

Metode de interpolare bazate pe diferențe divizate

Radu Trîmbițaș

4 aprilie 2022

1 Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Algoritmul nostru se bazează pe forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange:

$$(N_m f)(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^m f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i), \quad (1)$$

și formula iterativă:

$$\begin{aligned} (N_k f)(x) &= (N_{k-1} f)(x) + (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) f[x_0, \dots, x_k], & k = 1, \dots, m, \\ (N_0 f)(x) &= f(x_0). \end{aligned}$$

Notăția $f[x_0, \dots, x_k]$ înseamnă diferența divizată de ordinul k a funcției f cu nodurile x_0, \dots, x_k .

Calculul diferențelor divizate se poate face în formă tabelară cu algoritmul:

Intrare: $x_0, x_1, \dots, x_m, f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$, ca primă coloană $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \dots, Q_{n,0}$ a tabelului Q .

Ieșire: numerele $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{n,n}$, unde $Q_{i,i} = f[x_0, \dots, x_i]$.

P1. for $i = 1, 2, \dots, n$ do
 for $j = 1, 2, \dots, i$ do

$$Q_{i,j} := \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}, \quad (Q_{i,j} = f[x_{i-j}, \dots, x_i].)$$

P2. returnează $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{n,n}$.

Exemplul 1. Fie funcția dată mai jos (tabela 1); dorim să aproximăm $f(1.5)$ utilizând polinomul de interpolare Newton. Diferențele divizate apar pe prima linie a tabelului. Polinomul Newton corespunzător este

$$\begin{aligned} (N_4 f)(x) &= 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) + \\ &\quad 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) + \\ &\quad 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9). \end{aligned}$$

x_i	$f(x_i)$	\mathcal{D}^1	\mathcal{D}^2	\mathcal{D}^3	\mathcal{D}^4
1.0	0.7651977	-0.4837057	-0.1087339	0.0658784	0.0018251
1.3	0.6200860	-0.5489460	-0.0494433	0.0680685	0.0000000
1.6	0.4554022	-0.5786120	0.0118183	0.0000000	0.0000000
1.9	0.2818186	-0.5715210	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2.2	0.1103623	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

Tabela 1: Date pentru exemplul 1

Se verifică ușor că $(N_4 f)(1.5) = 0.5118200$.

Într-o implementare practică a algoritmului este convenabil să se sorteze în prealabil nodurile.

Intrare: $x_0, x_1, \dots, x_m, f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m), x$.

Ieșire: Valoarea P_i a polinomului de interpolare Newton.

P1. Sortează x_i crescător după $a_i = |x_i - x|$.

P2. $D_{0,0} := f(x_i); P_0 := D_{0,0}; S_1 := 1;$

P3. for $i = 1, \dots, m$ do

P3.1. $D_{i,1} := f(x_i);$

P3.2. for $j = 0, \dots, i - 1$ do $y_{i,j} := x_i - x_j$

P3.3. for $j = 1, \dots, i$ do

$$D_{i,j} := \frac{D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1}}{y_{i,i-j+1}}.$$

P3.4. $S_i := S_{i-1} * a_{i-1}; P_i := P_{i-1} + S_i * D_{i,1};$

P3.5. if $|P_i - P_{i-1}| < \varepsilon$ go to P4.

P4. returnează P_i .

Se poate obține o implementare satisfăcătoare, dacă se renunță la sortare și la if-ul final, iterând până la sfârșit după i și j .

2 Interpolare Hermite

Fie $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \dots, m$, $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$, $r_k \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, m$, și $f : [a, b] \rightarrow R$ astfel încât $\exists f^{(j)}(x_k)$, $k = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, r_k$. Problema de interpolare Hermite cere determinarea unui polinom P de grad minim, care verifică

$$P^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k), \quad k = 0, \dots, m, j = 0, \dots, r_k.$$

Fie $n + 1 = m + 1 + r_0 + \dots + r_m = (r_0 + 1) + \dots + (r_m + 1)$. Polinomul de interpolare Hermite are expresia:

$$(H_n f)(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj}(x) f^{(j)}(x_k), \quad (2)$$

unde h_{kj} sunt polinoamele fundamentale Hermite date de

$$h_{kj}(x) = \frac{(x - x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k-j} \frac{(x - x_k)^\nu}{\nu!} \left[\frac{1}{u_k(x)} \right]_{x=x_k}^{(\nu)}, \quad (3)$$

și

$$u(x) = \prod_{k=0}^m (x - x_k)^{r_k+1},$$

$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k+1}}.$$

Expresia restului este:

$$(R_n f)(x) = \frac{u(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (\alpha, \beta)$$

unde $\alpha = \min(x, x_0, \dots, x_m)$, $\beta = \max(x, x_0, \dots, x_m)$.

