SEMINARUL 1

Algebră vectorială

Problema 1.1. Se dă un tetraedru $ABCD$. Găsiţi sumele vectorilor (vezi figura 1.1):

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

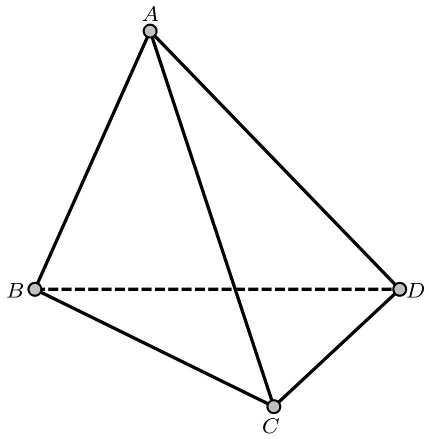

Figura 1.1

Soluţie. 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = 0$.

□

Problema 1.2. Se dă o piramidă cu vârful în S şi baza un paralelogram $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să se demonstreze egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Problema 1.3. Fie $ABCD$ un tetraedru (vezi figura 1.1). Demonstraţi că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$. Este adevărată această afirmaţie pentru orice patru puncte din spaţiu?

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}_{=\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$$

□

Problema 1.4. Punctul O este centrul unui hexagon regulat $ABCDEF$ (vezi figura 1.2). Determinaţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, în funcţie de vectorii $\mathbf{p}=\overrightarrow{OE}$ şi $\mathbf{q}=\overrightarrow{OF}$.

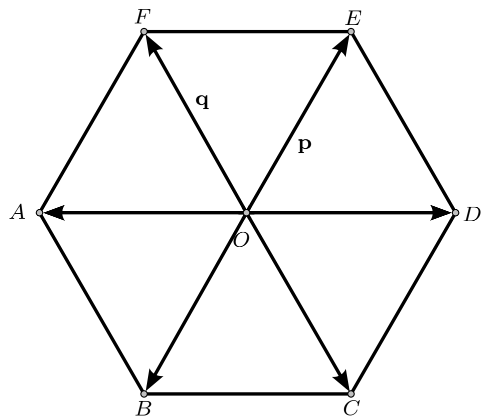

Figura 1.2

Soluţie. Avem, înainte de toate, în mod evident, $\overrightarrow{OB}=-\mathbf{p}$ şi $\overrightarrow{OC}=-\mathbf{q}$. Mai departe, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OF}=\mathbf{q}$, iar $\overrightarrow{AF}=\mathbf{p}$, de unde $\overrightarrow{OA}=-\mathbf{p}+\mathbf{q}$. În sfârşit, $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}=\mathbf{p}-\mathbf{q}$. □

Problema 1.5. Demonstraţi că dacă M,N,P,Q sunt mijloacele laturilor unui patrulater $ABCD$, atunci $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=0$.

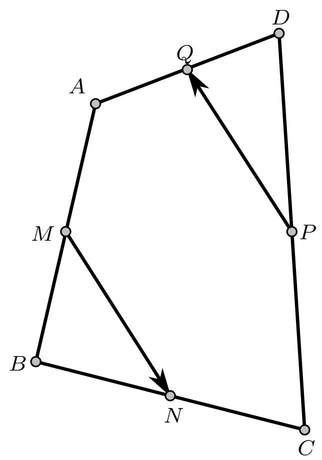

Figura 1.3

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Analog,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

prin urmare,

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = 0.$$

□

Problema 1.6. Punctele E şi F sunt mijloacele diagonalelor unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

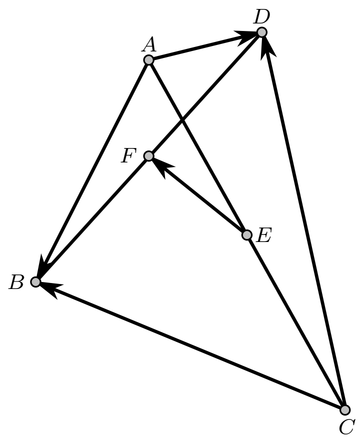

Figura 1.4

Soluţie. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că E este mijlocul diagonalei AC, în timp ce F este mijlocul diagonalei BD. Avem, în mod evident, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$. Mai departe, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, în timp ce $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Avem, aşadar, într-o primă fază, următoarea reprezentare a vectorului $\overrightarrow{EF}$:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}).$$

Diagonalele admit câte două reprezentări în funcţie de laturi:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

respectiv

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Dacă utilizăm prima reprezentare pentru ambele diagonale, obţinem:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}),$$

în timp ce dacă utilizăm cea de-a doua reprezentare, obţinem:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}).$$

□

Problema 1.7. Fie E şi F mijloacele laturilor AB şi CD ale unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

şi utilizaţi această proprietate pentru a demonstra teorema liniei mijlocii într-un trapez.

