Transformări de coordonate

Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

28 aprilie 2021

Transformări de coordonate

A realiza o schimbare de coordonate înseamnă a realiza cel puţina una dintre următoarele operaţii:

- o schimbare a originii (adică înlocuirea originii cu un alt punct);
- schimbarea direcţiei axelor de coordonate (şi a sensului, eventual), ceea ce înseamnă înlocuirea bazei spaţiului vectorial asociat cu o altă bază.

Fiecare punct al spaţiului cu care lucrăm, într-un caz concret, are un set de coordonate relativ la reperul afin ales. Atunci când aplicăm o transformare de coordonate, trebuie să găsim legătura dintre coordonatele punctului relativ la reperul iniţial şi coordonatele sale relativ la reperul transformat. Analog stau lucrurile şi în cazul vectorilor, unde trebuie să găsim legătura dintre componentele vectorilor relativ la baza iniţială şi componentele lor relativ la baza transformată.

Schimbarea originii
Considerăm un sistem de coordonate

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}\big)$$

şi un sistem transformat, obţinut din acesta prin mutarea originii, fără a schimba direcţiile şi sensurile axelor de coordonate,

$$S' = \big(O'; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}\big).$$

Presupunem că O' are, faţă de sistemul de coordonate vechi, coordonatele $(w_1, \dots, w_n)$.
Fie, acum, P un punct oarecare, ce are, relativ la sistemul de coordonate vechi, coordonatele $(x_1, \dots, x_n)$ şi, faţă de sistemul de coordonate nou, coordonatele $(x'_1, \dots, x'_n)$.

Atunci, avem:

Teorema

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + w_1, \\ \dots \\ x_n = x_n' + w_n \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = X' + W,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Observaţie

Facem convenţia că vectorii (sau punctele) se reprezintă prin matricile *coloană* ale coordonatelor sau componentelor lor. Este una dintre cele două convenţii posibile care se utilizează în grafică. Cealaltă convenţie este că vectorii (sau punctele) se descriu prin matrici linie.

Demonstraţia teoremei.

Fie

$$O' = O + \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{e}_i.$$

În sistemul de coordonate noi, putem scrie

$$P = O' + \sum^{n} x_i' \mathbf{e}_i = O + \sum^{n} w_i \mathbf{e}_i + \sum^{n} x_i' \mathbf{e}_i = O + \sum^{n} (x_i' + w_i) \mathbf{e}_i. \quad (1)$$

Demonstraţie.

Cum, pe de altă parte,

$$P = O + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \tag{2}$$

iar vectorii $\mathbf{e}_i$ sunt liniar independenţi, din (1) şi (2) rezultă relaţia cerută. □

Schimbarea axelor

De data asta, reperul vechi este acelaşi, adică

$$S = \left(O; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}\right),$$

dar reperul nou este de forma

$$S = \left(O; \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}\right),$$

adică originea rămâne aceeaşi, dar se schimbă baza de coordonate. Presupunem că

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{e}_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricea A se numeşte *matrice de schimbare a bazei*. Numele e justificat de teorema de mai jos.

Teorema

Fie P un punct oarecare. Atunci coordonatele sale relativ la cele două repere sunt legate prin relaţia

$$X = A \cdot X'. \tag{3}$$

Observaţie

De remarcat că, dacă am fi utilizat cealaltă convenţie, relaţia (3) s-ar fi scris

$$X = X' \cdot A^t,$$

unde, de data aceasta, X şi X' sunt matrici linie, nu coloană.

Demonstraţia teoremei.

Avem
$$P = O + \sum_{j=1}^{n} x_i \mathbf{e}_j = O + \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{e}_i',$$
prin urmare,
$$\sum_{j=1}^{n} x_i \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{e}_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i' \mathbf{e}_j \right).$$
De aici rezultă că
$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i', \quad 1 \leq j \leq n,$$

Demonstraţia teoremei.

sau, matricial,

$$X = A \cdot X'.$$

$\square$

Mai rămâne de discutat cazul în care se schimbă atât originea reperului, cât şi baza de coordonate. Este uşor de constatat că atunci are loc

Teorema

Dacă se trece de la reperul

$$S = \left(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}\right)$$

la reperul

$$S' = \left(O'; \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}\right),$$

adică se schimbă atât originea, cât şi baza, atunci legătura între coordonatele unui punct în vechea bază şi coordonatele sale în noua bază sunt date de

$$X = A \cdot X' + W, \tag{4}$$

unde W este vectorul coordonatele originii noi faţă de vechiul sistem de coordonate, iar A este matricea schimbării de bază.

