Laborator 3: Sisteme de ecuaţii diferenţiale

Exercise 1 *Determinaţi soluţiile generale ale următoarelor sisteme:*

$$(a)\quad \begin{cases} x'(t) = & x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = & x(t) + y(t) \end{cases} \qquad (d)\quad \begin{cases} x'(t) = & 5x(t) + 3y(t) + 1 \\ y'(t) = & -6x(t) - 4y(t) + e^{-t} \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} x'(t) = & 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = & x(t) + 2y(t) \end{cases} \qquad (e)\quad \begin{cases} x'(t) = & x(t) + 3y(t) + \cos(t) \\ y'(t) = & x(t) - y(t) + 2t \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} x'(t) = & x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = & x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = & -y(t) + 2z(t) \end{cases} \qquad (f)\quad \begin{cases} x'(t) = & x(t) - 2y(t) - 2z(t) + e^{-t} \\ y'(t) = & -2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = & 2x(t) - y(t) - 3z(t) + e^{-t} \end{cases}$$

Exercise 2 *Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţiile următoarelor probleme Cauchy:*

$$(a)\ \begin{cases} x'(t) = & x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = & x(t) + y(t) \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2$$

$$(b)\ \begin{cases} x'(t) = & x(t) - y(t) + t - 1 \\ y'(t) = & -2x(t) + 4y(t) + \cos(t) \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1$$

$$(c)\ \begin{cases} x'(t) = & x(t) + 2y(t) + e^{-t} \\ y'(t) = & -2x(t) + y(t) + 1 \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1$$

$$(d)\ \begin{cases} x'(t) = & -x(t) + 3y(t) + 3z(t) + 27t^2 \\ y'(t) = & 2x(t) - 2y(t) - 5z(t) + 3t \\ z'(t) = & -2x(t) + 3y(t) + 6z(t) + 3 \end{cases} \quad x(0) = 50,\ y(0) = -30,\ z(0) = 26$$

Exercise 3 *Se consideră sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = & x(t) + y(t) \\ y'(t) = & -2x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

(a) Determinaţi soluţiile sistemului ce satisfac condiţiile:

$$\begin{cases} x(0) = & 3 \\ y(0) = & 0 \end{cases},\ \begin{cases} x(0) = & 0 \\ y(0) = & 3 \end{cases},\ \begin{cases} x(0) = & -3 \\ y(0) = & 0 \end{cases},\ \begin{cases} x(0) = & 0 \\ y(0) = & -3 \end{cases}$$

(b) Pentru fiecare soluţie de la punctul (a) *calculaţi* $\lim_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim_{t\to+\infty} y(t)$;

(c) Reprezentaţi portretul fazic corespunzător în care să apară orbitele soluţiilor de la punctul (a).

Exercise 4 *Se consideră sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

(a) Determinaţi soluţia generală a sistemului.

(b) Calculaţi $\lim_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim_{t\to+\infty} y(t)$;

(c) Reprezentaţi portretul fazic corespunzător.

Exercise 5 *Reprezentaţi portretele fazice şi precizaţi (fără a determina soluţia) pentru care din sistemele următoare are loc* $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$:

$$(a)\ \begin{cases} x'(t) = & 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = & x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x'(t) = & -x(t) - y(t) \\ y'(t) = & x(t) - y(t) \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = & -x(t) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = & -2x(t) \\ y'(t) = & -4x(t) - 2y(t) \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x'(t) = & x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = & 5x(t) - 3y(t) \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x'(t) = & 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = & y(t) \end{cases}$