

Résolution numérique de l'équation des ondes en régime temporel

En plus du rapport écrit, il faudra envoyer à votre chargé.e de TD tous les codes et les maillages, de façon à ce que les codes puissent être exécutés sans besoin d'intervention et qu'ils renvoient les résultats qui auront été décrits dans le rapport. Merci de spécifier si vous avez utilisé Matlab ou Octave.

On s'intéresse dans ce TP à la propagation du son dans un domaine bidimensionnel contenant potentiellement des zones différentes dans lesquelles la vitesse de propagation peut varier. Nous supposons que le domaine est entouré d'un mécanisme d'encastrement permettant d'annuler les vibrations de celui-ci. Ceci se traduit d'un point de vue de la modélisation par des conditions de Dirichlet homogène. Par ailleurs, nous supposons données des conditions initiales représentant une source acoustique. La résolution numérique de ce problème est décomposée en plusieurs étapes :

- Dans un premier temps nous allons considérer un problème stationnaire. Cette première étape nous permettra notamment d'utiliser une formule de quadrature sur le triangle de référence pour prendre en compte des coefficients variables.
- Dans un second temps, nous nous attaquerons à la discrétisation en espace et en temps du problème de propagation d'onde. Nous verrons notamment les difficultés associées à l'élaboration d'un schéma dit explicite, conduisant à une condition de stabilité sur le pas de temps. Les calculs à chaque pas de temps seront accélérés par la technique de condensation de masse.
- Dans un troisième temps, nous verrons un schéma dit implicite pour lequel la stabilité est plus favorable mais pour lequel on ne peut plus utiliser la condensation de masse.

Exercice 1. Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de \mathbb{R}^2 . On s'intéresse au calcul de $u(x, y)$, solution de l'équation stationnaire suivante, avec des conditions aux limites de Dirichlet :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(1) \quad \begin{cases} u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

Les données sont la source acoustique $f \in L^2(\Omega)$ ainsi que le paramètre $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, homogène au carré d'une vitesse de propagation, fonction régulière par morceaux et telle que

$$\exists \sigma_{max}, \sigma_{min} > 0, \quad \sigma_{min} \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_{max}, \quad \text{presque pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

1.1 - Rappeler la formule d'intégration par parties avec la divergence, et vérifier que la formulation variationnelle du problème (1) s'écrit :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(2) \quad \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

1.2 - Montrer que la formulation variationnelle est bien posée.

Discrétisation :

Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω , et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation \mathcal{T}_h . On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de \mathcal{T}_h , $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. Pour définir une approximation interne de $H_0^1(\Omega)$, on procède de la façon suivante : on suppose que les nœuds de la frontière $\partial\Omega$ sont numérotés de $N_0 + 1$ à N (et que les nœuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à N_0). On introduit :

$$V_h^0 = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{N_0}).$$

Par construction, $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$.

1.3 - Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h ?

1.4 - La solution approchée u_h s'écrit sous la forme

$$u_h(x, y) = \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) w_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(3) \quad \mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0,$$

où la $I^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ vaut $u_h(M_I)$ et où on écrira $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$, avec \mathbb{M}^0 la matrice de masse, et \mathbb{K}^0 la matrice de rigidité. Quelles sont les propriétés fondamentales de la matrice \mathbb{A}^0 ?

1.5 - Dans la pratique, plutôt que de résoudre le système linéaire (3), on préfère résoudre

$$(4) \quad \tilde{\mathbb{A}} \tilde{\vec{U}} = \tilde{\vec{L}},$$

obtenu à l'aide de la technique de *pseudo-élimination*. Rappeler les expressions de $\tilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\tilde{\vec{U}} \in \mathbb{R}^N$ et $\tilde{\vec{L}} \in \mathbb{R}^N$ en fonction de \mathbb{A}^0 , \vec{U}^0 et \vec{L}^0 .

Avant d'effectuer la pseudo-élimination, nous allons donc calculer les matrices élémentaires et assembler les matrices $\tilde{\mathbb{A}}$ et $\tilde{\vec{L}}$.

