Laborator 4: Modele matematice guvernate de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1

Exerciţiul 1 *Se consideră modelul dezintegrării radioactive*

$$\begin{cases} x'(t) &= -k \cdot x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

$x(t)$ reprezintă cantitatea de substanţă radioactivă la momentul t, iar k este constanta de dezintegrare. Se cere:

(a) *Să se determine soluţia problemei Cauchy;*

(b) *Reprezentaţi grafic câteva soluţii;*

(c) *Ştiind că timpul de înjumătăţire al izotopului radioactiv C^{14} este $t_{1/2} = 5730$ ani să se determine constanta k. Timpul de înjumătăţire reprezintă timpul în care o cantitate de C^{14} se reduce la jumătate în urma dezintegrării radioactive.*

(d) *Folosind constanta k determinată, să se estimeze vechimea unor fosile ştiind că în momentul descoperirii raportul C^{14}/C^{12} a ajuns la 20%.*

(e) *Datarea giulgiului de la Torino: În 1988 trei teste independente au estimat că raportul C^{14}/C^{12} din fibrele giulgiului are o valoare cuprinsă intre 91.57% şi 93.021%. Estimaţi în ce perioadă a fost făcut acest giulgiu.*

Exerciţiul 2 *Se consideră modelul răcirii corpurilor dat de legea lui Newton*

$$\begin{cases} T'(t) &= -k \cdot (T(t) - T_m) \\ T(0) &= T_0 \end{cases}$$

unde $T(t)$ reprezintă temperatura corpului la momentul t, iar T_m reprezintă temperatura mediului înconjurător. Se cere:

(a) *Să se determine soluţia problemei Cauchy;*

(b) *Reprezentaţi grafic câteva soluţii;*

(c) *Să presupunem că în cazul unei crime corpul victimei a fost descoperit la ora 11:00. Medicul legist soseşte la ora 11:30 şi masurând temperatura obţine valoarea $34,22°C$. Temperatura camerei în care a fost descoperit cadavrul este de $21°C$. O oră mai tîrziu, medicul legist masoară din nou temperatura cadavrului şi obţine valoarea $34,11°C$. Se cere să se estimeze ora decesului.*

Exerciţiul 3 *Se consideră cele două modelul lui Malthus de creştere a unei populaţii:*

$$\begin{cases} x'(t) & = r \cdot x(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

unde $r-$*rata de creştere a populaţiei,* x_0-*populaţia iniţială, respectiv modelul logistic a lui Verhulst*

$$\begin{cases} x'(t) & = r_0 \cdot x(t) \left[1 - \dfrac{x(t)}{K}\right] \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

unde r_0-*rata de creştere nerestrictivă,* $K-$ *constanta de suport a mediului,* x_0-*populaţia iniţială.*

Se cere:

(a) *Determinaţi soluţiile celor două modele;*

(b) *Reprezentaţi grafic câteva soluţii rate de creştere pozitive, respectiv negative;*

(c) *Folosind modelul lui Malthus, estimaţi mărimea unei populaţii după* 5 *ani ştiind că la momentul iniţial populaţia are* $25 \cdot 10^3$ *membrii, iar după* 2 *ani are* $30 \cdot 10^3$ *membrii;*

(d) *Folosind modelul lui Verhulst, estimaţi mărimea unei populaţii după* 7 *ani ştiind că la momentul iniţial populaţia are* $20 \cdot 10^3$ *membrii, iar după* 2 *ani are* $40 \cdot 10^3$ *membrii, iar după* 3 *ani are* $50 \cdot 10^3$ *membrii. Reprezentaţi grafic soluţia obţinută.*

Exerciţiul 4 *Se consideră modelul aruncării pe verticală ce descrie dependenţa vitezei faţă distanţa de la suprafaţa pământului*

$$\begin{cases} v\,(x)\, v'\,(x) & = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \\ v(0) & = v_0 \end{cases}$$

unde $x-$*distanţa de la suprafaţa pământului,* $R-$*raza pamântului,* $g-$*acceleraţia gravitaţională.*

(a) *Să se determine soluţia problemei Cauchy;*

(b) *Pentru viteza iniţială* $v_0 = 50\frac{m}{s}$ *determinaţi ce viteză are corpul la înălţimea de* 75 *m dacă (se va lua* $R = 6371$ *km,* $g = 9.81\frac{m}{s^2}$*);*

(c) *Să se determine înălţimea maximă la care ajunge corpul cu datele de la punctul* (b);

(d) *Determinaţi dependenţa vitezei iniţiale în funcţie de înălţimea maximă şi calculaţi viteza de evadare ca* $\lim\limits_{h \to +\infty} v_0\,(h)$;

(e) *Calculaţi vitezele de evadare corespunzătoare poziţiei pe glob ştiind că:*

la ecuator, raza ecuatorială este $R_{ec} = 6378.160\ km$ *şi acceleraţia gravitaţională este* $g_{ec} = 9.78 \frac{m}{s^2}$

la poli, raza polară este $R_{pol} = 6357.778\ km$ *şi acceleraţia gravitaţională este* $g_{pol} = 9.832 \frac{m}{s^2}$

raza medie este $R_m = 6371.110\ km$ *şi acceleraţia gravitaţională medie este* $g_m = 9.81 \frac{m}{s^2}$.