

ANN1

Rapport de TP

Équation des ondes en régime temporel

Maria SAAD

25 novembre 2024



Table des matières

Exercice 1	2
Discrétisation	2
Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence . . .	4
Assemblage des matrices et vecteur second membre	5
Validation du code	5
Résolution numérique	7
Exercice 2	8
Discrétisation en espace	9
Discrétisation en temps	9
Premier exemple de résolution numérique sur un cas homogène	10

Exercice 1

1) La formule d'intégration par parties avec la divergence est :

$$\forall \mathbf{U} \in H^1(\Omega)^2, v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{U}) v + \mathbf{U} \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 v \gamma_0 \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (1)$$

On veut réaliser la formulation variationnelle de ce problème : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} -u + \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $v \in H^1(\Omega)$. On multiplie la première équation du système par v et on intègre sur Ω . En utilisant la formule (1) (valable car $v \in H^1(\Omega)$ et $\sigma \nabla u \in H^1(\Omega)^2$) :

$$\int_{\Omega} uv - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (2)$$

Pour satisfaire la condition homogène, on prend $u \in H_0^1(\Omega)$. On obtient la formulation variationnelle suivante :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} (uv + \sigma \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3)$$

2) On pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (uv + \sigma \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

- $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$, est un **espace de Hilbert** car c'est un sous-espace vectoriel fermé de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$.
- $|a(u, v)| \leq (1 + \sigma_{\max}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ par Cauchy-Schwarz. Donc a est une **forme bilinéaire continue**.
- $a(u, u) \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma_{\min} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min(1, \sigma_{\min}) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$. Donc a est **coercive**.
- $|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ d'après Cauchy-Schwarz. Donc l est **linéaire continue**.

On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram : Il y a existence et unicité de la solution. Cette formulation variationnelle est bien posée.

Discrétisation

3) Trouver $u_h \in V_h^0$ telle que :

$$\forall v_h \in V_h^0, \int_{\Omega} (u_h v_h + \sigma \nabla u_h \cdot \nabla v_h) d\Omega = \int_{\Omega} f v_h d\Omega \quad (4)$$

4) En remplaçant $u_h(x, y) = \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) w_I(x, y)$ dans (4) et en choisissant $v_h = w_J(x, y)$:

$$\forall J = 1, \dots, N_0, \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) w_I w_J + \sigma \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) \nabla w_I \cdot \nabla w_J \right) d\Omega = \int_{\Omega} f w_J d\Omega.$$

On obtient alors :

$$(\mathbf{M}^0 + \mathbf{K}^0) \vec{\mathbf{U}}^0 = \vec{\mathbf{L}}^0,$$

avec :

$$\vec{\mathbf{U}}^0 = \begin{bmatrix} u_h(M_1) \\ u_h(M_2) \\ \vdots \\ u_h(M_{N_0}) \end{bmatrix}$$

— **Matrice de masse \mathbf{M}^0 :**

$$\mathbf{M}_{I,J}^0 = \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega$$

— **Matrice de rigidité \mathbf{K}^0 :**

$$\mathbf{K}_{I,J}^0 = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J d\Omega$$

$$\vec{\mathbf{L}}^0 = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f w_1 d\Omega \\ \int_{\Omega} f w_2 d\Omega \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f w_{N_0} d\Omega \end{bmatrix}$$

On cherche à déterminer les propriétés de la matrice $\mathbf{A}^0 = \mathbf{M}^0 + \mathbf{K}^0$:

— \mathbf{M}^0 et \mathbf{K}^0 sont symétriques : pour tout $I, J \in \{1, \dots, N_0\}$, $\mathbf{M}_{I,J}^0 = \mathbf{M}_{J,I}^0$ et $\mathbf{K}_{I,J}^0 = \mathbf{K}_{J,I}^0$.

— Pour $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_0}$,

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M}^0 \mathbf{V} = \sum_{I=1}^{N_0} \mathbf{V}_I^2 \int_{\Omega} w_I^2 d\Omega = \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0 \quad \text{si } \mathbf{V} \neq 0,$$

donc \mathbf{M}^0 est définie positive.

— Pour $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_0}$,

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K}^0 \mathbf{V} = \int_{\Omega} \sigma^2 \nabla v_h \cdot \nabla v_h d\Omega \geq \sigma_{min}^2 \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0,$$

donc \mathbf{K}^0 est positive mais non définie car $\text{Ker}(\mathbf{K}^0) = \mathbb{R}(1, 1, \dots, 1)^T$.

— $\mathbf{A}^0 = \mathbf{M}^0 + \mathbf{K}^0$ est symétrique définie positive, donc \mathbf{A}^0 est **inversible**.