Géométrie et maillages :

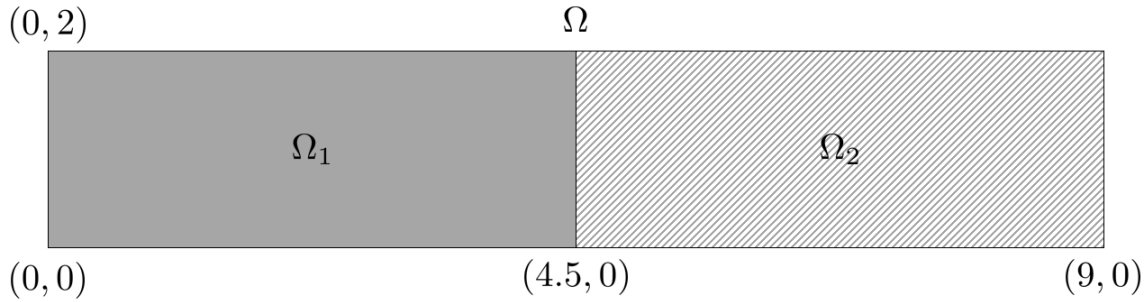


FIGURE 1 – Le domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

On veut résoudre le problème dans un ouvert rectangulaire $\Omega =]0; 9[\times]0; 2[$ composé de deux zones $\Omega_1 =]0; 4.5[\times]0; 2[$ et $\Omega_2 =]4.5; 9[\times]0; 2[$ (voir Figure 1). On appelle $\sigma_1 = \sigma|_{\Omega_1}$ et $\sigma_2 = \sigma|_{\Omega_2}$ les restrictions de σ à chacun des sous-domaines. C'est lors du calcul des matrices élémentaires qu'il faudra distinguer si un triangle est dans le domaine Ω_1 (dans ce cas, on prendra $\sigma = \sigma_1$) ou dans le domaine Ω_2 (dans ce cas, on prendra $\sigma = \sigma_2$).

Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence :

On se place sur un triangle T_ℓ . Pour calculer les matrices élémentaires associées à ce triangle, nous allons utiliser une méthode de calcul, plus générale que les coordonnées barycentriques. Pour calculer les intégrales volumiques sur le triangle T_ℓ (composé des points M_1 , M_2 et M_3), on se ramène tout d'abord au triangle de référence \hat{T} (composé des points $\hat{M}_1 = (0, 0)$, $\hat{M}_2 = (1, 0)$ et $\hat{M}_3 = (0, 1)$).

1.6 - Calculer la transformation $\mathcal{F}_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}) = \mathcal{B}_\ell \hat{M} + S_\ell, \mathcal{B}_\ell \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), S_\ell \in \mathbb{R}^2$$

qui permet de passer du triangle de référence au triangle T_ℓ :

$$\forall i, \quad \mathcal{F}_\ell(\hat{M}_i) = M_i.$$

Les intégrales de masse sur T_ℓ peuvent alors s'écrire

$$\int_{T_\ell} w_I(M) w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{w}_I(\hat{M}) \hat{w}_J(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}$$

et de rigidité

$$\int_{T_\ell} \sigma(M) \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \sigma(\mathcal{F}_\ell(\hat{M})) \left[(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{w}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{w}_J(\hat{M}) \right] |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}.$$

1.7 - Rappeler les expressions de \hat{w}_1 , \hat{w}_2 et \hat{w}_3 . En déduire le calcul exacte de la matrice de masse élémentaire.

