

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ, INFORMATYKI
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Kierunek: Matematyka

Specjalność: Matematyczne metody analizy danych biznesowych

Teoria Stevensa pomiaru statystycznego.

Maria Soja

Nr albumu: 210088

Praca licencjacka napisana w Instytucie Matematyki
Politechniki Łódzkiej

Promotor: dr, mgr inż. Piotr Kowalski

ŁÓDŹ, WRZESIEŃ 2019

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Preliminaria	3
2.1	Oznaczenia używane w pracy	3
2.2	Elementy teorii mnogości	3
2.3	Teoria grup algebraicznych	5
3	Teoria Pomiaru Statystycznego Stevensa	8
3.1	Typy skal	10
3.2	Operacje statystyczne	11
3.3	Niezmiennosc statystycznych operacji	13
3.4	Twierdzenia i ich funkcje prawdy	21
3.5	Empiryczne znaczenie stwierdzeń	22
3.6	Odpowiedniosc stwierdzeń dotyczących operacji statystycznych	23
3.7	Fundamentalne systemy pomiarowe	26
4	Podsumowania	28

Rozdział 1

Wstęp

Rozdział 2

Preliminaria

2.1 Oznaczenia używane w pracy

2.2 Elementy teorii mnogości

W naszej pracy rozważane będą zagadnienia wymagające doprecyzowania wielu pojęć z zakresu dziedzin matematyki takich jak statystyka czy algebra.

Zdefiniujmy parę uporządkowaną. Warto powiedzieć, że w wielu pracach definicje tam użyte są matematycznie niepoprawne.

Definicja 2.1 ([3, Sec 3.3]). *Parą uporządkowaną składającą się z poprzednika a oraz następnika b nazwiemy zbiór składający się z elementów poniżej opisanych i oznaczany:*

$$\langle a; b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Definicja 2.2 (Iloczyn kartezjański[3, Sec 3.4]). *Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle x; y \rangle$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$. Zbiór ten oznaczamy przez $X \times Y$; zatem*

$$X \times Y = \{\langle x; y \rangle : x \in X, y \in Y\}.$$

Definicja 2.3 ([2, Sec 6.1 Def. 6.1]). *Dane są dwa zbiory X i Y . Relacją \mathcal{R} (dwuarargumentową) między elementami zbioru X , a elementami zbioru Y nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.*

Chcąc zapisać, że pewien element x jest w relacji \mathcal{R} z pewnym elementem y piszemy

$$x\mathcal{R}y.$$

Najpowszechniej stosowaną relacją jest funkcja.

Definicja 2.4 (Funkcja[3, Sec 4.1]). *Niech dane będą dwa zbiory X i Y . Przez funkcję, której argumenty przebiegają zbiór X , wartości zaś należą do zbioru Y , rozumiemy każdy podzbiór f iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ o tej własności, że dla każdego $x \in X$ istnieje jeden i tylko jeden y taki, że $\langle x; y \rangle \in f$.*

Równoważnie zapisujemy, że $f(x) = y$

Definicja 2.5 (Superpozycja funkcji[3, Sec 4.2 Def. 1.]). *Niech dane będą trzy zbiory X , Y i Z oraz dwie funkcje $f : X \rightarrow Y$, oraz $g : Y \rightarrow Z$. Funkcje te wyznaczają trzecią funkcję złożoną $h : X \rightarrow Z$ (nazywaną superpozycją funkcji f i g) określoną przez warunek*

$$\forall_{x \in X} \quad h(x) = g(f(x)).$$

Definicja 2.6 ([2, Sec 5.2 Def. 5.5]). *Niech $f : X \rightarrow Y$.*

1. *Mówimy, że funkcja f jest różnowartościowa i piszemy $f : X \xrightarrow{1-1} Y$, jeśli różnym argumentom przyporządkowuje ona różne wartości, czyli*

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkcję taką nazywamy też injekcją lub mówimy, że jest 1 – 1. Potocznie mówi się, że funkcja różnowartościowa nie skleja argumentów.

