Cuadrice pe ecuaţiile canonice

Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

14 aprilie 2021

Cuadrice pe ecuaţii reduse

Se numeşte *cuadrică* în $\mathbb{R}^3$ mulţimea punctelor $P(x, y, z)$ ale căror coordonate verifică o ecuaţie de gradul al doilea, adică o ecuaţie de forma

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_{10}x + \\ &+ a_{20}y + a_{30}y + a_{00} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde toţi coeficienţii sunt numere reale, iar coeficienţii termenilor de gradul al doilea nu sunt toţi nuli (adică, altfel spus, ecuaţia este, realmente, de gradul al doilea). În această secţiune nu vom aborda teoria generală a cuadricelor, ci ne vom mulţumi să studiem acele cuadrice care sunt scrise sub forma canonică, adică, în esenţă, termenii de gradul al doilea micşti nu sunt prezenţi, iar termenii de gradul întâi, dacă este posibil, sunt absenţi, de asemenea. Vom vedea ca aceasta nu este întotdeauna cazul. Urmează să vedem, mai târziu, că, printr-o schimbare de coordonate, orice cuadrică se reduce la una dintre aceste cuadrice pe care le vom studia mai jos.

Elipsoidul

- O submulţime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *elipsoid* dacă există un sistem de coordonate cartezian şi trei numere a, b, c, strict pozitive, astfel încât
$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}. \tag{2}$$
- Prin urmare, un elipsoid este o suprafaţă de ecuaţie
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$
- Numerele a, b, c se numesc *semiaxe* ale elipsoidului.
- Dacă ele sunt distincte două câte două, atunci elipsoidul se numeşte *elipsoid triaxial*.

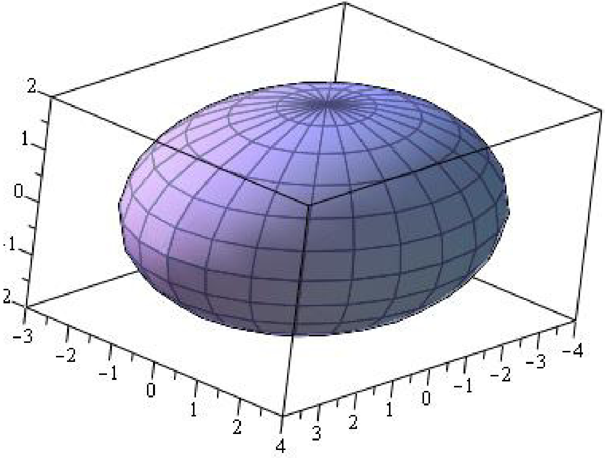
Elipsoidul

- Dacă două dintre ele sunt egale (de exemplu $a = b$), atunci elipsoidul nostru este ceea ce se numeşte un *elipsoid de rotaţie*:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  şi se poate obţine prin rotirea unei elipse în jurul unei axe (axa Oz), în cazul nostru).
- Dacă, în sfârşit, toate semiaxele sunt egale: $a = b = c$, elipsoidul nostru este o sferă de rază a.

Elipsoidul



Elipsoidul

Vom enumera acum o serie de proprietăţi ale elipsoidului care ne vor permite, în cele din urmă, să stabilim forma acestei suprafeţe.

Proprietatea

Elipsoidul (3) este mărginit de un paralelipiped dreptunghic, cu feţele paralele cu planele de coordonate, cu centrul în origine, de muchii egale, respectiv, cu $2a, 2b, 2c$ *Aşadar, în particular, elipsoidul, ca mulţime de puncte, este o mulţime mărginită.*

Demonstraţie.

Într-adevăr, ecuaţia (3) se poate rescrie sub forma

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

$\square$

Demonstraţie.

Cum membrul stâng al aceste ecuaţii este, în mod evident, pozitiv, acelaşi lucru trebuie să se întâmple şi cu membrul drept, ceea ce ne conduce la inegalitatea

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1,$$

de unde $x \in [-a, a]$. Perfect analog rezultă că $y \in [-b, b]$ şi $z \in [-c, c]$, adică tocmai ceea ce voiam să demonstrăm, că $(x, y, z) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$. $\square$

Elipsoidul

Elipsoidul este o figură care are un grad destul de înalt de simetrie:

Proprietatea

Elipsoidul are trei plane de simetrie: xOy, yOz, zOx, *trei axe de simetrie:* Ox, Oy, Oz, *precum şi un centru de simetrie, originea* $O(0,0,0)$ *a axelor de coordonate. În plus, dacă elipsoidul nu este triaxial, el poate avea şi alte plane şi axe de simetrie (nu şi alte centre de simetrie, însă).*

Demonstraţie.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al elipsoidului. Atunci coordonatele sale verifică ecuaţia

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

$\square$

Elipsoidul

Demonstraţie.

Pentru a demonstra că, de exemplu, planul xOy este plan de simetrie, este suficient să demonstrăm că simetricul lui M_0 faţă de acest plan aparţine, de asemenea, elipsoidului. Dar este evident că simetricul lui M_0 este punctul de coordonate $(x_0, y_0, -z_0)$, ale cărui coordonate, în mod evident, verifică ecuaţia elipsoidului, deci aparţine elipsoidului. Raţionamentul este analog pentru celelalte plane de coordonate. $\square$

Planele de coordonate se mai numesc şi *plane principale* ale elipsoidului, întrucât ele sunt plane de simetrie.

Elipsoidul

- Faptul că axele de coordonate sunt axe de simetrie rezultă imediat din observaţiile de mai sus, întrucât ele sunt intersecţii de plane de simetrie.
- Originea coordonatelor este centru de simetrie, deoarece este intersecţia a două (de fapt chiar trei) axe de simetrie.
- Axele de coordonate, ca axe de simetrie ale elipsoidului, se mai numesc şi *axe principale* ale acestuia.

Să presupunem acum că elipsoidul nostru este elipsoid de rotaţie, de exemplu, în jurul axei Oz. Afirmăm că orice plan care trece prin axa de rotaţie este plan de simetrie. Am văzut că ecuaţia unui plan care trece prin axa Oz are o ecuaţie de forma $\Pi : Ax + By = 0$.