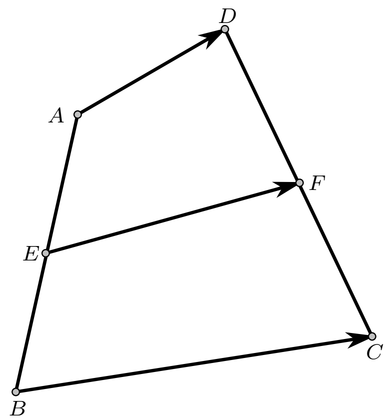

Figura 1.5

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}).$$

Pe de altă parte, în mod evident,

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 0,$$

de unde

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD},$$

expresie care, înlocuită în relaţia găsită mai devreme pentru $\overrightarrow{EF}$, ne dă rezultatul dorit. □

Problema 1.8. Se dă un hexagon regulat $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_4} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 3\overrightarrow{C_1C_4}.$$

Soluţie. Trebuie să demonstrăm, în fond, că

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 2\overrightarrow{C_1C_4}.$$

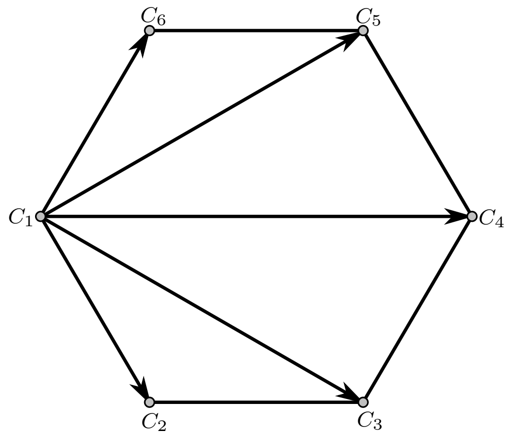

Figura 1.6

Se constată cu uşurintă că $\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_6} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_4}$. Fie acum P mijlocul segmentului C_1C_3 şi Q mijlocul segmentului C_1C_5. Avem, în mod clar:

$$\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{C_1Q} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5}\right),$$

dar se vede imediat că

$$\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{C_1Q} = \frac{3}{4}\overrightarrow{C_1C_4},$$

prin urmare

$$\overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5} = \frac{3}{2}\overrightarrow{C_1C_4},$$

de unde

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_4} + \frac{3}{2}\overrightarrow{C_1C_4} = 2\overrightarrow{C_1C_4}.$$

□

Problema 1.9. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD a unghiului A. Determinaţi descompunerea vectorului $\overrightarrow{AD}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ şi $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

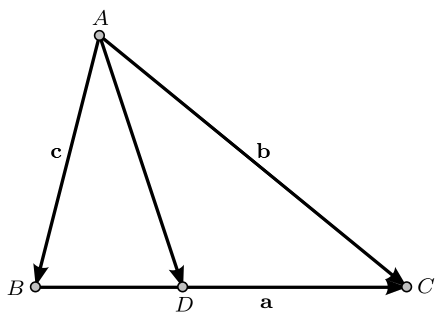

Figura 1.7

Soluţie. Fie $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$. Vom nota cu a, b, c lungimile celor trei vectori care corespund laturilor triunghiului. Avem, înainte de toate,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{c} + \overrightarrow{BD}.$$

Pentru a determina $\overrightarrow{BD}$, determinăm mai întâi lungimea sa. Din teorema bisectoarei, se obţine imediat că

$$BD = \frac{ac}{b+c},$$

de aceea,

$$\overrightarrow{BD} = \frac{BD}{a}\mathbf{a} = \frac{c}{b+c}\mathbf{a} = \frac{c}{b+c}(\mathbf{b}-\mathbf{c}).$$

