

Logică computațională

Curs 3

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Logica propozițiilor

Propozițiile logice sunt modele ale afirmațiilor propoziționale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.



Sintaxa logicii propozițiilor

- alfabetul

- $\Sigma_P = Var_propoz \cup Conective \cup \{ (,) \}$
- $Var_propoz = \{ p, q, r, p_1, p_2, \dots \}$
- $Conective = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

- regulile de formare a Formulelor propoziționale

- F_P = mulțimea formulelor propoziționale corect construite
= cea mai mică mulțime de formule ce se poate construi cu regulile:
 - baza*: $p_i \in F_P, i=1,2,\dots$
 - inducția*: dacă $U, V \in F_P$ atunci:
 $\neg U \in F_P, U \wedge V \in F_P, U \vee V \in F_P, U \rightarrow V \in F_P, U \leftrightarrow V \in F_P$
 - închiderea*: toate formulele din F_P se obțin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.



Semantica logicii propoziționale

- Propozițiile logice sunt modele ale afirmațiilor propoziționale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.
- **Scopul** definirii semanticii logicii propoziționale este de a **atribui** un înțeles, o **valoare de adevăr**, formulelor propoziționale.
- Domeniul semantic:
 $\{F(\text{fals}), T(\text{true, adevărat})\}$ a.î. $\neg F = T, \neg T = F$

Semantica conectivelor

p	$\neg p$
T	F
F	T

\uparrow - nand $p \uparrow q := \neg (p \wedge q)$

\downarrow - nor $p \downarrow q := \neg (p \vee q)$

\oplus - xor $p \oplus q := \neg (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T	F

Interpretarea (Def.)

- O *interpretare* a formulei $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ este o funcție $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ care asociază valori de adevăr variabilelor propoziționale și poate fi extinsă la o funcție $i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ folosind relațiile:
$$i(\neg p) = \neg i(p) \qquad i(p \wedge q) = i(p) \wedge i(q)$$
$$i(p \vee q) = i(p) \vee i(q) \quad i(p \rightarrow q) = i(p) \rightarrow i(q) \quad i(p \leftrightarrow q) = i(p) \leftrightarrow i(q)$$
- Interpretările evaluatează formulele propoziționale conform semanticii conectorilor componente, atribuindu-le valori de adevăr.
- Tabela de adevăr a unei formule propoziționale $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ corespunde evaluărilor formulei în toate cele 2^n interpretări.

Concepte semantice (Def.)

Fie formula propozițională $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$.