2. *Mówimy, że funkcja f jest na i piszemy $f : X \xrightarrow{na} Y$, jeśli każdy element jej przeciwdziedziny jest wartością funkcji dla pewnego jej argumentu, czyli*

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \quad y = f(x).$$

Funkcję taką nazywamy też surjekcją.

3. *Jeśli funkcja f jest różnowartościowa i na, nazywamy ją wzajemnie jednoznacznie i piszemy $f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$. O takiej funkcji mówimy też, że jest bijekcją.*

Definicja 2.7 ([2, Sec 6.1 Def. 6.2]). *Dany jest zbiór X . Jeśli \mathcal{R} jest relacją między elementami zbioru X a elementami zbioru X (czyli $\mathcal{R} \subseteq X \times X$), to mówimy, że \mathcal{R} jest relacją na zbiorze X (można też mówić o relacji w zbiorze X).*

Definicja 2.8 ([2, Sec 6.2 Def. 6.6]). Niech \mathcal{R} będzie relacją na niepustym zbiorze X . Mówimy, że:

1. \mathcal{R} jest zwrotna $\iff (\forall_{x \in X}) x\mathcal{R}x$.
2. \mathcal{R} jest przeciwwrotna $\iff (\forall_{x \in X}) \neg x\mathcal{R}x$.
3. \mathcal{R} jest przechodnia $\iff (\forall_{x,y,z \in X}) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z)$.
4. \mathcal{R} jest symetryczna $\iff (\forall_{x,y \in X}) (x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x)$.
5. \mathcal{R} jest słabo antysymetryczna $\iff (\forall_{x,y \in X}) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y)$.
6. \mathcal{R} jest silnie antysymetryczna $\iff (\forall_{x,y \in X}) (x\mathcal{R}y \implies \neg y\mathcal{R}x)$.
7. \mathcal{R} jest spójna $\iff (\forall_{x,y \in X}) (x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$.

2.3 Teoria grup algebraicznych

Bazowym pojęciem algebry jest pojęcie działania.

Definicja 2.9 (Działanie[1, Sec 4.1]). Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Powiemy, że \circ jest działaniem w zbiorze X jeśli $\circ : X \times X \rightarrow X$.

Definicja 2.10 ([1, Sec 4.1 Def. 4.3]). Działanie \circ w zbiorze X nazywamy działaniem łącznym, jeśli spełniony jest warunek

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

dla każdych elementów a, b, c ze zbioru X .

Definicja 2.11 ([1, Sec 4.1 Def. 4.4]). Działanie \circ w zbiorze X nazywamy działaniem przemennym, jeśli spełnia ono warunek

$$a \circ b = b \circ a$$

dla każdych elementów a, b ze zbioru X .

Przykładem działania jest dodawanie liczb naturalnych w zbiorze N .

Definicja 2.12 ([1, Sec 4.1 Def. 4.6]). *Element e , należący do zbioru X , nazywamy elementem prawostronnie neutralnym działania \circ w zbiorze X , jeśli*

$$x \circ e = x$$

dla każdego elementu x ze zbioru X .

Definicja 2.13 ([1, Sec 4.1 Def. 4.5]). *Element e , należący do zbioru X , nazywamy elementem lewostronnie neutralnym działania \circ w zbiorze X , jeśli*

$$e \circ x = x$$

dla każdego elementu x ze zbioru X .

Definicja 2.14 ([1, Sec 4.1 Def. 4.8]). *Element e nazywamy elementem neutralnym w zbiorze X , jeśli jest on lewostronnie i prawostronnie neutralny, czyli*

$$e \circ x = x \circ e = x$$

dla każdego elementu x ze zbioru X .

Na przykład elementem neutralnym dodawania jest 0 natomiast elementem neutralnym mnożenia jest 1.

