I) • $X = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$

(nu este completă)

$\sup \mathbb{N}$ nu există în $\mathbb{N}$

1.4.54

$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ latice completă, $\forall A$ mulțime (?)

$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

1. $S \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow S \subseteq S$ ✓

2. $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{P}(A)$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \subseteq S_2 \\ S_2 \subseteq S_3 \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 \subseteq S_3 \ ✓$$

3. $S_1 \subseteq S_2$ și $S_2 \subseteq S_1$ (principiul dublei incluziuni)

$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$

$\Rightarrow S_1 = S_2$ ✓

1.,2.,3., $\Rightarrow$ rel. de ordine

$$\inf\{B, C\} = B \cap C \Leftrightarrow \begin{cases} B \cap C \subseteq B, \ B \cap C \subseteq C \\ D \subseteq A : D \subseteq B \text{ și } D \subseteq C \Rightarrow D \subseteq B \cap C \end{cases}$$

$\sup\{B, C\} = B \cup C \iff \begin{cases} B \subseteq B \cup C, \quad C \subseteq B \cup C \\ D \subseteq A : B \subseteq D, C \subseteq D \Rightarrow B \cup C \subseteq D \end{cases}$

$\Rightarrow (\mathcal{P}(A), \subseteq)$ latice

- $X \subseteq \mathcal{P}(A)$ - mulțime de submulțimi

  $X = \{B_i \mid i \in I\}$, $B_i \in \mathcal{P}(A)$

  $\sup X = \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq A$

  $\inf X = \bigcap_{i \in I} B_i \subseteq A$

Obs.:

Dacă $X = \emptyset$ (sau $I = \emptyset$)

$\inf \emptyset = A \quad (\bigcap_{i \in \emptyset} B_i = A)$

$\sup \emptyset = \emptyset \quad (\bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset)$

Explicație asociativitate

$\inf X = a \in A \iff \begin{cases} a \leq x, \forall x \in X \\ a' \in A, a' \leq x, \forall x \in X \Rightarrow a' \leq a \end{cases}$

$\wedge$ = infimum

$\vee$ = supremum

$(a \wedge b) \wedge c \overset{?}{=} a \wedge (b \wedge c), \forall a, b, c \in A$

Notăm $d = a \wedge b$ și $e = d \wedge c \Rightarrow \left.\begin{matrix} e \leq d \text{ și } e \leq c \\ d \leq a \text{ și } d \leq b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} e \leq a \\ e \leq b \\ e \leq c \end{cases}$

$\Downarrow$

$e = \inf\{a, b, c\}$

Fie $e' \in A$: $\left.\underbrace{e' \leq a, e' \leq b}_{\Rightarrow e' \leq d}, e' \leq c\right\} \Rightarrow e' \leq e$

$\Rightarrow e = \inf\{a, b, c\}$

- Arătăm și că partea dreaptă este egală cu $\inf\{a, b, c\}$

- Analog pentru supremum.

1.4.47

$A = \{(x, 0) \mid x \in [0,1]\} \cup \{(x, 1) \mid x \in (0,1]\}$

0 este element minimal

și nu există cel mai mic element