Elipsoidul

Să presupunem, ca mai sus, că $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct de pe elipsoid, care acum este elipsoid de rotaţie în jurul axei Oz, deci coordonatele sale verifică ecuaţia:

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Vom stabili coordonatele simetricului M_0' al lui M_0 relativ la planul Π. Ecuaţiile normalei la planul Π care trece prin M_0 sunt

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{0}.$$

Determinăm mai întâi punctul de intersecţie M_1 dintre această normală şi planul Π. Evident, coordonatele acestui punct sunt date de sistemul

$$\begin{cases} Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0 \\ z = z_0 \\ Ax + By = 0 \end{cases}.$$

Obţinem, prin urmare, $x_1 = \frac{B^2x_0 - ABy_0}{A^2+B^2}$, $y_1 = \frac{A^2y_0 - ABx_0}{A^2+B^2}$, $z_1 = z_0$. Punctul M_1 trebuie să fie mijlocul segmentului M_0M_0', deci trebuie să avem

$$\begin{cases} x_0' = 2x_1 - x_0 \\ y_0' = 2y_1 - y_0 \\ z_0' = 2z_1 - z_0. \end{cases}$$

Elipsoidul

Aşadar,

$$x_0' = \frac{2B^2x_0 - 2ABy_0}{A^2+B^2} - x_0 = \frac{(B^2-A^2)x_0 - 2ABy_0}{A^2+B^2},$$

$$y_0' = \frac{2A^2y_0 - 2ABx_0}{A^2+B^2} - y_0 = \frac{-2ABx_0 + (A^2-B^2)y_0}{A^2+B^2},$$

$$z_0' = z_0.$$

Avem, prin urmare,

$$\frac{x_0'^2 + y_0'^2}{a^2} + \frac{z_0'^2}{c^2} = \frac{(B^2-A^2)^2x_0^2 + 4A^2B^2y_0^2 - 4AB(B^2-A^2)x_0y_0}{a^2(A^2+B^2)^2} +$$

$$+ \frac{(B^2-A^2)^2y_0^2 + 4A^2B^2x_0^2 + 4AB(B^2-A^2)x_0y_0}{a^2(A^2+B^2)^2} + \frac{z_0^2}{c^2} =$$

$$= \frac{(A^2+B^2)^2x_0^2 + (A^2+B^2)^2y_0^2}{a^2(A^2+B^2)^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_0^2+y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

Elipsoidul

deci punctul M_0' aparţine elipsoidului, ceea ce înseamnă că planul Π este plan de simetrie al elipsoidului.
În mod analog, în cazul sferei se demonstrează că orice plan care trece prin originea coordonatelor este plan de simetrie şi, în mod implicit, orice dreaptă care trece prin originea coordonatelor este axă de simetrie.
În demersul nostru de a stabili forma elipsoidului, începem prin a determina curbele după care planele de simetrie îl intersectează:

Proprietatea

Intersecţiile planelor de simetrie ale unui elipsoid cu elipsoidul sunt trei elipse reale.

Elipsoidul

Demonstraţie.

Intersecţia elipsoidului cu planul xOy este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Aceastea sunt, în mod evident, ecuaţiile unei elipse situate în planul xOy, de semiaxe a şi b. □

Elipsoidul

Demonstraţie.

Intersecţia elipsoidului cu planul yOz este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Aceastea sunt ecuaţiile unei elipse situate în planul yOz, de semiaxe b şi c. □

Elipsoidul

Demonstraţie.

Intersecţia elipsoidului cu planul zOx este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Aceastea sunt ecuaţiile unei elipse situate în planul zOy, de semiaxe a şi c. $\square$

Elipsoidul

Vom studia acum intersecţiile elipsoidului cu plane de ecuaţii $z = k$, unde k este un număr real (plane paralele cu planul xOy). Această intersecţie este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}.$$

Al doilea dintre sistemele de mai sus are soluţie nevidă dacă şi numai dacă $1 - \frac{k^2}{c^2} \leq 0$, adică dacă şi numai dacă $-c \leq k \leq c$. Dacă $k = \pm c$, atunci intersecţia se reduce la un punct. Este vorba de punctul $(0, 0, c)$, dacă avem $k = c$, respectiv punctul $(0, 0, -c)$, dacă avem $k = -c$. Remarcăm că aceste puncte sunt, de fapt, punctele în care axa Oz, de ecuaţii $x = 0, y = 0$, intersectează elipsoidul. Vom vedea că mai există patru puncte analoage, pe celelalte două axe de coordonate. Ele se numesc *vârfuri* ale elipsoidului.

Elipsoidul

Situaţia cu adevărat interesantă, care ne dă o primă idee relativ la forma elipsoidului (şi care justifică denumirea) este cea în care $-c < k < c$. În acest caz, intersecţia este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k \end{cases},$$

care, din moment ce numitorii sunt strict pozitivi, este, în mod evident, o elipsă, situată în planul $z = k$, de semiaxe egale, respectiv, cu $a\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$ şi $b\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$. Este clar că lungimile semiaxelor descresc pe măsură ce $|k|$ creşte. În particular, ele au valoarea maximă pentru cazul în care $k = 0$, adică pentru cazul în care planul de intersecţie este chiar planul de coordonate xOy.

Elipsoidul

Atunci ecuaţiile elipsei de intersecţie sunt

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate *xOz* şi *yOz* sunt analoage şi ne conduc la rezultate analoage.

Considerăm elipsoidul (3) şi un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al său. Vom studia intersecţia unei drepte oarecare ce trece prin M_0 cu elipsoidul. Ecuaţiile parametrice ale unei astfel de drepte sunt:

$$(\Delta):\ \begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

$\mathbf{v}(l, m, n)$ este, desigur, vectorul director al dreptei Δ. Pentru a determina punctele de intersecţie dintre elipsoid şi dreapta Δ, înlocuim x, y, z din ecuaţiile dreptei (4) în ecuaţia elipsoidului. Se obţine:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} + \frac{(z_0 + nt)^2}{c^2} - 1 = 0$$

sau, după ce facem calculele şi grupăm după puterile lui t,

$$t^2\left(b^2c^2l^2+a^2c^2m^2+a^2b^2n^2\right)+2t\left(b^2c^2x_0l+a^2c^2y_0m+a^2b^2z_0n\right)+$$
$$+b^2c^2x_0^2+a^2c^2y_0^2+a^2b^2z_0^2-a^2b^2c^2=0.$$

Termenul liber al ecuaţiei de mai sus este egal cu zero, deoarece punctul coordonatele punctului M_0 verifică ecuaţia elipsoidului. Ca atare, ecuaţia se transformă în

$$t^2\left(b^2c^2l^2+a^2c^2m^2+a^2b^2n^2\right)+2t\left(b^2c^2x_0l+a^2c^2y_0m+a^2b^2z_0n\right)=0. \tag{5}$$

Această ecuaţie o vom numi *ecuaţie de intersecţie* dintre elipsoid şi dreapta Δ. Este clar că ecuaţia de intersecţie este, întotdeauna, de gradul al doilea şi ea va admite două soluţi reale, care corespund punctului M_0 şi celui de-al doilea punct de intersecţie.