Vom da o metodă de calcul a polinomului de interpolare Hermite cu noduri duble dedusă din polinomul de interpolare Newton. Dându-se x_i și $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $i = 0, \dots, m$, definim secvența $z_0, z_1, \dots, z_{2m+1}$

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

Construim acum tabela de diferențe divizate a lui f pentru nodurile z_i , $i = 0, \dots, 2m+1$. Deoarece $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ pentru $i = 0, \dots, m$, $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ este o diferență divizată cu noduri duble și este egală cu $f'(x_i)$, deci în locul diferențelor divizate de ordinul I $f[z_0, z_1]$, $f[z_2, z_3]$, ..., $f[z_{2m}, z_{2m+1}]$ vom utiliza derivatele $f'(x_0)$, $f'(x_1)$, ..., $f'(x_m)$. Celelalte diferențe divizate se obțin în mod obișnuit, așa cum arată tabela de mai jos. Acest algoritm se poate extinde și la alte tipuri de interpolare Hermite. Se pare că metoda este datorată lui Powell.

z	\mathcal{D}^0	\mathcal{D}^1	\mathcal{D}^2
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$	$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	$f[z_0, z_1, z_2]$
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$	$f[z_1, z_2]$	$f[z_1, z_2, z_3]$
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$	$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	$f[z_2, z_3, z_4]$
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$	$f[z_3, z_4]$	$f[z_3, z_4, z_5]$
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$	$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Algoritm de interpolare Hermite. Calculează coeficienții polinomului de interpolare Hermite (diferențele divizate) a lui f cu nodurile duble $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \dots, m$.

Intrare. $x_0, \dots, x_m, f(x_0), \dots, f(x_m), f'(x_0), \dots, f'(x_m)$.

Ieșire. Numerele $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{2m+1,2m+1}$ (diferențele divizate de pe prima linie a tablei), unde

$$(H_{2m+1}f)(x) = Q_{0,0} + Q_{1,1}(x - x_0) + Q_{2,2}(x - x_0)^2 + Q_{3,3}(x - x_0)^2(x - x_1) + Q_{4,4}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 + \dots + Q_{2m+1,2m+1}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_{m-1})^2(x - x_m).$$

P1. for $i = 0, \dots, m$ do pașii P2 și P3.
P2. $z_{2i} := x_i; z_{2i+1} := x_i; Q_{2i,0} := f(x_i); Q_{2i+1,0} := f(x_i); Q_{2i+1,1} := f'(x_i);$
P3. if $i \neq 0$ then $Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}.$
P4. for $i = 2, 3, \dots, 2m+1$ do
for $j=2,3,\dots, i$ do $Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}.$
P5. Extrage $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{2m+1,2m+1}$. Stop.

Exemplu. Fie datele de intrare

k	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

Utilizând diferențele divizate se obține(datele de intrare sunt subliniate):

$$\begin{aligned}
H_5(1.5) &= 0.6200860 + (1.5 - 1.3)(-0.5220232) + (1.5 - 1.3)^2(-0.897427) + \\
&\quad (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)(0.0663657) + \\
&\quad (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)^2(1.5 - 1.9)(-0.0027738) \\
&= 0.5118277
\end{aligned}$$

1.3	<u>0.6200860</u>	<u>-0.5220232</u>	-0.0897427	0.0663657	0.0026663	-0.0027738
1.3	<u>0.6200860</u>	-0.5489460	-0.0698330	0.0679655	0.0010020	
1.6	<u>0.4554022</u>	<u>-0.5698959</u>	-0.0290937	0.0685667		
1.6	<u>0.4554022</u>	-0.5786120	-0.0084837			
1.9	<u>0.2818186</u>	<u>-0.5811571</u>				
1.9	<u>0.2818186</u>					

3 Probleme

1. Implementați o rutină pentru calculul valorilor polinomului de interpolare Hermite cu noduri duble, dându-se punctele în care se face evaluarea, nodurile, valorile funcției și ale derivatei în noduri.
2. Reprezentați pe același grafic f și polinomul său de interpolare Hermite.
3. Scrieți o rutină care reprezintă grafic o cubică parametrică Hermite (o curbă care trece prin două puncte date și are în acele puncte tangente date).

4 Probleme practice

1. Pentru $f(x) = e^x$ și nodurile de interpolare 0, 1, 2, aproximați $f(0.25)$ prin interpolare Hermite și comparați rezultatul cu cel obținut prin interpolare Lagrange. Dați o delimitare a erorii. Comparați cu rezultatul furnizat de software-ul utilizat.
2. Utilizați valorile date mai jos pentru a aproxima $\sin 0.34$ utilizând interpolarea Hermite.

x	$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937

Dați o delimitare a erorii și comparați-o cu eroarea exactă. Adăugați datele pentru nodul $x = 0.33$ și refaceți calculele.

3. Un automobil care se deplasează pe un drum drept este cronometrat în mai multe puncte. Datele de observație se dau în tabela de mai jos. Utilizați interpolarea Hermite pentru a prevedea poziția și viteza automobilului la momentul $t = 10$.

Timpul	0	3	5	8	13
Distanța	0	225	383	623	993
Viteza	75	77	80	74	72

5 Probleme suplimentare

1. Implementați interpolarea Hermite pentru noduri de multiplicitate arbitrară. Intrare: nodurile x_k , multiplicitățile r_k , valorile $f^{(j)}(x_k)$, $k = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, r_k$, punctul (sau punctele) t în care se face evaluarea. Ieșire: valorile polinomului de interpolare în punctul (sau punctele) t . (Indicație: folosiți pentru valorile funcție și derivatelor un tablou de celule.)