Definicja 2.15 (Struktury algebraicznej [1, Sec 4.1 Def. 4.1]). *Strukturę algebraiczną (systemem algebraicznym, czasem algebrą) nazywamy niepusty zbiór wraz z pewną liczbą działań wewnętrznych i pewną liczbą działań zewnętrznych w tym zbiorze.*

Definicja 2.16 ([1, Sec 4.2 Def. 4.9]). *Strukturę algebraiczną, złożoną z niepustego zbioru P i jednego działania łącznego, nazywamy półgrupą.*

Definicja 2.17 ([1, Sec 4.2]). *Półgrupę, w której istnieje element neutralny, nazywamy półgrupą z jedynką lub monoidem. Półgrupę, w której działanie jest przemienne, nazywamy półgrupą przemienną lub półgrupą abelową.*

Definicja 2.18 ([1, Sec 4.2]). *Element a w półgrupie (P, \circ) z jedynką e nazywamy elementem odwracalnym, jeśli istnieje element a' w zbiorze P taki, że*

$$a' \circ a = a \circ a' = e$$

Element a' nazywamy wtedy elementem odwrotnym do elementu a .

Definicja 2.19 (Grupy [1, Sec 4.3 Def. 4.10]). *Strukturę algebraiczną (\mathcal{G}, \circ) nazywamy grupą, jeśli spełnione są następujące warunki:*

$$\forall_{a \in \mathcal{G}} \forall_{b \in \mathcal{G}} \forall_{c \in \mathcal{G}} ((a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)),$$

$$\exists_{e \in \mathcal{G}} \forall_{a \in \mathcal{G}} (e \circ a = a = a \circ e),$$

$$\forall_{a \in \mathcal{G}} \exists_{\bar{a} \in \mathcal{G}} (\bar{a} \circ a = e = a \circ \bar{a}).$$

Definicja 2.20 ([1, Sec 4.3 Def. 4.12]). *Grupą przemienną (abelową) nazywamy taką grupę, w której działanie jest przemienne.*

Rozdział 3

Teoria Pomiaru Statystycznego Stevensa

W poniższym rozdziale korzystać z artykułu [[?]]

Standardowo w analizie pomiaru, wynik będziemy przedstawiać jako funkcję o wartości liczbowej. Pomiary masy w funtach będą reprezentowane przez funkcję, która może być oznaczona jako " Ib "; ta funkcja jest skorelowana z każdym obiektem x który można zważyć wartością liczbową, $Ib(x)$ - waga x w funtach. Dowolną funkcję tego rodzaju nazywamy *numerical assignment*. Choć w języku polskim nie jest dostępne utarte tłumaczenie tego pojęcia rozumiemy je jako formę przypisania liczby do danego obiektu. Na przykład przy pomiarze wagi możemy użyć różnych jednostek. Jest to formalnie przedstawione przez klasę przypisań liczbowych (funkcja funta, funkcja uncji, funkcja tona, itp.). Mówiąc ogólnie o pomiarze, przyjmujemy jako podstawowe pojęcie klasę przypisań liczbowych. Drugim podstawowym pojęciem jest *permissible transformation* czyli funkcja odwzorowującą wartości jednego numerical assignment danej klasy na wartości innego numerical assignment. Te dwa pojęcia składają się na numerical assignment system. Zdefiniujmy formalnie czym jest numerical assignment system.

Definicja 3.1 (Numerical assignment system (NAS)). *Numerical assignment system to uporządkowany układ $\langle A, M, a, \Phi \rangle$ spełniający poniższe warunki:*

1. *A jest niepustym zbiorem, a jest podzbiorem liczb rzeczywistych, M jest zbiorem funkcji przekształcających A w a , i Φ jest klasą funkcji przekształcających a w siebie.*

2. Dla wszystkich m z M i ϕ z Φ ,

$$\phi \circ m \in M.$$

3. Φ zawiera tożsamościową transformację (identyczność) a w siebie i dla wszystkich ϕ_1 i ϕ_2 z Φ ,

$$\phi_1 \circ \phi_2 \in \Phi.$$

Uwaga 3.2 (O warunku 2). Warunek 2. powyższej definicji jest po prostu wymogiem na to aby każde permissible transformation przenosiło dowolne numerical assignment do innego numerical assignment tego samego systemu.

Uwaga 3.3 (O warunku 3). Warunek 3. nie jest kluczowy, ale może być wymuszany, ponieważ tożsamościowe transformacje zdecydowanie przypisują numerical assignment do numerical assignment. Poza tym musimy pamiętać, że złożenie dwóch transformacji musi zawsze dawać permissible transformation.