Pentru ca dreapta să fie *tangentă* elipsoidului, este necesar (şi suficient) ca ecuaţia de intersecţie să admită o soluţie dublă (evident, $t = 0$). Pentru aceasta, coeficientul termenului de gradul întâi în t din ecuaţia (5) trebuie să fie egal cu zero, adică

$$b^2c^2x_0l + a^2c^2y_0m + a^2b^2z_0n = 0. \tag{6}$$

Ecuaţia (6) are o interpretare geometrică remarcabilă. Considerăm vectorul $\mathbf{n}\left(b^2c^2x_0, a^2c^2y_0, a^2b^2z_0\right)$. Atunci ecuaţia (6) se poate scrie

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{7}$$

Semnificaţia acestei ecuaţii este aceea că *fiecare dreaptă care trece prin M_0 şi al cărui vector director verifică ecuaţia (6) este perpendiculară pe vectorul* $\mathbf{n}$. Prin urmare, mulţimea acestor drepte prin M_0, tangente la elipsoid, formează un plan, *planul tangent la elipsoid în punctul M_0*, care are vectorul normal $\mathbf{n}$.

Aşadar, ecuaţia planului tangent în M_0 se scrie

$$b^2c^2x_0(x-x_0)+a^2c^2y_0(y-y_0)+a^2b^2z_0(z-z_0)=0$$

sau

$$b^2c^2x_0x+a^2c^2y_0y+a^2b^2z_0z-b^2c^2x_0^2-a^2c^2y_0^2-a^2b^2z_0^2=0.$$

Din ecuaţia elipsoidului, rezultă că termenul liber al ecuaţiei de mai sus este egal cu $-a^2b^2c^2$, deci ecuaţia devine

$$b^2c^2x_0x+a^2c^2y_0y+a^2b^2z_0z-a^2b^2c^2=0$$

sau, după ce împărţim la $a^2b^2c^2$,

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1. \tag{8}$$

Ecuaţia (8) se numeşte *ecuaţia planului tangent la elipsoid în punctul M_0 de pe elipsoid, obţinută prin dedublare*, pentru că se obţine din ecuaţia elipsoidului, înlocuind pe x^2 cu xx_0, pe y^2 cu yy_0 şi pe z^2 cu zz_0.

Conul de gradul al doilea

Definiţie

Se numeşte *con de gradul al doilea* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relative la un sistem ortonormat verifică o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{9}$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive.

Conul de gradul al doilea are aceleaşi simetrii ca şi elipsoidul, ele fiind legate direct de faptul că în ecuaţia sa toate coordonatele apar exclusiv la puterea a doua:

1. trei plane de simetrie (planele de coordonate);
2. trei axe de simetrie (axele de coordonate);
3. un centru de simetrie (originea).

Conul de gradul al doilea

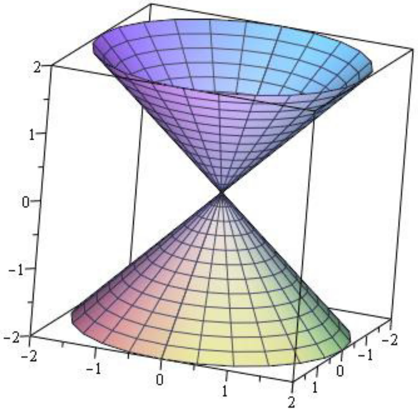


Figura: Conul de gradul al doilea

Conul de gradul al doilea

O proprietate remarcabilă a conului de gradul al doilea este aceea că *este o suprafaţă riglată*: prin fiecare punct al său trece o dreaptă (care se numeşte *generatoare* a conului).
Mai precis, *dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare al conului, iar O este originea coordonatelor, atunci fiecare punct $M(x, y, z)$ al dreptei OM_0 se află pe con.*
Demonstraţia acestei afirmaţii este foarte simplă. Într-adevăr, este foarte uşor de constatat că ecuaţiile parametrice ale dreptei OM_0 sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot t, \\ y = y_0 \cdot t, \\ z = z_0 \cdot t. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia conului, obţinem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = t^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0,$$

deci punctele dreptei verifică, într-adevăr, ecuaţia conului.
Datorită proprietăţii de mai sus se spune că O este *vârful conului*.
Utilizăm, şi în cazul conului de gradul al doilea, această metodă de a identifica forma suprafeţei.
Plane paralele cu xOy. Un astfel de plan are, în mod evident, ecuaţia de forma $z = k$, unde k este o constantă reală. O astfel de intersecţie este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ z = k \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases} .$$

În cazul în care $k \neq 0$, al doilea sistem de ecuaţii se poate rescrie sub forma

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2k^2/c^2} + \dfrac{y^2}{b^2k^2/c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} .$$

Conul de gradul al doilea

Evident, aceste ecuaţii descriu o elipsă de semiaxe $\dfrac{a|k|}{c}$ şi $\dfrac{b|k|}{c}$, situată în planul $z = k$.
Dacă, pe de altă parte, $k = 0$ (adică intersecţia se face cu planul xOy), atunci sistemul de ecuaţii de intersecţie se reduce la

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

iar acest sistem este verificat de un singur punct (originea, adică vârful conului).
Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz. În acest caz, sistemul de ecuaţii care ne dă punctele de intersecţie se scrie

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \end{cases}$$

Conul de gradul al doilea

ceea ce ne conduce la

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{h^2}{b^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Ecuaţiile (10) reprezintă, dacă $h \neq 0$, ecuaţiile unei hiperbole situate în planul $y = h$, de semiaxe $\dfrac{a|h|}{b}$ (pe axa paralelă cu Ox), respectiv $\dfrac{c|h|}{b}$ (pe axa paralelă cu Oz). Este de remarcat că axa paralelă cu Oz este cea care intersectează hiperbola, în timp ce axa paralelă cu Ox nu o intersectează.

Pe de altă parte, dacă $h = 0$, aceleaşi ecuaţii reprezintă o pereche de drepte (generatoare ale conului), de ecuaţii

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{z}{c} - \dfrac{x}{a} = 0, \end{cases} \qquad \text{respectiv} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{z}{c} + \dfrac{x}{a} = 0. \end{cases}$$

Conul de gradul al doilea

Intersecţia cu plane paralele cu planul yOz. – Este perfect analoagă cu cazul precedent.

Observaţie

Se poate demonstra că, utilizând plane care nu sunt neapărat oaralele cu planele de coordonate, prin secţiunile plane ale conului de gradul al doilea se pot obţine toate conicele. De fapt, acesta este motivul pentru care conicele se mai numesc şi *secţiuni conice*.

