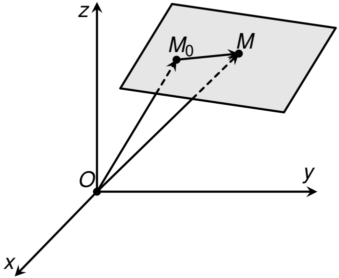
Dreapta şi planul în spaţiu

Paul A. Blaga

Universitatea “Babeş-Bolyai”

17 martie 2021

Fie **v** şi **w** doi vectori necoliniari din spaţiu şi M_0 un punct oarecare. Dacă ataşăm vectorii punctului M_0, atunci există două puncte, unic determinate, P şi Q, astfel încât $\mathbf{v} = \overrightarrow{M_0P}$ şi $\mathbf{w} = \overrightarrow{M_0Q}$. Cum vectorii **v** şi **w** sunt necoliniari, punctele M_0, P şi Q, la rândul lor, sunt necoliniare, deci determină un plan Π. Intenţionăm să descriem punctele acestui plan cu ajutorul punctului M_0 şi al vectorilor **v** şi **w**.



Planul

Ecuaţia vectorială a planului

Fie M un punct din spaţiu. Notăm cu $\mathbf{r}_0$ vectorul de poziţie al punctului M_0 şi cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al punctului M. Punctul M, în mod clar, aparţine planului dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coplanar cu vectorii $\overrightarrow{M_0P}$ şi $\overrightarrow{M_0Q}$, adică cu vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$. Să presupunem că M *aparţine* planului Π. Aceasta înseamnă, întrucât vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ sunt liniar independenţi, că $\overrightarrow{M_0M}$ are o descompunere (unică) sub forma unei combinaţii liniare a vectorilor $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$, cu alte cuvinte, există (şi sunt unice) două numere reale s şi t astfel încât să avem

$$\overrightarrow{M_0M} = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, deci ecuaţia precedentă se poate scrie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \tag{2}$$

ecuaţie care se numeşte *ecuaţia vectorială a planului* Π.

Să presupunem acum că punctul M are coordonatele (x, y, z), M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0), iar vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ au componentele (v_x, v_y, v_z), respectiv (w_x, w_y, w_z). Atunci ecuaţia vectorială (2) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + sv_x + tw_x \\ y = y_0 + sv_y + tw_y \\ z = z_0 + sv_z + tw_z \end{cases}, \tag{3}$$

ecuaţii care se numesc *ecuaţiile parametrice ale planului* Π. Ecuaţia planului se poate reprezenta sub formă vectorială şi fără a utiliza parametrii. Într-adevăr, avem următorul rezultat:

Planul

Ecuaţia vectorială a planului

Teorema

Ecuaţia vectorială a unui plan care trece printr-un punct M_0 şi este perpendicular pe un vector **n** *dat este*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{4}$$

Demonstraţie.

Fie Π planul determinat de punct şi de vectorul normal. Dacă M este un punct oarecare al planului, atunci $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}$, de unde rezultă că

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{5}$$

sau

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Definiţie

Se numeşte *ecuaţie liniară (generală) relativ la necunoscutele* x, y, z o ecuaţie de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{6}$$

unde cel puţin unul dintre coeficienţii A, B, C ai necunoscutelor este diferit de zero.

Teorema

Într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare, un plan este definit de o ecuaţie liniară generală de forma (6).

Planul

Ecuaţia generală a planului

Demonstraţie.

Considerăm un plan care trece prin punctul M_0 şi are vectorul normal $\mathbf{n}(A, B.C)$. Atunci, pentru orice punct $M(x, y, z)$ din plan, avem

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

sau, încă,

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

care este o ecuaţie liniară generală în x, y, z. $\square$

Demonstraţie.

Invers, fie $M(x, y, z)$ un punct din spaţiu care verifică o ecuaţie de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

cu $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.
Să presupunem, de exemplu, că în ecuaţia de mai sus $A \neq 0$. Atunci, în mod evident, punctul $M_0(-D/A, 0, 0)$ verifică, de asemenea, această ecuaţie. Notăm cu **n** vectorul de componente (A, B, C). Cum

$$\overrightarrow{M_0M} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x + D/A, y, z),$$

ecuaţia planului care trece prin M_0 şi are vectorul normal **n** este

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Demonstraţie.
sau

$$A(x + D/A) + By + Cz = 0 \text{ sau } Ax + By + Cz + D = 0,$$

prin urmare, punctul M este situat în planul care trece prin M_0 şi are pe **n** ca vector normal. $\square$

Planul

Cazuri particulare ale ecuaţiei generale a planului

a) Ecuaţia unui plan care trece prin origine este:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Într-adevăr, se observă imediat că ecuaţia de mai sus este verificată de originea $O(0, 0, 0)$.