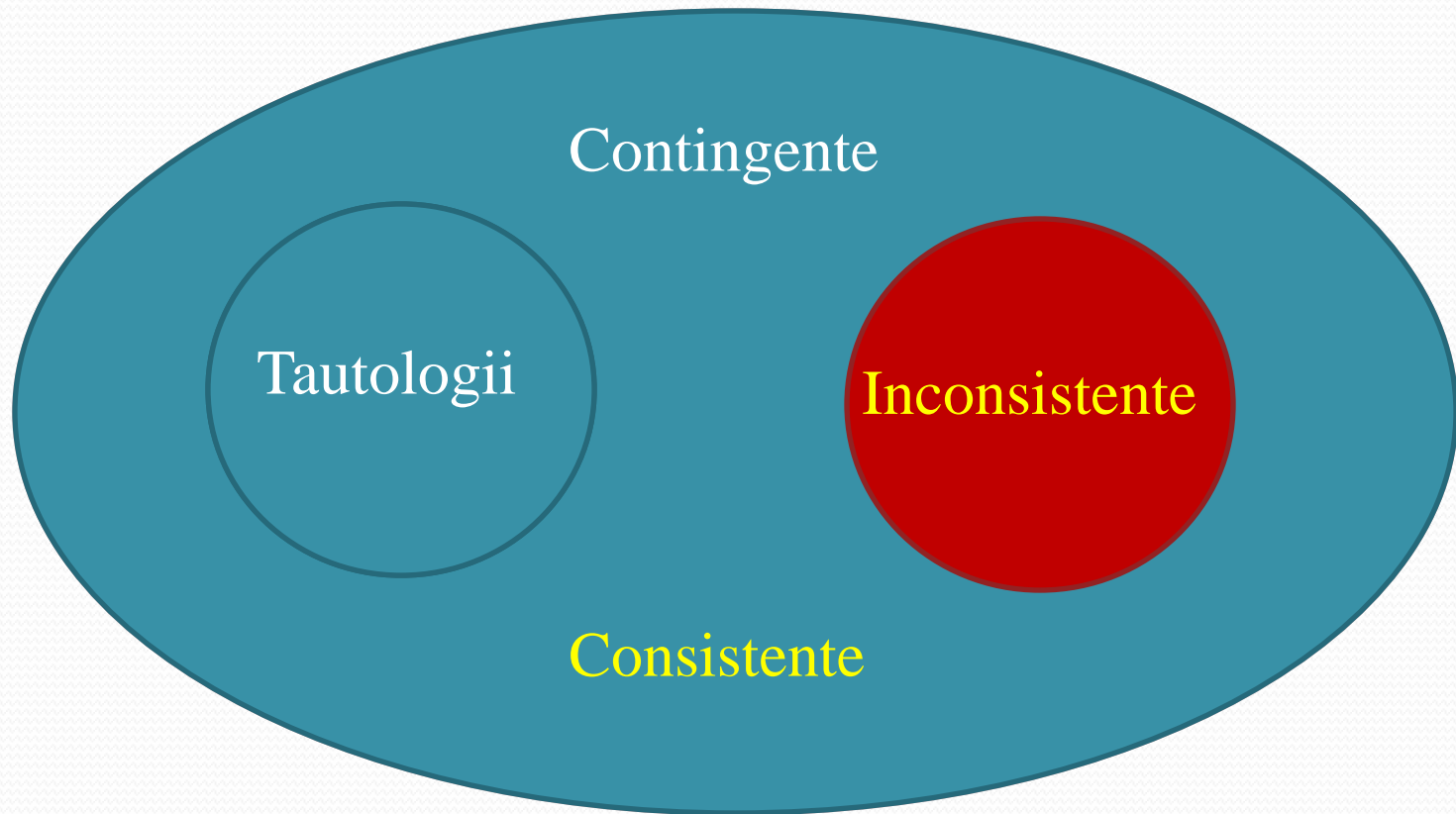
- O interpretare $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ care evaluează formula U ca adevărată, $i(U)=T$, se numește ***model*** al formulei.
- O interpretare $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ care evaluează formula U ca falsă, $i(U)=F$, se numește ***anti-model*** al formulei.

Concepte semantice (Def.) – cont.

Fie formula propozițională $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$.

- U se numește **consistentă (realizabilă)** dacă și numai dacă are cel puțin un model, deci poate fi evaluată ca adevărată:
 $\exists i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U) = T$.
- U se numește **validă (tautologie)**, notație: $\models U$, dacă și numai dacă U este evaluată ca adevărată în orice interpretare, adică:
 $\forall i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}, i(U) = T$. Toate interpretările formulei U sunt modele ale formulei.
- Formula U se numește **inconsistentă (nerealizabilă)** dacă și numai dacă U nu are niciun model, adică U este interpretată totdeauna ca falsă: $\forall i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}, i(U) = F$.
- Formula U se numește **contingentă** dacă și numai dacă este consistentă, dar nu este validă.

Tipuri de formule



Exemplu

- $U(p, q, r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p),$
- $V(p, q, r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$
- $p \uparrow \neg p$
- $p \downarrow \neg p$

Tabela de adevăr - completarea

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$$U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p),$$

$$V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

Tabela de adevăr – interpretări

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

modele pt. U : i_1, i_2, i_5 și i_7

$i_1 : \{p,q,r\} \rightarrow \{T,F\}$, $i_1(p)=T$, $i_1(q)=T$, $i_1(r)=T$ și $i_1(U)=T$

anti-modele pt. U : i_3, i_4, i_6 și i_8

Tabela de adevăr – tip formule

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$p \uparrow \neg p$ – tautologie

$p \downarrow \neg p$ – inconsistentă

U, V – contingente și consistente

Metasimboluri – relații semantice între formule

- Formula V este **consecință logică** a formulei U ,
notație: $U \models V$, dacă și numai dacă $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ astfel
încât $i(U)=T$, are loc $i(V)=T$.
- Formulele $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ și $V(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ sunt **logic echivalente**, notație: $U \equiv V$, dacă și numai dacă
tabelele lor de adevăr sunt identice, adică: $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$,
 $i(U) = i(V)$.