Ecuaţia planului tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al conului de gradul al doilea se obţine prin dedublare, ca şi în cazul elipsoidului, aşa că nu vom mai repeta raţionamentul. Prin urmare, ecuaţia planului tangent în M_0 este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0. \tag{11}$$

O proprietate remarcabilă a planului tangent într-un punct al conului este aceea că el conţine generatoarea care trece prin acel punct. Într-adevăr, neneratoarea care trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în membrul stâng al ecuaţiei planului tangent, obţinem

$$\frac{x_0^2 t}{a^2} + \frac{y_0^2 t}{b^2} - \frac{z_0^2 t}{c^2} = t\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 0,$$

ceea ce înseamnă că, într-adevăr, planul tangent conţine generatoarea rectilinie a conului care trece prin punctul de tangenţă.

În cazul în care $a = b$, ecuaţia conului devine

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

De data aceasta, secţiunile cu plane paralele cu planul xOy sunt cercuri. Conurile de acest tip se numesc *conuri de rotaţie*. Vom vedea mai târziu că suprafeţele de acest tip se pot obţine prin rotirea unei drepte care trece prin origine în jurul axei Oz.

Hiperboloidul cu o pânză.

Definiţie

Se numeşte *hiperboloid cu o pânză* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem rectangular verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{12}$$

une a, b, c sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *semiaxele* hiperboloidului.

Hiperboloidul cu o pânză.

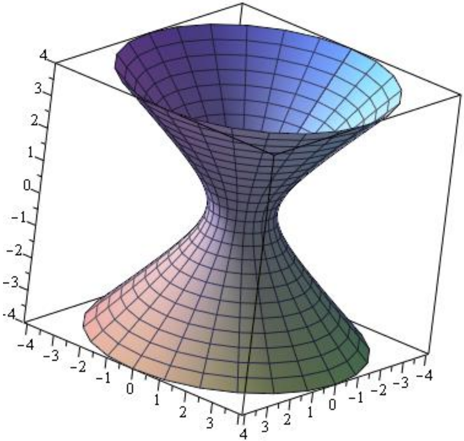


Figura: Hiperboloidul cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză.

Simetriile hiperboloidului cu o pânză sunt aceleaşi cu cele ale elipsoidului, prin urmare nu le vom mai descrie. Ne ocupăm, însă, de intersecţiile sale cu plane paralele cu planele de coordonate.
Plane paralele cu planul xOy. În acest caz, avem de studiat sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} + 1. \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză.

Cum membrul drept este întotdeauna strict pozitiv, ecuaţiile se pot rescrie ca

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile unei elipse de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$, pentru orice valori ale lui h. Un caz particular important este cel în care $h = 0$ (adică suntem în planul de coordonate xOy). Elipsa care se obţine (de semiaxe minime!) se numeşte *elipsă de stricţiune* sau de *gâtuire*.

Hiperboloidul cu o pânză.

Plane paralele cu planul xOz. În acest caz, curba de intersecţie are ecuaţiile

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2}. \end{cases} \tag{13}$$

Aici avem trei situaţii de analizat:

(a) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} < 0$, adică $h^2 > c^2$, atunci sistemul (13) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{h^2}{b^2} - 1 \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză.

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

adică avem de-a face cu o hiperbolă de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$ şi $a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$, situată într-un plan paralel cu planul xOz, la care axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Oz, iar cealaltă axă este paralelă cu axa Ox.

(b) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} = 0$, adică $h = \pm c$, atunci sistemul (13) se poate scrie sub forma

Hiperboloidul cu o pânză.

$$\begin{cases} y = \pm c, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = \pm c, \\ \left(\dfrac{z}{c} - \dfrac{x}{a}\right)\left(\dfrac{z}{c} + \dfrac{x}{a}\right) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Pentru fiecare valoare a lui h (c sau $-c$) ecuaţia de mai sus reprezintă o pereche de drepte. Pentru $h = c$, obţinem

$$\begin{cases} y = c, \\ \dfrac{z}{c} - \dfrac{x}{a} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = c, \\ \dfrac{z}{c} + \dfrac{x}{a} = 0, \end{cases}$$

în timp ce pentru $h = -c$, obţinem

Hiperboloidul cu o pânză.

$$\begin{cases} y = -c, \\ \dfrac{z}{c} - \dfrac{x}{a} = 0 \end{cases} \qquad \text{sau} \qquad \begin{cases} y = -c, \\ \dfrac{z}{c} + \dfrac{x}{a} = 0. \end{cases}$$

(c) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$, adică $h^2 < c^2$, atunci sistemul (13) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{1-h^2}{b^2}}\right)^2} - \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză.

adică avem de-a face cu o hiperbolă de semiaxe $a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$ şi $c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$, situată într-un plan paralel cu planul xOz, la care axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Ox, iar cealaltă axă este paralelă cu axa Oz.

Plane paralele cu planul yOz. Acest caz este perfect analog cu cazul precedent.

Hiperboloidul cu o pânză.

Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză.

După cum am văzut mai sus, pe hiperboloidul cu o pânză există linii drepte. Patru dintre ele au fost găsite mai devreme, ca intersecţii dintre planele *xOz* şi *yOz* cu suprafaţa. Pe suprafaţă, însă, există mult mai multe drepte. Practic, prin fiecare punct al suprafeţei trece câte o pereche de drepte, conţinute în întregime pe suprafaţă. Aceste drepte se numesc *generatoare rectilinii* ale hiperboloidului cu o pânză.

Pentru a ne convinge de acest fapt, rescriem ecuaţia hiperboloidului cu o pânză sub forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

ecuaţie care se mai poate scrie şi sub forma

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Considerăm acum sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{15}$$

unde λ şi μ sunt două numere reale care nu se anulează simultan. Întrucât, după cum am spus, cei doi parametrii nu se anulează simultan, sistemul (15) reprezintă o dreaptă. Dacă înmulţim membru cu membru cele două ecuaţii ale sistemului obţinem fie $0 = 0$, dacă unul dintre parametrii se anulează, fie ecuaţia hiperboloidului cu o pânză. Aceasta înseamnă că dreapta (15) se află pe hiperboloid.

Dacă lăsăm cei doi parametrii să varieze, obţinem o familie de drepte, care formează *prima familie de generatoare rectilinii ale hiperboloidului*.
Cea de-a doua familie de generatoare rectilinii se obţine în acelaşi mod, identificând în mod diferit factorii de gradul întâi. Ea are ecuaţiile

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{16}$$

unde α şi β sunt, din nou, parametrii reali care nu se anulează simultan.

Ecuaţia planului tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al hiperboloidului cu o pânză se obţine prin dedublare, ca şi în cazul elipsoidului, aşa că nu vom mai repeta raţionamentul. Prin urmare, ecuaţia planului tangent în M_0 este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1. \tag{17}$$

Hiperboloidul cu două pânze

Definiţie

Se numeşte *hiperboloid cu două pânze* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate ralativ la un sistem de coordonate ortogonal, verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{18}$$

unde a, b, c sunt constante reale strict pozitive.