Faptul că relaţia (4) nu se reduce la o simplă înmulţire de matrici complică destul de mult lucrurile dacă, aşa cum se întâmplă adesea, trebuie să facem mai multe schimbări de coordonate. Astfel, de exemplu, dacă, în (4)

$$X' = B \cdot X'' + W',$$

atunci relaţia citată se scrie

$$X = A \cdot \left(B \cdot X'' + W'\right) + W = (A \cdot B) \cdot X'' + A \cdot W' + W.$$

Este uşor de imaginat cât de tare se poate complica transformarea dacă trebuie să compunem mai multe transformări. Ideal ar fi dacă am avea $W = 0$, tot timpul. Desigur, aşa ceva nu este posibil, dar putem obţine ceva aproape la fel de bun utilizând aşa-numitele coordonate omogene, pe care le vom introduce în secţiunea următoare.

Transformări de coordonate

Spaţiul proiectiv n-dimensional

Există o serie de probleme cărora geometria euclidiană nu le face faţă cu succes, dar care se pot descrie cu uşurinţă într-o geometrie mai generală, numită geometrie proiectivă. Un spaţiu proiectiv se obţine, până la urmă, din spaţiul afin de aceeaşi dimensiune, adăugând o serie de puncte numite *puncte de la infinit* sau *puncte ideale*.
Adăugarea acestor puncte elimină, de multe ori, cazurile speciale care trebuie luate în considerare atunci când se face o discuţie. Astfel, de exemplu, în planul afin, două drepte distincte pot să se intersecteze sau să fie paralele. În planul proiectiv, oricare două drepte se intersectează, dar unele dintre ele, care corespund dreptelor afine paralele, se intersectează într-un punct de la infinit.
Din punctul nostru de vedere, principalul avantaj al punctului de vedere proiectiv este că ne furnizează un sistem de coordonate foarte utile, *coordonatele omogene*, care permit descrierea foarte comodă a transformărilor geometrice.

Începem cu o definiţie.

Definiţie

Fie $u, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Spunem că punctele u şi v sunt echivalente şi scriem $x \sim y$ dacă există un număr real nenul t astfel încât $u = t \cdot v$. Este uşor de verificat că această relaţie este o relaţie de echivalenţă. Clasa de echivalenţă a lui u,

$$[u] = \{t \cdot u \,|\, t \in \mathbb{R}^*\}$$

este dreapta care trece prin origine şi punctul u, mai puţin originea, desigur. Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă, adică *spaţiul factor* $\mathbb{RP}^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, se numeşte *spaţiu proiectiv n-dimensional*.

Definiţie

Dacă în $\mathbb{R}^{n+1}$ alegem un sistem de coordonate $O, X_1 \dots X_{n+1}$, atunci, pentru $[u] = [X_1, \dots, X_{n+1}]$, spunem că numerele $X_1, \dots, X_{n+1}$ sunt *coordonatele omogene* ale punctului $[u]$. De remarcat că aceste coordonate nu sunt unice. Într-adevăr, dacă $(X_1, \dots, X_{n+1})$ sunt coordonate omogene ale lui $[u]$, atunci, pentru orice $t \neq 0$, $(tX_1, \dots, tX_{n+1})$ sunt, de asemenea, coordonate omogene ale aceluiaşi punct.

Pentru noi sunt importante cazurile $n = 2$ şi $n = 3$.
Începem cu $n = 2$. Spaţiul proiectiv $\mathbb{RP}^2$ se mai numeşte *plan proiectiv real*. Să presupunem că am ales, în $\mathbb{R}^3$, un sistem de coordonate $OXYZ$. Atunci un punct din planul proiectiv se scrie

$$[X, Y, Z] = \{t(X, Y, Z) \mid t \in \mathbb{R}^*\}.$$

Să considerăm, mai întâi, cazul în care $Z \neq 0$. Un punct de acest tip are un reprezentant de forma $(x, y, 1)$, dacă alegem $t = 1/Z$ şi notăm $x = X/Z, y = Y/Z$.
De remarcat că reprezentantul $(x, y, 1)$ este intersecţia dintre dreapta care trece prin origine şi prin punctul (X, Y, Z) şi planul $Z = 1$. Dacă identificăm acest plan cu $\mathbb{R}^2$, concluzia este că există o bijecţie între punctele $[X, Y, Z]$, cu $Z \neq 0$, ale planului proiectiv şi punctele planului euclidian. Dacă (X, Y, Z) sunt coordonate omogene ale unui punct din planul proiectiv, cu $Z \neq 0$, vom spune că ele sunt coordonatele omogene ale punctului $(x = X/Z, y = Y/Z)$ din planul euclidian.
Invers, dacă (x, y) este un punct din planul euclidian, coordonatele sale omogene sunt $(x, y, 1)$ şi orice triplet de numere reale obţinut din acestea prin înmulţirea cu un scalar nenul.