Tabela de adevăr – tip formule

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$$U \equiv V$$

$$U \models \neg p \vee q$$

Concepte semantice pentru mulțimi de formule

- O **mulțime** $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de formule se numește **consistentă** (**realizabilă**) dacă și numai dacă formula $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$ este consistentă, adică: $\exists i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = T$, i se numește **model** al mulțimii $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$.
- O **mulțime** $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de formule se numește **inconsistentă** (**nerealizabilă, contradictorie**) dacă și numai dacă formula $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$ este inconsistentă, adică, $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = F$, i se numește **anti-model** al mulțimii $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$.
- Formula V este **consecință logică** a mulțimii de formule $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ și se notează $U_1, U_2, \dots, U_n \models V$, dacă și numai $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = T$, are loc $i(V) = T$. Formulele U_1, U_2, \dots, U_n se numesc *premize, ipoteze, fapte*, iar V se numește *concluzie*.

Teoremă

Fie $S = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ o mulțime de formule propoziționale.

1. Dacă S este o mulțime consistentă, atunci
 $\forall j, 1 \leq j \leq n, S \setminus \{U_j\}$ este o mulțime consistentă.
2. Dacă S este o mulțime consistentă și V este o formulă validă, atunci mulțimea $S \cup \{V\}$ este consistentă.
3. Dacă S este o mulțime inconsistentă, atunci $\forall V \in F_p$ mulțimea $S \cup \{V\}$ este inconsistentă.
4. Dacă S este o mulțime inconsistentă și U_j este o formulă validă, unde $1 \leq j \leq n$, atunci mulțimea $S \setminus \{U_j\}$ este inconsistentă.

Teoremă

Fie $U_1, U_2, \dots, U_n, U, V$ formule propoziționale.

- $\models U$ **dacă și numai dacă** $\neg U$ este *inconsistentă*
(O formulă este *tautologie* **dacă și numai dacă** negația sa este o formulă *inconsistentă*).
- $U \models V$ **dacă și numai dacă** $\models U \rightarrow V$ **dacă și numai dacă** mulțimea $\{U, \neg V\}$ este *inconsistentă*.
- $U \equiv V$ **dacă și numai dacă** $\models U \leftrightarrow V$.
- $U_1, U_2, \dots, U_n \models V$ **dacă și numai dacă** $\models U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \rightarrow V$ **dacă și numai dacă** mulțimea $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \neg V\}$ este *inconsistentă*.

Echivalențe logice în logica propozițională

- Legile lui DeMorgan

$$\neg (U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V \quad \text{și} \quad \neg (U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V$$

- Legile de absorbție

$$U \wedge (U \vee V) \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee (U \wedge V) \equiv U$$

- Legile de comutativitate

$$U \wedge V \equiv V \wedge U \quad \text{și} \quad U \vee V \equiv V \vee U$$

- Legile de asociativitate

$$U \wedge (V \wedge Z) \equiv (U \wedge V) \wedge Z \quad \text{și} \quad U \vee (V \vee Z) \equiv (U \vee V) \vee Z$$

- Legile de distributivități

$$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z) \quad \text{și} \quad U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$$

- Legile de idempotență

$$U \wedge U \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee U \equiv U$$