b) Ecuaţiile planelor paralele cu axele de coordonate sunt

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0 \quad (\text{paralele cu axa } Oz), \\ Ax + Cz + D &= 0 \quad (\text{paralele cu axa } Oy), \\ By + Cz + D &= 0 \quad (\text{paralele cu axa } Ox). \end{aligned}$$

Planul

Cazuri particulare ale ecuaţiei generale a planului

Într-adevăr, dacă în ecuaţia generală a planului punem $C = 0$, ea devine

$$Ax + By + D = 0.$$

În acest caz, vectorul normal la plan, $\mathbf{n}(A, B, 0)$ are proiecţia ortogonală pe axa Oz nulă, aşadar vectorul este perpendicular pe axă, deci planul este paralel cu axa Oz. La fel stau lucrurile şi în celelalte două cazuri. Dacă, în particular, şi $D = 0$, atunci planele *trec* prin axe, nu sunt doar paralele cu ele.

3. Ecuaţiile planelor paralele cu planele de coordonate sunt

$$\begin{aligned} Ax + D &= 0 \quad \text{(paralele cu planul } yOz\text{)},\\ By + D &= 0 \quad \text{(paralele cu planul } xOz\text{)},\\ Cz + D &= 0 \quad \text{(paralele cu planul } xOy\text{)}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, dacă, de exemplu, punem în ecuaţia planului $B = C = 0$, ea se transformă în

$$Ax + D = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}(A, 0, 0)$. Acest vector este perpendicular pe planul yOz, deci planul care îl are ca vector normal este *paralel* cu planul yOz. La fel se raţionează şi în cazul celorlalte două plane de coordonate.
Şi aici, ca şi mai sus, dacă punem şi $D = 0$, obţinem plane care sunt paralele cu planele de coordonate şi trec prin origine, adică obţinem ecuaţiile *planelor de coordonate*, $x = 0, y = 0$, respectiv $z = 0$.

Planul

Altă formă a ecuaţiei vectoriale a planului

Plecăm de la ecuaţia vectorială a planului care trece printr-un punct şi este paralel cu doi vectori necoliniari:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{v} + t\mathbf{w},$$

adică vectorii $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}$ sunt liniar dependenţi sau

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0. \tag{7}$$

Această ecuaţie se numeşte, de regulă, pur şi simplu, *ecuaţia planului care trece prin punctul M_0 şi este paralel cu vectorii* **u** *şi* **v**. Dacă dezvoltăm produsul mixt (7), se constată imediat că această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

sau cu ecuaţia

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0. \quad (9)$$

Planul

Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ trei puncte necoliniare din spaţiu. Atunci cele trei puncte determină un plan. Pentru a obţine ecuaţia sa, aplicăm metoda de la punctul precent. Mai precis, fie

$$\mathbf{v} \equiv \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\mathbf{w} \equiv \overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Atunci aceşti doi vectori sunt, în mod evident, necoliniari şi paraleli cu planul. Planul a cărui ecuaţie o căutăm este cel care trece prin M_1 şi este paralel cu vectorii **v** şi **w**. Prin urmare, ecuaţia sa este (vezi 8):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Ecuaţia (10) se poate rescrie în forma de mai jos, mai uşor de memorat:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Din formula (11) rezultă imediat *condiţia de coplanaritate a patru puncte*:
Patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4 sunt coplanare dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Desigur, ecuaţia este echivalentă cu condiţia

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Π – plan care n care nu trece prin origine şi prin nici una dintre axe. Atunci ecuaţia sa generală este
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
unde nici unul dintre cei patru coeficienţi nu se anulează.
- Atunci
  - $\Pi \cap Ox = \{P(-D/A, 0, 0)\}$;
  - $\Pi \cap Oy = \{Q(0, -D/B, 0)\}$;
  - $\Pi \cap Oz = \{R(0, 0, -D/C)\}$.
- Dacă introducem notaţiile
$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C},$$
ecuaţia planului care trece prin punctele P, Q, R se va scrie

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Dacă dezvoltăm ecuaţia de mai sus, obţinem

$$bcx + cay + abz - abc = 0$$

sau, dacă împărţim cu *abc*,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \tag{13}$$

Ecuaţia (13) se numeşte *ecuaţia planului prin tăieturi*.

Motivul este legat de faptul că lungimile cu semn a, b, c se numesc *tăieturile* planului pe axele de coordonate. Ele sunt lungimile cu semn ale segmentelor determinate de origine şi de punctele de intersecţie ale planului cu cele trei axe de coordonate.

Fie Π un plan şi OP – perpendiculara din origine pe plan. Dacă planul trece prin origine, atunci punctul P coincide cu originea, deci lungimea vectorului $\overrightarrow{OP}$ este egală cu zero. În cazul general, însă, fie

$$p \equiv \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$$

lungimea acestui vector (egală, de fapt, cu distanţa de la origine la planul Π).

