1.3.48

• $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$: $x \equiv y \iff |x| = |y|$

1. $x \equiv x$ (adevărat) $\Rightarrow$ relație ~~tranzitivă~~ reflexivă ✓

2. $x \equiv y$ și $y \equiv z$

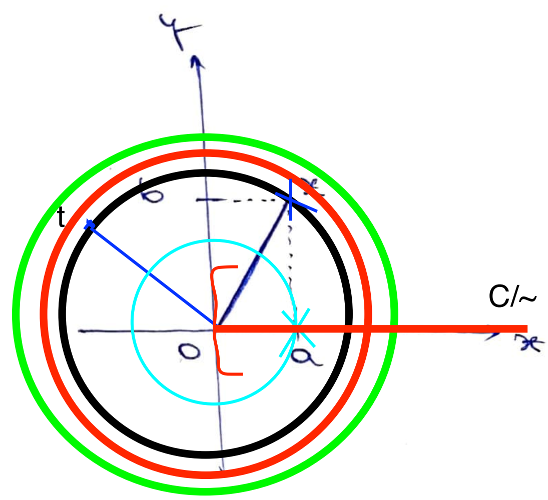
$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$|x| = |y|$ și $|y| = |z|$ $\Rightarrow$ $|x| = |z|$ $\Rightarrow$ relație tranzitivă ✓

3. $x \equiv y \Rightarrow |x| = |y| \iff |y| = |x| \Rightarrow y \equiv x$

$\Rightarrow$ relație simetrică ✓

Mulțimea factor $\mathbb{C}/_{\equiv}$



$x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d(x, 0) = |x|$

$\mathbb{C}/_{\equiv} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}_+, b = 0\}$

sau

$\mathbb{C}/_{\equiv} = \{a + bi \mid a = 0, b \in \mathbb{R}_+\}$

- împărțirea planului în cercuri concentrice

$\mathbb{C}/_{\equiv} \xleftrightarrow{\text{bij}} \mathbb{R}_+$

1 on 1

1.3.48

• $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*, \equiv)$: $x \equiv y \iff \arg(x) = \arg(y)$

1. $x \equiv x$ (adevărat)

$\arg(x) = \arg(x) \Rightarrow$ rel. reflexivă ✓

2. $x \equiv y$ și $y \equiv z$

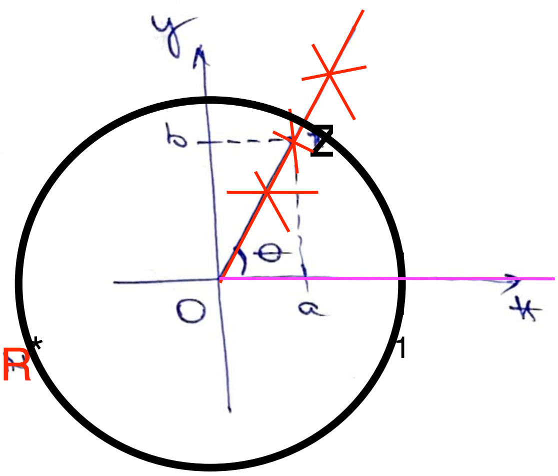
$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$\arg(x) = \arg(y)$ și $\arg(y) = \arg(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \arg(x) = \arg(z) \iff x \equiv z \Rightarrow$ rel. tranzitivă ✓

3. $x \equiv y \iff \arg(x) = \arg(y) \iff$

$\arg(y) = \arg(x) \iff y \equiv x \Rightarrow$ simetrică ✓



Mulțimea factor $\mathbb{C}^*/_{\equiv}$

$z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}^*$

$\theta = \arg(z)$

$\mathbb{C}^*/_{\equiv} = \{ a + bi \mid a^2 + b^2 = m \}$, $m \in \mathbb{R}^*$

$a, b \in \mathbb{R}^*$

Noi considerăm $\underline{m = 1}$

~~Atunci~~ Atunci:

$\underbrace{\mathbb{C}^*/_{\equiv} \xleftrightarrow{\text{bij.}} (0, 2\pi)} = \left\{ \theta \in (0, 2\pi) \;\middle|\; \begin{matrix} \sin\theta = a \\ \cos\theta = b \end{matrix} \right\}$

1.4.39

$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \sim)$

$(a,b)\sim(c,d) \iff ad = cb$

echivalență pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$

1. $(a,b)\sim(a,b)$?