Alte echivalențe logice

- Legile de simplificare

$$\neg \neg U \equiv U \quad U \rightarrow U \equiv T$$

$$U \wedge \neg U \equiv F \quad U \vee \neg U \equiv T$$

$$T \wedge U \equiv U \quad F \vee U \equiv U$$

$$U \rightarrow T \equiv T \quad U \rightarrow F \equiv \neg U$$

$$T \rightarrow U \equiv U \quad F \rightarrow U \equiv T$$

$$U \leftrightarrow T \equiv U \quad U \leftrightarrow F \equiv \neg U$$

$$U \oplus T \equiv \neg U \quad U \oplus F \equiv U$$

$$U \leftrightarrow U \equiv T \quad U \oplus U \equiv F$$

- Definirea conectivelor

$$U \rightarrow V \equiv \neg U \vee V$$

$$U \rightarrow V \equiv \neg (U \wedge \neg V)$$

$$U \rightarrow V \equiv U \leftrightarrow (U \wedge V)$$

$$U \rightarrow V \equiv V \leftrightarrow (U \vee V)$$

$$U \leftrightarrow V \equiv (U \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow U)$$

$$U \oplus V \equiv \neg (U \rightarrow V) \vee \neg (V \rightarrow U)$$

$$U \leftrightarrow V \equiv (U \vee V) \rightarrow (U \wedge V)$$

$$U \vee V \equiv \neg (\neg U \wedge \neg V)$$

$$U \wedge V \equiv \neg (\neg U \vee \neg V)$$

$$U \vee V \equiv \neg U \rightarrow V$$

$$U \wedge V \equiv \neg (U \rightarrow \neg V)$$

$$\neg U \equiv U \uparrow U \equiv U \downarrow U$$

$$U \vee V \equiv (U \uparrow U) \uparrow (V \uparrow V) \equiv (U \downarrow V) \downarrow (U \downarrow V)$$

$$U \wedge V \equiv (U \downarrow U) \downarrow (V \downarrow V) \equiv (U \uparrow V) \uparrow (U \uparrow V)$$

Principiul dualității

- Pentru orice echivalență logică $U \equiv V$ care conține doar conectivele $\neg, \wedge, \vee, \uparrow, \downarrow$ există o altă echivalență logică, $U' \equiv V'$, unde U', V' sunt formule obținute din U, V prin interschimbarea conectivelor logice duale: $(\wedge, \vee), (\uparrow, \downarrow)$ și a valorilor de adevăr: T, F.
- *Conective duale*: $(\wedge, \vee), (\uparrow, \downarrow), (\leftrightarrow, \oplus)$.
- *Valori de adevăr duale*: T și F.
- *Concepte duale*: tautologie și formulă inconsistentă.

Forme normale în logica propozițiilor

1. Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația sa.
2. O *clauză* este disjuncția unui număr finit de literali.
3. Un *cub* este conjuncția unui număr finit de literali.
4. *Clauza vidă*, simbolizată prin \square , este clauza fără literali, fiind singura clauză inconsistentă.
5. O formulă este în *formă normală disjunctivă (FND)*, dacă aceasta este scrisă ca o disjuncție de cuburi
$$\bigvee_{i=1}^p (\bigwedge_{j=1}^{q_i} l_{ij})$$
 unde l_{ij} sunt literali.
6. O formulă este în *formă normală conjunctivă (FNC)*, dacă aceasta este scrisă ca o conjuncție de clauze:
$$\bigwedge_{i=1}^n (\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij})$$
 unde l_{ij} sunt literali.

Exemple FN în logica propozițiilor

- Un **literal** este o variabilă propozițională sau negația sa. $p, \neg q$
- O **clauză** este disjuncția unui număr finit de literali. $p \vee \neg q \vee r$
- Un **cub** este conjuncția unui număr finit de literali. $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- O formulă este în **formă normală disjunctivă (FND)**, dacă aceasta este scrisă ca o disjuncție de cuburi.

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- O formulă este în **formă normală conjunctivă (FNC)**, dacă aceasta este scrisă ca o conjuncție de clauze.

$$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$$

Sunt în FNC și/sau FND?