5) On cherche à écrire notre problème sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-N_0} & 0 \\ \mathbf{A}_{IB} & \mathbf{A}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_B \\ \mathbf{L}_I \end{bmatrix}$$

Ici, comme nous n'avons pas de conditions aux bords, nous prenons $\mathbf{A}_{IB} = 0$. De plus, comme nous voulons que $\mathbf{U}_B = 0$, nous posons $\mathbf{L}_B = 0$.

Comme on veut $\mathbf{A}_0 \vec{\mathbf{U}}^0 = \vec{\mathbf{L}}^0$, on prend alors $\mathbf{A}_{II} = \mathbf{A}_0$, $\mathbf{U}_I = \vec{\mathbf{U}}^0$, et $\mathbf{L}_I = \vec{\mathbf{L}}^0$.

On a alors :

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{L}},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-N_0} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\mathbf{U}}^0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{L}}^0 \end{bmatrix}.$$

Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence

6) On cherche $F_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que :

$$F_l(\hat{M}) = B_l \hat{M} + S_l, \quad \text{et} \quad \forall i, F_l(\hat{M}_i) = M_i.$$

Si on pose :

$$B_l = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad S_l = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

alors on retrouve $S_l = M_1$ et le système suivant :

$$\begin{cases} a + x_1 = x_2, \\ b + x_1 = x_3, \\ c + y_1 = y_2, \\ d + y_1 = y_3. \end{cases}$$

On a donc :

$$B_l = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

7) Sur \hat{T} , les fonctions \hat{w}_j (pour $j = 1, 2, 3$) sont les fonctions de P_1 telles que $\hat{w}_j(\hat{M}_i) = \delta_{ij}$.
Donc :

$$\hat{w}_1(x, y) = 1 - x - y, \quad \hat{w}_2(x, y) = x, \quad \hat{w}_3(x, y) = y.$$

On a donc :

$$\mathbf{M}_{i,j}^{\text{elem}} = \int_{\hat{T}} \hat{w}_i(\hat{M}) \hat{w}_j(\hat{M}) |\det B_l| d\hat{\Omega} = |\det B_l| \int_{\hat{T}} \hat{w}_i(\hat{M}) \hat{w}_j(\hat{M}) d\hat{\Omega}.$$

Pour le calcul de ces intégrales, on utilise les formules de quadrature car elles sont exactes pour les polynômes de degré 2. L'intégrale dépendant du triangle de référence, on utilise la formule ci-dessous de quadrature d'ordre 2 (car l'intégrande est un polynôme d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{T}} \hat{w}_i \hat{w}_j d\hat{\Omega} &= \frac{|\hat{T}|}{3} \left(\hat{w}_i \hat{w}_j \left(\frac{\hat{M}_1 + \hat{M}_2}{2} \right) + \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\frac{\hat{M}_1 + \hat{M}_3}{2} \right) + \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\frac{\hat{M}_2 + \hat{M}_3}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left[\hat{w}_i \hat{w}_j \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \hat{w}_i \hat{w}_j \left(0, \frac{1}{2} \right) + \hat{w}_i \hat{w}_j \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\mathbf{M}^{\text{elem}} = \frac{|\det B_l|}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8) Pour la matrice de rigidité, on a :

$$\mathbf{K}_{i,j}^{\text{elem}} = [(B_l^\top)^{-1} \nabla \hat{w}_i(\hat{M})] \cdot [(B_l^\top)^{-1} \nabla \hat{w}_j(\hat{M})] |\det B_l| \int_{\hat{T}} \sigma(F_l(\hat{M})) d\hat{\Omega}.$$

Avec la formule de quadrature à trois points de Gauss-Legendre (licite car σ est continue par morceaux), on a :

$$\int_{T_l} \sigma d\Omega = \frac{1}{6} \left[\sigma\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + \sigma\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + \sigma\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right].$$

Grace au tableau **Reftri**, on peut savoir si on est Ω_1 ou Ω_2 et donc savoir si on utilise σ_1 ou σ_2 .

9) En prenant $\sigma = 1$, on vérifie bien qu'on a le même résultat que le TP1.

