

Àlgebra matricial en Estadística

Anàlisis multivariante

Francesc Carmona Pontaque

PID_00000000

Francesc Carmona Pontaque

Cómo citar este recurso de aprendizaje con el estilo Harvard:

Carmona Pontaque, F. (2024) *Álgebra matricial en Estadística. Análisis multivariante*. [Recurso de aprendizaje textual]. 1.^a ed. Barcelona: Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC).

Primera edición: febrero 2024

© de esta edición, Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC)

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona

Autoría: Francesc Carmona Pontaque

Producción: FUOC

Todos los derechos reservados

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.

Índice

Planteamiento y objetivos	5
1. Vectores	6
1.1. Tipos	6
1.2. Traspuesto de un vector	7
1.3. Multiplicar un vector por un número	8
1.4. Suma de vectores	8
1.5. Producto escalar de vectores	9
1.6. Vectores ortogonales (perpendiculares)	9
1.7. Longitud (norma) de un vector	10
1.8. El vector 0 y el vector 1	10
2. Matrices	11
2.1. Matrices	11
2.2. Traspuesta de una matriz	12
2.3. Multiplicar una matriz por un número	12
2.4. Suma de matrices	13
2.5. Multiplicación de una matriz por un vector	14
2.6. Multiplicación de matrices	14
2.7. Vectores como matrices	15
2.8. Algunas matrices especiales	16
2.9. Inversa de una matriz	17
2.10. Traza de una matriz	19
2.11. Determinante de una matriz	19
2.12. Rango de una matriz	20
3. Diagonalización de una matriz	22
3.1. Valores y vectores propios	22
3.2. Matrices diagonalizables	23
3.3. Descomposición de una matriz en valores singulares	26
4. Inversa generalizada	29
4.1. Métodos para calcular una g-inversa	29
4.2. Inversa de Moore-Penrose	30
5. Resumen de propiedades de álgebra matricial	31
5.1. Suma de matrices y multiplicación por escalares	31
5.2. Producto de matrices	31
5.3. Traspuesta	31
5.4. Traza	32
5.5. Determinante	32

5.6.	Inversa	32
5.7.	Matrices ortogonales	33
5.8.	Matrices idempotentes	33
5.9.	Rango	34
5.10.	Formas cuadráticas	34
6.	Algunas matrices de interés en Estadística	36
6.1.	La matriz de centrado.....	36
6.2.	La matriz de varianzas-covarianzas	37
Bibliografía	39

Planteamiento y objetivos

El objetivo de este documento es doble:

- 1) Introducir al lector en el álgebra lineal de vectores y matrices y
- 2) mostrar como se puede trabajar con estos elementos en [R](#).

Nota

Este documento tiene su origen en unos apuntes en catalán de Francesc Oliva y Esteban Vegas

1. Vectores

1.1. Tipos

Un vector columna es una lista ordenada de números colocados uno debajo del otro. Por ejemplo

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En **R** este vector columna se crea así:

```
a <- c(2,1,3)
```

Un vector fila es una lista ordenada de números colocados uno después del otro. Por ejemplo

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En general, cuando trabajemos con vectores de datos, dichos vectores serán por defecto columnas. Sin embargo, como escribir en columna ocupa más espacio que en fila, con frecuencia se escriben los vectores como si fueran filas en la forma $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$, aunque debemos entender que son columnas. Por ejemplo, en **R** el vector columna \mathbf{a} definido antes se muestra así:

```
a  
  
[1] 2 1 3
```

¡Importante!

En Estadística, salvo excepciones, los datos de una variable se escriben siempre en columna.

Para escribir en **R** el vector fila \mathbf{b} anterior hay que utilizar la función de transponer `t()`, como veremos más adelante.

También en **R** se puede trabajar con vectores y matrices que contienen otros elementos que no son números, como los vectores o matrices lógicos. En este documento nos centraremos exclusivamente en los vectores y matrices numéricos.

En general, un vector de longitud n tiene la forma

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

donde los a_i son sus elementos. Como hemos dicho, para simplificar también se escribe así: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

1.2. Traspuesto de un vector

Si \mathbf{a} es un vector columna, \mathbf{a}' es su traspuesto, es decir, el mismo vector pero en fila.

Nota

En algunos libros, el símbolo para traspasar es una t o una T : \mathbf{a}^t .

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

También podemos traspasar un vector fila y tendremos el mismo vector pero en columna:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

¡Atención!

Como es lógico, traspasar dos veces el mismo vector nos devuelve dicho vector: $(\mathbf{a}')' = \mathbf{a}$.