Hiperboloidul cu două pânze

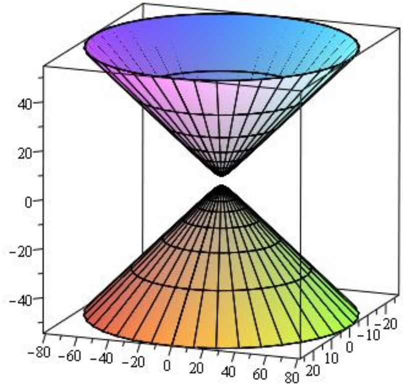


Figura: Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze

Forma hiperboloidului cu două pânze.

Simetriile sunt aceleaşi ca şi în cazul elipsoidului, aşa că trecen direct la studiul intersecţiilor cu plane paralele cu planele de coordonate.

Intersecţii cu plane paralele cu planul xOy. Avem de studiat soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases} \tag{19}$$

Avem de analizat trei cazuri:

(a) Dacă $\dfrac{h^2}{c^2} - 1 < 0$, adică $-c < h < c$, atunci sistemul (19) nu admite soluţii, deci planul şi suprafaţa nu se intersectează.

Hiperboloidul cu două pânze

Forma hiperboloidului cu două pânze.

(b) Dacă $\dfrac{h^2}{c^2} - 1 = 0$, adică $h = \pm c$, sistemul are o singură soluţie pentru fiecare valoare a lui h (c sau $-c$). În acest caz, planul este, de fapt, tangent la suprafaţă (în punctul $(0,0,c)$, respectiv în punctul $(0,0,-c)$).

(c) Dacă $\dfrac{h^2}{c^2} - 1 > 0$, adică $|h| > c$, atunci sistemul (19) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

Hiperboloidul cu două pânze

Forma hiperboloidului cu două pânze.

care reprezintă ecuaţiile unei elipse de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, situată în planul $z=h$.

Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz. De data aceasta avem de studiat soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{b^2}. \end{cases} \tag{20}$$

Acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{h^2}{b^2}, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

care reprezintă, indiferent de valoarea lui h, ecuaţiile unei hiperbole de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}$ şi $a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}$, situată în planul $y = h$, astfel încât axa hiperbolei care intersectează curba este paralelă cu axa Oz, iar cealaltă axă este paralelă cu axa Ox.

Hiperboloidul cu două pânze

Forma hiperboloidului cu două pânze.

Intersecţii cu plane paralele cu planul yOz. Situaţia este perfect analoagă cu cea discutată la punctul precedent.

Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze de rotaţie.

Dacă $a = b$, ecuaţia hiperboloidului cu două pânze se scrie

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Acest tip particular de hiperboloid se numeşte *hiperboloid cu două pânze de rotaţie*, deoarece, după cum vom vedea în capitolul următor, el se poate obţine prin rotirea unei hiperbole în jurul axei Oz. Este de remarcat că, în cazul hiperboloizilor cu două pânze de rotaţie, *orice plan care trece prin axa Oz este plan de simetrie al hiperboloidului.*

Hiperboloidul cu două pânze

Planul tangent într-un punct al hiperboloidului cu două pânze.

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare al hiperboloidului cu două pânze, se poate arăta, exact ca în cazul elipsoidului, că ecuaţia planului tangent în M_0 la hiperboloid va fi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = -1,$$

adică ea se poate obţine prin dedublarea ecuaţiei hiperboloidului cu două pânze.

Paraboloidul eliptic

Definiţie

Se numeşte *paraboloid eliptic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem cartezian de coordonate verifică o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{21}$$

unde p şi q sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *parametrii paraboloidului eliptic*.

Paraboloidul eliptic

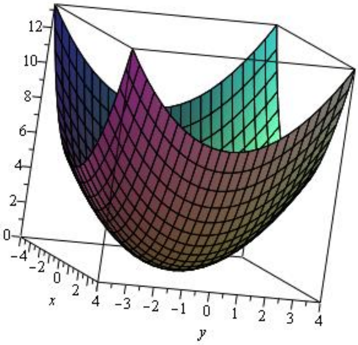


Figura: Paraboloidul eliptic

Paraboloidul eliptic

Forma paraboloidului eliptic.

Simetriile paraboloidului eliptic nu sunt atât de numeroase ca în cazul cuadricelor studiate până acum. Astfel, el are:

1. două plane de simetrie (yOz şi xOz, deoarece coordonatele x şi z apar doar la puterea a doua);
2. o axă de simetrie, axa Oz, ca intersecţie a celor două plane de simetrie.

Mai departe, ca şi mai înainte, vom studia intersecţia dintre paraboloidul eliptic şi plane paralele cu cele trei plane de coordonate.

Intersecţii cu plane paralele cu planul xOy. Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic

Forma paraboloidului eliptic.

sau

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \tag{22}$$

Avem trei situaţii de examinat:
(a) Dacă $h < 0$, atunci sistemul (22) nu admite soluţii, adică planul şi suprafaţa nu au puncte comune.
(b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (22) admite o soluţie unică, $(0, 0, 0)$, adică originea. În fapt, aceasta înseamnă că planul de coordonate xOy este tangent la paraboloidul hiperbolic în originea coordonatelor.

(c) Dacă $h > 0$, sistemul (22) se poate scrie

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuaţiile unei elipse, situată în planul $z = h$, de semiaxe $\sqrt{2ph}$ şi $\sqrt{2qh}$.

Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz. De data aceasta, avem de studiat sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic

Forma paraboloidului eliptic.

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz - \dfrac{ph^2}{q}, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru p, situată în planul $y = h$.

Intersecţii cu plane paralele cu planul yOz. Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2qz - \dfrac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic

Forma paraboloidului eliptic.

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru q, situată în planul $x = h$.

Dacă cei doi parametrii ai paraboloidului sunt egali, $p = q$, atunci ecuaţia suprafeţei devine

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$$

sau

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Acest paraboloid particular se numeşte *paraboloid eliptic de rotaţie*. Suprafaţa se poate obţine, într-adevăr, prin rotirea unei parabole în jurul axei Oz.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al paraboloidului eliptic (21). Studiem mai întâi intersecţia dintre paraboloid şi o dreaptă oarecare ce trece prin punctul M_0. Ecuaţiile parametrice ale unei astfel de drepte se pot scrie:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia paraboloidului, obţinem:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{p} + \frac{(y_0 + mt)^2}{q} = 2(z_0 + nt)$$

sau

$$q(x_0 + lt)^2 + p(y_0 + mt)^2 - 2pq(z_0 + nt) = 0.$$

Paraboloidul eliptic

Planul tangent într-un punct al paraboloidului eliptic.