Można zauważyć, że pewne rzeczy przyjmowane za pewnik dotyczące pomiarów i permissible transformations nie są zakładane w powyższej definicji. Po pierwsze, nie zakładaliśmy, że permissible transformations stanowią grupę, która wymaga dodatkowych założeń, dla każdego ϕ z Φ , że Φ zawiera odwrotność ϕ , a to z kolei wymagałoby żeby dodatkowo wszystkie ϕ z Φ były odwzorowaniem różnowartościowym a w siebie. Nie zakładaliśmy, że numerical assignment z M odwzorowuje A na a to znaczy, że pomiary nie przyjmują wszystkich możliwych wartości liczbowych. Wreszcie co może wydawać najpoważniejszym pominięciem, nie zakładaliśmy odwrotności warunku 2. w definicji, to znaczy, że każde numerical assignment na ten system może być przeniesione na inny za pomocą permissible transformation. W poniższych przykładach pokażemy dlaczego nie zakładamy mocniejszych założeń.

1. Wagi z różnym maksymalnym obciążeniem. Jeżeli będziemy ważyć przedmiot którego waga jest większa od maksymalnego obciążenia jednej z wag wtedy wyniki naszych pomiarów będą się różnić.
2. Termometry z różnymi maksymalnymi i minimalnymi stopniami. Jeżeli temperatura będzie wyższa lub niższa niż skala jednego termometru wtedy wyniki naszych pomiarów również będą się różnić.

Dotyczy to rodzajowi pomiaru i jego klasie permissible transformation. Jeżeli nasze założenia o początku tych idei jest poprawne, to powyższe założenia ogólnie nie mają miejsca i dlatego wskazane jest zacząć od słabszych założeń, ale lepiej uzasadnionych.

Definicja 3.4. *Numerical assignment system $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ jest regularny wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są poniższe warunki:*

1. *Elementy z M i Φ są różnowartościowe.*
2. *Istnieje $m_0 \in M$, $m_0 : A \rightarrow a$ i które generuje M w tym sensie, że dla każdego $m \in M$ istnieje takie $\phi \in \Phi$, że*

$$\phi \circ m_0 = m.$$

3. *Dla wszystkich skończonych n i elementów $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in a$ i $\phi \in \Phi$, istnieje funkcja $\Psi \in \Phi$, $\Psi : a \rightarrow a$, taka że dla każdego $i = 1, \dots, n$*

$$\Psi(\Phi(\alpha_i)) = \alpha_i.$$

3.1 Typy skal

Pojęcie Stevensa na temat typów skal jest jednym z najważniejszych definicji w jego teorii. Jednakże nie zawsze będą używane o tym samym znaczeniu. Co mogłoby oznaczać nieprecyzyjność w teorii. Dlatego pojęcie na temat typów skal rozszerzamy następująco.

Definicja 3.5. *Niech $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ będzie NAS. Wtedy:*

1. *U jest skalą nominalną wtedy i tylko wtedy gdy Φ jest zbiorem wszystkich różnowartościowych funkcji odwzorowujących a w siebie.*
2. *U jest skalą porządkową wtedy i tylko wtedy gdy Φ jest zbiorem wszystkich ściśle rosnących odwzorowań a w siebie.*
3. *U jest skalą interwałową (nazywaną też przedziałową) wtedy i tylko wtedy gdy a jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych i Φ jest zbiorem wszystkich funkcji ϕ , takich że istnieją β, γ gdzie $\beta > 0$ i*

$$\phi(\alpha) = \beta\alpha + \gamma$$

dla wszystkich α z a .

4. U jest skalą ilorazową (nazywaną też stosunkową) wtedy i tylko wtedy gdy a jest zbiorem liczb dodatnich rzeczywistych i Φ jest zbiorem wszystkich przekształceń takich że istnieje $\beta > 0$ i

$$\phi(\alpha) = \beta\alpha$$

dla wszystkich α z a .

Zauważmy, że skale w powyższej definicji są uporządkowane od najsłabszej do najmocniejszej oraz dla dowolnej skali spełnione są założenia skal słabszych.