En **R**, el traspuesto de un vector se hace con la función `t()`:

```
t(a)
```

```
 [,1] [,2] [,3]
[1,]  2   1   3
```

1.3. Multiplicar un vector por un número

Si \mathbf{a} es un vector y k es un número, entonces el producto $k\mathbf{a}$ es un vector

$$k\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

```
7 * a
```

```
[1] 14  7 21
```

1.4. Suma de vectores

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son dos vectores de la misma longitud (dimensión) n , entonces la suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es un vector de longitud n tal que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Ejemplo:

```
a <- c(1,3,2)
```

```
b <- c(2,8,9)
```

```
a + b
```

```
[1]  3 11 11
```

En **R** se pueden sumar vectores de longitud distinta. 


```
d <- c(2,8)
a + d           # (1,3,2) + (2,8,2)

Warning in a + d: longitud de objeto mayor no es múltiplo de la longitud
de uno menor

[1]  3 11  4
```

Aunque hay un aviso, el cálculo se realiza con un procedimiento llamado “de reciclaje”.

1.5. Producto escalar de vectores

Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dos vectores (columna) de la misma longitud (dimensión), el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un número (escalar)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Ejemplo:

```
dot <- function(x,y) {
  if (length(x) != length(y))
    stop("Vectors must be the same length")
  sum(x*y) }
dot(a,b)

[1] 44
```

1.6. Vectores ortogonales (perpendiculares)

Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales si su producto escalar es cero.

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

Ejemplo:

```
v1 <- c(1,1)
v2 <- c(1,-1)
```

```
dot(v1,v2)
```

```
[1] 0
```

1.7. Longitud (norma) de un vector

La longitud (o norma) de un vector **a** es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Ejemplo:

```
norm_vec <- function(x) sqrt(sum(x^2))
norm_vec(a)
```

```
[1] 3.741657
```

Dos vectores **a** y **b** son ortonormales si son ortogonales y de norma 1.

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$$

Podemos definir el ángulo α entre dos vectores **a** y **b** como el ángulo en radianes $0 \leq \alpha \leq \pi$ tal que

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

1.8. El vector 0 y el vector 1

El vector **0** (vector **1**) es un vector con 0 (1) en todos sus elementos.

```
rep(0,3)
```

```
[1] 0 0 0
```

```
rep(1,3)
```

```
[1] 1 1 1
```

2. Matrices

2.1. Matrices

Una matriz \mathbf{A} de orden $n \times p$ es un conjunto de p vectores columna con la misma longitud n . Se trata pues de una tabla con n filas y p columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{(1)} & \mathbf{a}_{(2)} & \dots & \mathbf{a}_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathbf{a}_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{pmatrix}$$

son respectivamente los vectores columna $\mathbf{a}_{(j)}$ y vectores fila \mathbf{a}_i (también en columna).

Ejemplo:

```
A <- matrix(c(a,b), ncol=2)
```

```
A
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    8
[3,]    2    9
```

También se puede introducir los datos por filas:

```
A2 <- matrix(c(a,b), nrow=2, byrow=T)
```

```
A2
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    2
[2,]    2    8    9
```

2.2. Traspuesta de una matriz

Si \mathbf{A} es una matriz $n \times p$, \mathbf{A}' es su traspuesta, es decir, la misma matriz pero intercambiando filas y columnas.

Ejemplo:

```
A
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    8
[3,]    2    9
```

```
t(A)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    2
[2,]    2    8    9
```

2.3. Multiplicar una matriz por un número

Si \mathbf{A} es una matriz y k es un número, entonces el producto $k\mathbf{A}$ es una matriz

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1p} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{np} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

```
7 * A
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    7   14
[2,]   21   56
[3,]   14   63
```

2.4. Suma de matrices

Sean **A** y **B** dos matrices con las mismas dimensiones $n \times p$, la suma **A** + **B** es otra matriz con la misma dimensión y tal que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 11 & 10 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

```
B <- matrix(c(5,8,3,4,2,7), ncol=2)
```

```
A+B
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    6    6
[2,]   11   10
[3,]    5   16
```

2.5. Multiplicación de una matriz por un vector

Sea \mathbf{A} una matriz de dimensiones $n \times p$ y \mathbf{b} un vector de longitud p . El producto \mathbf{Ab} es un vector de longitud n tal que

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1p}b_p \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2p}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \dots + a_{np}b_p \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 8 \cdot 8 \\ 2 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 79 \\ 82 \end{pmatrix} =$$

```
a <- c(5,8)
```

```
A %*% a
```

```
 [,1]
```

```
[1,] 21
```

```
[2,] 79
```

```
[3,] 82
```

2.6. Multiplicación de matrices

Sea \mathbf{A} una matriz $n \times p$ y \mathbf{B} una matriz $p \times m$, el producto \mathbf{AB} es una matriz $n \times m$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{(1)} & \mathbf{b}_{(2)} & \dots & \mathbf{b}_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Ab}_{(1)} & \mathbf{Ab}_{(2)} & \dots & \mathbf{Ab}_{(m)} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 + 8 \cdot 8 & 3 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 9 \cdot 8 & 2 \cdot 4 + 9 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 79 & 28 \\ 82 & 26 \end{pmatrix}$$

```
A <- matrix(c(1,3,2,2,8,9), ncol=2)
B <- matrix(c(5,8,4,2), ncol=2)
A %*% B
```

```
      [,1] [,2]
[1,]   21   8
[2,]   79  28
[3,]   82  26
```

2.7. Vectores como matrices

Se puede considerar que un vector columna de longitud n es una matriz de dimensiones $n \times 1$. Del mismo modo, un vector fila de longitud p es una matriz de dimensiones $1 \times p$.