Assemblage des matrices et vecteur second membre

10) On va assembler les matrices **M** et **K** comme le TP precedent en realisant une boucle sur les triangles. Ensuite pour pouvoir calculer $\vec{\mathbf{L}}$ on utilise l'approximation de f par $\pi_h(f)$:

$$\vec{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}$$

avec

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(S_1) \\ f(S_2) \\ \vdots \\ f(S_{\text{Nbpt}}) \end{pmatrix}.$$

En effet,

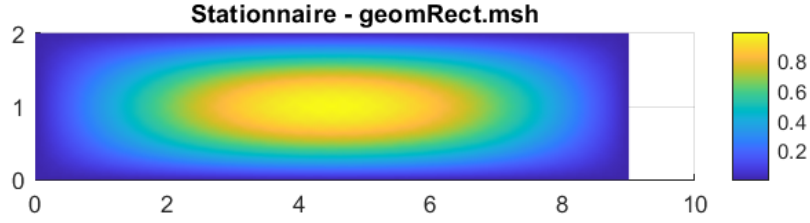
$$\vec{\mathbf{L}}_i = \sum_{j=1}^N f(S_j) \int_{\Omega} w_j w_i d\Omega = \sum_{j=1}^N f(S_j) M_{i,j}$$

11) A l'aide de **Refneu**, on peut déterminer si le sommet se situe sur le bord du domaine, auquel cas il faut supprimer la ligne et la colonne correspondante hormis le terme diagonal.

Validation du code

12) On a :

$$f = u - \text{div}(\sigma \nabla u) = (1 + \frac{\pi^2}{81} + \frac{\pi^2}{4}) \sin(\frac{\pi}{9}x) \sin(\frac{\pi}{2}y)$$

FIGURE 1 – Résolution avec un pas $h = 0.2$.

13) Pour estimer l'erreur en norme L^2 :

$$u(x, y) \approx \pi_h u = \sum_{i=1}^N u(S_i) w_i$$

On a alors :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \approx \sqrt{\sum_{i,j=1}^N (u - u_h)_i (u - u_h)_j \mathbf{M}_{i,j}^0} = \sqrt{(\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})^T \mathbf{M}^0 (\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})}$$

avec $\mathbf{U}_i^{ex} = u(S_i)$ et $\mathbf{U}_i = u_h(S_i)$

Pour tracer l'erreur :

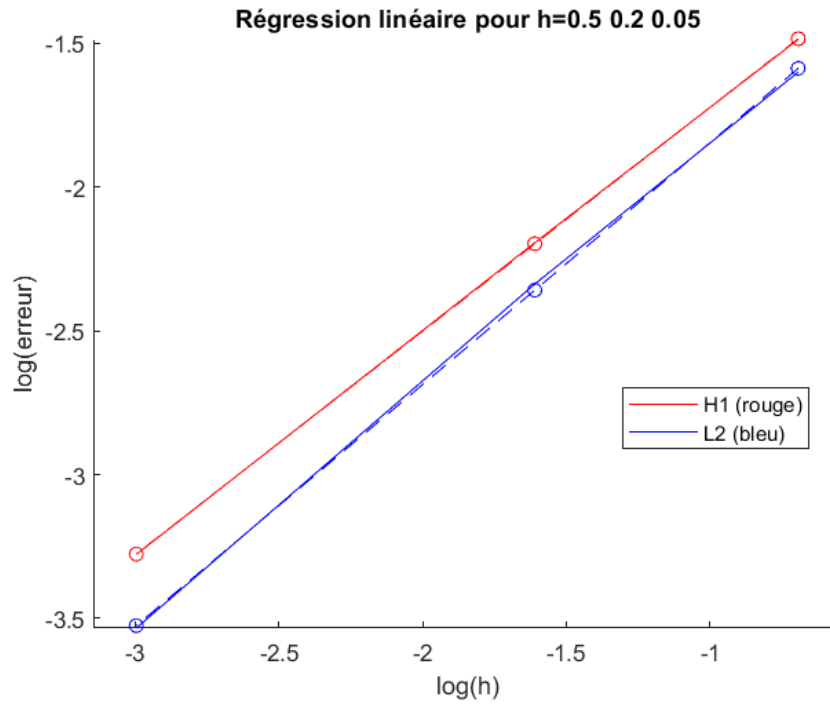
$$\log h \mapsto \log \frac{\|\pi_h u - u_h\|_{L^2}}{\|\pi_h u\|_{L^2}}$$

14) Pour estimer l'erreur en semi norme H^1

$$|u - u_h|_1 \approx \sqrt{\sum_{i,j=1}^N (u - u_h)_i (u - u_h)_j \mathbf{K}_{i,j}^0} = \sqrt{(\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})^T \mathbf{K}^0 (\mathbf{U}^{ex} - \mathbf{U})}$$

avec $\mathbf{U}_i^{ex} = u(S_i)$ et $\mathbf{U}_i = u_h(S_i)$

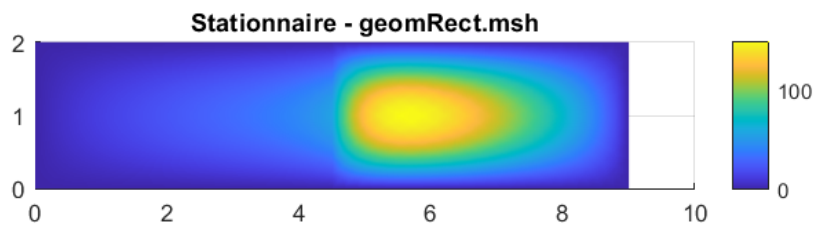
$$\log h \mapsto \log \frac{|\nabla(\pi_h u) - \nabla(u_h)|_1}{|\nabla(\pi_h u)|_1}$$