$\Updownarrow$

$ab = ab$ (reflexivă) ✓

2. $(a,b)\sim(c,d)$ și $(c,d)\sim(e,f)$

$ad = cb$ și $cf = ed \mid : f \in \mathbb{Z}^*$

$c = \frac{ed}{f}$

$ad = \frac{edb}{f} \mid : d \in \mathbb{Z}^* \implies af = eb \iff (a,b)\sim(e,f)$

(tranzitivă) ✓

3. $(a,b)\sim(c,d) \iff \underline{ad = cb} \iff cb = ad \iff (c,d)\sim(a,b)$

(Simetrică) ✓

Mulțimea factor $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_\sim$

$(a,b)\sim(c,d) \iff \underline{ad = cb},\ b,d \in \mathbb{Z}^*$

$\Updownarrow$

$\mathbb{Q} \ni \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

a = 1, b = 2;
c = 2; d = 4;
(a, b) ~ (c, d)

$\underline{\underline{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_\sim}} = \{(a,b) \mid a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}^*,\ \frac{a}{b} \text{ ireductibil}\}$

$= \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, (a,b) = 1\}$ $\underline{\underline{= \mathbb{Q}}}$

1.4.40

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+1}{b^2}$

$f\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{4}{1} = 4$

$f\left(\frac{9}{3}\right) = \frac{10}{9}$

$\frac{3}{1} = 3$, $\frac{9}{3} = 3$

$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$g\left(\frac{a}{b}\right) = 2\frac{a}{b} + 3$

bine definită

- definiție independentă față de alegerea reprezentanților pt. $\sim$ pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

NU este bine definită

Trebuie adăugat $(a,b) = 1$.

h, k nu sunt bine definite

1.4.41

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$$

Arătăm: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}}$ și $\boxed{\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ad+cb}{bd} \stackrel{?}{=} \frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$$

$$\frac{ac}{bd} \stackrel{?}{=} \frac{a'c'}{b'd'}$$

$\boxed{ab'}dd' + \boxed{cd'}bb' = \boxed{a'b}dd' + \boxed{c'd}bb'$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}\ ;\ \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow ab' = a'b\ ;\ cd' = c'd$$

$$(+)\quad \begin{aligned} (ad+cb)b'd' &= adb'd' + cbb'd' \\ &\,\| \\ (a'd'+c'b')bd &= a'd'bd + c'b'bd \end{aligned}$$

$$(\cdot)\quad acb'd' = \boxed{ab'}\boxed{cd'} = \boxed{a'b}\boxed{c'd} = a'c'bd$$

1.4.42

(1) $x \equiv_m y \iff m \mid (x-y)$

1. Fie $x \in \mathbb{Z}$: $x \equiv_m x \iff m \mid 0$ (adevărat) $\Rightarrow$ reflexivă ✓

2. $x \equiv_m y$ și $y \equiv_m z$

$$\begin{array}{l} m \mid (x-y) \\ m \mid (y-z) \\ \hline \qquad\qquad (+) \end{array}$$

$m \mid (x - \cancel{y} + \cancel{y} - z) \Rightarrow m \mid (x-z) \Rightarrow x \equiv_m z \Rightarrow$ tranzitivă ✓

3. $x \equiv_m y \Rightarrow m \mid (x-y) \Rightarrow m \mid (-1)(x-y) \Rightarrow m \mid (y-x) \Rightarrow y \equiv_m x$

$\Rightarrow$ simetrică ✓

(2) Obs. $x \equiv_m y \iff x, y$ au același rest după împărțirea la m

$x = m \cdot a + r_1 \quad a, r_1 \in \mathbb{Z}$

$y = m \cdot b + r_2 \quad b, r_2 \in \mathbb{Z} \quad \underline{0 \leq r_1, r_2 < m}$

„$\Leftarrow$" $r_1 = r_2 \Rightarrow x - y = m(a-b) \Rightarrow m \mid x-y \Rightarrow$

$\Rightarrow x \equiv_m y$

„$\Rightarrow$" $x \equiv_m y \Rightarrow x - y = \underline{m(a-b)} + r_1 - r_2$

$r_1 - r_2 = (x-y) - m(a-b) \Rightarrow m \mid r_1 - r_2$

- $r_1 - r_2 \in \{-m+1, \dots, -1, \underline{\underline{0}}, 1, \dots, m-1\}$

$\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$

(din cauza condițiilor)

$\mathbb{Z}/_{\equiv_m} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{m-1}\} = \{[0]_m, \dots, [m-1]_m\}$