R dispone de un sistema de extracción de vectores (y submatrices) muy potente:

```
A[,1] # primera columna de A
```

```
[1] 1 3 2
```

```
A[,2] # segunda columna de A
```

```
[1] 2 8 9
```

```
A[1,] # primera fila de A
```

```
[1] 1 2
```

2.8. Algunas matrices especiales

- Una matriz $n \times n$ es una *matriz cuadrada* de orden n .
- Una matriz cuadrada \mathbf{A} es simétrica, si $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.
- La *matriz nula* es la que contiene todos sus elementos iguales a 0.
- La matriz con todos sus elementos 1 se denota como $\mathbf{J} = \mathbf{1}\mathbf{1}'$.
- Una matriz cuadrada con todos los elementos 0 excepto los de la diagonal se llama *matriz diagonal*.
- Una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal 1 se llama *matriz identidad* y se escribe \mathbf{I} . La matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices ya que $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$ para cualquier matriz cuadrada \mathbf{A} .
- Diremos que una matriz es *triangular superior* cuando sus elementos por debajo de la diagonal son 0.
- Diremos que una matriz es *triangular inferior* cuando sus elementos por encima de la diagonal son 0.

Ejemplos:

```
matrix(0, ncol=2, nrow=3) # matriz nula 3x2
```

	[,1]	[,2]
[1,]	0	0
[2,]	0	0
[3,]	0	0

```
matrix(1, ncol=2, nrow=3) # matriz J 3x2
```

	[,1]	[,2]
[1,]	1	1
[2,]	1	1
[3,]	1	1

```
diag(c(1,2,3)) # matriz diagonal
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	0	0
[2,]	0	2	0
[3,]	0	0	3


```
diag(1,3)                                # matriz identidad 3x3

      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1

diag(A)                                  # diagonal de una matriz (es un vector)

[1] 1 8

dim(A)                                   # matriz no cuadrada

[1] 3 2
```

2.9. Inversa de una matriz

En general, la inversa de una matriz cuadrada $p \times p$ \mathbf{A} es la matriz \mathbf{A}^{-1} (también cuadrada $p \times p$) cuyo producto matricial da la matriz identidad \mathbf{I} . Es decir

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Nota

De forma natural, la inversa de la inversa es la propia matriz \mathbf{A} .

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo las matrices cuadradas tienen inversa, aunque no todas. Las matrices cuadradas que no tienen inversa se llaman *singulares*.

Cuando una matriz cuadrada tiene inversa, ésta es única.

Hallar la matriz inversa de una matriz dada es bastante complicado, dejaremos los cálculos a las computadoras. La función `solve()` de **R** permite calcular la inversa de una matriz cuadrada (si tiene).

```
A <- matrix(c(1,3,2,4), ncol=2, byrow=T)
```

```
A
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    4
```

```
Ainv <- solve(A)
```

```
Ainv
```

```
      [,1] [,2]
[1,]   -2  1.5
[2,]    1 -0.5
```

```
A %*% Ainv
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
```

```
Ainv %*% A
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
```

Una matriz cuya inversa es su traspuesta $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$ se dice que es *ortogonal*:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

En este caso, las columnas (y las filas) de \mathbf{A} son vectores ortonormales.

2.10. Traza de una matriz

La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal. Se denota como $\text{tr}(\mathbf{A})$.

Ejemplo:

```
A <- matrix(c(1,3,2,4), ncol=2, byrow=T)
sum(diag(A))

[1] 5
```

2.11. Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada \mathbf{A} de orden n es un número que se obtiene mediante una fórmula compleja que excede el contenido de este documento. Los determinantes tienen su origen en la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

En el caso de una matriz \mathbf{A} de orden 2 la fórmula es

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

En el caso de una matriz \mathbf{A} de orden 3 la fórmula es

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Para órdenes mayores los determinantes se calculan en un desarrollo con determinantes de orden inferior. En nuestro caso es suficiente con saber que se calcula con la función `det()` de **R**.

Ejemplo:

```
A

      [,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    4

det(A)

[1] -2
```

Las matrices singulares tienen determinante igual a cero. Por el contrario, las matrices inversibles tienen determinante no nulo.

2.12. Rango de una matriz

Un *menor de una matriz* \mathbf{A} es el determinante de alguna submatriz cuadrada obtenido de \mathbf{A} mediante la eliminación de una o más de sus filas o columnas.

El *rango* de una matriz \mathbf{A} es el orden del mayor “menor” no nulo. Coincide con el número total de columnas (también de filas) linealmente independientes. Es decir, que las otras columnas (filas) serán combinación lineal de las independientes.

Ejemplo:

Veamos el rango de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que hay un menor de orden 3 no nulo ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

luego el rango es 3. No es posible formar menores de orden superior puesto que la matriz sólo tiene 3 filas.