FIGURE 2 – Résolution avec un pas $h = 0.2$.

On vérifie bien que l'erreur tend vers 0 et donc qu'il y a bien convergence.

Résolution numérique

15) Pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ et $u(x, y) = \sin\left(\frac{2\pi}{9}x\right)\sin(\pi y)$, on obtient la solution numérique suivante :

FIGURE 3 – Solution approchée avec $h = 0.2$.

La valeur maximale retrouvée est 150.6252. On remarque qu'il y a une discontinuité. 16)
Ici on prend :

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{4} (2 + \sin(16\pi x)) (2 + \sin(16\pi y))$$

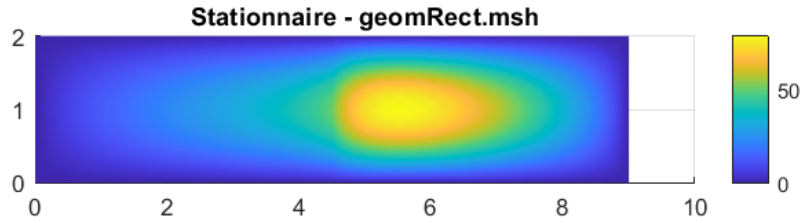


FIGURE 4 – Solution approchée avec $h = 0.2$.

On observe ici qu'il y a bien continuité la solution entre le domaine 1 et le domaine 2.

Exercice 2. Discrétisation de l'équation des ondes par un schéma saute-mouton

1) Le problème est $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ donné par :
Trouver $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, t_{\max}[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, t_{\max}[, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Soit $v \in H^1(\Omega)$. Si on multiplie la première équation par v et qu'on intègre : On remarque qu'on peut appliquer la formule de Green (1) (licite car $v \in H^1(\Omega)$ et $\sigma \nabla(u) \in H^1(\Omega)^2$) :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma \gamma_0 v \gamma_1 u \, d\Gamma = 0$$

Pour supprimer l'intégrale sur le bord et vérifier la deuxième condition du système, on prend u et v dans $H_0^1(\Omega)$. Comme il y a indépendance du temps pour v :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = 0$$

Finalement, on retrouve bien :

$$\frac{d^2}{dt^2} m(u, v) + k(u, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Discrétisation en espace

2) Trouver $u_h(., t) \in V_h^0$ pour $t \in]0; t_{\max}[$ tel que :

$$\forall v_h \in V_h^0, \quad \frac{d^2}{dt^2} m(u_h, v_h) + k(u_h, v_h) = 0. \quad (5)$$

3) En remplaçant $u_h(x, y) = \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I, t) w_I(x, y)$ et en choisissant $v_h = w_J(x, y)$, on obtient :

$$\sum_{I=1}^{N_0} \frac{d^2 u_h(M_I, t)}{dt^2} m(w_I, w_J) + \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I, t) k(w_I, w_J) = 0, \quad \forall J \in \{1, \dots, N_0\}.$$

On a alors :

$$M_0 \frac{d^2 \vec{V}}{dt^2}(t) + K_0 \vec{V}(t) = 0,$$

avec :

— Vecteur \vec{V} :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} u_h(M_1, t) \\ u_h(M_2, t) \\ \vdots \\ u_h(M_{N_0}, t) \end{bmatrix}$$

— Matrice de masse M^0 :

$$M_{I,J}^0 = \int_{\Omega} w_I w_J d\Omega$$

— Matrice de rigidité K^0 :

$$K_{I,J}^0 = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_I \cdot \nabla w_J d\Omega$$

— Conditions initiales :

$$\vec{V}(0) = \vec{U}_0, \quad \frac{d\vec{V}}{dt}(0) = \vec{U}_1.$$

Discrétisation en temps

4) On a :

$$M_0 \frac{\vec{V}_{n+1} - 2\vec{V}_n + \vec{V}_{n-1}}{\Delta t^2} + K_0 \vec{V}_n = 0.$$