După ce facem calculele şi grupăm după puterile lui t, ecuaţia de mai sus se transformă în:

$$t^2(ql^2+pm^2)+2t(qx_0l+py_0m-pqn)+qx_0^2+py_0^2-2pqz_0=0.$$

Termenul liber este egal cu zero, deoarece M_0 se află pe paraboloid, deci ecuaţia de intersecţie devine

$$t^2(ql^2+pm^2)+2t(qx_0l+py_0m-pqn)=0. \tag{23}$$

Pentru ca dreapta şi paraboloidul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuaţia de intersecţie (23) trebuie să aibă soluţie dublă. Dar o soluţie este, întotdeauna, $t=0$, prin urmare şi a doua soluţie trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispare, adică dacă avem

$$qx_0l+py_0m-pqn=0. \tag{24}$$

Paraboloidul eliptic

Planul tangent într-un punct al paraboloidului eliptic.

Dacă presupunem că **n** este vectorul de componente $(qx_0, py_0, -pq)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuaţia (24) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0, iar vectorul său director verifică ecuaţia (24) este perpendicular pe vectorul* **n**. Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că **n** este vectorul normal la planul tangent la paraboloidul eliptic în punctul M_0. Ca atare, ecuaţia planului tangent în M_0 este:

$$qx_0(x - x_0) + py_0(y - y_0) - pq(z - z_0) = 0$$

sau

$$qx_0x + py_0y - pqz - qx_0^2 - py_0^2 + pqz_0 = 0$$

sau, încă,

$$qx_0x + py_0y - pqz - pqz_0 - (qx_0^2 - py_0^2 + 2pqz_0) = 0.$$

Paraboloidul eliptic

Planul tangent într-un punct al paraboloidului eliptic.

Termenul din paranteză din ecuaţia de mai sus este egal cu zero, din nou, pentru că M_0 se află pe paraboloid, deci ecuaţia devine:

$$qx_0x + py_0y = pq(z + z_0)$$

sau, dacă împărţim prin pq,

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} = p(z + z_0). \tag{25}$$

Este de remarcat că, şi în cazul paraboloidului eliptic, ca şi în cazul celorlalte cuadrice studiate până acum ecuaţia planului tangent se obţine din ecuaţia paraboloidului (21) prin *dedublare*. Diferenţa este că de data aceasta apar şi termeni de gradul întâi. Regulile de dedublare sunt, deci:

- x^2 şi y^2 se înlocuiesc cu xx_0 (respectiv yy_0);
- x se înlocuieşte cu $(z + z_0)/2$.

Paraboloidul hiperbolic

Definiţie

Se numeşte *paraboloid hiperbolic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem cartezian de coordonate verifică o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{26}$$

unde p şi q sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *parametrii paraboloidului hiperbolic*.

Paraboloidul hiperbolic

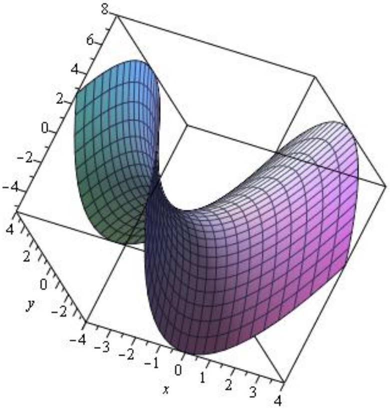


Figura: Paraboloidul hiperbolic

Simetriile paraboloidului hiperbolic sunt aceleaşi cu cele ale paraboloidului eliptic:

1. două plane de simetrie (yOz şi xOz, deoarece coordonatele x şi z apar doar la puterea a doua);
2. o axă de simetrie, axa Oz, ca intersecţie a celor două plane de simetrie.

Mai departe, vom studia intersecţia dintre paraboloidul hiperbolic şi plane paralele cu cele trei plane de coordonate.
Intersecţii cu plane paralele cu planul xOy. Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \tag{27}$$

Avem trei situaţii de examinat:

(a) Dacă $h < 0$, atunci $-h > 0$, iar sistemul (27) se poate rescrie sub forma

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{-2qh}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{-2ph}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuaţiile unei hiperbole de semiaxe $\sqrt{-2qh}$ şi $\sqrt{-2ph}$, situată în planul $z = h$, astfel încât semiaxa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Oy, iar cealaltă semieaxă este paralelă cu axa Ox.

(b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (27) devine

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile unei perechi de drepte concurente, situate în planul xOy, care trec prin origine:

$$\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \end{cases} \qquad \text{respectiv} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0. \end{cases}$$

(c) Dacă $h > 0$, sistemul (27) se poate scrie

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuaţiile unei hiperbole de semiaxe $\sqrt{2ph}$ şi $\sqrt{2qh}$, situată în planul $z = h$, astfel încât semiaxa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Ox, iar cealaltă semieaxă este paralelă cu axa Oy.

Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz. De data aceasta, avem de studiat sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz + \dfrac{ph^2}{q}, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru p, situată în planul $y = h$.

Intersecţii cu plane paralele cu planul yOz. Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2qz + \dfrac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru q, situată în planul $x = h$.

Paraboloidul hiperbolic are o importantă trăsătură comună cu hiperboloidul cu o pânză: pe ambele există două familii de drepte, câte o pereche de drepte prin fiecare punct al paraboloidului. Pentru a determina ecuaţiile acestor familii de de drepte, numite *generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic*, procedăm ca şi în cazul hiperboloidului cu o pânză.
Rescriem, mai întâi, ecuaţia paraboloidului hiperbolic sub forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z\cdot 1.$$

Paraboloidul hiperbolic

Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic.

Pornind de la această ecuaţie, putem obţine o familie de drepte:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu z, \\ \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda, \end{cases} \tag{28}$$

unde λ şi μ sunt doi parametrii reali, care nu se anulează simultan. Dacă înmulţim membru cu membru cele două ecuaţii din sistemul (28), obţinem fie $0 = 0$, dacă unul dintre parametrii se anulează, fie ecuaţia paraboloidului hiperbolic, ceea ce înseamnă că dreapta se află pe paraboloid, pentru orice valori acceptabile ale celor doi parametrii[1].

[1] “acceptabil” înseamnă că $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Exact în acelaşi mod se demonstrează că dreptele

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z, \\ \beta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha, \end{cases} \tag{29}$$

unde α şi β sunt doi parametrii reali, care nu se anulează simultan, sunt situate pe paraboloidul hiperbolic (26).
Se poate demonstra că prin fiecare punct al hiperboloidului trece exact o pereche de generatoare rectilinii, câte una din fiecare familie.

