Seminar 6

1. Calculati derivata de ordinul $n \in \mathbb{N}$ a functiilor de mai jos si precizati multimea pe care aceste functii sunt indefinit derivabile
   a) $f(x) = \sin x$
   b) $f(x) = \ln(x+1)$
   c) $f(x) = (x^2 - x)\,\mathrm{e}^x$
   d) $f(x) = \sqrt{1-x}$

2. Pentru functiile de la exercitiul anterior, punctul $x_0 = 0$ si numarul $n \in \mathbb{N}$, determinati
   a) Polinomul lui Taylor de grad n asociat functiei f in punctul x_0
   b) Multimea de convergenta a seriei Taylor corespunzatoare.

3. Utilizand operatii cu serii de puteri, justificati egalitatile
   a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1)$$
   b)
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad \forall x \in [-1,1)$$

4. Determinati multimea de convergenta a seriei de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,(x-1)^n$

Exercitii suplimentare

1. Calculati derivata de ordinul $n \in \mathbb{N}$ a functiilor de mai jos si precizati multimea pe care aceste functii sunt indefinit derivabile
   a) $f(x) = \cos x$
   b) $f(x) = x\sqrt{x+1}$
   c) $f(x) = \ln(1-x^2)$
   d) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

2. Pentru functiile de la exercitiul anterior, punctul $x_0 = 0$ si numarul $n \in \mathbb{N}$, determinati
   a) Polinomul lui Taylor de grad n asociat functiei f in punctul x_0
   b) Multimea de convergenta a seriei Taylor corespunzatoare.

3. Determinati multimea de convergenta a seriilor de puteri
   a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^3}\,(x+1)^n$
   b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right) x^n$
   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$

4. Utilizand operatii cu serii de puteri, justificati egalitatile
   a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(x-1)^2}, \quad \forall x \in (-1,1)$$
   b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
   c)
$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}\, x^{2n+1} = \arcsin x, \quad \forall x \in [-1,1]$$