Donc :

$$M_0 \vec{V}_{n+1} - 2M_0 \vec{V}_n + M_0 \vec{V}_{n-1} + \Delta t^2 K_0 \vec{V}_n = 0.$$

On a les conditions initiales suivantes :

$$\vec{V}_0 = \vec{U}_0,$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}(0) = \vec{U}_1.$$

L'approximation discrète pour la vitesse au pas initial est donnée par :

$$\frac{d\vec{V}}{dt}(0) \approx \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_{-1}}{2\Delta t}.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\vec{V}_{-1} = \vec{V}_1 - 2\Delta t \vec{U}_1.$$

Pour trouver \vec{V}_1 , nous utilisons l'équation discrète au pas $n = 0$:

$$\mathbf{M}_0 \vec{V}_1 - 2\mathbf{M}_0 \vec{V}_0 + \mathbf{M}_0 \vec{V}_{-1} + \Delta t^2 \mathbf{K}_0 \vec{V}_0 = 0.$$

Or $\vec{V}_{-1} = \vec{V}_1 - 2\Delta t \vec{U}_1$:

$$\mathbf{M}_0 \vec{V}_1 - 2\mathbf{M}_0 \vec{V}_0 + \mathbf{M}_0 (\vec{V}_1 - 2\Delta t \vec{U}_1) + \Delta t^2 \mathbf{K}_0 \vec{V}_0 = 0.$$

Regroupons les termes contenant \vec{V}_1 :

$$(2\mathbf{M}_0) \vec{V}_1 = 2\mathbf{M}_0 \vec{V}_0 - \Delta t^2 \mathbf{K}_0 \vec{V}_0 + 2\Delta t \mathbf{M}_0 \vec{U}_1.$$

Finalement on retrouve (car \mathbf{M}_0 est inversible comme étant symétrique définie positive) :

$$\vec{V}_1 = \left(I - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{K}_0 \right) \vec{U}_0 + \Delta t \vec{U}_1.$$

Premier exemple de résolution numérique sur un cas homogène

6) Pour mettre en œuvre le schéma saute-mouton suivant :

$$M_0 \vec{V}_{n+1} = (2M_0 - \Delta t^2 K_0) \vec{V}_n - M_0 \vec{V}_{n-1},$$

il est nécessaire de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps.

On a :

$$\int_{T_l} G d\Omega \approx \frac{\text{aire}(T_l)}{3} (G(S_1) + G(S_2) + G(S_3)),$$

où S_1, S_2, S_3 sont les sommets du triangle T_l .

Pour approcher les termes de la matrice de masse élémentaire $\int_{T_l} \lambda_i \lambda_j d\Omega$, avec $i, j \in \{1, 2, 3\}$, nous utilisons cette formule de quadrature.

On remarque que les termes de la matrice de masse élémentaire M_{ij}^l sur T_l s'expriment comme suit :

$$M_{ij}^l = \int_{T_l} \lambda_i \lambda_j d\Omega \approx \begin{cases} \frac{\text{aire}(T_l)}{3} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ainsi, chaque matrice de masse élémentaire M^l devient diagonale.

Après assemblage des matrices élémentaires, la matrice de masse globale approchée, dite "condensée", devient également diagonale. Les termes diagonaux sont donnés par :

$$M_{IJ} \approx M_{IJ}^{\text{cond}} = \delta_{IJ} \sum_{T_l \in \text{supp}\{\varphi_I\}} \frac{\text{aire}(T_l)}{3},$$

La méthode de condensation de masse simplifie donc considérablement les calculs en remplaçant la matrice M_0 , initialement pleine, par une matrice diagonale M^{cond} . Cette approximation permet une résolution plus rapide des systèmes linéaires.

7)

- Pour calculer la plus grande valeur propre du problème aux valeurs propres généralisées

$$\mathbf{K}_e \vec{\mathbf{V}} = \lambda \mathbf{M}_e \vec{\mathbf{V}},$$

Pour trouver la valeur propre maximale on utilise la commande ci-dessous :