Înlocuind în expresia pentru $\overrightarrow{AD}$, se obţine

$$\overrightarrow{AD} = \frac{c}{b+c}\mathbf{b} + \frac{b}{b+c}\mathbf{c}.$$

□

Problema 1.10. Coardele AB şi CD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

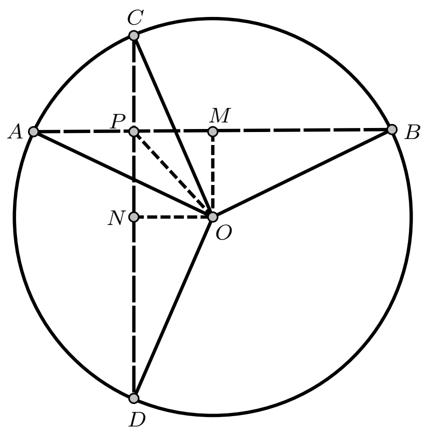

Figura 1.8

Soluţie. Unim punctul O cu punctele A, B, C şi D. În triunghiurile APO, BPO, CPO şi DPO vectorii $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ şi $\overrightarrow{PD}$ se pot scrie ca

$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}, \\ \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD} \end{cases}. \tag{1.0.1}$$

Adunând membru cu membru aceste egalităţi vectoriale, obţinem

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right). \tag{1.0.2}$$

Fie M şi N mijloacele coardelor AB şi CD. În triunghiurile AOB şi COD segmentele OM şi ON sunt mediane, deci vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ se pot scrie

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right), \\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ 2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \end{cases}. \tag{1.0.3}$$

Înlocuind (1.0.3) în (1.0.2), obţinem

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right). \tag{1.0.4}$$

În dreptunghiul $ONPM$, vectorul $\overrightarrow{OP}$ este egal cu suma vectorilor $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$, prin urmare, relaţia (1.0.4) devine

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{PO}-2\overrightarrow{PO}=2\overrightarrow{PO}.$$

□

Problema 1.11. Se dă un trapez $ABCD$ în care baza AB este de k ori ($k>1$) mai mare decât baza mică CD. Fie M şi N mijloacele bazelor. Găsiţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$.

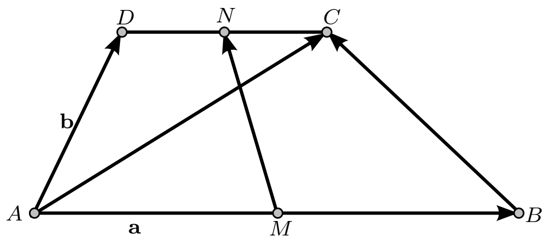

Figura 1.9

Soluţie.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{b}+\frac{1}{k}\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{2k}\mathbf{a}=\frac{1-k}{2k}\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{k}\mathbf{a}=\frac{1-k}{k}\mathbf{a}+\mathbf{b}.$$

□

Problema 1.12. Fie A', B', C' mijloacele laturilor unui triunghi oarecare ABC şi un punct oarecare O în planul triunghiului. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right),$$
$$\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right),$$
$$\overrightarrow{OC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).$$

Însumând relaţiile de mai sus, obţinem formula din enunţ. □

Problema 1.13. În figura 1.11, punctele M, N, P sunt, respectiv, mijloacele laturilor AB, BC, CA ale triunghiului ABC. Să se determine vectorii $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

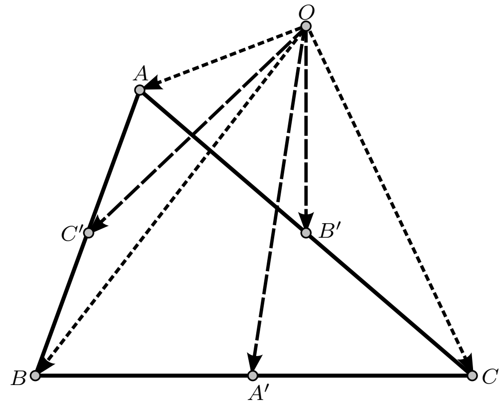

Figura 1.10

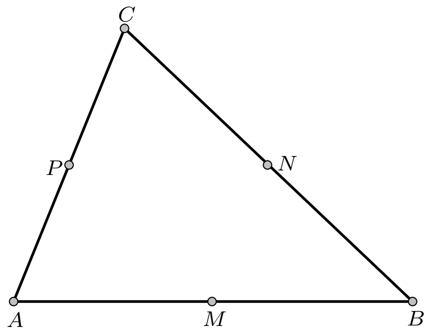

Figura 1.11

Soluţie. Avem

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Mai departe,

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

În sfârşit,

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

□

Problema 1.14. În figura 1.12 este reprezentat paralelipipedul $ABCDEFGH$. Fie $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ şi $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$ şi $\overrightarrow{DF}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$.

