

## Transformări geometrice în plan (I)

**Problema 11.1.** Se consideră, în spațiul  $\mathbb{R}^3$ , două sisteme de coordonate,  $\mathcal{S} = \{O, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}\}$  și  $\mathcal{S}' = \{O, \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}\}$ , cu aceeași origine, astfel încât vectorii celor două baze sunt legați prin relațiile:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Determinați matricea de schimbare a bazei și determinați coordonatele  $(x, y, z)$  ale unui punct  $M$  față de sistemul de coordonate  $\mathcal{S}$  și coordonatele  $(x', y', z')$  ale aceluiași punct în sistemul de coordonate  $\mathcal{S}'$ , și, invers, coordonatele  $(x', y', z')$  în funcție de coordonatele  $(x, y, z)$ .

**Problema 11.2.** Considerăm, în spațiu, tetraedrul  $ABCD$ , unde vârfurile au, relativ la reperul afin  $\mathcal{S} = \{O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}\}$ , coordonatele  $A(3, 3, 4)$ ,  $B(1, 7, 0)$ ,  $C(4, 5, 0)$  și  $D(2, 2, 0)$ . Determinați coordonatele mijlocului  $M$  al medianei care pleacă din vârful  $A$  al feței  $ABC$ , atât în sistemul de coordonate original, cât și în sistemul de coordonate  $\mathcal{S}' = \left\{D, \left\{\mathbf{e}_1 \equiv \overrightarrow{DC}, \mathbf{e}_2 \equiv \overrightarrow{DA}, \mathbf{e}_3 \equiv \overrightarrow{DB}\right\}\right\}$ . Determinați matricea extinsă a schimbării de coordonate.

**Problema 11.3.** Ce devine relația dintre coordonatele  $(x, y)$  ale punctelor  $M$ ,

$$x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0,$$

relativ la sistemul de coordonate care se obține printr-o rotație a axelor  $Ox$  și  $Oy$ , care sunt aduse cu originea în punctul  $I(-2, -3)$  și apoi rotite în sens invers acelor de casornic cu un unghi de  $45^\circ$ ?

În lista de probleme de mai jos, triunghiul  $ABC$  are vârfurile  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(2, 3)$ .

**Problema 11.4.** Determinați imaginea triunghiului  $ABC$  printr-o rotație de unghi  $30^\circ$  în jurul punctului  $Q(2, 2)$ , urmată de o translație de vector  $(1, 2)$ . Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

**Problema 11.5.** Determinați imaginea triunghiului  $ABC$  printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul  $Q(2, 2)$ , urmată de o translație de vector  $\mathbf{v}(2, -1)$ . Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

**Problema 11.6.** Determinați imaginea triunghiului  $ABC$  printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală  $(2, 1)$ , relativ la punctul  $Q(2, 2)$ , urmată de o rotație de unghi  $60^\circ$ , relativ la același punct. Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

**Problema 11.7.** Determinați imaginea triunghiului  $ABC$  printr-o rotație de unghi  $-45^\circ$  în jurul vârfului  $A$ , urmată de o scalare de factori  $(2, 1)$  relativ la vârful  $C$ . Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

**Problema 11.8.** Se consideră pătratul  $ABCD$ , de vârfuri  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 2)$ ,  $D(0, 2)$ . Demonstrați că patrulaterul  $A'B.C'D'$ , cu  $A'(1, -2)$ ,  $B'(2, -3)$ ,  $C'(3, -2)$ ,  $D'(2, -1)$  este, de asemenea, un pătrat și indicați o secvență de transformări geometrice care transformă primul pătrat în cel de-al doilea.

*Indicație.* Aplicați întâi o translație care să ducă centrul primului pătrat în centrul celui de-al doilea, apoi o scalare uniformă relativ la centrul celui de-al doilea pătrat, urmată de o rotație în jurul aceluiași centru.  $\square$

**Problema 11.9.** Se consideră pătratul  $ABCD$ , de vârfuri  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 2)$ ,  $D(0, 2)$ . Demonstrați că patrulaterul  $A'B.C'D'$ , cu  $A' \left( 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$ ,  $B' \left( 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ ,  $C' \left( 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$ ,  $D' \left( 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  este un dreptunghi și indicați o secvență de transformări geometrice care transformă pătratul în dreptunghi.

*Indicație.* Se utilizează același procedeu ca mai sus, dar scalarea este neuniformă.  $\square$

**Problema 11.10.** Măriți de două ori dimensiunile triunghiului  $ABC$ , cu  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(5, 2)$ , astfel încât punctul  $C(5, 2)$  să rămână fix.

**Problema 11.11.** Aplicați o rotație de unghi  $45^\circ$  triunghiului  $ABC$ , cu  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(5, 2)$ :

(a) în jurul originii;

(b) în jurul punctului  $P(-1, -1)$ .

**Problema 11.12.** Determinați imaginea triunghiului  $ABC$  prin scalarea simplă neuniformă de factori  $(1, 2)$  relativ la punctul  $B$ , urmată de o rotație de  $30^\circ$  în jurul punctului  $Q(1, 1)$ .

### Important!

- La fiecare problemă de transformări reprezentați, pe același sistem de axe, figura inițială și cea finală.
- Pentru desene, utilizați Geogebra!
- La problemele de transformări, trebuie să găsiți matricea de transformare. Dacă sunt mai multe transformări care se compun, matricea transformării este produsul matricilor transformărilor elementare. Întotdeauna, matricea ultimei transformări elementare care se execută se așează cel mai în stânga (cu alte cuvinte, ordinea matricilor este inversă ordinii aplicării transformărilor).