Problema 8.6: Din punctul $C(10, -8)$ se duc tangente la elipsa $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Determinați ecuația coardei care unește punctele de contact.

Soluție:

Scriem ecuația tangentei printr-un punct (x_0, y_0) al elipsei, prin dedublare.

Avem: $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x \cdot x_0}{25} + \frac{y \cdot y_0}{16} = 1.$ (1)

Știm că tangentele trec prin punctul $C(10, -8) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (1) devine $\frac{10x_0}{25} + \frac{(-8)(y_0)}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x_0}{5} - \frac{y_0}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x_0 - 5y_0 - 10 = 0.$

Obținem sistemul: $\begin{cases} 4x_0 - 5y_0 - 10 = 0 \\ \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{5(y_0+2)}{4} \\ \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \end{cases}$

Înlocuind pe x_0 în cea de-a doua ecuație $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\left[\frac{5(y_0+2)}{4}\right]^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{25}{16}\cdot(y_0^2+4y_0+4)}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y_0^2 + 4y_0 + 4 = 16 \Rightarrow 2y_0^2 + 4y_0 - 12 = 0.$$

Soluțiile ecuației $y_0^2 + 2y_0 - 6 = 0$ sunt $y_1 = -1-\sqrt{7}$ și $y_2 = \sqrt{7}-1$.

Pt $y = -1-\sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{5(1-\sqrt{7})}{4} \Rightarrow A\left(\frac{5(1-\sqrt{7})}{4}, -1-\sqrt{7}\right)$ este unul din punctele de contact.

Pt. $y = \sqrt{7}-1 \Rightarrow x = \frac{5(\sqrt{7}+1)}{4} \Rightarrow B\left(\frac{5(\sqrt{7}+1)}{4}, \sqrt{7}-1\right)$ este celalalt punct de contact.

Ecuația coardei este $\frac{x - \frac{5-5\sqrt{7}}{4}}{\frac{5\sqrt{7}+5}{4} - \frac{5-5\sqrt{7}}{4}} = \frac{y+1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-1+1+\sqrt{7}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x - \frac{5-5\sqrt{7}}{4}}{\frac{10\sqrt{7}}{4}} = \frac{y+1+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{4x-5+5\sqrt{7}}{10\sqrt{7}} = \frac{y+1+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} \overset{\cdot 2\sqrt{7}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{4x-5+5\sqrt{7}}{5} = y+1+\sqrt{7} \Leftrightarrow 4x-5+5\sqrt{7} = 5y+5+5\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 5y - 10 = 0.$$

În concluzie, ecuația coardei care unește punctele de contact este $4x - 5y - 10 = 0$.