Să vedem, acum, ce se întâmplă cu punctele din planul proiectiv pentru care ultima coordonată este zero. Fie (x_0, y_0) un punct din plan, diferit de origine. Coordonatele punctului pot fi privite ca fiind componentele unui vector care, fiind nenul, poate fi vectorul director al unei drepte. Fie (a, b) un punct oarecare din plan şi dreapta

$$(x(t), y(t)) = (a + tx_0, b + ty_0)$$

de direcţie (x_0, y_0), care trece prin punctul (a, b). Pentru fiecare t real, punctului $(x(t), y(t))$ îi putem asocia coordonatele omogene $(x(t), y(t), 1) = (a + tx_0, b + ty_0, 1)$. Acelaşi punct, dacă $t \neq 0$, are şi coordonatele omogene $(a/t, x_0, b/t + y_0, 1/t)$. Dacă $t \to \infty$, atunci coordonatele omogene ale punctului considerat tind la $(x_0, y_0, 0)$. Interpretarea geometrică este că punctul de coordonate omogene $(x_0, y_0, 0)$ este punctul situat la infinit pe dreapta $(x(t), y(t))$. De remarcat că există *un singur* punct la infinit pe o dreaptă dată.

Considerăm transformarea de coordonate

$$X = A \cdot X + W.$$

Definim *matricea extinsă* sau *matricea omogenă* asociată acestei transformări prin

$$M_{A,W} = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dacă vectorul W se presupune subînţeles, vom nota $M_{A,W} \equiv \overline{A}$. Fie, acum, $\overline{X}$ şi $\overline{X}'$ vectorii coordonatelor omogene asociate lui X şi X', adică

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \overline{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci transformarea de coordonate se poate scrie

$$\overline{X} = \overline{A} \cdot \overline{X}' \tag{6}$$

sau, explicit,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Afirmaţia este uşor de demonstrat în cazul general, dar preferăm să o verificăm în cele două cazuri particulare care ne interesează pe noi, anume $n = 2$ şi $n = 3$.

În cazul $n = 2$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Dacă facem înmulţirea de matrici, obţinem

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + w_2 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.
În cazul $n = 3$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

de unde

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13x_3'} + w_1 \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + w_2 \\ x_3 = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + w_3 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Dacă privim matricile extinse ca fiind nişte matrici formate din blocuri, atunci ele se pot înmulţi, după cum se poate verifica uşor, considerând că blocurile sunt, de fapt, componentele matricii. Astfel, dacă înmulţim matricile $M_{A,W}$ şi $M_{B,V}$ obţinem

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot B & A \cdot V + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Această relaţie demonstrează, în fapt, că $M_{A,W} \cdot M_{B,V}$ este matricea transformării compuse:

$$M_{A,W} \cdot M_{B,V} = M_{A\cdot B, A\cdot V + W},$$

după cum era de aşteptat.

Matricea extinsă asociată transformării identice este matricea identică:

$$M_{I_n,0} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Inversa matricei $M_{A,W}$ este

$$M_{A,W}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot A^{-1} & A \cdot (-A^{-1} \cdot W) + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot A & A^{-1} \cdot W - A^{-1} \cdot W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Să presupunem, acum, că avem o transformare de coordonate de forma

$$X = A \cdot X' + W.$$

Vrem să exprimăm pe X' în funcţie de X. Un calcul simplu ne conduce la

$$X' = A^{-1} \cdot X - A^{-1} \cdot W$$

sau, în limbaj de matrici extinse,

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformări afine

Fie $\mathbb{E}^n$ spaţiul afin n-dimensional. $\mathbb{E}^n$ este, ca mulţime, $\mathbb{R}^n$, privită ca mulţime de puncte. Pentru a fi un spaţiu afin, ea este însoţită de o aplicaţie care asociază fiecărei perechi de puncte vectorul care le uneşte, cu alte cuvinte,

$$\varphi : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}. \tag{10}$$

Aplicaţia φ se bucură de următoarele două proprietăţi:

1. $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$ (regula triunghiului);
2. pentru orice punct $P \in \mathbb{E}^n$ şi orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, există un singur punct $Q \in \mathbb{E}^n$ astfel încât $\varphi(A, B) = \mathbf{v}$.

O aplicaţie bijectivă $T : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ se numeşte *transformare afină* dacă există $O \in \mathbb{E}^n$, aplicaţia $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită, pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, prin

$$\overrightarrow{T}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{T(O)T(P)},$$

unde $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$, este liniară.

