Problema 8.15. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$4x + 3y - 7 = 0.$$

<u>Metoda 1</u>

Tangentele hiperbolei sunt perpendiculare pe dreaptă $\Rightarrow$

$$K_\Delta \cdot K_t = -1, \text{ unde } \begin{cases} K_\Delta \text{ panta dreptei} \\ K_t \text{ panta tangentei} \end{cases}$$

$$K_\Delta = -\frac{a}{b} \Rightarrow K_\Delta = \frac{-4}{3} \Rightarrow K_t = \frac{3}{4}$$

Fie $y = mx + n$ forma generală a tangentei, cu m panta tangentei $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x + n$$

Vom înlocui în hiperbolă pe y pentru a-l afla pe n:

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{20} - \frac{\left(\frac{3}{4}x+n\right)^2}{5} = 1 \Leftrightarrow \Big| \cdot 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{9}{16}x^2 + \cancel{2}\frac{3}{\cancel{4}}nx + n^2\right) \cdot 4 = 20 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{4}x^2 - 6nx - 4n^2 = 20 \Leftrightarrow$ $1-20$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^2 - 6nx + 4n^2 = 20 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^2 - 6nx - 4n^2 - 20 = 0$

Tangenta intersectează într-un singur punct hiperbola $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36n^2 - \frac{5}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}(4n^2 + 20) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36n^2 - 20n^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16n^2 = 100 \Leftrightarrow n^2 = \frac{100}{16} \Rightarrow n = \pm\frac{10}{4}$

Deci tangentele sunt:

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4y = 3x + 10$

și

$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4y = 3x - 10$

Metoda 2:

Vom folosi formula tangentei de la hiperbolă:

$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}$

Hiperbola formă generală:

$\left.\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \Rightarrow \left\{ a^2 = 20 \right.$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\;}{a^2} - \frac{\;}{b^2} \\ \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 20 \\ b^2 = 5 \end{cases}$$

Panta, din exercițiul trecut, este egală cu:

$$k = \frac{3}{4}$$

Verificăm să existe panta de tangenta respectivă (radicalul mai mare ca 0)

$$a^2k^2 - b^2 = \overset{5}{\cancel{20}} \cdot \frac{9}{\underset{4}{\cancel{16}}} - 5 = 5\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \frac{25}{4} > 0$$

Deci: $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow 4y = 3x \pm 10$$