Problema 8.22

Din punctul $A(5, 9)$ ducem tangentele la parabola $y^2 = 5x$. Stabiliți ecuația coardei care unește punctele de tangență

Ecuația canonică a parabolei de parametru p este:

$$y^2 = 2px$$

(mărimea p din ecuația de mai sus se mai numește și parametru focal)

Considerăm un punct $M(x_1, y_1)$.

Cum M se află pe tangentă avem următorul rezultat

$2x_1 k^2 - 2y_1 k + p = 0$, ecuație polinomială de gradul al II-lea în k (necunoscuta) cu discriminantul $\Delta = 4(y_1^2 - 2px_1)$

Pentru punctul $A(5, 9)$ și parametrul focal $p = \frac{5}{2}$ avem (1)

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 5x \\ y^2 = 2px \end{array}\right\} \Rightarrow 2p = 5 \Leftrightarrow p = \frac{5}{2}$$

$$(1): 2x_A k^2 - 2y_A k + \frac{5}{2} = 0$$

$$2 \cdot 5 \cdot k^2 - 2 \cdot 9 \cdot k + \frac{5}{2} = 0 \quad \Big| \cdot 2$$

$$20k^2 - 36k + 5 = 0$$

Discriminantul ecuației este $\Delta = 4(y_A^2 - 2p x_A) =$

$= 4\left(9^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 5\right) = 4(81 - 5 \cdot 5) = 4 \cdot (81 - 25) =$

$= 4 \cdot 56 = 224$

Discriminantul ecuației este $\Delta = b^2 - 4ac =$
$= (-36)^2 - 4 \cdot 20 \cdot 5 = 1296 - 400 = 896 > 0$
$\Rightarrow$ punctul $A(5, 9)$ este exterior parabolei
Obținem $k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-36) \pm \sqrt{896}}{2 \cdot 20} =$

$= \frac{36 \pm \sqrt{896}}{40} = \frac{\overset{4}{\cancel{36}} \pm 8\sqrt{14}}{40} = \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{10}$

$\Rightarrow k_1 = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{10} = \frac{9}{10} - \frac{2\sqrt{14}}{10} = \frac{9}{10} - \frac{\sqrt{14}}{5}$

$k_2 = \frac{9 + 2\sqrt{14}}{10} = \frac{9}{10} + \frac{2\sqrt{14}}{10} = \frac{9}{10} + \frac{\sqrt{14}}{5}$

Ecuația tangentei într-un punct $M(x_1, y_1)$ al parabolei se mai poate scrie

$y \cdot y_1 = p(x - x_1) \Leftrightarrow y \cdot y_1 = \frac{5}{2}(x - x_1)$

$p = \frac{5}{2}$

Panta tangentei este $k = \frac{5}{2y_1} \Leftrightarrow k y_1 = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow y_1 = \frac{5}{2k}$

Cum punctul $M(x_1, y_1)$ se află pe parabolă obținem

$x_1 = \frac{y_1^2}{5} = \frac{\left(\frac{5}{2k}\right)^2}{5} = \frac{\frac{25}{4k^2}}{5} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{4k^2} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} = \frac{5}{4k^2}$ (*)

$y_1 = \frac{5}{2k}$

Alegem $k = k_1 = \frac{9-2\sqrt{14}}{10}$ în egalitatea de mai sus (*) și obținem

$$x_{01} = \frac{5}{4k_1^2} = \frac{5}{4\cdot\left(\frac{9-2\sqrt{14}}{10}\right)^2} = \frac{5}{\cancel{4}\frac{(9-2\sqrt{14})^2}{\cancel{100}\,25}} = \frac{5}{\frac{(9-2\sqrt{14})^2}{25}} =$$

$$= 5\cdot\frac{25}{(9-2\sqrt{14})^2} = \frac{125}{(9-2\sqrt{14})^2}$$

$$y_{01} = \frac{5}{2k_1} = \frac{5}{\sqrt{4k_1^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{(9-2\sqrt{14})^2}{25}}} = \frac{5}{\frac{9-2\sqrt{14}}{5}} = 5\cdot\frac{5}{9-2\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{25}{9-2\sqrt{14}}$$