Transformări afine

Se poate demonstra că, dacă în $\mathbb{E}^n$ s-a fixat un reper $(O; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\})$, o transformare afină se poate scrie

$$T(P) = A \cdot P + B,$$

unde A este matricea aplicaţiei liniare $\overrightarrow{T}$, iar $B = T(O)$. Pentru a simplifica notaţia, în cele ce urmează vom renunţa la săgeata care indică partea vectorială a transformării afine şi ne vom da seama după argument dacă este vorba despre partea punctuală sau cea vectorială a aplicaţiei afine. Astfel, dacă scriem

$$T(P + \mathbf{v}) = T(P) + T(\mathbf{v}),$$

al doilea termen din membrul drept este, de fapt, partea vectorială (liniară) a transformării afine. Dacă folosim coordonate omogene, matricea corespunzătoare unei transformări afine se va scrie

$$T = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformări afine

Dacă **v** este un vector, atunci

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot v \\ 0 \end{pmatrix},$$

deci aplicaţia A e liniară pe vectori. Pe de altă parte

$$T(P) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot P + W \\ 1 \end{pmatrix}.$$

În cele ce urmează, ne vom concentra, exclusiv, pe cazurile $n = 2$ şi $n = 3$ şi vom determina, pentru fiecare caz contra, matricea omogenă a transformării. Strategia va fi să determinăm, de fiecare dată, o formă vectorială a transformării, care să nu depindă de coordonate, şi abia apoi să determinăm matricea (omogenă) a transformării.

Forma vectorială

Translaţia este o transformare care mută toate punctele planului cu un acelaşi vector, constant. Prin urmare, dacă privim planul ca fiind un spaţiu afin bidimensional, pe care îl vom nota cu $\mathbb{E}^2$, atunci translaţia este o aplicaţie $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$,

$$T(P) = P + \mathbf{w}, \tag{11}$$

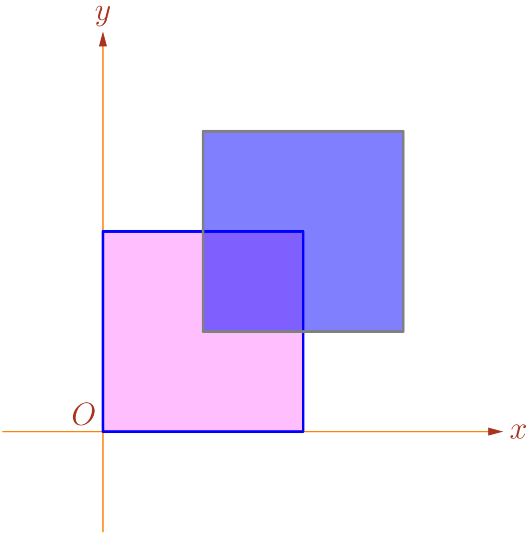
unde $\mathbf{w}$ este un vector constant din plan. Transformarea se mai scrie şi

$$P' = P + \mathbf{w}.$$

O tehnică generală, atunci când studiem transformările afine, ale planului sau ale spaţiului, fără a utiliza coordonate, este aceea de a determina, separat, modul în care transformarea acţionează pe puncte şi pe vectori.

Transformări plane

Translaţia



Transformări plane

Translaţia

Să aplicăm această metodă în cazul translaţiei. Dacă Q este un al doilea punct, atunci

$$T(Q) = Q + \mathbf{w}. \tag{12}$$

Fie $\mathbf{v} = Q - P \left(\equiv \overrightarrow{PQ}\right)$. Atunci

$$T(\mathbf{v}) = T(Q - P) = T(Q) - T(P) = (P + \mathbf{v}) - P = (P - P) + \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} =$$

deci, când translaţia este aplicată unui vector, ea se reduce la aplicaţia identică.

Forma matricială

Cele două reguli de transformare, pentru vectori şi puncte, se scriu, sub forma matricială, ca

$$[v'] = [v] = I_2 \cdot [v], \tag{13}$$

$$[P'] = [P] + [w] = I_2 \cdot [P] + [w], \tag{14}$$

ceea ce înseamnă că, dacă utilizăm blocuri matriciale, matricea translaţiei se va scrie

$$[T_{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} I_2 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

sau, în formă extinsă,

$$[T_{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Dacă aplicăm transformarea unui punct P, de coordonate (x_1, y_1), obţinem

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + w_1 \\ x_2 + w_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

ceea ce corespunde, după cum ne aşteptam, scrierii scalare

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + w_1, \\ x_2' = x_2 + w_2 \end{cases} . \tag{18}$$

Forma vectorială

Aplicăm aceeaşi metodă şi în cazul rotaţiei în plan relativ la un punct. Începem prin a determina rotaţia unui vector **v** cu un unghi θ. Aceasta înseamnă să fixăm originea vectorului şi să rotim extremitatea vectorului cu unghiul θ faţă de originea vectorului. E uşor de verificat că operaţia nu depinde de alegerea originii.

