

Seminar 2

1. Calculati limita sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru

a) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

b) $x_n = \frac{n + \sin n}{n + \cos n}$

c) $x_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}$

2. Justificati cu definitia valoarea limitelor

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

3. Studiati convergenta sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si calculati limita sa acolo unde este posibil (metode: monotonie si marginire, criteriul clestelui, subsiruri, sir fundamental)

a) $x_n = a^n, \quad a \in \mathbb{R}$

b) $x_n = \frac{2^n}{n!}$

c) $x_n = \sqrt[n]{n}$

d) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

e) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

f) $x_n = \frac{\sin(1!)}{1 \cdot 2} + \frac{\sin(2!)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin(n!)}{n \cdot (n+1)}$

g) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 > 0$

4. Determinati multimea punctelor limita, limita inferioara si limita superioara pentru sirurile

a) $x_n = (-1)^n n \sin \frac{n\pi}{2}$

b) $x_n = \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n$

Exercitii suplimentare

1. Justificati cu definitia valoarea limitei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n}{n^3 + n} = 1$$

2. Studiatii convergenta sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si calculati limita sa acolo unde este posibil

a) $x_n = 1.\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ ori}}$

b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

c) $x_n = \frac{\sin(1)}{5} + \frac{\sin(2)}{5^2} + \dots + \frac{\sin(n)}{5^n}$

d) $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}, \quad x_1 = \sqrt{3}$

e) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 = 1$

3. Determinati multimea punctelor limita, limita inferioara si limita superioara pentru sirurile

a) $x_n = \frac{1}{2 + \sqrt{n} \cos(n\pi)}$

b) $x_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n \sin \frac{n\pi}{3}}$