Se poate arăta uşor, ca în cazul paraboloidului eliptic, că ecuaţia planului tangent la paraboloid într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al său se poate obţine prin dedublare, plecând de la ecuaţia suprafeţei, adică ecuaţia planului tangent este

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} = z + z_0. \tag{30}$$

Cilindrul eliptic

Definiţie

Se numeşte *clilindru eliptic* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate faţă de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{31}$$

unde a, b sunt două numere reale strict pozitive, numite *semiaxele cilindrului eliptic*.

Cilindrul eliptic

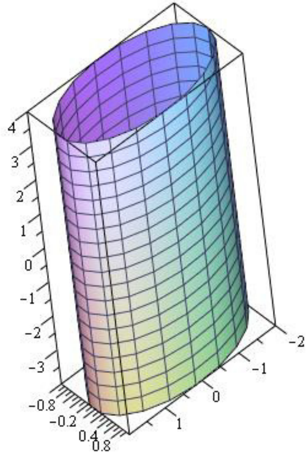


Figura: Cilindrul eliptic

Cilindrul eliptic

Forma cilindrului eliptic.

Începem prin a examina simetriile cilindrului. Este clar, înainte de toate, că cilindrul admitic admite toate simetriile elipsoidului şi hiperboloizilor:

- trei plane de simetrie (planele de coordonate);
- trei axe de simetrie (axele de coordonate);
- un centru de simetrie (originea).

În plus, deoarece ecuaţia cilindrului nu conţine coordonata z, cilindrul eliptic mai are o familie de plane de simetrie (toate planele paralele cu planul xOy) şi două familii de axe de simetrie:

- orice dreaptă care este paralelă cu axa Ox şi intersectează axa Oz;
- orice dreaptă care este paralelă cu axa Oy şi intersectează axa Oz.

Mai mult, orice punct de pe axa Oz este un centru de simetrie.

Cilindrul eliptic

Forma cilindrului eliptic.

Ne ocupăm, acum, de intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

Plane paralele cu planul xOz. Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuaţiile unei elipse situate în planul $z = h$, de semiaxe egale cu a şi b.

Plane paralele cu planul xOz. De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Cilindrul eliptic

Forma cilindrului eliptic.

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = a^2 \left(1 - \dfrac{h^2}{b^2}\right). \end{cases} \tag{32}$$

Aici avem trei situaţii de examinat.

(a) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} < 0$, adică $h^2 > b^2$, atunci sistemul (32) nu admite soluţii, ceea ce înseamnă că planul şi cilindrul nu se intersectează.

(b) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} = 0$, adică $h = \pm b$, atunci sistemul (32) se reduce la

$$\begin{cases} y = \pm b, \\ x = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei drepte paralele cu Oz (e clar, câte o dreaptă pentru fiecare valoare a lui h (c sau $(-c)$)).

Cilindrul eliptic

Forma cilindrului eliptic.

(c) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$, adică $h^2 < b^2$, atunci sistemul (32) se reduce la

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \pm a\sqrt{\left(1 - \dfrac{h^2}{b^2}\right)}, \end{cases}$$

adică obţinem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz şi de data aceasta) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

Plane paralele cu planul yOz. Analiza este perfect analoagă cu cea de la punctul precedent.

Observaţie

Cilindrul eliptic este o aşa numită *suprafaţă cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreapă dată (axa Oz, în cazul nostru), numite *generatoare* şi care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre elipsele (egale) care se obţin prin intersecţii cu planul xOy.

Cilindrul eliptic

Cilindrul eliptic de rotaţie (cilindrul circular).

Dacă cele două semiaxe ale cilindrului sunt egale, $a = b$, atunci ecuaţia cilindrului se poate scrie

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Această suprafaţă se numeşte *cilindru de rotaţie sau circular* de rază a şi se poate obţine prin rotirea oricăreia dintre generatoarele sale în jurul axei Oz.

Cilindrul eliptic

Planul tangent într-un punct al cilindrului eliptic.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al cilindrului eliptic (31). Vom studia, ca de obicei, condiţia ca o dreaptă care trece prin M_0 să fie tangentă cilindrului, Ne reamintim că ecuaţiile unei drepte oarecare prin M_0 sunt:

$$(\Delta)\ \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia cilindrului, obţinem:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1$$

sau

$$b^2 (x_0 + lt)^2 + a^2 (y_0 + mt)^2 - a^2 b^2 = 0.$$

După efectuarea calculelor, obţinem ecuaţia

$$t^2(b^2l^2 + a^2m^2) + 2t(b^2x_0l + a^2y_0m) + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Cum M_0 aparţine cilindrului, termenul liber este egal cu zero, deci ecuaţia de intersecţie se reduce la

$$t^2(b^2l^2 + a^2m^2) + 2t(b^2x_0l + a^2y_0m) = 0. \tag{33}$$

Pentru ca dreapta şi cilindrul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuaţia de intersecţie (33) trebuie să aibă soluţie dublă. Dar o soluţie este, întotdeauna, $t = 0$, prin urmare şi a doua soluţie trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispare, adică dacă avem

$$b^2x_0l + a^2y_0m = 0. \tag{34}$$

Cilindrul eliptic

Planul tangent într-un punct al cilindrului eliptic.

Dacă $\mathbf{n}$ este vectorul de componente $(b^2x_0, a^2y_0, 0)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuaţia (34) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0, iar vectorul său director verifică ecuaţia (34) este perpendiculară pe vectorul* $\mathbf{n}$. Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că $\mathbf{n}$ este vectorul normal la planul tangent la cilindrul eliptic în punctul M_0. Ca atare, ecuaţia planului tangent în M_0 este:

$$b^2x_0(x - x_0) + a^2y_0(y - y_0) = 0$$

sau, după ce facem calculele şi ţinem cont, încă o dată, de faptul că M_0 aparţine cilindrului,

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{35}$$

adică, şi de data aceasta, ecuaţia planului tangent se poate obţine prin dedublare, plecând de la ecuaţia cilindrului eliptic.

Cilindrul hiperbolic

Definiţie

Se numeşte *clilindru hiperbolic* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate faţă de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{36}$$

unde a, b sunt două numere reale strict pozitive, numite *semiaxele cilindrului hiperbolic*.