```
A <- matrix(c(3,2,1,0,1,
              3,2,1,1,-2,
              3,2,1,-1,0), ncol=5, byrow=T)
det(A[,-c(1,2)])

[1] -4

qr(A)$rank

[1] 3
```

3. Diagonalización de una matriz

3.1. Valores y vectores propios

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada de dimensiones $p \times p$, diremos que \mathbf{v} es un vector propio (*eigenvector*) de \mathbf{A} de valor propio (*eigenvalue*) λ (número real) si

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

De modo que los vectores propios son las soluciones del sistema de ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Este sistema homogéneo (los términos independientes son cero) tiene solución no nula cuando la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ no sea de rango máximo. Así pues, los únicos valores propios λ que nos interesan son precisamente aquellos para los que la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ no es de rango máximo. Como \mathbf{A} es cuadrada, el rango no será máximo si $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ luego los valores propios son las raíces o ceros del polinomio o función característica $Q(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Dado un valor propio λ_i , el vector o vectores propios asociados se obtienen al solucionar el sistema de ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ con la condición $\mathbf{v}_i'\mathbf{v}_i = 1$ (vector de norma 1) para estandarizarlos.

Dada la complejidad de los cálculos para hallar primero los valores propios y luego para cada valor propio sus vectores propios, dejaremos dichos cálculos a nuestro *software*.

Ejemplo:

```
A <- matrix(c(6,0,1,3,-2,0,-8,0,-3), ncol=3)
eigen(A)$values

[1] 5 -2 -2

eigen(A)$vectors

      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.9922779 0.7071068 7.071068e-01
[2,] 0.0000000 0.0000000 7.327098e-16
[3,] 0.1240347 0.7071068 7.071068e-01
```

En este caso obtenemos dos valores propios distintos 5 y -2 . Cada uno de ellos tiene un vector propio asociado. La primera columna de la matriz anterior es el vector propio asociado al valor 5. La segunda columna es el vector propio asociado al valor -2 . Observemos que (salvo errores de precisión) la tercera columna es igual a la segunda y el valor propio -2 sólo tiene un vector propio asociado.

Comprobemos que cada vector propio asociado cumple con la propiedad de la definición $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$:

```
A %%% eigen(A)$vectors[,1]

      [,1]
[1,] 4.9613894
[2,] 0.0000000
[3,] 0.6201737

5 * eigen(A)$vectors[,1]

[1] 4.9613894 0.0000000 0.6201737

A %%% eigen(A)$vectors[,2]

      [,1]
[1,] -1.414214
[2,]  0.000000
[3,] -1.414214

-2 * eigen(A)$vectors[,2]

[1] -1.414214  0.000000 -1.414214
```

3.2. Matrices diagonalizables

Diremos que una matriz cuadrada \mathbf{A} es diagonalizable si se puede expresar así

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$$

donde $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ son los valores propios de \mathbf{A} y \mathbf{V} está formada por los vectores propios asociados: $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$.

Algunos valores propios pueden estar repetidos. Los vectores propios asociados serán todos linealmente independientes. Aunque la matriz esté formada por números reales, puede pasar que algunos valores propios sean números complejos.

Entre las propiedades más importantes de las matrices diagonalizables tenemos:

- $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{D}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i$
- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{D}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_p = \prod_{i=1}^p \lambda_i$

Si \mathbf{A} es una matriz simétrica, entonces siempre es diagonalizable ortogonalmente, es decir

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}'$$

donde \mathbf{T} es ortogonal.

Esta diagonalización ortogonal verifica las siguientes propiedades:

- Los valores propios y los vectores propios son todos de números reales (no complejos).
- Si \mathbf{A} es una matriz simétrica no singular (con inversa), las potencias de \mathbf{A} se pueden calcular así:

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{T}\mathbf{D}^m\mathbf{T}'$$

donde $\mathbf{D}^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_p^m)$ y m es un número entero (positivo o negativo).

Si además todos los valores propios son positivos no nulos, podemos definir las potencias

$$\mathbf{A}^{r/s} = \mathbf{T}\mathbf{D}^{r/s}\mathbf{T}'$$

donde r, s son números enteros y $s > 0$. Si hay valores propios cero, todavía podemos definir potencias de exponentes no negativos.

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A <- matrix(c(8,1,6,
              3,5,7,
              4,9,2), ncol=3, byrow=T)
valores_propios <- eigen(A)$values
vectores_propios <- eigen(A)$vectors
vectores_propios %*% diag(valores_propios) %*% solve(vectores_propios)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    8    1    6
[2,]    3    5    7
[3,]    4    9    2
```

Luego esta matriz es diagonalizable.