1.8 - Quand les coefficients sont variables, il n'est pas toujours possible de calculer ces intégrales exactement. On approche alors ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N_q points : pour G une fonction continue par morceaux de T_ℓ

$$\int_{\hat{T}} G d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N_q} \omega^q G(\hat{S}^q).$$

où \hat{S}^q sont des points de quadrature dans \hat{T} et ω^q les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné, ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 3 points de Gauss Legendre qui est d'ordre 2 et qui est définie sur le triangle de référence \hat{T} par

$$\begin{array}{c} \hat{S}^q \\ \hat{\omega}^q \end{array} \left| \begin{array}{c} (s_0, s_0) \\ \omega_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (s_1, s_0) \\ \omega_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (s_0, s_1) \\ \omega_0 \end{array} \right|$$

avec

$$s_0 = \frac{1}{6}, \quad s_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{6}.$$

A l'aide de ces éléments, modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Il faudra modifier la routine `matK_elem.m`, en prenant comme argument supplémentaire le tableau `Reftri` pour déterminer à quelle zone chaque triangle appartient. En fonction de la zone, on utilisera les fonctions `sigma_1.m` et `sigma_2.m`, que vous pouvez modifier.

1.9 - Valider le calcul pour un triangle quelconque dans le cas $\sigma = 1$ en comparant au calcul de la matrice élémentaire du TP précédent.

Assemblage des matrices et vecteur second membre :

La routine `principal_stationnaire.m` est le programme principal pour calculer la solution de la forme variationnelle discrète de la Question 1.3.

1.10 - Reprendre la partie assemblage du TP précédent, permettant de construire la matrice $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K}$ et le vecteur \vec{L} , avant la *pseudo-élimination*. Comme au TP précédent, pour une donnée $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, le vecteur \vec{L} sera construit à l'aide d'une technique d'interpolation.

1.11 - Ecrire une routine `matlab` dont la syntaxe est

`[tilde_AA, tilde_LL] = elimine(AA, LL, Refneu)`

qui réalise la pseudo-élimination des nœuds `i` correspondant à `Refneu(i)` égal à 1 ou 2. Insérer un appel à cette routine à un endroit approprié dans `principal_stationnaire.m`.

Validation du code :

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec les paramètres

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1,$$

et une solution u égale à $u(x, y) = \sin(\frac{\pi}{9}x) \sin(\frac{\pi}{2}y)$, pour $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

1.12 - Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

1.13 - En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la norme L^2 de l'erreur, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de masse \mathbb{M}^0 . Comment évolue cette erreur en fonction de h ?

1.14 - En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la semi-norme H^1 de l'erreur, $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$, faisant intervenir la matrice de rigidité \mathbb{K}^0 . Comment évolue cette erreur en fonction de h ?

Résolution numérique :

On choisit les valeurs suivantes pour les paramètres et données

$$\sigma_1 = 6, \sigma_2 = \sqrt{3}/2, f(x, y) = 600 \exp \left(- \left(\frac{2x-9}{7.2} \right)^2 - \left(\frac{y-1}{0.8} \right)^2 \right).$$

1.15 - Résoudre le problème discret et représenter la solution approchée u_h . Donner sa valeur maximale. Quel phénomène observe-t-on dans Ω_2 ?

1.16 - On change maintenant seulement σ_2

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{var}} \quad \text{où} \quad \forall (x, y) \in \Omega, \sigma_{\text{var}}(x, y) = \frac{1}{4} (2 + \sin(16\pi x)) (2 + \sin(16\pi y)).$$

Résoudre le problème discret et représenter la solution approchée u_h . Qu'observez-vous ?

Exercice 2. Discrétisation de l'équation des ondes par un schéma saute-mouton

On veut maintenant résoudre l'équation des ondes dont l'inconnue $u(x, y, t)$ dépend ici du temps t . On résout dans ce cas

Trouver $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, t_{\max}[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, t_{\max}[\\ u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1, & \text{dans } \Omega \end{cases},$$

où $u_0 \equiv u_0(x, y)$ et $u_1 \equiv u_1(x, y)$ sont les conditions initiales données.

2.1 - En définissant les formes bilinéaires suivantes

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega), \quad m(v, w) = \int_{\Omega} vw \, d\Omega, \quad k(v, w) = \int_{\Omega} \sigma \nabla v \cdot \nabla w \, d\Omega,$$

montrer que la solution du problème (5) vérifie la formulation variationnelle suivante

$$\frac{d^2}{dt^2} m(u, v) + k(u, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On peut remarquer qu'en définissant les énergies cinétique, potentielle et totale de la façon suivante

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2} m\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad \mathcal{P}(t) = \frac{1}{2} k(u, u), \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{K}(t) + \mathcal{P}(t),$$

il est possible de vérifier que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = 0, \quad \forall t \in]0; t_{\max}[.$$

Cette relation s'interprète comme la conservation de l'énergie totale au cours du temps. Autrement dit, l'énergie portée par les conditions initiales reste inchangée lors de la propagation.