Introducem operatorul care roteşte un vector, în sens direct, cu 90°. Pentru un vector **v**, vom nota imaginea sa prin acest operator cu $\mathbf{v}^\perp$ (se citeşte "perp de **v**"). Dacă am fixat un reper ortonormat direct în care $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, atunci $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$.

Transformări plane

Rotaţia în jurul unui punct

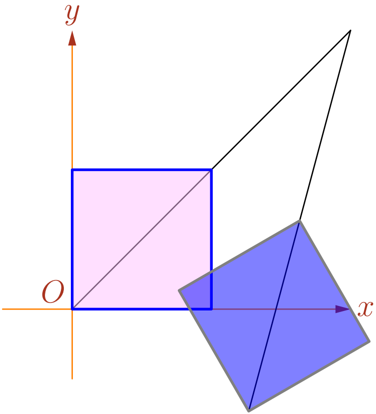


Figura: Rotaţia aplicată unui pătrat

Un raţionament simplu ne arată că putem scrie rotaţia de unghi θ aplicată vectorului sub forma:

$$\mathrm{Rot}(\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{v}^{\perp}\sin\theta. \tag{19}$$

Fie acum Q punctul fix în jurul căruia se face rotaţia şi P un punct oarecare din plan, pe care vrem să-l rotim cu unghiul θ în jurul lui Q. Pentru a stabili formula pentru rotaţia punctului P, remarcăm că putem scrie

$$P = Q + P - Q = Q + \overrightarrow{QP}.$$

Prin urmare, rotaţia fiind o transformare afină, avem:

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P) = \mathrm{Rot}(Q,\theta)(Q) + \mathrm{Rot}(Q,\theta)(\overrightarrow{QP}).$$

Cum Q este punctul în jurul căruia se face rotaţia, el este fix: $\mathrm{Rot}(Q,\theta)(Q) = Q$. Pe de altă parte, transformarea vectorului $P - Q$ este dată de formula (19), adică

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P-Q)=\overrightarrow{QP}\cos\theta+\overrightarrow{QP}^{\perp}\sin\theta,$$

deci, în final, pentru transformarea punctelor avem formula:

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P)=Q+\overrightarrow{QP}\cos\theta+\overrightarrow{QP}^{\perp}\sin\theta. \tag{20}$$

Forma matricială

Dacă utilizăm componentele vectorilor, relaţia (19) se poate scrie

$$\begin{cases} v_1'=v_1\cos\theta-v_2\sin\theta,\\ v_2'=v_1\sin\theta+v_1\cos\theta. \end{cases} \tag{21}$$

Introducem matricea

$$\mathrm{Rot}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Atunci, relaţiile (21) capătă forma matricială

$$[v'] = \mathrm{Rot}(\theta) \cdot [v]. \tag{23}$$

Prin urmare, folosind relaţia (20), obţinem

$$[P'] = [Q] + \mathrm{Rot}(\theta) \cdot (P - Q) = \mathrm{Rot}(\theta) \cdot [P] + (I_2 - \mathrm{Rot}(\theta)) \cdot [Q]$$

Dacă trecem la coordonate omogene, găsim matricea rotaţiei de unghi θ în jurul lui Q sub forma

$$\mathrm{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\theta) & (I_2 - \mathrm{Rot}(\theta)) \cdot [Q] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Dacă explicităm, matricea de mai sus se scrie

$$\mathrm{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1 - \cos\theta) + q_2 \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1 \sin\theta + q_2(1 - \cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Exemplu

Rotaţia faţă de origine. De data asta, Q este originea, deci coordonatele sale sunt $(0, 0)$. Aşadar, matricea rotaţiei de unghi θ relativ la origine este

$$\mathrm{Rot}(\mathit{Origine}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Problema

Determinaţi imaginea triunghiului ABC, de vărfuri $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(4,4)$ printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul originii. Desenaţi, pe acelaşi sistem de axe, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Soluţie.

Conform formulei (26), matricea omogenă a transformării este

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstraţie.

Prin urmare, avem:

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & 2\sqrt{3}-2 \\ \frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3}+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstraţie.

