Geometrie pentru informaticieni
Seminar

Paul A. Blaga

Transformări geometrice în plan (Exemple)

Problema 1. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ printr-o rotaţie de unghi $60°$ relativ la punctul $P(1,1)$, urmată de o scalare neuniformă, de factori $(1,2)$, relativ la punctul P. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Soluţie. Matricea de rotaţie se scrie, în forma generală, ca

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta+q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În cazul nostru concret, avem

$$\mathrm{Rot}(1,1,60°) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pe de altă parte, matricea unei scalări neuniforme, de factori de scală (s_x, s_y), relativ la punctul $Q(q_1, q_2)$ este

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & (1-s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1-s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

adică, în cazul nostru concret,

$$\mathrm{Scale}(1,1,1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor dreptunghiului dat este

$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă aplicăm mai întâi rotaţia, urmată de scalare, obţinem transformarea de matrice

$$T_1 = \mathrm{Scale}(1,1,1,2)\cdot\mathrm{Rot}(1,1,60°) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imaginea dreptunghiului prin această transformare este patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$, cu matricea coordona-

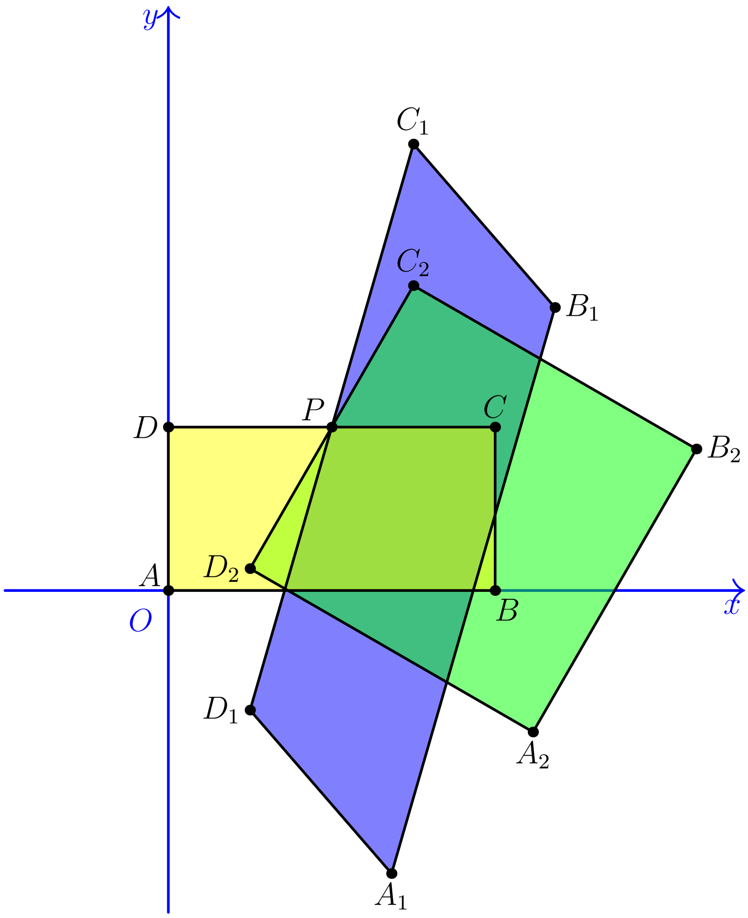

Figura 1: Dreptunghiul iniţial şi cele două imagini ale sale prin transformările indicate

telor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_1B_1C_1D_1] = T_1 \cdot [ABCD] = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Prin urmare, vârfurile patrulaterului transformat vor fi $A_1\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}\right)$, $B_1\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$, $C_1\left(\frac{3}{2}, 1+\sqrt{3}\right)$, $D_1\left(\frac{1}{2}, 1-\sqrt{3}\right)$.

Dacă, acum, aplicăm transformările în ordine inversă, matricea transformării compuse va fi

$$T_2 = \mathrm{Rot}(1,1,60^\circ) \cdot \mathrm{Scale}(1,1,1,2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3} & \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imaginea dreptunghiului prin această transformare este patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$, cu matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_2B_2C_2D_2] = T_2 \cdot [ABCD] = \begin{bmatrix} \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3+2\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} & \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

deci vârfurile acestui patrulater sunt $A_2\left(\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B_2\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C_2\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$, $D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$.