Discrétisation en espace :

Nous allons maintenant procéder à la discrétisation en espace de la forme variationnelle de l'équation des ondes en se basant sur l'espace éléments finis construit dans le cas stationnaire.

2.2 - Quelle est la formulation variationnelle semi-discrète (en espace uniquement) vérifiée par la solution approchée $u_h(\cdot, t) \in V_h^0$ pour tout $t \in]0; t_{max}[$?

2.3 - Exprimer la formulation variationnelle semi-discrète sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires équivalent

$$(6) \quad \mathbb{M}^0 \frac{d^2 \vec{V}}{dt^2}(t) + \mathbb{K}^0 \vec{V}(t) = 0,$$

où, pour tout temps $t \in]0; T[$, la $I^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{V}(t) \in \mathbb{R}^{N_0}$ vaut $u_h(M_I, t)$. Ci-dessus, les matrices \mathbb{M}^0 et \mathbb{K}^0 (les matrices de masse et de rigidité respectivement), sont les représentantes discrètes des formes bilinéaires $m(\cdot, \cdot)$ et $k(\cdot, \cdot)$ sur V_h^0 . Par la suite nous supposons que $u_0 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et $u_1 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Ainsi, en définissant les vecteurs suivants

$$\vec{U}_0 = \left(u_0(M_1) \cdots u_0(M_{N_0}) \right)^\top \in \mathbb{R}^{N_0}, \quad \vec{U}_1 = \left(u_1(M_1) \cdots u_1(M_{N_0}) \right)^\top \in \mathbb{R}^{N_0},$$

les conditions initiales associées au problème semi-discret (6) sont données par

$$(7) \quad \vec{V}(0) = \vec{U}_0, \quad \frac{d\vec{V}}{dt}(0) = \vec{U}_1.$$

Discrétisation en temps :

La discrétisation en espace étant prise en charge par la méthode des éléments finis, il reste à proposer une discrétisation des opérateurs différentiels en temps. Pour cela, nous avons recours à la méthode des différences finies. Nous noterons par la suite $\Delta t > 0$ un pas de discrétisation en temps. Nous rappelons que, en utilisant un développement de Taylor, il est possible de vérifier que, pour tout $\vec{V}(t) \in C^\infty([0; T])^N$,

$$\frac{d^2 \vec{V}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - 2\vec{V}(t) + \vec{V}(t - \Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2).$$

Ainsi, en notant \vec{V}^n l'approximation de $\vec{V}(n\Delta t)$ solution de (6), nous proposons le schéma centré en $n\Delta t$ et d'ordre 2 en temps suivant

$$(8) \quad \mathbb{M}^0 \frac{\vec{V}^{n+1} - 2\vec{V}^n + \vec{V}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{K}^0 \vec{V}^n = 0.$$

Ce schéma est parfois appelé schéma saute-mouton, ou “leapfrog”, dans la littérature. En plus de la discrétisation (8) de l'équation (6), il est nécessaire de spécifier les valeurs de \vec{V}^0 et \vec{V}^1 afin d'initialiser les itérations de l'algorithme. Cette initialisation dépend des conditions initiales données en (7). Pour la condition initiale de l'inconnue nous posons naturellement

$$(9) \quad \vec{V}^0 = \vec{U}_0.$$

L'incorporation de la condition initiale sur la vitesse nécessite plus de travail si on veut préserver une approximation d'ordre 2 en temps. Pour cela commençons par rappeler un schéma d'ordre 2 pour la dérivée première d'une fonction régulière en temps. Soit $\vec{V}(t) \in C^\infty([0; T])^N$,

$$(10) \quad \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

2.4 - En utilisant (10) et le schéma (8) montrer que l'utilisation d'une approximation d'ordre 2 en temps de la condition initiale conduit à l'initialisation suivante du schéma

$$(11) \quad \vec{V}^1 = \left(\mathbb{I} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbb{M}^{0-1} \mathbb{K}^0 \right) \vec{U}_0 + \Delta t \vec{U}_1.$$

(Penser à poser une inconnue auxiliaire \vec{V}^{-1} telle que $\frac{\vec{V}^1 - \vec{V}^{-1}}{2\Delta t} = \vec{U}_1$).