Aşadar, punctele A', B', C' vor fi date de

$$\begin{cases} A' = A'\left(\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}, \dfrac{2\sqrt{3}+1}{2}\right), \\ B' = B'\left(\dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right), \\ C' = C'\left(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+2\right). \end{cases}$$

$\square$

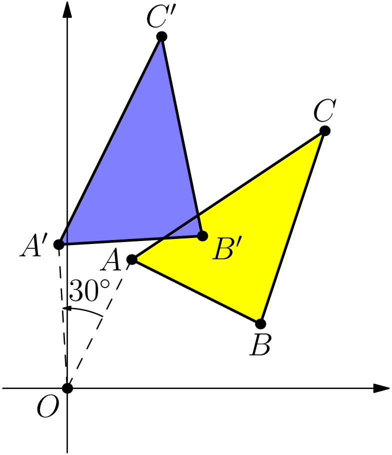


Figura:

Scalarea simplă este o transformare afină în care se scalează vectorii bazei, adică aceştia se înmulţesc cu un număr real diferit de zero. Dacă numărul este acelaşi, avem de-a face cu o scalare *uniformă* sau *izotropă*. Dacă factorii de scală nu sunt aceeaşi pentru toţi vectorii bazei, atunci spunem că scalarea este *neuniformă* sau *anizotropă*. Începem cu studiul scalării simple uniforme. Ea se mai numeşte şi *omotetie*.

Transformări plane

Scalarea simplă uniformă

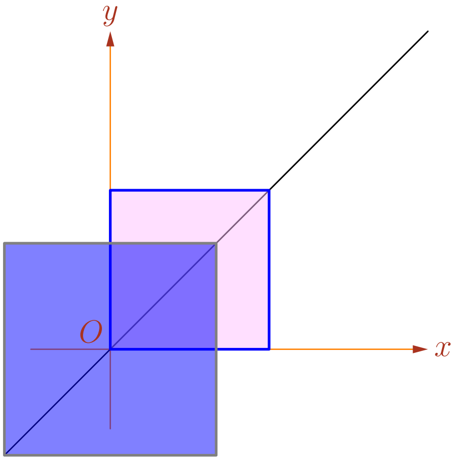


Figura: Scalarea aplicată unui pătrat

Forma vectorială
Scalarea simplă omogenă de factor s, relativ la un punct Q din plan este transformarea geometrică ce asociază unui punct P din plan un punct P' astfel încât

$$\overrightarrow{QP'} = s\overrightarrow{QP}. \tag{27}$$

Este uşor de dedus forma transformării atunci când este aplicată vectorilor:

$$\mathsf{Scale}(Q, s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \tag{28}$$

Această “parte” a scalării nu depinde de punctul Q, ci doar de factorul de scală, s.

Pentru a determina modul în care scalarea se aplică punctelor, procedăm ca şi în cazul rotaţiei, adică aplicăm scalarea vectorială vectorului $\overrightarrow{QP} \equiv P - Q$. Din (28) rezultă

$$\mathrm{Scale}(Q, s)(P - Q) = \mathrm{Scale}(Q, s)(P) - \mathrm{Scale}(Q, s)(Q) = s \cdot (P - Q)$$

Cum Q este punct fix al transformării, relaţia de mai sus se poate scrie

$$\mathrm{Scale}(Q, s)(P) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \tag{29}$$

Scalarea uniformă

Forma matricială
Relaţia (29) se poate scrie, matriceal

$$\mathrm{Scale}(Q,s)(P) = [Q]+s\,(P-Q) = s[P]+(1-s)[Q] = (sI_2)\cdot][P]+(1-s)[Q].$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme relativ la Q este

$$\mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s\cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

sau, explicit,

$$\mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Produsul tensorial

Avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operaţie cu vectori care se numeşte *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ şi $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi vectori este aplicaţia biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}]^t. \tag{32}$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^t \, .$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalităţi. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \tag{33}$$

Produsul tensorial

Remarcabil este, la relaţia de mai sus, că, atunci când **a** şi **b** sunt vectori constanţi, **t** este o aplicaţie liniară de **u**. Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \tag{34}$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (33) se transformă în formula (34).