Uwaga 3.6. Przykładem zmiennej w skali nominalnej jest płeć, w skali porządkowej jest stopień wysmażenia mięsa, w skali interwałowej rok urodzenia oraz w skali ilorazowej ciężar.

3.2 Operacje statystyczne

Poprzednie definicje dostarczają niezbędnych podstaw do precyzyjnych definicji różnych rodzajów niezmienniczości operacji statystycznych lub obliczeń stosowanych do pomiarów. Sformułujemy jeszcze jedną wstępną koncepcję to znaczy operację statystyczną (bardziej ogólnie, operację matematyczną) pomiarów. Liczba różnych rodzajów działań matematycznych do których stosuje się pojęcie niezmienniczości jest dość duża. Należałoby zatem sformułować bardzo ogólną definicję działań matematycznych która by uwzględniała wszystkie poszczególne przypadki jednakże byłaby zbyt rozbudowana. Skupmy się zatem na specjalnej klasie działań matematycznych i statystycznych, w których wynik jest obliczany ze skończonej liczby pomiarów (liczba ta nie musi być ustalona) w pewien jednakowy sposób. Zawiera to w szczególnych przypadkach dobrze znane operacje jak np. obliczenie średniej, mediany, odchylenia standardowego, a także bardziej elementarne działania matematyczne takie jak na przykład dodawanie i odejmowanie. Nie zawiera natomiast działań stosowanych do nieskończonych sekwencji. Wszystkie standardowe operacje statystyczne mogą być przedstawione jako specjalne przypadki uogólnionej funkcji rzeczywistej. W celu zdefiniowania tego pojęcia powinniśmy wprowadzić następujące pojęcia pomocnicze.

Definicja 3.7 (Domknięcie zbioru skończonymi ciągami). Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Oznaczmy przez $S(A)$ zbiór wszystkich skończonych ciągów o ele-

mentach w A .

$$S(A) = \{(a_n)_{n=1}^N; N \in \mathbb{N}, \forall n \in \{1, \dots, N\} a_n \in A\}.$$

Oznaczmy dalej przez $A_1 = A$, natomiast przez $A_2 = S(A_1) \cup A_1$. Ogólnie niech $A_n = S(A_{n-1}) \cup A_{n-1}, n > 1$. Wtedy domknięciem zbioru A skończonymi ciągami nazywamy

$$[A] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Definicja 3.8 (Rozszerzenie funkcji na skończone ciągi). Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Niech $m : A \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy funkcja $[m] : [A] \rightarrow [\mathbb{R}]$ dana jest formułą

- jeśli $x \in A$ to $[m](x) = m(x) \in \mathbb{R}$
- jeśli $x \notin A$ to jest ciągiem elementów z $[A]$. Oznaczmy $x = (x_1, \dots, x_N)$. Wtedy

$$[m](x) = [m]((x_1, x_2, \dots, x_N)) = ([m](x_1), [m](x_2), \dots, [m](x_N)) \in [\mathbb{R}].$$

Funkcja $[m]$ nazywana jest rozszerzeniem funkcji m na skończone ciągi.

Więc jeżeli x jest dowolnym ciągiem, $[m](x)$ jest po prostu odpowiadającym ciągiem wartości. Używając tego pojęcia możemy zdefiniować uogólnioną funkcję rzeczywistą której dziedziną jest podzbiorem $[\mathbb{R}]$. Większość konkretnych funkcji, które chcemy uwzględnić mają zdecydowanie bardziej ograniczone dziedziny, ale pożądane jest rozważenie wszystkich funkcji tej klasy razem. Funkcja, której dziedziną są wszystkie uporządkowane pary liczb rzeczywistych jest binarne działanie dodawania. Działanie które znajduje różnicę dwóch średnich może być rozumiane jako działanie posiadające dziedzinę składającą się klasy wszystkich uporządkowanych par skończonego ciągu liczb rzeczywistych. Uogólnione działanie na pomiarach jest intuicyjnie wynikiem zastosowania uogólnionej funkcji rzeczywistej do liczb przypisanych przez numerical assignment. Zatem uogólnione operacje na pomiarach są generowane przez odpowiednie uogólnione funkcje rzeczywiste. Formalne definicje tych dwóch pojęć są następujące.