En combinant (8), (9), et (11) nous avons donc le schéma discret en espace et en temps suivant

$$\begin{cases} \mathbb{M}^0 \frac{\vec{V}^{n+1} - 2\vec{V}^n + \vec{V}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{K}^0 \vec{V}^n = 0, \\ \vec{V}^0 = \vec{U}_0, \quad \vec{V}^1 = \left(\mathbb{I} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbb{M}^{0-1} \mathbb{K}^0 \right) \vec{U}_0 + \Delta t \vec{U}_1. \end{cases}$$

Pour la suite de ce TP nous proposons d'admettre la condition de stabilité : le schéma est stable si le pas de temps respecte la condition suivante

$$(12) \quad \Delta t \leq \overline{\Delta t} = \frac{2}{\sqrt{\rho(\mathbb{M}^{0-1} \mathbb{K}^0)}},$$

où $\rho(\mathbb{A})$ est le rayon spectral d'une matrice \mathbb{A} . Le "pas de temps limite" $\overline{\Delta t}$ est communément appelé la constante CFL (pour Courant-Friedrichs-Lewy).

Premier exemple de résolution numérique sur un cas homogène :

Nous procédons maintenant à l'utilisation du schéma numérique complètement discrétisé pour obtenir la solution approchée. Pour ce premier exemple, le coefficient σ est supposé constant, avec une vitesse $c = 2$ et $\sigma = c^2$, et nous poserons $t_{max} = 3$.

2.5 - On veut simuler des ondes qui se propagent dans le domaine $\Omega =]0; 9[\times]0; 2[$. A l'aide du fichier `geomRect.geo` (`Gmsh`), construire plusieurs maillages correspondants à cette géométrie. On fera varier h de 0.02 à 0.2.

2.6 - Pour mettre en oeuvre le schéma saute-mouton (8), il faut résoudre à chaque pas de temps le système linéaire $\mathbb{M}^0 \vec{V}^{n+1} = (2\mathbb{M}^0 - \Delta t^2 \mathbb{K}^0) \vec{V}^n - \mathbb{M}^0 \vec{V}^{n-1}$. Ce processus peut être accéléré au moyen d’une méthode appelée “condensation de masse” qui consiste à approcher la matrice de masse par une matrice diagonale en utilisant une formule de quadrature adaptée. Nous nous concentrons uniquement sur les aspects pratiques, sans aborder les questions d’analyse numérique associées à l’utilisation de cette méthode.

- En notant $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ les coordonnées barycentriques associées à un triangle $T_l \in \mathcal{T}_h$, appliquer la formule de quadrature des trapèzes (exacte sur $P^1(T_l)$)

$$\int_{T_l} G d\Omega \simeq \frac{\text{aire}(T_l)}{3} \left(G(S^1) + G(S^2) + G(S^3) \right),$$

pour approcher les termes du type $\int_{T_l} \lambda_i \lambda_j d\Omega, i, j \in \{1, 3\}$ dans la matrice de masse élémentaire. Quelle forme particulière des matrices de masse élémentaires pouvons-nous attendre avec cette formule de quadrature ?

