

Examen Sisteme dinamice

1p oficiu

Exercițiul 1 (0,5p) Se consideră modelul dezintegrării radioactive:

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Determinați timpul de înjumătățire al unei substanțe radioactive știind că 3 grame din această substanță scade în 2 ani la 0.9 grame.

Exercițiul 2 Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:

(a) (0,5p) $(x^3 + y^3) \cdot y' = x^2 y$

(b) (1p) $y'' - 6y' + 18y = 3x - 1$

Exercițiul 3 (1p) Determinați soluția problemei bilocale:

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' = 2 \\ y(1) = 0 \\ y(2) = 4 \ln(2) \end{cases}$$

Exercițiul 4 (0,5p) Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x'(t) = -x^3 - y \\ y'(t) = x - y^3 \end{cases}$$

Să se studieze stabilitatea punctului de echilibru $X^*(0,0)$ utilizând funcția de tip Lyapunov $V(x, y) = x^2 + y^2$.

Exercițiul 5 (1p) Să se determine și să se studieze stabilitatea punctelor de echilibru pentru ecuația

$$x' = a \cdot x^2 - x^3 + 2a - 2x,$$

unde a parametru real.

Exercițiul 6 (1p) Se consideră problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x^2 + xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Scriveți formula lui Euler de calcul a valorilor soluției aproximante pentru o rețea de noduri echidistante. Pentru pasul $h = 0.2$ calculați primele trei valori aproximative ale soluției pe intervalul $[0; 1]$.

Exercițiul 7 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x'(t) = x^2 - y^2 \\ y'(t) = xy - 1 \end{cases}$$

Se cere:

(a) (0,5p) Să se determine punctele de echilibru.

(b) (1p) Să se studieze stabilitatea acestora.