SEMINARUL 5

Dreapta şi planul în spaţiu

Problema 5.1. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale planului care trece prin:

1) punctul $M_0(1, 0, 2)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{a}_1(1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2(0, 3, 1)$;

2) punctul $A(1, 2, 1)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}$;

3) punctul $A(1, 7, 1)$ şi este paralel cu planul xOz;

4) punctele $M_1(5, 3, 2)$, $M_2(1, 0, 1)$ şi este paralel cu vectorul $\mathbf{a}(1, 3, -3)$.

5) punctul $A(1, 5, 7)$ şi prin axa Ox;

6) prin originea coordonatelor şi punctele $M_1(1, 0, 1)$, $M_2(-2, -3, 1)$.

Problema 5.2. Scrieţi ecuaţia generală a planului plecând de la ecuaţiile sale parametrice:

(a)

$$\begin{cases} x &= 2 + 3u - 4v, \\ y &= 4 - v, \\ z &= 2 + 3u; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = 5 + 6u - 4v. \end{cases}$$

Problema 5.3. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale planului plecând de la ecuaţia sa generală:

(a) $3x - 6y + z = 0$;

(b) $2x - y - z - 3 = 0$.

Problema 5.4. Stabiliţi ecuaţia planului care trece prin punctul $A(3, 5, -7)$ şi care taie pe axele de coordonate segmente de lungime egală.

Problema 5.5. Se dau vârfurile unui tetraedru: $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin muchia AB şi prin mijlocul muchiei CD.

Problema 5.6. Stabiliţi care dintre următoarele plane se intersectează, sunt paralele sau coincid:

(a) $x - y + 3z + 1 = 0$ şi $2x - y + 5z - 2 = 0$;

(b) $2x + 4y + 2z + 4 = 0$ şi $4x + 2y + 4z + 8 = 0$;

(c)

$$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = 1 + v, \\ z = u - v \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x = 2 + 3u' + v', \\ y = 1 + u' + v', \\ z = 2 - 2v'. \end{cases}$$

Problema 5.7. Demonstraţi că paralelipipedul care are trei feţe neparalele situate în planele $2x + y - 2z + 6 = 0$, $2x - 2y + z + 8 = 0$ şi $x + 2y + 2z + 10 = 0$ este dreptunghic.

Problema 5.8. Determinaţi proiecţia ortogonală a punctului $A(1, 3, 5)$ pe dreapta de intersecţie a planelor $2x + y + z - 1 = 0$ şi $3x + y + 2z - 3 = 0$.

Problema 5.9. Stabiliţi ecuaţia unui plan, ştiind că punctul $A(1, -1, 3)$ este proiecţia ortogonală a originii pe acest plan.

Soluţie. Din enunţul problemei rezultă că vectorul $\mathbf{n} = \overrightarrow{OA}(1, -1, 3)$ este normal la planul căutat. Aşadar, ecuaţia planului este $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = 0$, adică

$$x - 1 - (y + 1) + 3(z - 3) = 0$$

sau

$$x - y + 3z - 11 = 0.$$

□

Problema 5.10. Determinaţi distanţa dintre planele paralele $x-2y-2z+7 = 0$ şi $2x-4y-4z+17 = 0$.

Problema 5.11. Stabiliţi ecuaţia unui plan care este paralel cu planul $2x - 2y - z - 6 = 0$ şi care este situat la distanţă de 7 unităţi de acesta. Este soluţia problemei unică?

Problema 5.12. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin:

1. punctul $M_0(2, 0, 3)$ şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{a}(3, -2, -2)$;
2. punctul $A(1, 2, 3)$ şi este paralelă cu axa Ox;
3. punctele $M_1(1, 2, 3)$ şi $M_2(4, 4, 4)$.

Problema 5.13. Se dau vârfurile $A(1, 2, -7), B(2, 2, -7), C(3, 4, -5)$ ale unui triunghi. Să se scrie ecuaţiile bisectoarei interioare a unghiului A.

Problema 5.14. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de planele $x + y + 2z - 3 = 0$ şi $x - y + z - 1 = 0$.

Problema 5.15. Stabiliţi că dreapta $x = 1 - 2t, y = 3t, z = -2 + t$ este paralelă cu dreapta $x = 7 + 4s, y = 5 - 6s, z = 4 - 2s$ şi determinaţi distanţa dintre ele.

Problema 5.16. Demonstraţi că dreapta $x = -3t, y = 2 + 3t, z = 1$ se intersectează cu dreapta $x = 1 + 5s, y = 1 + 13s, z = 1 + 10s$ şi determinaţi coordonatele punctului de intersecţie.

Problema 5.17. Pentru ce valoare a parametrului m dreapta $x = -1 + 3t, y = 2 + mt, z = -3 - 2t$ nu are puncte comune cu planul $x + 3y + 3z - 2 = 0$?