- Montrer qu’en utilisant cette formule de quadrature nous obtenons, après assemblage, une matrice de masse approchée dite *condensée*, que l’on notera \mathbb{M}^{cond} , diagonale s’exprimant de la façon suivante

$$\mathbb{M}_{IJ} \approx \mathbb{M}_{IJ}^{\text{cond}} = \delta_{IJ} \sum_{T_l \in \text{supp}\{\varphi_I\}} \frac{\text{aire}(T_l)}{3}, \quad \forall I, J = 1, \dots, N.$$

- Implémenter la fonction `assembleMCondK.m` qui, à partir des données d’un maillage, génère les matrices $\tilde{\mathbb{M}}$ et $\tilde{\mathbb{K}}$, où $\tilde{\mathbb{M}}$ est la matrice de masse condensée *et* pseudo-éliminée, et $\tilde{\mathbb{K}}$ est la matrice de rigidité pseudo-éliminée (mais *pas* condensée). On fera attention à sortir ces matrices au format `sparse`.

2.7 - Dans cette question nous cherchons à mieux comprendre, au moins numériquement, l’évolution de la condition CFL en fonction du pas de maillage. Il s’agira dans cette question de compléter le script `principal_CFL.m`.

- A l’aide de la commande `eigs()`, calculer **uniquement** la plus grande valeur propre du problème aux valeurs propres généralisé suivant

$$\text{Trouver } (\vec{V}, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad \tilde{\mathbb{K}} \vec{V} = \lambda \tilde{\mathbb{M}} \vec{V}.$$

- Calculer en utilisant (12) le pas de temps maximum autorisé par la condition CFL pour les différents maillages.
- En déduire la relation entre la condition CFL et le pas d’espace h .

2.8 - Dans cette simulation numérique nous choisissons les conditions initiales suivantes :

$$u_0(x, y) = \exp\left(-50((x-3)^2 + (y-1)^2)\right), \quad u_1(x, y) = 0.$$

- Implémenter la fonction `propage_cond.m` qui, à partir des matrices de masse et de rigidité, les données initiales interpolées, le pas de temps Δt et le nombre d'itérations, retourne l'ensemble des vecteurs solution du schéma (8) ainsi que les fonctionnelles énergies suivantes à chaque pas de temps

$$\begin{cases} \mathcal{K}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}_{n+1} - \vec{V}_n}{\Delta t} \right)^\top \left(\tilde{\mathbb{M}} - \frac{\Delta t^2}{4} \tilde{\mathbb{K}} \right) \left(\frac{\vec{V}_{n+1} - \vec{V}_n}{\Delta t} \right), \\ \mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}_{n+1} + \vec{V}_n}{2} \right)^\top \tilde{\mathbb{K}} \left(\frac{\vec{V}_{n+1} + \vec{V}_n}{2} \right). \end{cases}$$

Ces fonctionnelles sont les équivalents discrets des énergies cinétique et potentielle présentée en continue en question 2.1.

- En utilisant le script `principal_temporel.m`, lancer un calcul pour un pas $h = 0.2$ et $h = 0.05$ que remarquez-vous ? Dans chacun des cas nous prendrons un pas de temps volontairement strictement inférieur à la condition CFL, par exemple $\Delta t = 0.95 \overline{\Delta t}$.
- Pour un pas d'espace donné, tracer les courbes des énergies $\mathcal{K}_h^{n+\frac{1}{2}}$, $\mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}}$ et

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{K}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}}.$$

Que remarquez-vous ? Que ce passe-t-il si $\Delta t > \overline{\Delta t}$?

- Nous cherchons à interpoler la solution discrète en des points d'observation. Pour cela, remarquons que, pour (x^*, y^*) un point d'intérêt, nous avons

$$u_h(x^*, y^*, n\Delta t) = \sum_{I=1}^N V_I^n w_I(x^*, y^*) = \vec{I}(x^*, y^*)^\top \vec{V}^n,$$

où $\vec{I}(x^*, y^*) = (w_1(x^*, y^*) \cdots w_N(x^*, y^*))^\top \in \mathbb{R}^N$ regroupe l'ensemble des coefficients d'interpolation (qui ne sont que l'évaluation des fonctions de base au point d'observation). Pour un ensemble de points d'observation

$$\{(x_\ell^*, y_\ell^*)\}_{\ell=1}^{N^*} \subset \overline{\Omega},$$

nous pouvons construire une matrice de taille $N^* \times N$ regroupant l'ensemble des coefficients d'interpolation pour chaque point. La fonction `interpTriP1.m` calcule

cette matrice et la retourne au format `sparse`. En utilisant cette routine et en appliquant la matrice d'interpolation, donner la solution interpolée aux points $(2, 1)$ et $(4, 1)$ et commenter.