Ejemplo:

Sea ahora la matriz simétrica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 9 \\ 7 & 6 & 8 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

```
A <- matrix(c(10,7,9,
              7,6,8,
              9,8,13), ncol=3, byrow=T)
valores_propios <- eigen(A)$values
vectores_propios <- eigen(A)$vectors
vectores_propios %*% diag(valores_propios) %*% t(vectores_propios)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   10    7    9
[2,]    7    6    8
[3,]    9    8   13
```

Como la matriz \mathbf{A} es simétrica, seguro que es diagonalizable y además la matriz de vectores propios es ortogonal.

```
vectores_propios %*% t(vectores_propios)

           [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.000000e+00 1.110223e-16 5.551115e-17
[2,] 1.110223e-16 1.000000e+00 2.220446e-16
[3,] 5.551115e-17 2.220446e-16 1.000000e+00
```

3.3. Descomposición de una matriz en valores singulares

Si \mathbf{A} es una matriz de dimensiones $n \times p$ y de rango r , podemos expresarla como la descomposición

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}'$$

donde \mathbf{U} ($n \times r$) y \mathbf{V} ($r \times p$) son matrices de vectores columna ortonormales ($\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{I}_r$) y $\mathbf{\Delta}$ ($r \times r$) es una matriz diagonal de elementos positivos que llamaremos *valores singulares*.

En efecto, como $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es simétrica y de rango r podemos diagonalizarla en la forma

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}'$$

donde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ contiene los valores propios distintos de cero y \mathbf{V} ($p \times r$) los vectores propios asociados. Dichos valores propios son necesariamente positivos ya que

$$\lambda_i = \mathbf{v}_{(i)}' \mathbf{A}' \mathbf{A} \mathbf{v}_{(i)} = \|\mathbf{A} \mathbf{v}_{(i)}\|^2 > 0$$

Si la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}'$ es cierta

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Delta}\mathbf{U}'\mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}' = \mathbf{V}\mathbf{\Delta}^2\mathbf{V}'$$

de manera que $\mathbf{\Delta}^2 = \mathbf{\Lambda}$ y $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_r})$.

Del mismo modo y dado que $\mathbf{A}\mathbf{A}'$ también es simétrica y de rango r , pode-

mos expresarla con la descomposición

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}'$$

donde \mathbf{U} ($n \times r$) contiene los vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Los valores propios diferentes de cero de $\mathbf{A}\mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ son los mismo (y tienen la misma multiplicidad).

La relación de los valores propios con los valores singulares es la misma que antes:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}'\mathbf{V}\mathbf{\Delta}\mathbf{U}' = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}^2\mathbf{U}'$$

y $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Delta}^2$.

En resumen, siempre es posible hallar la descomposición en valores singulares de una matriz \mathbf{A} ($n \times p$) cualquiera.

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores singulares como los valores propios no nulos de la matriz $\mathbf{A}'\mathbf{A}$:

```
A <- matrix(c(2,1,0,
              1,1,3,
              3,2,3,
              4,2,0), ncol=3, byrow=T)
(val_propios <- eigen(t(A) %*% A)$values)

[1] 4.730301e+01 1.069699e+01 -9.087799e-17
```

Como el rango es 2, tenemos dos valores propios no nulos y los valores singulares son:

```
sqrt(val_propios[1:2])
```

```
[1] 6.877718 3.270626
```

Veamos que los valores propios no nulos de $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ coinciden con los de $\mathbf{A}\mathbf{A}'$

```
eigen(A %*% t(A))$values
```

```
[1] 4.730301e+01 1.069699e+01 3.137759e-15 -8.238368e-15
```

Para calcular la descomposición en valores singulares en **R** tenemos la función `svd()`.

```
(svd_A <- svd(A))
```

```
$d
```

```
[1] 6.877718e+00 3.270626e+00 4.258712e-16
```

```
$u
```

```
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] -0.2888923  0.3136231  0.53966637
[2,] -0.3756389 -0.6358852  0.59497706
[3,] -0.6645312 -0.3222621 -0.59497706
[4,] -0.5777846  0.6272461  0.02765535
```

```
$v
```

```
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] -0.7645203  0.46888858 -0.4423259
[2,] -0.4578790  0.08796663  0.8846517
[3,] -0.4537130 -0.87886596 -0.1474420
```

```
Delta <- diag(svd_A$d[1:2])
```

```
U <- svd_A$u[,1:2]
```

```
V <- svd_A$v[,1:2]
```

```
U %*% Delta %*% t(V)
```

```
      [,1] [,2]      [,3]
[1,] 2    1 1.221245e-15
[2,] 1    1 3.000000e+00
[3,] 3    2 3.000000e+00
[4,] 4    2 8.881784e-16
```

4. Inversa generalizada

Sea \mathbf{A} una matriz $n \times p$, diremos que \mathbf{A}^- es una inversa generalizada o g-inversa o pseudoinversa de \mathbf{A} si

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Toda matriz tiene g-inversa, aunque en general no es única.