Fie $\mathbf{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ versorul vectorului $\overrightarrow{OP}$ (care este, în acelaşi timp, versorul normalei la plan). Atunci punctul P (piciorul perpendicularei pe plan din origine), va avea coordonatele

$$P(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma),$$

Dacă $M(x, y, z)$ este un punct oarecare din planul Π, atunci componentele sale vor fi

$$\overrightarrow{PM}(x - p\cos\alpha, y - p\cos\beta, z - p\cos\gamma).$$

Cum vectorii $\overrightarrow{PM}$ şi $\mathbf{n}$ sunt perpendiculari, avem

$$\overrightarrow{PM} \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p\underbrace{\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)}_{=1} = 0$$

sau, în final,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{14}$$

Ecuaţia (14) se numeşte *forma normală Hesse* sau, pur şi simplu, *forma normală* a ecuaţiei planului.

Planul

Ecuaţia normală a unui plan

Forma normală a ecuaţiei unui plan este utilă în anumite situaţii, de aceea, vom arăta cum se poate obţine.

- Plecăm cu un plan scris sub forma generală,

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

- Acest plan are şi o ecuaţie normală,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

- Cum cele două ecuaţii trebuie să reprezinte acelaşi plan, coeficienţii lor trebuie să fie proporţionali:

$$\cos\alpha = \lambda A,\ \cos\beta = \lambda B,\ \cos\gamma = \lambda C,\ -p = \lambda D.$$

- Dacă ridicăm la pătrat primele trei egalităţi şi le însumăm, obţinem

$$\lambda^2\left(A^2 + B^2 + C^2\right) = 1.$$

- Aşadar,
$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{15}$$
- Semnul din (15) se alege astfel încât să fie opus semnului termenului liber D din ecuaţia generală.
- Dacă $D = 0$, atunci semnul lui λ se poate alege oricum.
- λ se numeşte, din motive evidente, *factor normalizator* al ecuaţiei generale a planului.
- Planul Π împarte mulţimea tuturor punctelor din spaţiu care nu aparţin lui Π în două submultimi, numite *semispaţii deschise*.
- Vom numi *semispaţiu pozitiv* acel semispaţiu înspre care este îndreptat vectorul **n**. Celălalt se numeşte *semispaţiu negativ*.
- originea spaţiului se află întotdeauna fie în planul Π, fie în semispaţiul negativ.

Definiţie

Se numeşte *distanţă* de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul Π lungimea d a perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe planul Π. Se numeşte *abatere* (sau *deviere*) a punctului M_0 relativ la planul Π numărul δ definit astfel încât:

a) $\delta = d$ dacă M_0 este în semispaţiul pozitiv determinat de Π;

b) $\delta = 0$ dacă $M_0 \in \Pi$;

c) $\delta = -d$ dacă M_0 este în semispaţiul negativ.

Teorema

Dacă planul este dat prin ecuaţia normală

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\,; \tag{16}$$

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \right|. \tag{17}$$

Teorema

Dacă planul este dat prin ecuaţia sa generală,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{18}$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{19}$$

Demonstraţie.

Notăm cu P_0 proiecţia ortogonală a lui M_0 pe dreapta OP. Atunci

$$\delta = (PP_0) = (OP_0) - (OP) = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OM_0} - p = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\,.$$

Aşadar, formula (16) este demonstrată. (17) rezultă din (16), pentru că, în mod evident, $d = |\delta|$. $\square$

Prin *unghiul a două plane* înţelegem măsura unghiului plan asociat unghiului diedru format de cele două plane, adică măsura unghiului format de direcţiile normale la cele două plane.
Cele două plane formează, în fapt, nu unul ci *patru* unghiuri, două câte două opuse şi egale şi adiacente suplimentare.
Considerăm două plane

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{20}$$

şi

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{21}$$

Vectorii normali la cele două plane sunt $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, prin urmare unghiurile sunt date de

$$\cos\alpha_{1,2} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{22}$$

Planul

Unghiul a două plane

- Dacă membrul drept este pozitiv, se obţin unghiurile ascuţite, dacă este negativ – unghiurile obtuze.
- Din formula (22), rezultă că cele două plane sunt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \tag{23}$$

- Pe de altă parte, planele sunt paralele exact atunci când cei doi vectori normali sunt paraleli, adică dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{24}$$

Dreapta în spaţiu

Ecuaţia vectorială şi ecuaţiile parametrice ale dreptei

Fie Δ o dreaptă în spaţiu.

- Un vector nenul $\mathbf{a}$ se numeşte *vector director* al dreptei Δ dacă orice segment orientat din clasa lui $\mathbf{a}$ este paralel cu dreapta Δ.
- Dacă $\mathbf{a}(l, m, n)$ este un vector director al dreptei Δ, iar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare dreaptă, atunci un punct arbitrar din spaţiu, $M(x, y, z)$, aparţine dreptei dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ este coliniar cu vectorul $\mathbf{a}$.
- Notăm cu $\mathbf{r}_0$, respectiv $\mathbf{r}$ vectorii de poziţie $\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{OM}$ ai punctelor M_0, respectiv M. Atunci

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0,$$

prin urmare vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ şi $\mathbf{a}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există un număr real t astfel încât să avem

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a},$$

sau

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}. \tag{25}$$

Ecuaţia (25) se numeşte *ecuaţia vectorială* a dreptei Δ, care trece prin punctul M_0 şi are ca vector director vectorul **a**. Pe componente, avem

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \tag{26}$$

ecuaţii care se numesc *ecuaţiile parametrice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$.
Într-un alt sistem de coordonate, ecuaţiile parametrice îşi modifică forma.