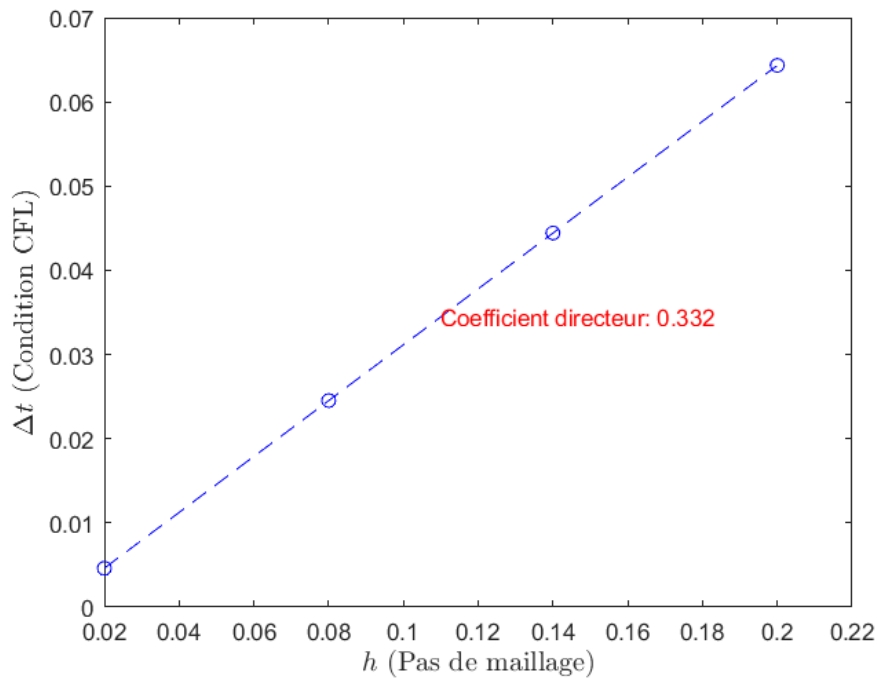
$$\text{lambda_max} = \text{abs}(\text{max}(\text{eigs}((\mathbf{M}^{-1}) * \mathbf{K})));$$

- En utilisant la condition CFL donnée par l'équation (12) :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}}},$$

où λ_{\max} est la plus grande valeur propre calculée précédemment, nous déterminons le pas de temps maximum autorisé pour chaque maillage.

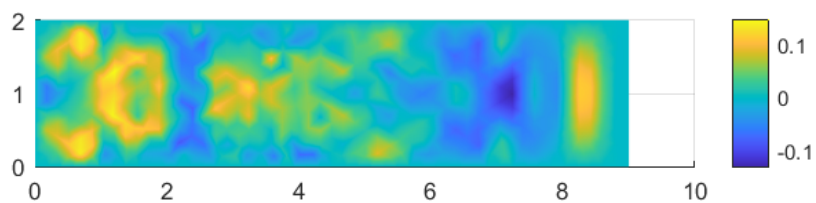
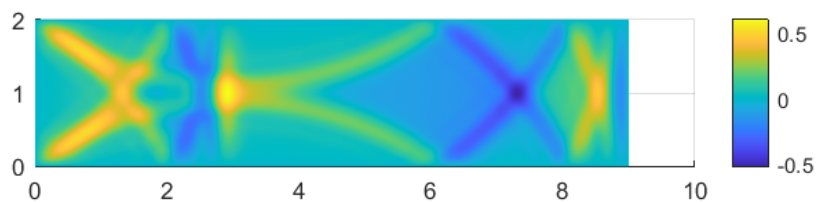
- Pour trouver la relation entre Δt et h on réalise une régression linéaire et on retrouve :