Analog se obține pentru $k = k_2 = \frac{9+2\sqrt{14}}{10}$ relațiile

$$x_{02} = \frac{5}{4k_2^2} = \frac{125}{(9+2\sqrt{14})^2}$$

$$y_{02} = \frac{5}{2k_2} = \frac{5}{\sqrt{4k_2^2}} = \frac{25}{9+2\sqrt{14}}$$

Obținem punctele $M_{01}\left(\underbrace{\frac{125}{(9-2\sqrt{14})^2}}_{x_{01}}, \underbrace{\frac{25}{9-2\sqrt{14}}}_{y_{01}}\right)$ și

$M_{02}\left(\underbrace{\frac{125}{(9+2\sqrt{14})^2}}_{x_{02}}, \underbrace{\frac{25}{9+2\sqrt{14}}}_{y_{02}}\right)$ de tangență

Coarda care unește punctele de tangență M_{01} și M_{02} este $M_{01}M_{02}$.

Panta acesteia este

$$K_{M_{01}M_{02}} = \frac{y_{02}-y_{01}}{x_{02}-x_{01}} = (y_{02}-y_{01})\cdot\frac{1}{x_{02}-x_{01}} =$$

$$= \left(\frac{25}{9+2\sqrt{14}} - \frac{25}{9-2\sqrt{14}}\right)\cdot \frac{1}{\frac{125}{(9+2\sqrt{14})^2}-\frac{125}{(9-2\sqrt{14})^2}} =$$

$$= \frac{25(9-2\sqrt{14})-25(9+2\sqrt{14})}{9^2-(2\sqrt{14})^2}\cdot\frac{1}{\frac{125(9-2\sqrt{14})^2-125(9+2\sqrt{14})^2}{(9+2\sqrt{14})^2(9-2\sqrt{14})^2}} =$$

$$= \frac{25(9-2\sqrt{14})-25(9+2\sqrt{14})}{25}\cdot\frac{(9+2\sqrt{14})^2(9-2\sqrt{14})^2}{125((9-2\sqrt{14})^2-(9+2\sqrt{14})^2)} =$$

$$= -4\sqrt{14}\cdot\frac{625}{125(-72\sqrt{14})} = -4\sqrt{14}\cdot\frac{5}{-72\sqrt{14}} = \frac{20\sqrt{14}}{72\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

Ecuatia dreptei $M_{01}M_{02}$ se poate scrie

$$y - y_{02} = K_{M_{01}M_{02}}(x-x_{02})$$

$$y - \frac{25}{9+2\sqrt{14}} = \frac{5}{18}\left(x - \frac{125}{(9+2\sqrt{14})^2}\right) \Big| \cdot 18$$

$$18y - \frac{25\cdot 18}{9+2\sqrt{14}} = 5x - \frac{5\cdot 125}{(9+2\sqrt{14})^2}$$

$$5x - 18y + {}^{9+2\sqrt{14})}\frac{25\cdot 18}{9+2\sqrt{14}} - \frac{5\cdot 125}{(9+2\sqrt{14})^2} = 0$$

$$5x - 18y + \frac{25\cdot 18(9+2\sqrt{14})-625}{(9+2\sqrt{14})^2} = 0$$

$$5x - 18y + 25\cdot\frac{18(9+2\sqrt{14})-25}{(9+2\sqrt{14})^2} = 0$$

$$5x - 18y + 25\cdot\frac{162+36\sqrt{14}-25}{(9+2\sqrt{14})^2} = 0$$

$$5x - 18y + 25 \cdot \frac{137 + 36\sqrt{14}}{81 + 36\sqrt{14} + 56} = 0$$

$$5x - 18y + 25 \cdot \frac{137 + 36\sqrt{14}}{137 + 36\sqrt{14}} = 0$$

$$5x - 18y + 25 = 0$$

În concluzie, ecuația coardei care unește punctele de tangență $M_{01}\left(\frac{125}{(9-2\sqrt{14})^2}, \frac{25}{9-2\sqrt{14}}\right)$ și $M_{02}\left(\frac{125}{(9+2\sqrt{14})^2}, \frac{25}{9+2\sqrt{14}}\right)$ este: $5x - 18y + 25 = 0$