4.1. Métodos para calcular una g-inversa

1) Si utilizamos la descomposición en valores singulares de \mathbf{A} , tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}'$. Una g-inversa de \mathbf{A} es

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{V}'$$

2) Si $\text{rg}(\mathbf{A}) = r$, reordenando las filas y las columnas de \mathbf{A} y tomando una submatriz \mathbf{A}_{11} no singular de orden r , se verifica que

$$\mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

3) Si \mathbf{A} es cuadrada y no singular, entonces $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^{-1}$ y es única

4) Si \mathbf{A} es cuadrada y simétrica de rango r , entonces \mathbf{A} es diagonalizable ortogonalmente, es decir,

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}'$$

donde \mathbf{T} es la matriz de vectores propios ortonormales correspondientes a los valores propios diferentes de cero y \mathbf{D} es la matriz diagonal con los valores propios no nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Entonces

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{T}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{T}'$$

4.2. Inversa de Moore-Penrose

La inversa de Moore-Penrose de una matriz \mathbf{A} , es una g-inversa que escribiremos \mathbf{A}^+ y que verifica las siguientes propiedades:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \text{ y } \mathbf{A}^+\mathbf{A} \text{ son simétricas,} \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$$

La inversa de Moore-Penrose es única y se obtiene a partir de la descomposición en valores singulares. Coincide con la matriz inversa de \mathbf{A} cuando ésta es cuadrada y no singular.

En **R** la inversa de Moore-Penrose se puede calcular con la función `ginv()` del paquete MASS.

Ejemplo:

```
library(MASS)
A

      [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    1    0
[2,]    1    1    3
[3,]    3    2    3
[4,]    4    2    0

ginv_A <- ginv(A)
A %*% ginv_A %*% A

      [,1] [,2]      [,3]
[1,]    2    1 -6.661338e-16
[2,]    1    1  3.000000e+00
[3,]    3    2  3.000000e+00
[4,]    4    2 -1.332268e-15
```

5. Resumen de propiedades de álgebra matricial

5.1. Suma de matrices y multiplicación por escalares

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- (c) $k\mathbf{A} = \mathbf{A}k$
- (d) $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$
- (e) $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
- (f) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
- (g) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

5.2. Producto de matrices

- (a) En general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, aunque \mathbf{A} y \mathbf{B} sean matrices cuadradas.
- (b) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- (c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- (d) $\mathbf{A}(k\mathbf{B}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB})$
- (e) $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ NO implica $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ salvo si existe \mathbf{A}^{-1}
- (f) $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ NO implica $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ salvo si existe \mathbf{A}^{-1} o \mathbf{B}^{-1}
- (g) \mathbf{A} y \mathbf{B} simétricas NO implica que \mathbf{AB} sea simétrica

5.3. Traspuesta

- (a) $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
- (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
- (c) $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$
- (d) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$
- (e) \mathbf{A} es simétrica si $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$
- (f) Para cualquier matriz \mathbf{A} , \mathbf{AA}' y $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ son simétricas
- (g) Si \mathbf{A} es cuadrada, $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$ es simétrica

5.4. Traza

La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada verifica las siguientes propiedades:

- (a) $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$
- (b) $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB})$
- (c) $\text{tr}(k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{B}) = k_1\text{tr}(\mathbf{A}) + k_2\text{tr}(\mathbf{B})$

5.5. Determinante

- (a) Una matriz \mathbf{A} es singular si $|\mathbf{A}| = 0$
- (b) Si \mathbf{A}^* es la matriz que se obtiene al intercambiar dos columnas (filas) cualesquiera de \mathbf{A} , entonces $|\mathbf{A}^*| = -|\mathbf{A}|$
- (c) Si dos columnas (filas) de \mathbf{A} son proporcionales, entonces $|\mathbf{A}| = 0$
- (d) Si \mathbf{A}^* es la matriz que se obtiene al multiplicar una columna (fila) de \mathbf{A} por un escalar k , entonces $|\mathbf{A}^*| = k|\mathbf{A}|$
- (e) $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
- (f) Si \mathbf{A} es $p \times p$, $|k\mathbf{A}| = k^p|\mathbf{A}|$
- (g) En general $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$
- (h) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{B}||\mathbf{A}| = |\mathbf{BA}|$
- (i) Si a una columna (fila) de \mathbf{A} le sumamos otra columna (fila) de \mathbf{A} multiplicada por un escalar, el determinante de la matriz resultante es el mismo $|\mathbf{A}|$