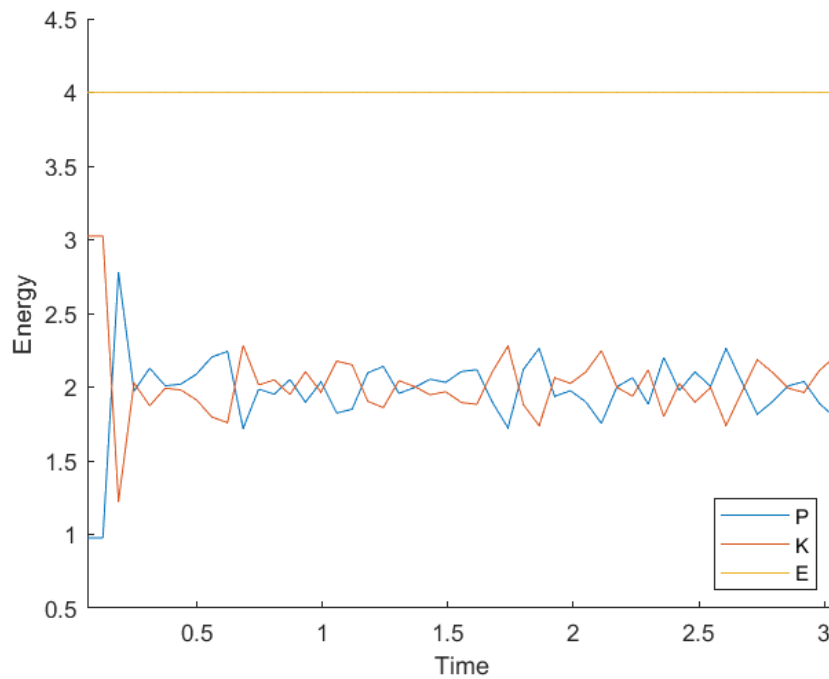
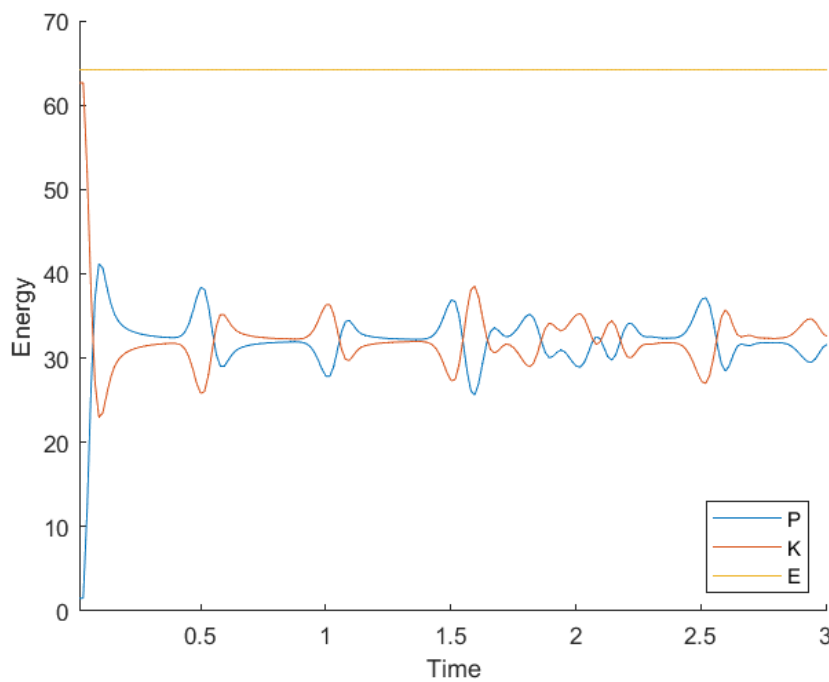
FIGURE 5 – Relation entre Δt et h

On a :

$$\Delta t \approx 0.332h$$

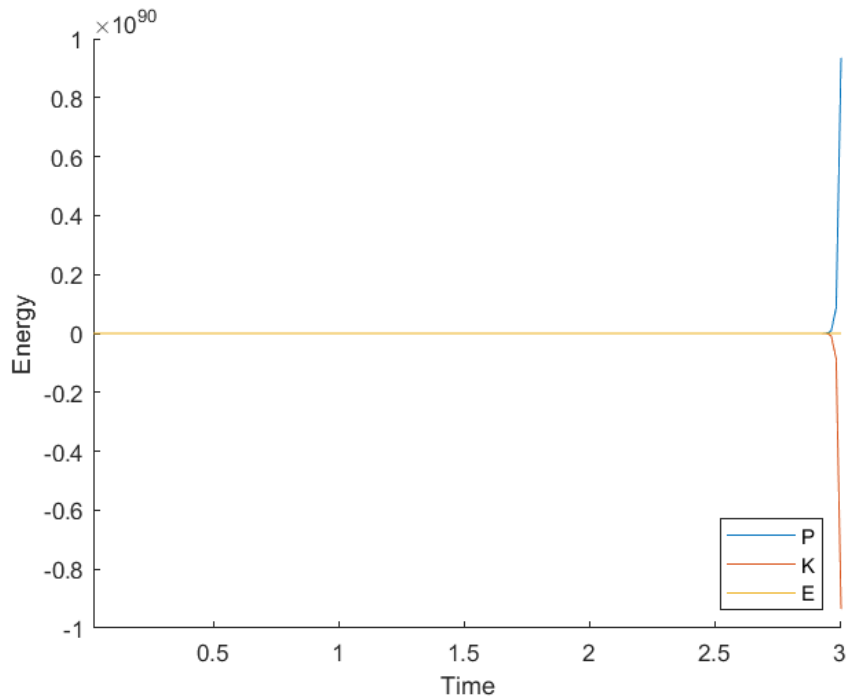
- 8) Les solutions obtenues pour $h=0.05$ et $h=0.2$

FIGURE 6 – Solution approchée avec $h = 0.2$.FIGURE 7 – Solution approchée avec $h = 0.05$.

FIGURE 8 – énergie avec $h = 0.2$.FIGURE 9 – énergie avec $h = 0.05$.

On remarque que l'énergie augmente lorsque h diminue. De plus on remarque que comme le système est conservatif on a la somme de l'énergie potentielle et cinétique qui est constante.