Deuxième exemple de résolution numérique sur un cas non-homogène :

Pour ce deuxième exemple nous cherchons à simuler la propagation des ondes dans un matériau hétérogène permettant de modéliser une lentille.

On reprend le domaine de calcul $\Omega =]0, 9[\times]0, 2[$ décomposé en deux parties $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ avec $\Omega_1 =]0, 4.5[\times]0, 2[$ et $\Omega_2 =]4.5, 9[\times]0, 2[$ comme auparavant. On prend les paramètres suivants

$$\sigma_1 = 4 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \tilde{\sigma}_{\text{var}} \text{ où } \forall (x, y) \in \Omega_2, \tilde{\sigma}_{\text{var}}(x, y) = 1 + (y - 1)^2.$$

Le bord est décomposé en $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ avec $\Gamma_D := (\{0\} \times]0, 2]) \cup (\{9\} \times]0, 2])$ c'est à dire l'union des bords latéraux gauche et droite, et $\Gamma_N := ([0, 9[\times \{0\}) \cup ([0, 9[\times \{2\})$ c'est à dire l'union des bords supérieur et inférieur. On décide cette fois d'imposer des conditions de Dirichlet homogène sur les bords latéraux et Neumann homogène sur les bord inférieur et supérieur

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0 & \text{pour } (x, y) \in \Gamma_D, t \in]0, t_{\max}[\\ n(x, y) \cdot (\nabla u)(x, y, t) &= 0 & \text{pour } (x, y) \in \Gamma_N, t \in]0, t_{\max}[\end{aligned}$$

où $n(x, y)$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$. Le temps maximal est fixé à $t_{\max} = 3$ et les conditions initiales sont

$$u_0(x, y) = \exp(-50 * (x - 4)^2) \quad \text{et} \quad u_1(x, y) = 0.$$

2.9 - On doit s'assurer de différencier les différentes parties du bord afin de pouvoir imposer des conditions aux limites différentes. A l'aide de `Gmsh`, en modifiant le fichier `geomRect.geo` par exemple, construire plusieurs fichiers de maillage contenant des références distinctes à Γ_D et Γ_N .

2.10 - Nous devons maintenant adapter le code que nous avons à notre disposition aux conditions de cette nouvelle simulation.

- Vérifier (et adapter si besoin) la routine `elimine`, pour qu'elle réalise la pseudo-élimination uniquement sur la partie du bord Γ_D . On pourra faire des tests sur le problème stationnaire par exemple.
- En adaptant `principal_temporel.m`, écrire une nouvelle routine `principal_temporel2.m` prenant en considération la nouvelle condition initiale et qui appelle les routines appropriées permettant de réaliser la nouvelle simulation.

2.11 - Calculez la solution approchée et, en l'affichant à différents pas de temps commentez quant aux supports spatiaux des ondes générées dans Ω_1 et Ω_2 .

Exercice 3. Discrétisation de l'équation des ondes par un schéma implicite

Nous avons vu que le schéma saute-mouton était stable sous la condition CFL (12). Nous voudrions nous affranchir de cette condition, et c'est dans ce but que nous étudions le schéma implicite suivant

$$(13) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbb{M}} \frac{\vec{V}^{n+1} - 2\vec{V}^n + \vec{V}^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{1}{4} \tilde{\mathbb{K}} (\vec{V}^{n+1} + 2\vec{V}^n + \vec{V}^{n-1}) &= 0 \\ \vec{V}^0 &= \vec{U}_0, \quad \vec{V}^1 = \left(\mathbb{I} - \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{\mathbb{M}}^{-1} \tilde{\mathbb{K}} \right) \vec{U}_0 + \Delta t \vec{U}_1. \end{aligned}$$