$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$ *FNC*, 3 clauze

$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q)$ *FND*,
4 cuburi

p *FNC*, 1 clauză; *FND*, 1 cub

$\neg q$ *FNC*, 1 clauză; *FND*, 1 cub

$\neg p \vee q \vee \neg r$ *FND*, 3 cuburi; *FNC*, 1 clauză

$p \wedge \neg q \wedge \neg r$ *FNC*, 3 clauze; *FND*, 1 cub

Proprietate

Fie mulțimea de literali $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- clauza $\bigvee_{i=1}^n l_i$ este validă;
- cubul $\bigwedge_{i=1}^n l_i$ este inconsistent;
- în mulțimea $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ există cel puțin o pereche de literali opuși, adică: $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $l_i = \neg l_j$.

Proprietate - exemple

Fie mulțimea de literali $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- clauza $\bigvee_{i=1}^n l_i$ este validă;
- cubul $\bigwedge_{i=1}^n l_i$ este inconsistent;
- în mulțimea $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ există cel puțin o pereche de literali opuși, adică: $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $l_i = \neg l_j$.

$$\neg p \vee q \vee p \equiv \text{T}$$

$$p \wedge r \wedge \neg r \equiv \text{F}$$

Teoremă

- *Orice formulă admite o formă normală conjunctivă și o formă normală disjunctivă logic echivalente cu ea.*

Algoritmul de normalizare

Pas1:

Înlocuirea formulelor de tip $U \rightarrow V$ cu forma echivalentă: $\neg U \vee V$

Înlocuirea formulelor de tip $U \leftrightarrow V$ cu forma echivalentă:

$$(\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee U).$$

Pas2:

Aplicarea legilor lui **DeMorgan** (se recomandă aplicarea dinspre exterior spre interior) \implies negația va preceda doar variabilele propoziționale.

Eliminarea negațiilor multiple folosind echivalența logică: $\neg \neg U \equiv U$.

Pas3: Aplicarea legilor **distributivității**.

Pentru FND

FNC

$$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z) \quad \text{respectiv} \quad U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$$

Pas4: Simplificarea formei obținute folosind alte echivalențe logice: legile de simplificare, legile absorbției, legile de idempotență.

Exemplu de aducere la FNC & FND

$$U = p \rightarrow r \vee \neg (\neg q \vee r)$$

$$U = p \rightarrow (r \vee \neg (\neg q \vee r))$$

Pas1: Înlocuirea formulelor de tip $U \leftrightarrow V$, $U \rightarrow V$ cu forma echivalentă: $\dots, \neg U \vee V$

$$U \equiv \neg p \vee (r \vee \neg (\neg q \vee r))$$

Pas2: Aplicarea legilor lui **DeMorgan**

$$U \equiv \neg p \vee (r \vee (\neg \neg q \wedge \neg r))$$

$$U \equiv \neg p \vee (r \vee (q \wedge \neg r))$$

$$U \equiv \neg p \vee r \vee (q \wedge \neg r) \quad - FND$$

Pas3: Aplicarea legilor **distributivității**

$$U \equiv (\neg p \vee r \vee q) \wedge (\neg p \vee \underline{r} \vee \underline{\neg r}) \quad - FNC$$

Pas4: Simplificarea formei obținute folosind alte echivalențe logice

$$U \equiv \neg p \vee r \vee q \quad - FND \ \& \ FNC$$

Teoremă

- O formulă în forma normală conjunctivă (*FNC*) este tautologie dacă și numai dacă toate clauzele sale sunt valide.
- O formulă în forma normală disjunctivă (*FND*) este inconsistentă dacă și numai dacă toate cuburile sale sunt inconsistente.

Observații

- Prima parte a teoremei furnizează o *metodă directă* de rezolvare a problemei decizionale (verificarea dacă o formulă este tautologie) în logica propozițiilor.
- FND a unei formule propoziționale furnizează toate modelele formulei inițiale, prin găsirea interpretărilor care evaluează cuburile componente ca adevărate.
- FNC a unei formule propoziționale furnizează toate anti-modelele formulei inițiale prin găsirea interpretărilor care evaluează clauzele componente ca false.
- Cele două formulări din teorema precedentă sunt afirmații duale.