5.6. Inversa

- (a) Si una matriz \mathbf{A} tiene inversa \mathbf{A}^{-1} , ésta es única.
- (b) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- (c) $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$
- (d) En general $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$
- (e) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- (f) Si \mathbf{A} es simétrica, también lo es \mathbf{A}^{-1}

(g) Si $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, \dots, a_p)$ es una matriz diagonal con todos sus elementos no nulos, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_p}\right)$$

(h) La inversa de una matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

siempre que $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

5.7. Matrices ortogonales

Para una matriz cuadrada \mathbf{A} ortogonal ($\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$):

- (a) $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$
- (b) \mathbf{A}' es ortogonal y \mathbf{A}^{-1} es ortogonal
- (c) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son ortogonales, entonces $\mathbf{A}\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}\mathbf{A}$ son ortogonales
- (d) $|\mathbf{A}| = \pm 1$

5.8. Matrices idempotentes

Se dice que una matriz cuadrada \mathbf{A} es idempotente si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

- (a) Si \mathbf{A} es idempotente, entonces $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ también.
- (b) Si \mathbf{A} es idempotente y \mathbf{Q} es ortogonal del mismo orden, entonces $\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es idempotente.
- (c) Si \mathbf{A} es idempotente y no singular, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$
- (d) Los valores propios de una matriz idempotente son siempre 1 o 0.

5.9. Rango

- (a) $\text{rg}(\mathbf{A}') = \text{rg}(\mathbf{A})$
- (b) $\text{rg}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rg}(\mathbf{A}) + \text{rg}(\mathbf{B})$
- (c) $\text{rg}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\text{rg}(\mathbf{A}), \text{rg}(\mathbf{B})\}$
- (d) Si \mathbf{A} es cuadrada de orden p y singular, entonces $\text{rg}(\mathbf{A}) < p$
- (e) Si \mathbf{A} es no singular, $\text{rg}(\mathbf{AB}) = \text{rg}(\mathbf{B})$ y $\text{rg}(\mathbf{BA}) = \text{rg}(\mathbf{B})$
- (f) Si \mathbf{A} y \mathbf{C} son no singulares, entonces $\text{rg}(\mathbf{ABC}) = \text{rg}(\mathbf{B})$
- (g) Si \mathbf{A} es no singular, $\text{rg}(\mathbf{A}^{-1}) = \text{rg}(\mathbf{A})$
- (h) Si \mathbf{A} es idempotente, $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$

5.10. Formas cuadráticas

Una forma cuadrática es una función de p variables del tipo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$$

donde \mathbf{A} es una matriz cuadrada de orden p .

Se dice que la forma cuadrática es definida positiva (d.p.) si $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Diremos entonces que la matriz cuadrada \mathbf{A} es *definida positiva*.

Se dice que la forma cuadrática es semidefinida positiva (s.d.p.) si $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, para todo \mathbf{x} y $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, para algún $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Diremos entonces que la matriz cuadrada \mathbf{A} es *semidefinida positiva*.

- (a) \mathbf{A} es d.p. si los valores propios son positivos
- (b) \mathbf{A} es s.d.p. si los valores propios son no negativos y al menos uno de ellos es cero
- (c) Toda matriz d.p. es no singular
- (d) Toda matriz s.d.p. es singular
- (e) La matriz identidad es d.p.
- (f) Si \mathbf{A} es d.p., entonces $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$
- (g) Si \mathbf{A} es d.p., entonces todos los elementos de la diagonal son positivos
- (h) Si \mathbf{A} es d.p. y \mathbf{B} es no singular, entonces $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}$ es d.p. y recíprocamente.

(i) Toda forma cuadrática se puede reducir a la forma

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2$$

donde $y_i = g_i(\mathbf{x})$

6. Algunas matrices de interés en Estadística

6.1. La matriz de centrado

La media de un vector columna de datos \mathbf{x} de longitud n se puede escribir así:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \mathbf{1}' \mathbf{x} = \frac{1}{n} \mathbf{x}' \mathbf{1}$$

El vector de medias de un matriz de datos \mathbf{X} de orden $n \times p$ es

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \mathbf{X}' \mathbf{1}$$

Se define la *matriz de centrado* \mathbf{H} como

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{J}$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y $\mathbf{J} = \mathbf{1}\mathbf{1}'$ la matriz de unos. Entonces para un vector de datos \mathbf{x}

