# Tema

11.1

Se consideră în spațiul $\mathbb{R}^3$, două sisteme de coordonate, $S = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$ și $S' = \{O, \{e_1', e_2', e_3'\}\}$ cu aceeași origine, astfel încât vectorii celor două baze sunt legați prin relațiile:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 - 2e_2 \\ e_3' = -e_2 + e_3 \end{cases}$$

Determinați matricea de schimbare a bazei și determinați coordonatele $(x, y, z)$ ale unui punct $M$ față de sistemul de coordonate $S$ și coordonatele $(x', y', z')$ ale aceluiași punct în sistemul de coordonate $S'$, și, invers, coordonatele $(x', y', z')$ în funcție de coordonatele $(x, y, z)$.

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad , 1 \le i \le n \quad , \text{ unde } n = 3$$

$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow a_{11} = 1 \quad , a_{21} = 1 \quad , a_{31} = 1$$
$$e_2' = e_1 - 2e_2 \Rightarrow a_{12} = 1 \quad , a_{22} = -2 \quad a_{32} = 0$$
$$e_3' = -e_2 + e_3 \Rightarrow a_{13} = 0 \quad , a_{23} = -1 \quad , a_{33} = 1$$

Deci matricea de schimbare a bazei este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Din Teorema care spune: Fie un punct $M$ oarecare. Atunci coordonatele sale relative la cele 2 repere sunt legate prin relația:

$$X = A \cdot X'$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Prin urmare ajungem la

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i' \quad , \quad 1 \le j \le n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + y' & (1) \\ y = x' - 2y' - z' & (2) \\ z = x' + z' & (3) \end{cases}$$

$$(2)+(3) \Rightarrow y + z = 2x' - 2y' \Rightarrow \frac{y+z}{2} = x' - y' \quad (4)$$

$$(2)+(3)+(1)\cdot 2 \Rightarrow 2x + y + z = 2x' - \cancel{2y'} + 2x' + \cancel{2y'}$$

$$\Rightarrow 2x + y + z = 4x'$$

$$x' = \frac{2x+y+z}{4}$$

$$(4) \Rightarrow y' = x' - \frac{y+z}{2} = \frac{2x+y+z}{4} - \frac{y+z}{2} =$$

$$= \frac{2x+y+z-2y-2z}{4}$$

$$= \frac{2x-y-z}{4}$$

$$(3) \Rightarrow z' = z - x' = z - \frac{2x+y+z}{4} =$$

$$= \frac{4z-2x-y-z}{4}$$

$$= \frac{-2x-y+3z}{4}$$

Deci avem

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2x+y+z}{4} \\ y' = \dfrac{2x-y-z}{4} \\ z' = \dfrac{-2x-y+3z}{4} \end{cases}$$