În figură este reprezentat dreptunghiul iniţial (cu galben), imaginea sa prin rotaţie urmată de scalare (albastru) şi imaginea sa prin scalare urmată de rotaţie (verde). În mod clar, cele două imagini nu coincid, deci ordinea în care se efectuează transformările este importantă. Se observă, de asemenea, că punctul P este, aşa cum ne aşteptam, un punct fix pentru ambele transformări. □

Problema 2. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ printr-o rotaţie de unghi $60°$ relativ la punctul $P(1,3)$, urmată de o forfecare relativ la origine, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(2,3)$, de unghi $30°$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Soluţie. Vom determina, mai întâi, matricile celor două transformări elementare. Începem cu rotaţia de $30°$ relativ la punctul P. Ne aducem aminte că matricea este dată de

$$\operatorname{Rot}(P,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_1(1-\cos\theta)+p_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -p_1\sin\theta + p_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina matricea forfecării, începem prin a determina versorul vectorului de forfecare. Avem $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{13}$, ceea ce înseamnă că versorul asociat este

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

Matricea omogenă a forfecării de versor $\mathbf{w}$ şi unghi α, relativ la punctul Q este

$$\operatorname{Shear}(P,\mathbf{w},\alpha) = \begin{pmatrix} I_2 + \operatorname{tg}\alpha\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}\right) & -\operatorname{tg}\alpha\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}\right)\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{6}{13} & \dfrac{4}{13} \\ -\dfrac{9}{13} & \dfrac{6}{13} \end{pmatrix}.$$

Aşadar,

$$I_2 + \operatorname{tg}\alpha\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -\dfrac{6}{13} & \dfrac{4}{13} \\ -\dfrac{9}{13} & \dfrac{6}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{13} & \dfrac{4\sqrt{3}}{39} \\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{13} & 1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{13} \end{pmatrix}.$$

În cazul nostru, Q este originea, deci

$$-\operatorname{tg}\alpha\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right)\cdot Q=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Prin înlocuire, obţinem matricea forfecării,

$$\operatorname{Shear}\left(0,0,\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},30^\circ\right)=\begin{pmatrix}1-\dfrac{2\sqrt{3}}{13} & \dfrac{4\sqrt{3}}{39} & 0\\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{13} & 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{13} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dacă executăm mai întâi rotaţia, apoi forfecarea, matricea de transformare va fi

$$\begin{aligned}T_1&=\operatorname{Shear}\left(0,0,\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},30^\circ\right)\cdot\operatorname{Rot}(1,3,60^\circ)=\\&=\begin{pmatrix}1-\dfrac{2\sqrt{3}}{13} & \dfrac{4\sqrt{3}}{39} & 0\\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{13} & 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{13} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{17-2\sqrt{3}}{26} & \dfrac{18-35\sqrt{3}}{78} & \dfrac{-9+41\sqrt{3}}{26}\\ \dfrac{3+5\sqrt{3}}{13} & \dfrac{11+\sqrt{3}}{13} & \dfrac{3-5\sqrt{3}}{13}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Putem determina acum imaginea dreptunghiului $ABCD$ prin transformarea T_1:

$$\begin{aligned}[A'B'C'D']&=T1\cdot[ABCD]=\begin{pmatrix}\dfrac{17-2\sqrt{3}}{26} & \dfrac{18-35\sqrt{3}}{78} & \dfrac{-9+41\sqrt{3}}{26}\\ \dfrac{3+5\sqrt{3}}{13} & \dfrac{11+\sqrt{3}}{13} & \dfrac{3-5\sqrt{3}}{13}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&2&0\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{-9+41\sqrt{3}}{26} & \dfrac{25+37\sqrt{3}}{26} & \dfrac{93+76\sqrt{3}}{78} & \dfrac{-9+88\sqrt{3}}{78}\\ \dfrac{3-5\sqrt{3}}{13} & \dfrac{9+5\sqrt{3}}{13} & \dfrac{20+6\sqrt{3}}{13} & \dfrac{14-4\sqrt{3}}{13}\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dacă aplicăm transformările în ordine inversă, obţnem transformarea compusă

$$T_2 = \mathrm{Rot}(1,3,60^\circ) \cdot \mathrm{Shear}\left(0,0,\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},30^\circ\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-\frac{2\sqrt{3}}{13} & \frac{4\sqrt{3}}{39} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{13} & 1+\frac{2\sqrt{3}}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{11-\sqrt{3}}{13} & -\frac{18+35\sqrt{3}}{78} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3+5\sqrt{3}}{13} & \frac{17+2\sqrt{3}}{26} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel, imaginea dreptunghiului dat prin această combinaţie de transformări este

$$[A''B''C''D''] = T_2 \cdot [ABCD] = \begin{pmatrix} \frac{11-\sqrt{3}}{13} & -\frac{18+35\sqrt{3}}{78} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3+5\sqrt{3}}{13} & \frac{17+2\sqrt{3}}{26} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1+3\sqrt{3}}{2} & \frac{57+35\sqrt{3}}{26} & \frac{153+70\sqrt{3}}{78} & \frac{21+82\sqrt{3}}{78} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & \frac{27+7\sqrt{3}}{26} & \frac{44+9\sqrt{3}}{26} & \frac{56-11\sqrt{3}}{26} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aici putem citi coordonatele carteziene ale vârfurilor paralelogramului $A''B''C''D''$. $\square$