

10.9. Să se scrie ecuația suprafeței de rotație obținute prin rotația dreptei $x-y=a$, $z=0$ în jurul dreptei $x=y=z$

Rescriem ecuațiile dreptei / axii fixe astfel:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$

Putem scrie ecuațiile cercului generator Γ :

$$(\Gamma): \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2 \\ l \cdot x + m \cdot y + n \cdot z = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x + y + z = \mu \end{cases}$$

Hai apoi, pentru ca cercul Γ să se sprijine pe dreapta dată, trebuie să conțină cel puțin un punct în comun:

$$\begin{cases} x-y=a \\ z=0 \\ x^2+y^2+z^2=r^2 \\ x+y+z=\mu \end{cases}$$

sistemul trebuie să fie compatibil, condiția de compatibilitate determinându-se eliminând x, y, z între cele 4 ecuații de mai sus.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-y=a \\ x+y+z=\mu \\ z=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x-y=a \\ x+y=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a+\mu}{2} \\ y=-\frac{a+\mu}{2} \end{cases} \\ 2x &= a+\mu \Rightarrow x=\frac{a+\mu}{2} \\ \Rightarrow y &= x-a = \frac{a+\mu}{2} - a = -\frac{a-\mu}{2} \end{aligned}$$

Înlocuim pe x, y, z în ecuația $x^2+y^2+z^2=r^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+\mu}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a-\mu}{2}\right)^2 + 0^2 = r^2 \quad | \cdot 4$$

$$a^2 + \cancel{2a\mu} + \mu^2 + a^2 - \cancel{2a\mu} + \mu^2 = 4r^2$$

$$2(a^2 + \mu^2) = 4r^2 \quad | :2$$

$$\Rightarrow 2r^2 - a^2 - \mu^2 = 0$$

Ecuația suprafeței se obține eliminând parametrii r și μ din sistemul format din ecuațiile cercului generator și relația de legătură:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x + y + z = \mu \\ 2r^2 - a^2 - \mu^2 = 0 \end{cases}$$

Se obține astfel ecuația suprafeței de rotație:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2 - (x + y + z)^2 = 0$$