Problema 12.9. Determinați matricea unei transformări care constă dintr-o reflexie față de dreapta $y=x$, urmată de o reflexie față de dreapta $y=\sqrt{3}\cdot x$.

Vom avea nevoie de câte un versor director pentru fiecare dreaptă.

$d_1 : y = x \Rightarrow y - x = 0$

Fie $\vec{v}$ - versorul director al dreptei d_1

Știm că $\|\vec{v}\| = 1$

Și fie $\vec{a_1}(a,a)$ - vectorul director al dreptei d_1 $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+a^2} = 1 \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Deci, alegem $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ca versor director al dreptei d_1

Se observă și că $O(0,0) \in d_1$

$$Mirror(O, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1-1 & 2\cdot\frac{2}{4} & 2(0-0) \\ 2\cdot\frac{2}{4} & 1-1 & 2(0+0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vom proceda la fel și pt. $d_2 : y = \sqrt{3}\cdot x$

Fie $\vec{w}$ - versorul director al dreptei d_2

$\vec{a_2}(a, a\sqrt{3})$ - vector director al dreptei d_2

Pentru a obține componentele versorului, punem din nou condiția:

$\sqrt{a^2+3a^2}=1 \Rightarrow 4a^2=1 \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$

Deci, alegem $\vec{w}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ca versor director al dreptei d_2

Se observă și că $O(0,0) \in d_2$.

$$Mirror(O, \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1-2\cdot\frac{3}{4} & 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & 2(0-0) \\ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & 1-2\cdot\frac{1}{4} & 2(0+0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru a determina matricea unei transformări de acest gen vom înmulți matricile în ordinea inversă transformărilor făcute, adică:

$$Tr = Mirror(O, \vec{w}) \cdot Mirror(O, \vec{v}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$