Dacă fiecare dintre componentele l, m, n ale vectorului director **a** este diferită de zero, atunci ecuaţiile (26) sunt echivalente cu sistemul

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},\ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\ \frac{z-z_0}{n}=\frac{x-x_0}{l}, \tag{27}$$

sistem pe care îl vom scrie, de regulă, sub forma

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{28}$$

Ecuaţiile (28) se numesc *ecuaţiile canonice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$.

Observaţie

Din moment ce vectorul director **a** este diferit de zero, întotdeauna se poate găsi un sistem de coordonate în raport cu care toate componentele sale să fie nenule. Totuşi, în anumite sisteme de coordonate, una sau două dintre componentele sale pot fi egale cu zero. Facem aceeaşi convenţie ca şi în cazul dreptei în plan. Astel, sistemul

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{0}$$

este echivalent cu sistemul de ecuaţii

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},\ z=z_0,\quad l\neq 0,\ m\neq 0,$$

în timp ce un sistem de ecuaţii de forma

Observaţie

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}, \quad l \neq 0,$$

este echivalent cu sistemul

$$y = y_0, \ z = z_0.$$

- O dreaptă în spaţiu se poate reprezenta ca o intersecţie de două plane distincte, care trec printr-o aceeaşi dreaptă:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{29}$$

- Cum planele care definesc dreapta nu sunt paralele, coeficienţii necunoscutelor din cele două ecuaţii ale sistemului (29) nu sunt proporţionali. Altfel spus, rangul matricii acestui sistem de ecuaţii liniare este maxim (adică este egal cu doi).
- Ecuaţiile sistemului (29) care definesc o dreaptă dată nu sunt unice.

- Fiecare dintre ele se poate înlocui cu o ecuaţie de forma

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

  unde α şi β sunt numere reale care nu se anulează simultan, astfel încât, fireşte, sistemul să aibă, în continuare, rang maxim.
- Şi afirmaţia inversă este adevărată: orice sistem de ecuaţii de forma (29), de rang doi, descrie o dreaptă în spaţiu.

De multe ori, trebuie să găsim vectorul director al unei drepte dată ca intersecţie de două plane. Considerăm dreapta (29) şi fie $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ şi $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ – vectorii normali la cele două plane care determină dreapta. Atunci produsul lor vectorial,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

este, în mod evident, un vector director al dreptei.

Dreapta în spaţiu

Ecuaţiile canonice ale unei drepte în spaţiu

Prin urmare:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

O altă modalitate de a găsi vectorul director este “forţa brută”, de exemplu găsim două soluţii distincte ale sistemului, iar diferenţa lor este un vector director.

Dreapta în spaţiu

Ecuaţiile dreptei care trece prin două puncte

Să presupunem că se dau două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ale unei drepte Δ. Atunci vectorul $\overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ este un vector director al dreptei, prin urmare dreapta Δ este dreapta care trece prin punctul M_1 şi are ca vector director vectorul $\overrightarrow{M_1 M_2}$. Aşadar ecuaţiile parametrice ale dreptei Δ (care trece prin punctul M_1 şi are ca vector director pe $\overrightarrow{M_1 M_2}$), vor fi

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases} \tag{30}$$

Ecuaţiile acestea se pot rescrie, fireşte, sub forma canonică:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{31}$$

- Prin definiţie, unghiul a două drepte în spaţiu este unghiul pe care îl formează *vectorii lor directori*.
- Nu este necesar ca cele două drepte să fie coplanare.
- Unghiul dintre drepte nu este unic determinat. El depinde de alegerea sensurilor vectorilor directori.
- Dacă vrem să determinăm unghiul *ascuţit* dintre cele două drepte, trebuie să ne asigurăm că unghiul respectiv are un cosinus pozitiv.

Fie, prin urmare,

$$(D_1):\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{32}$$

şi

$$(D_2):\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \tag{33}$$

de vectori directori $\mathbf{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{v}_2(l_2, m_2, n_2)$.