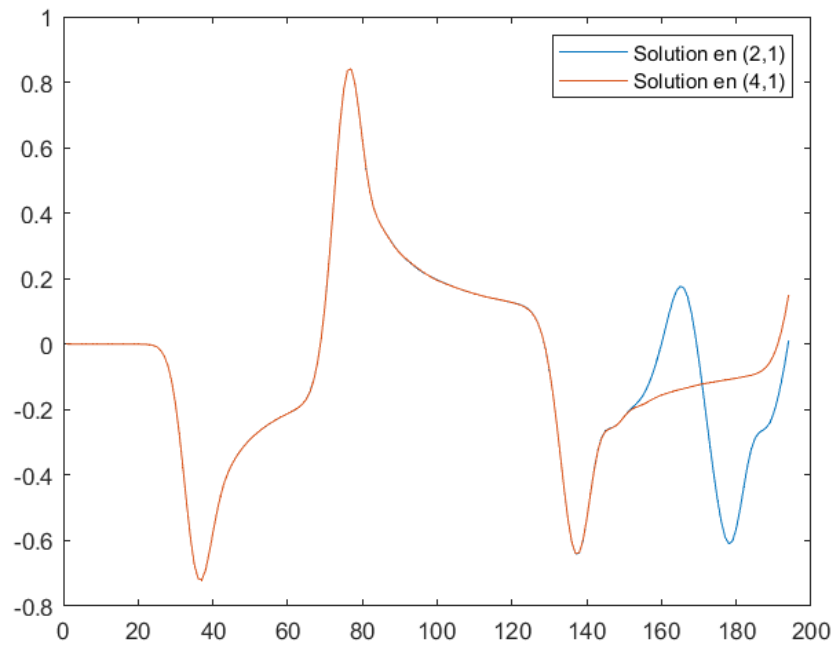
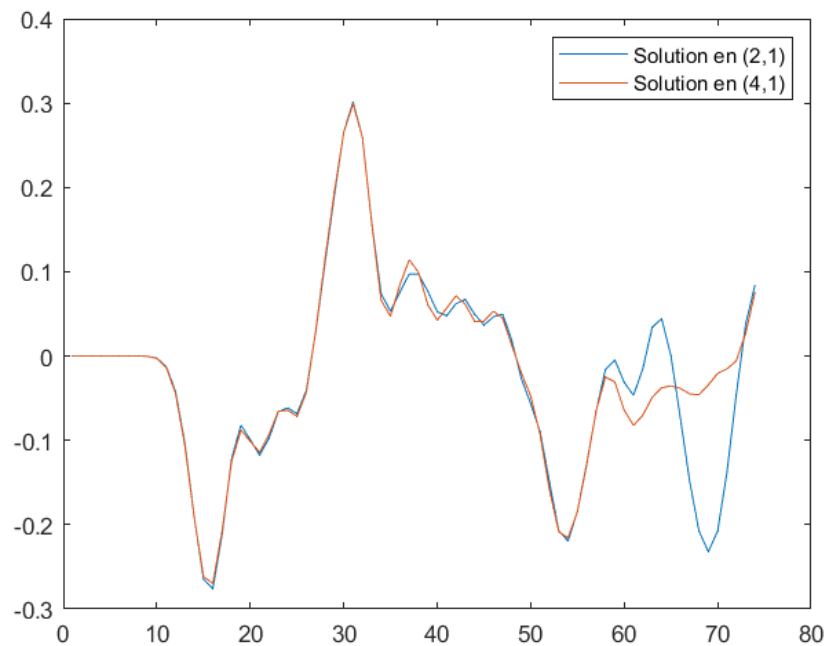
Si on choisit un $\Delta t > \bar{\Delta t}$, on a pour l'énergie :

FIGURE 10 – énergie avec $\Delta t > \bar{\Delta}t$.

et la solution approchée devient :

FIGURE 11 – solution avec $\Delta t > \bar{\Delta}t$.

On remarque que les résultats ne sont pas du tout satisfaisant. Ici on a pris $\Delta t = 1.2\bar{\Delta}t$. L'énergie explose à partir d'un certain moment et l'onde ne se propage pas. Pour l'interpolation on retrouve :

FIGURE 12 – interpolation en (2,1) et (1,4) avec $h=0.05$ FIGURE 13 – interpolation en (2,1) et (1,4) avec $h=0.14$

On remarque qu'au début, les solutions sont égales et qu'au bout d'un certain temps, elles diffèrent très fortement. On remarque aussi que plus le pas est petit, plus les solutions sont proches l'une de l'autre.