UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
Prírodovedecká fakulta

ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

Fourierova transformácia

Mária Slovinská

Funkcionálna analýza

Obsah

Využitie Fourierovej transformácie:

- vo fyzike - pri spracovávaní signálov, na transformáciu z časovej oblasti do oblasti frekvenčnej
- v matematike pri riešení diferenciálnych rovníc (obyčajných aj diferenciálnych)

Definícia

*Pre komplexnú funkciu $f \in L_1(\mathbb{R}_r)$ definujeme jej **Fourierovu transformáciu** $\mathcal{F}f$ predpisom*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_r} e^{-i2\pi(\mathbf{x},\xi)} f(x)\,\mathrm{d}^r x, ,\ \xi \in \mathbb{R}_r$$

*a **opačnú Fourierovu transformáciu** $\mathcal{F}_{-1}f$ predpisom*

$$(\mathcal{F}_{-1}f)(\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_r} e^{i2\pi(x,\xi)} f(x)\,\mathrm{d}^r x,\ \xi \in \mathbb{R}_r$$

kde pre $x \in \mathbb{R}_r, y \in \mathbb{R}_r$ je $(x, y) = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j$ skalárny súčin v $\mathbb{R}_r$.

Definícia

Využitie Fourierovej transformácie:

- vo fyzike - pri spracovávaní signálov, na transformáciu z časovej oblasti do oblasti frekvenčnej
- v matematike pri riešení diferenciálnych rovníc (obyčajných aj diferenciálnych)

Používajú sa aj **iné varianty Fourierovej transformácie** charakterizované 3 číselnými parametrami $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pre ktoré platí $AB = |k|/2\pi$:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = A^r \int_{\mathbb{R}_r} e^{-ik(x,\xi)} f(x)\, \mathrm{d}^r x,\ \xi \in \mathbb{R}_r$$

$$(\mathcal{F}_{-1}f)(\xi) = B^r \int_{\mathbb{R}_r} e^{ik(x,\xi)} f(x)\, \mathrm{d}^r x,\ \xi \in \mathbb{R}_r$$

Výpočet charakteristickej funkcie a Fourierova transformácia

- charakteristická funkcia náhodnej premennej X:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f_X(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{F}_{-1}f)(t)$$

Príklad

Vypočítajte charakteristickú funkciu rovnomerného rozdelenia $R(a, b)$.

- hustota rovnomerného rozdelenia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$$

$$\varphi(t) = (\mathcal{F}_{-1}f)(t) = \int_a^b e^{ixt} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{ixt} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{ixt}}{it} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$$

Základné vlastnosti Fourierovej transformácie

- Linearita

$$\widehat{f+g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$$
$$\widehat{\alpha f}(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi)$$

- Shift theorem

$$\widehat{f(x-z)}(\xi) = e^{-ik\xi z}\,\hat{f}(\xi)$$

- Modulation theorem

$$\hat{f}(\xi - \eta) = \widehat{e^{ikx\eta} f(x)}(\xi)$$

- Strech (similarity) theorem

$$\widehat{f(\alpha x)}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

Norma a Fourierova transformácia ako zobrazenie

Označme C_B^s množinu spojitých funkcií ohraničených na M, ktoré majú na M spojité a ohraničené derivácie do rádu s vrátane.
Pod označením $C_B(M)$ rozumieme $C_B^0(M)$.

Definícia

Nech $M \subset \mathbb{R}$ je otvorená množina a nech $s \in \mathbb{N}_0$. Na C_B^s je definovaná norma predpisom

$$\|f\|_{C_B^s(M)} := \sum_{\alpha=0}^{s} \left\| \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha} f \right\|_\infty = \sum_{\alpha=0}^{s} \sup_{x \in M} \left| \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha} f \right|$$

Veta

*$\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}_{-1}$ sú **spojité lineárne zobrazenia** z $L_1(\mathbb{R})$ do $C_B(\mathbb{R})$ a pre $f \in L_1(\mathbb{R})$ platí*

1. $\|\hat{f}\|_{C_B(\mathbb{R})} \leq |A| \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}, \quad \|\check{f}\|_{C_B(\mathbb{R})} \leq |B| \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$
2. $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{|\xi| \to \infty} \check{f}(\xi) = 0$
3. *$\hat{f}$ a $\check{f}$ sú rovnomerne spojité na $\mathbb{R}$*