Atunci unghiul dintre cele două drepte este dat de

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{v}_2\|} = \pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{34}$$

Unghiul *ascuţit* dintre cele două drepte este dat de

$$\cos\varphi = \frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{35}$$

Dreptele (32) şi (33) sunt *perpendiculare* dacă vectorii lor directori sunt perpendiculari, adică dacă

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 \equiv l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = 0. \tag{36}$$

Dreptele (32) şi (33) sunt *paralele* dacă vectorii lor directori sunt coliniari, adică dacă există un scalar (nenul, în cazul nostru) $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 \tag{37}$$

sau (cu aceeaşi convenţie ca şi la ecuaţiile dreptei)

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{38}$$

Presupunem că s-a fixat un sistem de coordonate afine *Oxyz* şi sunt date două plane, prin ecuaţiile lor generale

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{39}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{40}$$

Este clar, din considerente geometrice, că cele două plane se pot afla în următoarele situaţii:

1) se taie după o dreaptă;
2) sunt paralele, dar nu coincid;
3) coincid.

Scopul nostru este să stabilim relaţiile care există între coeficienţii celor două ecuaţii în fiecare caz.

Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu

Poziţiile relative a două plane

- *Urmă* a planului (39) pe planul de coordonate xOy = intersecţia dintre acest plan şi planul de coordonate.
- Dacă planul (39) nu este paralel cu planul xOy, atunci această intersecţie este o dreaptă care, privită că dreaptă în planul de coordonate, va avea, în mod evident, ecuaţia

$$A_1 x + B_1 y + D_1 = 0.$$

- Analog se obţin urmele planului pe planele de coordonate xOz şi yOz, dacă planul nostru nu este paralel nici cu aceste plane de coordonate.
- Planul (40) coincide cu planul (39) dacă şi numai dacă urmele lor pe planele de coordonate coincid.

- Aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă toţi coeficienţii celor două plane sunt proporţionali, adică dacă şi numai dacă există un scalar nenul λ astfel încât să avem

$$A_1 = \lambda A_2, \; B_1 = \lambda B_2 \; C_1 = \lambda C_2, \; D_1 = \lambda D_2 \tag{41}$$

sau

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

- Din punct de vedere algebric, la aceeaşi concluzie se poate ajunge şi pe altă cale. Pentru ca planele (39) şi (40) să coincidă, este necesar şi suficient ca sistemul format din ecuaţiile lor să fie compatibil, dublu nedeterminat, ceea ce înseamnă exact condiţia (41).

- Să presupunem acum, de exemplu, că primul plan este paralel cu planul xOy. Aceasta înseamnă, evident, că $A_1 = B_1 = 0$, iar raţionamentul algebric de mai sus ne duce la aceeaşi cocluzie ca pentru planele în poziţie generală.
- Dacă sistemul de ecuaţii (39)–(40) este incompatibil, atunci înseamnă că rangul sistemului trebuie să fie egal cu 1, în timp ce rangul matricei extinse trebuie să fie egal cu 2. Prin urmare, planele sunt paralele dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \tag{42}$$

cu aceeaşi convenţie ca mai sus asupra egalităţii cu zero a numitorilor.

Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu

Poziţiile relative a două plane

- Ultima situaţie posibilă este ca sistemul format din ecuaţiile planelor să fie de rang maxim, ceea ce înseamnă că intersecţia este o dreaptă. Aceasta înseamnă că primii trei coeficienţi nu pot fi proporţionali.

Considerăm trei plane, date prin ecuaţiile lor generale:

$$\begin{cases} (P_1)\, A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ (P_2)\, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ (P_3)\, A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Pentru a stabili poziţiile relative ale celor trei plane, trebuie să studiem sistemul de ecuaţii (43). Fie Δ determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

m – matricea sistemului,

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

şi M – matricea extinsă a sistemului,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Notăm, de asemenea, cu $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, $\mathbf{n}_3(A_3, B_3, C_3)$ vectorii normali la cele trei plane.

Avem următoarele situaţii:

(a) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul (43) este compatibil determinat, prin urmare, are o singură soluţie: *planele se intersectează într-un punct*.

(b) Să presupunem acum că $\Delta = 0$, $\mathrm{rg}\, m = 2$, $\mathrm{rg}\, M = 3$, iar vectorii normali la cele trei plane sunt, doi câte doi, necoliniari. Deoarece rangul matricei sistemului este strict mai mic decât rangul matricei extinse, sistemul este incompatibil, prin urmare cele trei plane nu au nici un punct comun. Cum vectorii normali sunt, doi câte doi, necoliniari, rezultă că planele sunt, două câte două, neparalele. Ele se intersectează după câte o dreaptă, iar cele trei drepta care se obţin sunt paralele.

(c) De data aceasta avem, de asemenea, $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, dar acum doi dintre cei trei vectori normali la plane sunt coliniari[1]. Două dintre cele trei plane (cele cu vectorii normali coliniari) sunt paralele între ele, iar cel de-al treilea le intersectează pe ambele.

(d) Să presupunem acum că $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$ (deci sistemul este compatibil), iar vectorii normali sunt doi câte doi necoliniari. În acest caz, planele sunt două câte două distincte şi trec prin aceeaşi dreaptă.

(e) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$, iar doi dintre cei trei vectori normali sunt coliniari, atunci, din nou, sistemul este compatibil, două dintre plane coincid (cele care au vectorii normali coliniari), iar cel de-al treilea le intersectează după o dreaptă.