Scalarea simplă neuniformă

Fie Q un punct din plan. O *scalare simplă neuniformă* a planului, relativ la punctul Q, este o transformare afină care asociază unui punct P, de vector de poziţie $\overrightarrow{QP}$, relativ la punctul Q, un punct P' astfel încât

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{i} = s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}), \\ \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{j} = s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}). \end{cases} \tag{35}$$

Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector din plan. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}, \quad \mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}$. Atunci,

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = \mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_x) + \mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_y),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \tag{36}$$

Scalarea simplă neuniformă

Dacă P e un punct,

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = \mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \qquad (37)$$

Forma matricială Din (37), obţinem

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i})(P - Q) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})(P - Q)$$

sau

$$\begin{aligned} \mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y) = {} & \big(s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})\big) \cdot P + \\ & + \big(I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})\big) \cdot Q \end{aligned} \qquad (38)$$

Matricea transformării este, deci

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) & \big(I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})\big) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Scalarea simplă neuniformă

Dar

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci matricea extinsă este

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1 - s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1 - s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Reflexia faţă de o dreaptă

Reflexia relativ la o dreaptă este transformarea care asociază unui punct simetricul punctului faţă de dreaptă.

Forma vectorială

Considerăm o dreaptă care trece printr-un punct Q şi are versorul director $\mathbf{w}$. Începem, ca de obicei, prin a determina imaginea unui vector prin reflexie. Evident, imaginea vectorului nu depinde de punctul Q. Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din plan. După cum am văzut, $\mathbf{v}$ se poate descompune ca o sumă dintr-un vector paralel cu vectorul $\mathbf{w}$ şi unul perpendicular pe acest vector,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}.$$

De data aceasta, însă, vom pune

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\|} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}, \\ \mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}. \end{cases}$$

Reflexia faţă de o dreaptă

Este clar că
$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\|}) = \mathbf{v}_{\|}, \tag{41}$$
în timp ce
$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\perp}) = -\mathbf{v}_{\perp}.$$
Aşadar,
$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\|} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}. \tag{42}$$
Ca să determinăm imaginea unui punct oarecare, P, din plan, ţinem cont de faptul că $P = Q + (P - Q)$ şi, Q fiind un punct fix al transformării, obţinem
$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \text{Mirror}(\mathbf{w})(\overrightarrow{QP}),$$
deci
$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2\left(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\mathbf{w}^{\perp}. \tag{43}$$

Reflexia faţă de o dreaptă

Forma matricială
Transcriem, mai întâi, matricial, formula de transformare pentru vectori (42), ţinând cont de faptul că

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp)\mathbf{w}^\perp = \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\mathbf{v}.$$

Obţinem, prin urmare,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\mathbf{v}$$

sau

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \left(I_2 - 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\right)\cdot\mathbf{v}. \tag{44}$$

Aşadar, matricea părţii liniare a reflexiei este

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{w}) = I_2 - 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right). \tag{45}$$

Reflexia faţă de o dreaptă

Pentru determinarea matricei omogene, plecăm de la (43) şi obţinem

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{w})(P)=Q+P-Q-2\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}\right)(P-Q),$$

adică

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{w})(P)=\left(I_2-2\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}\right)\right)\cdot P+2\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot Q, \quad (46)$$

ceea ce înseamnă că matricea omogenă a transformării este

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{w})=\begin{pmatrix} I_2-2\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}\right) & 2\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot Q\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (47)$$

Dacă ţinem cont că

$$\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}=\begin{pmatrix} w_2^2 & -w_1w_2\\ -w_1w_2 & w_1^2\end{pmatrix},$$

Reflexia faţă de o dreaptă

matricea de mai sus se scrie, în mod explicit, ca

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 - 2w_2^2 & 2w_1 w_2 & 2(q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \\ 2w_1 w_2 & 1 - 2w_1^2 & 2(-q_1 w_1 w_2 + q_2 w_1^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Observaţii

- Dacă Q este originea, iar reflexia se face faţă de Ox, atunci avem $\mathbf{w} = (1, 0)$, deci

$$\mathrm{Mirror}(Origine, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reflexia faţă de o dreaptă

Observaţii

- Analog, reflexia faţă de *Oy* este dată de matricea
$$\mathrm{Mirror}(\mathit{Origine}, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Formula (48) a fost obţinută în ipoteza că dreapta este dată sub forma vectorială:
$$P(t) = Q + t\mathbf{w}.$$

Reflexia faţă de o dreaptă

Observaţii

- Dacă dreapta este dată sub forma generală,

$$\Delta: \ ax + by + c = 0,$$

atunci ca versor al vectorului director se poate lua vectorul

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a).$$

Dacă $a \neq 0$, putem lua $Q = (-c/a, 0)$. Dacă înlocuim în formula (48), obţinem

$$\mathrm{Mirror}(\Delta) = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2 - b^2 & -2bc \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \qquad (49)$$

Forfecarea

Forfecarea este transformarea afină care transformă un pătrat unitate cu un vârf în punctul Q şi de laturi $\mathbf{w}$ şi $\mathbf{w}^{\perp}$ într-un paralelogram înclinând latura $\mathbf{w}^{\perp}$ şi transformând-o în $\mathbf{w}^{\perp}_{\text{new}}$, care face un unghi θ cu $\mathbf{w}^{\perp}$, fără să modifice punctul Q sau vectorul $\mathbf{w}$.