Vzťah ku derivovaniu

Veta

1. *Nech* $f \in C^s(\mathbb{R})$ *a* $\frac{d^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha} f \in L_1(\mathbb{R})$ *pre* $\alpha \leq s$. *Potom pre* $\alpha \leq s$ *platí*

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha} f\right) = (ik\xi)^\alpha \mathcal{F}(f(x))(\xi)$$

2. *Nech* f *a* $x^\alpha f(x)$ *sú z* $L_1(\mathbb{R})$ *pre* $\alpha \leq s$. *Potom* $\hat{f} \in C_B^s(\mathbb{R})$ *a pre* $\alpha \leq s$ *a* $\xi \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\frac{d^\alpha}{d\xi^\alpha}(Ff)(\xi) = \mathcal{F}((-ikx)^\alpha f(x))(\xi)$$

Konvolúcia

Definícia

Nech f a g sú dve (reálne alebo komplexné) funkcie na $\mathbb{R}$. Potom ich ***konvolúciou*** *$h = f * g$ nazývame funkciu definovanú predpisom*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

pre tie $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré uvedený integrál existuje ako Lebesgueov integrál.

- matematická operácia na dvoch funkciách, ktorá vytvára tretiu funkciu $f * g$, ktorá vyjadruje, ako je tvar jednej modifikovaný druhou
- je definovaná ako integrál z dvoch funkcií, pričom jedna je otočená okolo osi y a posunutá
- integrál je počítaný cez všetky hodnoty posunutia

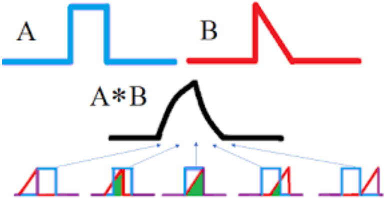
Konvolúcia

Definícia

Nech f a g sú dve (reálne alebo komplexné) funkcie na $\mathbb{R}$. Potom ich ***konvolúciou*** *$h = f * g$ nazývame funkciu definovanú predpisom*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

pre tie $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré uvedený integrál existuje ako Lebesgueov integrál.



[1]

[1] animácia: https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

Definícia

Nech f a g sú dve (reálne alebo komplexné) funkcie na $\mathbb{R}$. Potom ich ***konvolúciou*** *$h = f * g$ nazývame funkciu definovanú predpisom*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

pre tie $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré uvedený integrál existuje ako Lebesgueov integrál.

Postačujúce podmienky pre existenciu konvolúcie:

1. $f \in L_p(\mathbb{R}), g \in L_q(\mathbb{R})$ a q je združený exponent ku p. Potom $(f * g)(x)$ existuje pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}, \; x \in \mathbb{R}$$

2. $f \in L_1(\mathbb{R}), g \in L_p(\mathbb{R})$ pre nejaké $p \in [1, \infty)$. Potom $f * g$ existuje pre skoro všetky $x \in \mathbb{R}$, je v $L_p(\mathbb{R})$ a platí odhad

$$\|(f * g)\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_p}$$

[2]

[2] združenými exponentmi nazývame p a q spĺňajúce $1/p + 1/q = 1$, ku 1 je združený exponent ∞

Ďalšie tvrdenia

Veta (Fourierova transformácia konvolúcie)

Nech $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Potom platí

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot F(g)$$

$$\mathcal{F}_{-1}(f * g) = \mathcal{F}_{-1}(f) \cdot F_{-1}(g)$$

Veta (Fourierova transformácia súčinu)

Nech $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Potom platí

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * F(g)$$

$$\mathcal{F}_{-1}(fg) = \mathcal{F}_{-1}(f) * \mathcal{F}_{-1}(g)$$

Veta (o inverzii)

Nech $f \in L_1(\mathbb{R})$ a tiež $f \in L_1(\mathbb{R})$. Potom platí

$$\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}_{-1}f) = f$$

Využitie pri riešení diferenciálnej rovnice

Nájdite riešenie úlohy

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{x,x}(x,t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

kde f je daná funkcia.

Zdroje

KOPÁČEK,J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky*. Matfyzpress, Praha, 2010.

OSGOOD,B. G.: *Lectures on the Fourier Transform and Its Applications*. American Mathematical Society, 2019.

https://math.ecnu.edu.cn/ qgu/PDF/cht2.pdf

Ďakujem za pozornosť!