Soluţie. Avem

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

(Altfel spus, *"diagonala unui paralelogram este egală cu suma laturilor"*).

Mai departe,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\mathbf{w} + \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w},\\
\overrightarrow{HB} &= \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = -\mathbf{w} + \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w},\\
\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

□

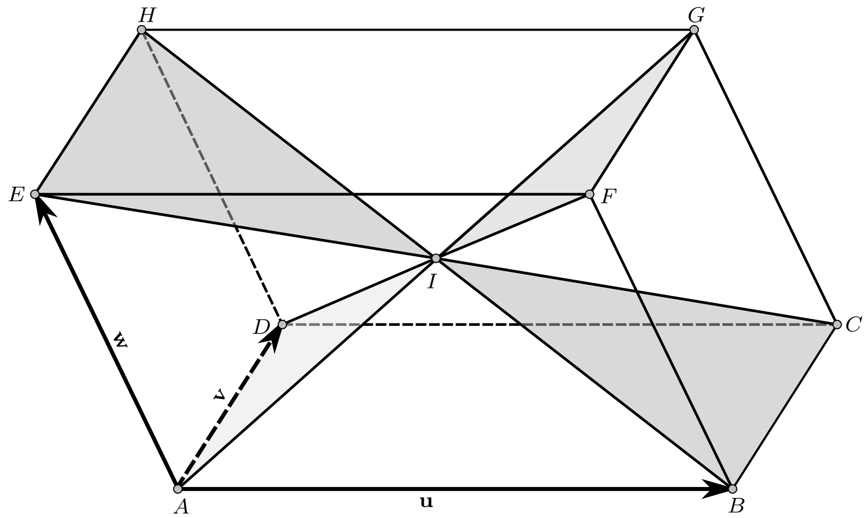

Figura 1.12

Problema 1.15. Să se demonstreze că medianele unui triunghi sunt concurente şi că suma vectorilor care au originile în punctul de intersecţie al medianelor şi extremităţile în vârfurile triunghiului este vectorul nul.

Problema 1.16. Se cunosc coordonatele vârfurilor A, B, C ale paralelogramului $ABCD$, faţă de un reper oarecare. Să se determine coordonatele celui de-al patrulea vârf (D), în fiecare dintre situaţiile următoare:

1) $A(2, 3), B(1, 4), C(0, -2)$;

2) $A(-2, -1), B(3, 0), C(1, -2)$.

Problema 1.17. Se cunosc coordonatele vârfurilor A şi B şi coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC. Determinaţi coordonatele vârfului C al triunghiului în fiecare dintre următoarele situaţii:

1) $A(4, 1), B(3, -2), G(0, 2)$;

2) $A(3, 5), B(-1, -3), C(1, 1)$.

Problema 1.18. Se dă trapezul $ABCD$, în care $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$. Punctele M şi N sunt mijloacele bazelor AB şi DC, iar P este punctul de intersecţie a diagonalelor, AC şi BD, ale trapezului.

1) Luând vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ ca bază, determinaţi componentele vectorilor $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}$.

2) Luând vectorii $\overrightarrow{PA}$ şi $\overrightarrow{PB}$ ca bază, determinaţi componentele vectorilor $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

Problema 1.19. Se dau, în plan, trei vectori, prin componentele lor relativ la o bază oarecare: $\mathbf{a}(4, -2)$, $\mathbf{b}(3, 5)$, $\mathbf{c}(-2, -12)$. Exprimaţi vectorul $\mathbf{c}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$.

Problema 1.20. Se dau vectorii necoliniari $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Demonstraţi că sistemul de vectori $\mathbf{m} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ este liniar dependent, iar vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$ sunt necoliniari. Exprimaţi vectorul $\mathbf{m}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$.

Problema 1.21. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC. Exprimaţi:

1) vectorul $\overrightarrow{MA}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$;

2) vectorul $\overrightarrow{AB}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$;

3) vectorul $\overrightarrow{OA}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}$, unde O este un punct oarecare din spaţiu.