Definicja 3.9. Niech $\mathcal{D} \subset [\mathbb{R}]$. Wtedy funkcję $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathbb{R}]$ nazywamy uogólnioną funkcją rzeczywistą.

Przykład 1. Przykładem takiej funkcji jest wzięcie średniej liczb dowolnego ciągu czyli niech $\mathcal{D} = S(\mathbb{R})$, $Mean : S(\mathbb{R}) \rightarrow [\mathbb{R}] \supset \mathbb{R}$

$$\forall_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S(\mathbb{R})} \quad Mean((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

Przykład 2. Kolejnym przykładem takiej funkcji jest funkcja sortująca liczby

$$\text{Sort}((5, 1, 7, 8, 0)) = (0, 1, 5, 7, 8).$$

Albo funkcja która filtruje liczby negatywne

$$\text{FN}((-1, 2, 7, -3, -4, 5, 6)) = (2, 7, 5, 6)$$

Dobrym przykładem jest też funkcja która dodaje do każdej wartości liczbę 2

$$\text{ADD2}((1, 3, 5, 0)) = (3, 5, 7, 2)$$

Definicja 3.10. Niech $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathbb{R}]$, $\mathcal{D} \subset [\mathbb{R}]$ Wtedy

$$D = \{\langle m; x \rangle ; m : A \rightarrow \mathbb{R}, x \in [A], [m](x) \in \mathcal{D}\}.$$

Funkcję $F : D \rightarrow [\mathbb{R}]$ opisaną formułą

$$F : \langle m; x \rangle \mapsto \mathcal{F}([m](x))$$

nazywamy uogólnionym działaniem na pomiarach.

Należy zauważyć, że w definicji uogólnionej funkcji rzeczywistej, nie określono dokładnej przeciwdziedziny dla takich funkcji. Funkcje te zatem mogą być bardzo dowolne. W dalszej części będziemy się zajmować głównie funkcjami, których przeciwdziedziny są liczby rzeczywiste.

3.3 Niezmiennność statystycznych operacji

Definiujemy trzy rodzaje niezmienności dla uogólnionych operacji na pomiarach względem NAS.

Definicja 3.11. Niech $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ będzie NAS $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathbb{R}]$, $\mathcal{D} \subset [\mathbb{R}]$ i F jest uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadających \mathcal{F} . Wtedy:

1. F jest bezwzględnie niezmiennicza względem U

$$\forall_{m_1, m_2 \in M} \forall_{x \in [A]} \quad F(m_1; x) = F(m_2; x).$$

2. F jest jednośnikowo niezmiennicza względem U

$$\forall_{m_1, m_2 \in M} \forall_{x \in [A]} \quad [m_1](x) = F(m_1; x) \iff [m_2](x) = F(m_2; x).$$

3. F jest porównawczo niezmiennicza względem U

$$\forall_{m_1, m_2 \in M} \forall_{x, y \in [A]} \quad F(m_1; x) = F(m_1; y) \iff F(m_2; x) = F(m_2; y).$$

Jeśli ograniczymy uwagę do regularnego NAS, każdy typ niezmienniczości może być zdefiniowany równoważnie pod względem klasy numerical assignment lub klasy permissible transformation. Ponieważ rozważamy ogólniejszą klasę NAS, alternatywa wymagająca niezmienniczości według wszystkich numerical assignment wydaje się być bardziej fundamentalna. Zauważmy, że zgodnie z tymi definicjami, odchylenie standardowe nie jest ani bezwzględnie niezmiennicze, ani niezmiennicze w stosunku do skal interwałowych, pomimo faktu, że Stevens wymienia je jako odpowiednią statystkę dla takich skal.