[1] Nu pot fi toţi trei coliniari, deoarece $\operatorname{rg} m = 2$!

(f) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 3$, atunci sistemul este incompatibil, aşadar planele nu se intersectează, dar ele sunt paralele între ele.

(g) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 2$, atunci două dintre plane coincid, iar cel de-al treilea este paralel cu ele.

(h) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 1$, atunci sistemul este compatibil dublu, toate cele trei plane coincid.

Definiţie

Se numeşte *fascicol de plane* mulţimea tuturor planelor care trec printr-o anumită dreaptă, care se numeşte *axa fascicolului*.

Să presupunem că sunt date două plane distincte concurente

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{44}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{45}$$

Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu

Fascicole de plane. Snopuri de plane

Teorema

Dacă α şi β sunt două numere reale care nu se anulează simultan, atunci ecuaţia

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (46)$$

este ecuaţia unui plan ce aparţine fascicolului de plane determinat de planele (44) şi (45). Invers, orice plan al acestui fascicol se poate reprezenta cu ajutorul unei ecuaţii (46), pentru o anumită alegere a constantelor α şi β, care nu sunt ambele nule.

Demonstraţia acestei teoreme este perfect analogă cu demonstraţia teoremei similare pentru fascicole de drepte din plan.

Spre deosebire de cazul dreptelor din plan, unde am avut de considerat doar familiile de drepte care trec printr-un punct (adică fascicolele de drepte), în cazul planelor în spaţiu, pe lângă fascicolele de plane (care trec printr-o dreaptă), putem considera alte familii remarcabile de plane, cele ce trec printr-un punct. Începem prin a da următoarea definiţie:

Definiţie

Se numeşte *snop de plane* mulţimea tuturor planelor care trec printr-un punct dat, numit *centrul snopului de plane*.

Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu

Fascicole de plane. Snopuri de plane

- Dacă centrul snopului de plane este dat prin intermediul coordonatelor sale, $S(x_0, y_0, z_0)$.
- Atunci orice plan care trece prin centrul snopului (şi, deci, aparţine snopului), se poate scrie sub forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{47}$$

  unde constantele reale A, B, C nu sunt toate egale cu zero.
- Invers, pentru orice constante A, B, C care nu sunt toate egale cu zero, ecuaţia (47) este ecuaţia unui plan care trece prin centrul snopului.

Ca şi în cazul fascicolelor, însă, de multe ori nu este dat în mod explicit centrul snopului de plane, ci acesta este descris cu ajutorul ecuaţiilor unor plane care trec prin acest punct.

Este util să avem o descriere a planelor snopului cu ajutorul unui număr redus de plane (mai precis, trei), care determină în mod unic centrul acestui snop. Avem următorul rezultat:

Teorema

Fie

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \tag{48}$$

ecuaţiile a trei plane care trec prin punctul $S(x_0, y_0, z_0)$ *astfel încât să fie îndeplinită condiţia*

Teorema

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{49}$$

Atunci pentru orice numere reale α, β, γ care nu se anulează simultan, ecuaţia

$$\alpha(A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1)+\beta(A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2)+\gamma(A_3 x+B_3 y+C_3 z+D_3) = \tag{50}$$

descrie un plan al snopului de plane cu centrul în punctul S. Invers, orice plan al acestui snop poate fi descris prin intermediul unei ecuaţii de acest tip, pentru o anumită alegere a constantelor α, β, γ.

Considerăm un plan Π, dat prin ecuaţia generală

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{51}$$

şi o dreaptă Δ, dată prin ecuaţiile sale parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{52}$$

Trebuie să stabilim poziţia dreptei Δ relativ la planul Π.
Este clar, din motive geometrice, că sunt posibile următoarele situaţii:

(i) dreapta intersectează planul într-un punct;
(ii) dreapta este paralelă cu planul şi nu este situată în el;
(iii) dreapta este inclusă în plan.

Vom stabili care trebuie să fie legătura dintre coeficienţii planului şi cei ai dreptei pentru fiecare dintre cele trei situaţii.
Dacă înlocuim expresiile lui x, y, z din ecuaţiile dreptei Δ în ecuaţia planului Π, obţinem:

$$(Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{53}$$

Soluţia acestei ecuaţii în t reprezintă valoarea parametrului de pe dreaptă care corespunde punctului (sau punctelor) de intersecţie dintre dreaptă şi plan. Este uşor de văzut că ecuaţia admite o soluţie unică dacă şi numai dacă coeficientul lui t este diferit de zero, adică

$$Al + Bm + Cn \neq 0.$$

Semnificaţia geometrică a acestei relaţii este clară: vectorul director al dreptei nu este perpendicular pe vectorul normal la plan, adică dreapta nu este paralelă cu planul. Prin urmare, condiţia aceasta este condiţia ca *dreapta şi planul să se intersecteze într-un punct*.
Dacă este îndeplinită condiţia

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

atunci dreapta este paralelă cu planul, dar nu se intersectează cu el. Într-adevăr, prima condiţie arată că dreapta este paralelă cu planul, în timp ce a doua condiţie indică faptul că ecuaţia nu are soluţie.

Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu
Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan

În sfârsit, dacă este îndeplinită condiţia

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

atunci dreapta este inclusă în plan, pentru că, în acest caz, ecuaţia de intersecţie se transformă într-o identitate, care este verificată pentru orice t real.

Considerăm dreptele

$$(D_1): \frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{n_1} \tag{54}$$

şi

$$(D_2): \frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{n_2}, \tag{55}$$

care trec prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$.
Atunci planul care trece prin cele două drepte este, în fapt, planul care trece prin punctul M_0 şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1(l_1,m_1,n_1)$ şi $\mathbf{v}_2(l_2,m_2,n_2)$, deci ecuaţia sa este

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{56}$$

Considerăm dreapta

$$(D): \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \tag{57}$$

şi punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$, care nu aparţine dreptei. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l, m, n)$ şi $\overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, deci ecuaţia lui va fi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{58}$$

Considerăm dreptele paralele (şi distincte!)

$$(D_1):\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \tag{59}$$

şi

$$(D_2):\ \frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}, \tag{60}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l, m, n)$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, deci ecuaţia lui va fi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \tag{61}$$

Considerăm dreapta

$$(D):\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{62}$$

şi planul

$$(P):\ Ax+By+Cz+D=0. \tag{63}$$

Este uşor de constatat că dacă proiectăm ortogonal toate punctele dreptei (D) pe planul (P) obţinem o dreaptă situată în plan, pe care o vom numi *proiecţia dreptei* (D) *pe planul* (P). Dacă dreapta este *perpendiculară* pe plan, atunci dreapta aceasta, de fapt, se reduce la un singur punct, cel în care dreapta înţeapă planul. De aceea, în cele ce urmează, vom admite că dreapta *nu* este perpendiculară pe plan.

Dreapta pe care o căutăm o vom scrie ca intersecţie a două plane: planul (P) şi planul (P'), care trece prin dreapta (D) şi este perpendicular pe planul (P). În practică, acest plan este planul care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe dreaptă şi este paralel cu vectorul director al dreptei, $\mathbf{v}(l, m, n)$ şi vectorul normal la planul (P), $\mathbf{n}(A, B, C)$, Datorită ipotezei pe care am făcut-o mai sus, cei doi vectori sunt necoliniari, deci punctul şi cei doi vectori determină, în mod unic, planul (P').
După cum am văzut, ecuaţia planului (P') este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \tag{64}$$

Aşadar, ecuaţiile proiecţiei dreptei pe plan sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{65}$$

Presupunem că se dau două drepte în spaţiu, prin intermediul ecuaţiilor lor parametrice

$$x = x_1 + l_1 t,\ y = y_1 + m_1 t,\ z = z_1 + n_1 t, \tag{66}$$

$$x = x_2 + l_2 s,\ y = y_2 + m_2 s,\ z = z_2 + n_2 s, \tag{67}$$

şi vrem să stabilim poziţia lor relativă.
Din considerente geometrice, este clar că putem avea următoarele situaţii:

(a) dreptele sunt concurente;
(b) dreptele coincid;
(c) dreptele sunt paralele, dar nu coincid;
(d) dreptele sunt necoplanare (strâmbe).

Vom stabili acum legăturile dintre coeficienţii celor două drepte pentru fiecare situaţie.

Considerăm vectorii directori ai celor două drepte:

$$\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1),\ \mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2).$$

Presupunem că aceşti vectori sunt coliniari, adică

$$l_1 = \lambda l_2,\ m_1 = \lambda m_2,\ n_1 = \lambda n_2. \tag{68}$$

Atunci dreptele sunt paralele, adică fie coincid, fie sunt paralele şi nu au nici un punct comun. Dreptele coincid dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$, unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, este paralel cu vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$, adică:

$$x_2 - x_1 = \mu l_1,\ y_2 - y_1 = \mu m_1,\ z_2 - z_1 = \mu n_1. \tag{69}$$

Astfel, egalităţile (68) şi (69) reprezintă condiţiile necesare şi suficiente pentru ca dreptele (66) şi (67) să coincidă.

- Pentru ca dreptele să fie paralele, fără să coincidă, este necesar şi suficient ca condiţia (68) să fie verificată, iar condiţia (69) – nu.
- Să presupunem acum că vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari, adică nu este verificată condiţia (68). Atunci dreptele (66) şi (67) se intersectează într-un punct sau sunt necoplanare.
- Dacă se intersectează şi, prin urmare, se află într-un acelaşi plan Π, atunci vectorii $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt coplanari. De aceea:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{70}$$

- Invers, să presupunem că vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari şi este verificată condiţia (70).
- Alegem punctele A_1 şi A_2 astfel încât să avem $\overrightarrow{M_1A_1} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{M_2A_2} = \mathbf{a}_2$.
- Atunci segmentele M_1M_2, M_1A_1 şi M_2A_2 determină un plan, în care sunt situate dreptele (66) şi (67).
- Cum vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari, dreptele sunt concurente. Astfel, dreptele (66) şi (67) sunt concurente dacă şi numai dacă vectorii lor directori sunt necoliniari şi este verificată egalitatea (70).
- Remarcăm că această egalitate are loc şi dacă dreptele sunt paralele, pentru că în acest caz a doua şi a treia linie a determinantului sunt proporţionale.