Forma vectorială Începem, ca de obicei, prin a determina forfecarea aplicată unui vector. Fie, prin urmare, $\mathbf{v}$ un vector oarecare din plan. Tot ca de obicei, îl descompunem în două componente, una paralelă cu vectorul $\mathbf{w}$ şi una perpendiculară pe el sau, mai degrabă, una paralelă cu vectorul $\mathbf{w}^{\perp}$. Atunci, vom avea

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp},$$

Forfecarea

unde

$$\mathbf{v}_\perp = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp\right)\cdot\mathbf{w}^\perp \text{ şi } \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v}-\mathbf{v}_\perp.$$

Este clar că $\mathrm{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}_\parallel)=\mathbf{v}_\parallel$, în timp ce

$$\begin{aligned}\mathrm{Shear}(\mathbf{v},\theta)(\mathbf{v}_\perp) &= \mathrm{Shear}(\mathbf{v},\theta)\left(\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp\right)\cdot\mathbf{w}^\perp\right) = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp\right)\mathrm{Shear}(\mathbf{v},\theta)(\mathbf{w}^\perp)\\ &= \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp\right)\left(\operatorname{tg}\theta\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}^\perp\right).\end{aligned}$$

Aşadar,

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}-\mathbf{v}_\perp+\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp\right)\left(\operatorname{tg}\theta\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}^\perp\right) = \mathbf{v}+\operatorname{tg}\theta\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp\right)\cdot\mathbf{w}$$

adică

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}+\operatorname{tg}\theta\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^\perp\right)\cdot\mathbf{w}. \tag{50}$$

Forfecarea

Pentru a determina imaginea prin forfecare a unui punct P, folosim, din nou, relaţia $P = Q + P - Q \equiv Q + \overrightarrow{QP}$ şi obţinem, folosind (50) şi faptul că punctul Q este fix,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = Q + \overrightarrow{QP} + \operatorname{tg}\theta \left(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot \mathbf{w}. \tag{51}$$

Forma matricială

Pentru a determina matricea transformării, mai întâi determinăm forma matricială a transformării vectorilor. Plecăm de la formula (50) şi obţinem

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta \left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right) \cdot \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \left(I_2 + \operatorname{tg}\theta \left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right)\right) \cdot \mathbf{v}, \tag{52}$$

ceea ce înseamnă că matricea părţii vectoriale a forfecării este

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta) = I_2 + \operatorname{tg}\theta \left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}\right). \tag{53}$$

Forfecarea

Pentru a obţine matricea omogenă a transformării pentru puncte, combinăm (51) şi (53) şi obţinem

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta)=\begin{pmatrix} I_2+\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right) & -\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right)\cdot Q\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{54}$$

Pentru a obţine forma explicită a acestei matrici, remarcăm, înainte de toate, că

$$\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -w_2 & w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -w_1w_2 & w_1^2\\ -w_2^2 & w_1w_2\end{pmatrix},$$

prin urmare,

$$I_2+\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right)=\begin{pmatrix} 1-w_1w_2\operatorname{tg}\theta & w_1^2\operatorname{tg}\theta\\ -w_2^2\operatorname{tg}\theta & 1+w_1w_2\operatorname{tg}\theta\end{pmatrix},$$

iar

$$-\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right)\cdot Q=\begin{pmatrix} \left(q_1w_1w_2-q_2w_1^2\right)\operatorname{tg}\theta\\ \left(q_1w_2^2-q_2w_1w_2\right)\operatorname{tg}\theta\end{pmatrix}.$$

Forfecarea

Aşadar, în final,

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 - w_1 w_2 \operatorname{tg}\theta & w_1^2 \operatorname{tg}\theta & (q_1 w_1 w_2 - q_2 w_1^2) \operatorname{tg}\theta \\ -w_2^2 \operatorname{tg}\theta & 1 + w_1 w_2 \operatorname{tg}\theta & (q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Exemple

1) Dacă punem $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0)$, matricea forfecării devine:

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\theta & -q_2 \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forfecarea

În particular, forfecarea în direcţia axei *Ox* relativ la origine este

$$\mathrm{Shear}(\mathit{Origine}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Forfecarea în direcţia axei *Oy* este, în schimb,

$$\mathrm{Shear}(Q, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{tg}\theta & 1 & q_1 \operatorname{tg}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$