Pour ce nouveau schéma, il faut considérer de nouvelles fonctionnelles énergie. L'énergie potentielle reste la même, par contre l'énergie cinétique est modifiée. Les nouvelles formules donnant les fonctionnelles énergies sont

$$(14) \quad \begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_h^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right)^\top \tilde{\mathbb{M}} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} \right), \\ \mathcal{P}_h^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2} \right)^\top \tilde{\mathbb{K}} \left(\frac{\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n}{2} \right). \end{aligned}$$

Troisième exemple de résolution dans le cas homogène :

Pour cette troisième simulation numérique, nous repartons sur la même configuration que pour la première simulation. Notre but est de comparer, pour cette même configuration, le schéma saute-mouton (8) et le schéma implicite (13). On utilisera les maillages générés à la Question 2.5.

On considère le domaine de calcul $\Omega =]0, 9[\times]0, 2[$ et un coefficient uniforme homogène $\sigma = c^2$ avec $c = 2$, $t_{\max} = 3$, et des conditions initiales $u_0(x, y) = \exp(-50((x-3)^2 + (y-1)^2))$, $u_1(x, y) = 0$. A nouveau on impose des conditions de Dirichlet homogène sur tout le bord $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

3.1 - Implémenter la fonction `propage_implicite.m` qui réalise le même travail que la fonction `propage_cond.m` mais à partir de (13). Cette fonction prend en argument d'entrée les matrices de masse et de rigidité, les données initiales interpolées, le pas de temps Δt et le nombre d'itérations. Elle renvoie en sortie l'ensemble des vecteurs solution

du schéma (8) ainsi que la valeur de fonctionnelles énergies modifiées à chaque pas de temps

Cette fois-ci le calcul de \vec{V}^{n+1} à chaque pas de temps nécessite la résolution d'un système linéaire associé à la matrice $\tilde{\mathbb{M}} + (\Delta t/2)^2 \tilde{\mathbb{K}}$. La condensation ne masse ne peut pas s'appliquer à la matrice de rigidité, si bien qu'on est contraint de considérer ici un système linéaire non-diagonal. Pour traiter cete difficulté, on vous propose d'utiliser la méthode de factorisation de Cholesky, particulièrement efficace pour les matrices symétriques définies positives (ce qui est le cas de la matrice $\tilde{\mathbb{M}} + (\Delta t/2)^2 \tilde{\mathbb{K}}$). En effet, dans ce cas, il est possible de démontrer qu'il existe une matrice \mathbb{U} telle que

$$\tilde{\mathbb{M}} + (\Delta t/2)^2 \tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U}^\top \mathbb{U},$$

avec \mathbb{U} une matrice triangulaire supérieure. Ainsi, résoudre le système linéaire $\tilde{\mathbb{M}} \vec{X} = b$ revient à résoudre en deux temps : une première étape, dite de *descente*, visant à trouver $\vec{Y} \in \mathbb{R}^N$ solution de $\mathbb{U}^\top \vec{Y} = b$, et une seconde étape, dite de *remontée* visant à obtenir la solution en résolvant $\mathbb{U} \vec{X} = \vec{Y}$.

3.2 - Tracer les courbes des énergies $\hat{\mathcal{K}}_h^{n+1/2}$, $\mathcal{P}_h^{n+1/2}$ et $\hat{\mathcal{E}}_h^{n+1/2} := \hat{\mathcal{K}}_h^{n+1/2} + \mathcal{P}_h^{n+1/2}$, pour un pas d'espace donné et des pas de temps inférieur et supérieur à la condition CFL, par exemple $\Delta t = 0.5\overline{\Delta t}$, $\Delta t = \overline{\Delta t}$ et $\Delta t = 1.5\overline{\Delta t}$. Que remarquez-vous ? Que se passe-t-il si $\Delta t > \overline{\Delta t}$?

3.3 - En utilisant la fonction `interpTriP1.m` interpoler la solution aux points (2, 1) et (4, 1), commenter en comparant avec les résultats obtenus dans le cas du schéma saute-mouton.

3.4 - Essayer de comparer pour le même maillage les deux schémas utilisés dans ce TP.