- Prin urmare, condiţia necesară pentru ca dreptele noastre să fie *necoplanare* este

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

În restul acestui capitol vom presupune că reperul cu care lucrăm este ortonormat.

Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu

Distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu

Vom stabili, în cele ce urmează, o formulă care ne dă distanţa d de la un punct M_1, de vector de poziţie $\mathbf{r}_1$, în spaţiu, la o dreaptă Δ, de ecuaţie vectorială $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$. Alegem, mai întai, un punct M_2 pe dreapta Δ astfel încât să avem $\overrightarrow{M_0M_2} = \mathbf{a}$.
Construim un paralelogram pe vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}$ şi $\overrightarrow{M_0M_2}$. Atunci distanţa d căutată este egală cu lungimea perpendicularei M_1N, coborâte din vârful M_1 pe latura opusă a paralelogramului. Cum aria paralelogramului este egală cu

$$\|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\| d,$$

formula

$$d = \frac{\|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$$

ne dă distanţa de la punctul M_1, de vector de poziţie $\mathbf{r}_1$ la dreapta Δ.

Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu

Perpendiculara comună a două drepte strâmbe

Considerăm două drepte în spaţiu,

$$(\Delta_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \tag{71}$$

şi

$$(\Delta_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \tag{72}$$

astfel încât cele două drepte să fie necoplanare, adică

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Există o singură dreaptă care intersectează ambele drepte date şi este perpendiculară pe fiecare dintre ele. De aceea, ea se şi numeşte *perpendiculara comună* a celor două drepte.

Metoda de construire a perpendicularei comune este cât se poate de simplă. Mai întâi determinăm vectorul director al acestei perpendiculare. Fie $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ vectorii directori ai dreptelor Δ_1 şi Δ_2. Atunci vectorul $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ este, conform definiţiei, un vector care este perpendicular atât pe vectorul $\mathbf{a}_1$, cât şi pe vectorul $\mathbf{a}_2$, prin urmare el este, în mod evident, un vector director al perpendicularei comune. Cum

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

componentele acestui vector sunt

$$\beta_1 \equiv \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_2 \equiv \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_3 \equiv \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}. \tag{73}$$

Acum scriem ecuaţiile perpendicularei comune ca intersecţie de două plane: unul care trece prin prima dreaptă şi este perpendicular pe cea de-a doua şi unul care trece prin a doua dreaptă şi este perpendicular pe prima dreaptă.
Primul plan se va putea scrie, prin urmare:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Într-adevăr, acest plan trece prin dreapta Δ_1 şi este paralel cu perpendiculara comulă, deci, în particular, este perpendicular pe dreapta Δ_2.

În acelaşi mod, cel de-al doilea plan se va scrie:

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

prin urmare ecuaţiile perpendicularei comune vor fi:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Considerăm, din nou, dreptele necoplanare (71) şi (72). Consideră, de asemenea, planul π care trece prin prima dreaptă şi este paralel cu cea de-a doua, adică planul de ecuaţie

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este, în mod evident, $\mathbf{n}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, unde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sunt date de (73).
Atunci lungimea perpendicularei comune (adică distanţa dintre dreptele necoplanare date), va fi egală cu distanţa de la un punct oarecare al dreptei Δ_2 (de exemplu punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$) până la planul π.

Conform formulei pentru distanţa de la un punct la un plan, obţinem:

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_2, \pi) = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}} \right| .$$

Presupunem că se dă dreapta

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt \tag{74}$$

şi planul

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{75}$$

Vom nota cu φ unghiul dintre dreaptă şi plan (mai precis, unghiul dintre dreaptă şi proiecţia sa pe plan). Dacă dreapta este perpendiculară pe plan vom pune $\varphi = \pi/2$. Vom considera că $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Cum vectorul $\mathbf{n}(A, B, C)$ este perpendicular pe planul (75), unghiul format de vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$ al dreptei (74) cu vectorul $\mathbf{n}$ este fie $\psi = \pi/2 - \varphi$, fie $\psi = \pi/2 + \varphi$. Prin urmare,

$$\sin\varphi = |\cos\varphi| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Condiţia ca dreapta să fie paralelă cu planul este ca vectorul normal la plan să fie perpendicular pe vectorul director al dreptei, adică

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

în timp ce condiţia ca dreapta să fie perpendiculară pe plan este ca vectorul normal la plan să fie paralel cu vectorul director al dreptei, adică

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$