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}$$

con lo que se justifica el nombre de la matriz \mathbf{H} ya que centra los datos. Los nuevos datos tienen media cero:

$$\frac{1}{n} \mathbf{1}'(\mathbf{H}\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \mathbf{1}'(\mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}) = \frac{1}{n} \mathbf{1}'\mathbf{x} - \frac{1}{n} \bar{x} \mathbf{1}'\mathbf{1} = \bar{x} - \frac{1}{n} \bar{x}n = 0$$

Entre las propiedades de la matriz \mathbf{H} tenemos las siguientes:

- (a) \mathbf{H} es simétrica e idempotente
- (b) $\mathbf{H}\mathbf{1} = \mathbf{0}$
- (c) $\mathbf{H}\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{H} = \mathbf{0}_{n \times n}$
- (d) $\text{rg}(\mathbf{H}) = n - 1$

6.2. La matriz de varianzas-covarianzas

La matriz de varianzas-covarianzas muestral de un conjunto de datos $\mathbf{X}_{n \times p}$ es

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n} \mathbf{X}' \mathbf{H} \mathbf{X}$$

La matriz de varianzas-covarianzas muestral corregida es $\hat{\mathbf{S}} = \frac{n}{n-1} \mathbf{S}$.

La matriz \mathbf{S} es simétrica y, al menos, semidefinida positiva.

Ejemplo:

```
## Covariance matrix
S <- var(mtcars[,1:6])
round(S, 2)
```

	mpg	cyl	disp	hp	drat	wt
mpg	36.32	-9.17	-633.10	-320.73	2.20	-5.12
cyl	-9.17	3.19	199.66	101.93	-0.67	1.37
disp	-633.10	199.66	15360.80	6721.16	-47.06	107.68
hp	-320.73	101.93	6721.16	4700.87	-16.45	44.19
drat	2.20	-0.67	-47.06	-16.45	0.29	-0.37
wt	-5.12	1.37	107.68	44.19	-0.37	0.96

¡Importante!

En **R** las funciones `var()` y `cov()` calculan siempre la matriz de varianzas-covarianzas corregida.

La matriz de correlaciones es

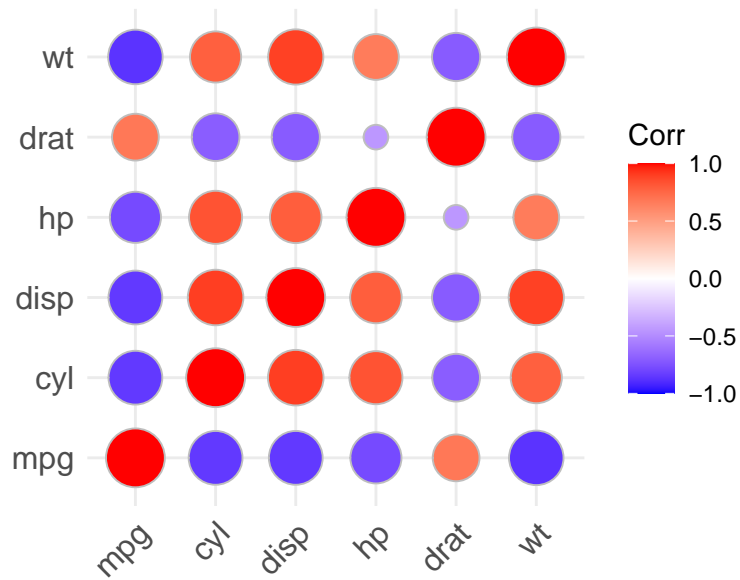
$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{S} \mathbf{D}^{-1/2}$$

donde $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{S})$.

```
## Correlation Matrix of Multivariate sample:
R <- cor(mtcars[,1:6])
round(R, 3)
```

	mpg	cyl	disp	hp	drat	wt
mpg	1.000	-0.852	-0.848	-0.776	0.681	-0.868
cyl	-0.852	1.000	0.902	0.832	-0.700	0.782
disp	-0.848	0.902	1.000	0.791	-0.710	0.888
hp	-0.776	0.832	0.791	1.000	-0.449	0.659
drat	0.681	-0.700	-0.710	-0.449	1.000	-0.712
wt	-0.868	0.782	0.888	0.659	-0.712	1.000

```
## Graphical Correlation Matrix:  
library(ggcorrplot)  
ggcorrplot(R, method="circle")
```



En **R** la matriz de correlaciones se calcula con la matriz de covarianzas muestral corregida.

Bibliografía

Amon, J. (1991). Introducción al Análisis Multivariante (Cálculo matricial). *Colección Avances Metodológicos en Psicología n 2*, PPU, Barcelona.

Graybill, F. (1969). Introduction to Matrices with Applications in Statistics. Wadsworth, Belmont.

Green, E. & Carroll D. (1976). Mathematical Tools for Applied Multivariate Analysis. Academic Press, London.

Mardia, K.V., Kent J.T. and Bibby, J.M. (1979). Multivariate Analysis. Academic Press, London.