
Transformări geometrice în plan (Exemplu)

Problema 11.1. Determinați imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ și $D(0, 1)$ printr-o rotație de unghi 60° relativ la punctul $P(1, 1)$, urmată de o scalare neuniformă, de factori $(1, 2)$, relativ la punctul P . Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Soluție. Matricea de rotație se scrie, în forma generală, ca

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & q_1(1 - \cos \theta) + q_2 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -q_1 \sin \theta + q_2(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În cazul nostru concret, avem

$$\text{Rot}(1, 1, 60^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pe de altă parte, matricea unei scalări neuniforme, de factori de scală (s_x, s_y) , relativ la punctul $Q(q_1, q_2)$ este

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & (1 - s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1 - s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

adică, în cazul nostru concret,

$$\text{Scale}(1, 1, 1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor dreptunghiului dat este

$$[ABCD] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă aplicăm mai întâi rotația, urmată de scalare, obținem transformarea de matrice

$$T_1 = \text{Scale}(1, 1, 1, 2) \cdot \text{Rot}(1, 1, 60^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imaginea dreptunghiului prin această transformare este patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$, cu matricea coordona-

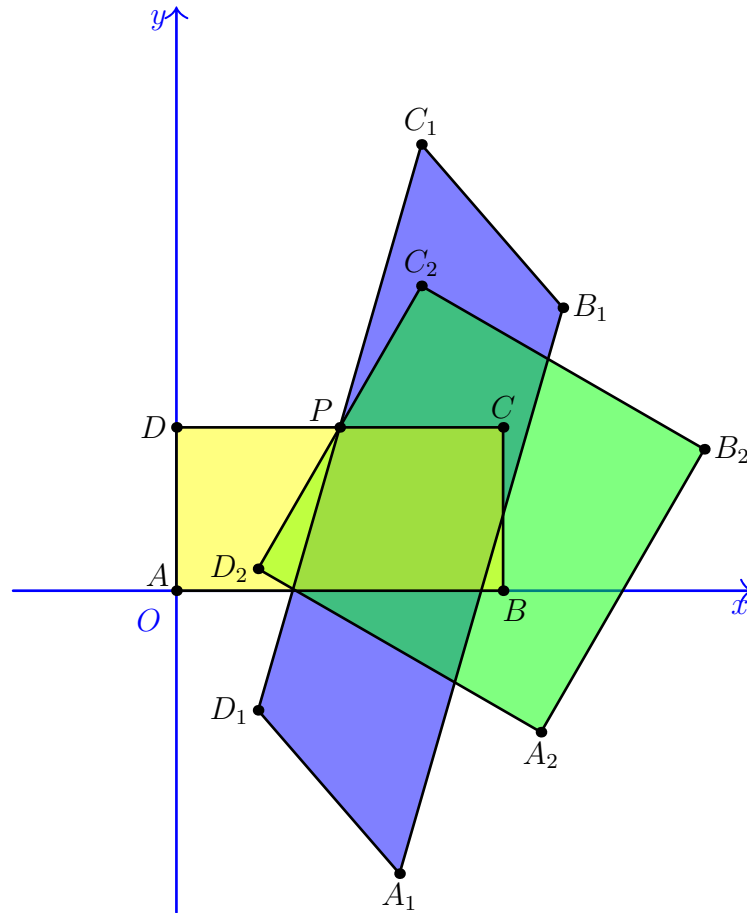


Figura 11.1: Dreptunghiul inițial și cele două imagini ale sale prin transformările indicate

telor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_1B_1C_1D_1] = T_1 \cdot [ABCD] = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Prin urmare, vârfurile patrulaterului transformat vor fi $A_1 \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} \right)$, $B_1 \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} \right)$, $C_1 \left(\frac{3}{2}, 1+\sqrt{3} \right)$, $D_1 \left(\frac{1}{2}, 1-\sqrt{3} \right)$.

Dacă, acum, aplicăm transformările în ordine inversă, matricea transformării compuse va fi

$$T_2 = \text{Rot}(1, 1, 60^\circ) \cdot \text{Scale}(1, 1, 1, 2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3} & \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imaginea dreptunghiului prin această transformare este patrulaterul $A_2B_2C_2D_2$, cu matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_2B_2C_2D_2] = T_2 \cdot [ABCD] = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{3}}{2} & \frac{3+2\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

deci vârfurile acestui patrulater sunt $A_2 \left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $B_2 \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $C_2 \left(\frac{3}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right)$, $D_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)$.

În figură este reprezentat dreptunghiul inițial (cu galben), imaginea sa prin rotație urmată de scalare (albastru) și imaginea sa prin scalare urmată de rotație (verde). În mod clar, cele două imagini nu coincid, deci ordinea în care se efectuează transformările este importantă. Se observă, de asemenea, că punctul P este, așa cum ne așteptam, un punct fix pentru ambele transformări.

□