Cilindrul hiperbolic

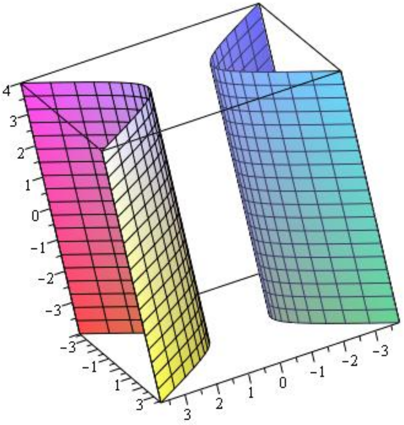


Figura: Cilindrul hiperbolic

Cilindrul hiperbolic

Forma cilindrului hiperbolic.

Simetriile cilindrului hiperbolic sunt aceleaşi cu simetriile cilindrului eliptic, aşa că nu le vom mai discuta încă o dată.
Ne ocupăm, acum, de intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate.
Plane paralele cu planul xOy. Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuaţiile unei hiperbole situate în planul $z = h$, de semiaxe egale cu a şi b.
Plane paralele cu planul xOz. De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Cilindrul hiperbolic

Forma cilindrului hiperbolic.

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = a^2 \left(1 + \dfrac{h^2}{b^2}\right). \end{cases} \tag{37}$$

ceea ce reprezintă, pentru fiecare h real, o pereche de drepte distincte

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \pm a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{b^2}}. \end{cases}$$

Plane paralele cu planul yOz. Sistemul care ne dă intersecţia este, acum,

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ y^2 = b^2\left(\dfrac{h^2}{a^2} - 1\right). \end{cases} \tag{38}$$

Aici avem trei situaţii de examinat.

(a) Dacă $\dfrac{h^2}{a^2} - 1 < 0$, adică $h^2 < a^2$, atunci sistemul (38) nu admite soluţii, ceea ce înseamnă că planul şi cilindrul nu se intersectează.

(b) Dacă $\dfrac{h^2}{a^2} = 0$, adică $h = \pm a$, atunci sistemul (38) se reduce la

$$\begin{cases} x = \pm a, \\ y = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei drepte paralele cu Oz (e clar, câte o dreaptă pentru fiecare valoare a lui h (a sau $(-a)$)).

(c) Dacă $\dfrac{h^2}{a^2} - 1 > 0$, adică $h^2 > a^2$, atunci sistemul (38) se reduce la

$$\begin{cases} x = h, \\ y = \pm b\sqrt{\left(\dfrac{h^2}{a^2} - 1\right)}, \end{cases}$$

adică obţinem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz şi de data aceasta) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h.

Observaţie

Cilindrul hiperbolic este, ca şi cilindrul eliptic, o *suprafaţă cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreapă dată (axa Oz, în cazul nostru), numite *generatoare* şi care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre hiperbolele (egale) care se obţin prin intersecţii cu planul xOy.

Cilindrul hiperbolic

Planul tangent într-un punct al cilindrului hiperbolic.

Exact ca şi în cazul cilindrului eliptic, se demonstrază că planul tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al cilindrului hiperboolic se poate obţine plecând de la ecuaţia suprafeţei, prin dedublare, adică ecuaţia planului tangent este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{39}$$

Cilindrul parabolic

Definiţie

Se numeşte *clilindru parabolic* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate faţă de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuaţia

$$y^2 = 2px, \tag{40}$$

unde p este un număr real strict pozitiv, numit *parametrul cilindrului parabolic*.

Cilindrul parabolic

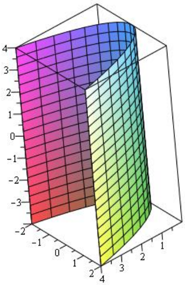


Figura: Cilindrul parabolic

Cilindrul parabolic

Forma cilindrului parabolic.

Cilindrul parabolic (40) este simetric relativ la:

- planul yOz;
- planul xOy şi orice plan paralel cu el;
- axa Oy şi orice dreaptă paralelă cu ea care intersectează axa Oz.

Ne ocupăm, acum, de intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

Plane paralele cu planul xOy. Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuaţiile unei parabole de parametru p, situată în planul $z = h$.

Plane paralele cu planul xOz. De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \dfrac{h^2}{2p}. \end{cases} \tag{41}$$

Ecuaţia (41) reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oz, pentru orice valoare a lui h.

Plane paralele cu planul yOz. Avem de investigat sistemul

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2ph. \end{cases} \tag{42}$$

Aici avem trei situaţii de examinat.
(a) Dacă $h < 0$, atunci sistemul (42) nu admite soluţii, ceea ce înseamnă că planul şi cilindrul nu se intersectează.
(b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (42) se reduce la

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile axei Oz.

(c) Dacă $h > 0$, atunci sistemul (42) se reduce la

$$\begin{cases} x = h, \\ y = \pm\sqrt{2ph}, \end{cases}$$

adică obţinem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

Observaţie

Cilindrul parabolic este şi el o *suprafaţă cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreapă dată (axa Oz, în cazul nostru), numite *generatoare* şi care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre parabolele (egale) care se obţin prin intersecţii cu planul xOy.

Cilindrul parabolic

Planul tangent într-un punct al cilindrului parabolic.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al cilindrului parabolic (40). Vom studia, ca de obicei, condiţia ca o dreaptă care trece prin M_0 să fie tangentă cilindrului. Ne reamintim că ecuaţiile unei drepte oarecare prin M_0 sunt:

$$(\Delta)\ \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia cilindrului, obţinem:

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt).$$

După efectuarea calculelor, obţinem ecuaţia

$$m^2t^2 + 2t(-pl + y_0m) + y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

Cum M_0 aparţine cilindrului, termenul liber este egal cu zero, deci ecuaţia de intersecţie se reduce la

$$m^2 t^2 + 2t(-pl + y_0 m) = 0. \tag{43}$$

Pentru ca dreapta şi cilindrul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuaţia de intersecţie (43) trebuie să aibă soluţie dublă. Dar o soluţie este, întotdeauna, $t = 0$, prin urmare şi a doua soluţie trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispare, adică dacă avem

$$-pl + y_0 m = 0. \tag{44}$$

Cilindrul parabolic

Planul tangent într-un punct al cilindrului parabolic.

Dacă $\mathbf{n}$ este vectorul de componente $(-p, y_0, 0)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuaţia (44) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0, iar vectorul său director verifică ecuaţia (44) este perpendiculară pe vectorul* $\mathbf{n}$. Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că $\mathbf{n}$ este vectorul normal la planul tangent la cilindrul parabolic în punctul M_0. Ca atare, ecuaţia planului tangent în M_0 este:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

sau, după ce facem calculele şi ţinem cont, încă o dată, de faptul că M_0 aparţine cilindrului,

$$yy_0 = p(x + x_0), \tag{45}$$

adică, şi de data aceasta, ecuaţia planului tangent se poate obţine prin dedublare, plecând de la ecuaţia cilindrului parabolic şi aplicând regulile de dedublare.