Przykładem funkcji bezwzględnie niezmienniczych, o ile NAS regularny, jest funkcja która sprawdza liczbę różnych elementów

Przykład 3. *Bezwzględnie niezmiennicza względem U są funkcje*

$$F = \text{Count}(m; x)$$

Przykład 4. *Oдноśnikowo niezmiennicza w stosunku do skal interwałowych są np. funkcje*

$$F = \text{Mean}(m; x)$$

Niech U będzie skalą interwałową oraz NAS regularny. Niech $m_1, m_2 \in M$ i niech $x \in [A]$. Z regularności U istnieje $m_0 \in M$, że

$$m_1 = \phi_1 \circ m_0, \quad m_2 = \phi_2 \circ m_0$$

Ponad, to gdyż U jest interwałowa to istnieją takie $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$, że

$$\phi_1(\alpha) = \beta_1 \alpha + \gamma_1, \quad \phi_2(\alpha) = \beta_2 \alpha + \gamma_2$$

Niech $[m_1](x) = F(m; x)$.

$$[\phi_1 \circ m_0](x) = \text{Mean}(\phi_1 \circ m_0; x)$$

Z postaci ϕ_1 i własności średniej

$$\begin{aligned}\beta_1 [m_0] (x) + \gamma_1 &= \beta_1 \text{Mean}(m_0; x) + \gamma_1, \\ \beta_1 [m_0] (x) &= \beta_1 \text{Mean}(m_0; x), \\ [m_0] (x) &= \text{Mean}(m_0; x), \\ \beta_2 [m_0] (x) &= \text{Mean}(\beta_2 m_0; x), \\ \beta_2 [m_0] (x) + \gamma_2 &= \text{Mean}(\beta_2 m_0 + \gamma_2; x), \\ [m_2] (x) &= F(m_2; x).\end{aligned}$$

Zatem

$$[m_1] (x) = F(m_1; x) \implies [m_2] (x) = F(m_2; x).$$

Wobec symetrii oznaczeń mamy

$$[m_2] (x) = F(m_2; x) \implies [m_1] (x) = F(m_1; x).$$

Skąd

$$[m_1] (x) = F(m_1; x) \iff [m_2] (x) = F(m_2; x)$$

Z dowolności m_1, m_2 oraz x , F jest odnośnikowo niezmiennicza względem U

Przykład 5. Porównawczo niezmiennicza w stosunku do U są funkcje maximum oraz minimum

Referencyjnie niezmiennicze w stosunku do skal interwałowych też są np. funkcje

$$\text{Mean}(m; \mathbf{x}) + kSD(m; \mathbf{x}),$$

Twierdzenie 3.12 (Warunki równoważne niezmienniczości bezwzględnej). Niech $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ będzie regularnym NAS, niech $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathbb{R}]$ i niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą \mathcal{F} . Wtedy:

NWSR.

1. F jest niezmiennicza bezwzględnie w stosunku do U

2.

$$\forall_{m \in M} \forall_{\phi \in \Phi} \forall_{x \in [A]} \quad \mathcal{F}([\phi \circ m] (x)) = \mathcal{F}([m] (x)).$$

3.

$$\forall_{\phi \in \Phi} \forall_{\alpha \in [a]} \quad \mathcal{F}(\phi(\alpha)) = \mathcal{F}(\alpha).$$

Dowód. Udowodnimy $(1) \implies (2)$ Niech F będzie bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do U

$$\forall_{m_1, m_2 \in M} \forall_{x \in [A]} \quad F(m_1; x) = F(m_2; x) \quad (3.1)$$

Niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $x \in [A]$. Wtedy

$$\mathcal{F}([\phi \circ m](x)) = F(\phi \circ m; x)$$

Oczywiście $\phi \circ m \in M$. Zatem z (3.1)

$$F(\phi \circ m; x) = F(m; x) = \mathcal{F}([m](x)).$$

Udowodnimy $(2) \implies (1)$ Niech $m_1, m_2 \in M$, niech $x \in [A]$. Z regularności U , istnieje $m_0 \in M$ takie, że

$$m_1 = \phi_1 \circ m_0, \quad m_2 = \phi_2 \circ m_0.$$

Wtedy wyznaczają $\alpha = m_0(x), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Ponadto z regularności U istnieje $\Psi : a \rightarrow a$, że

$$\Psi \circ \phi_2(\alpha) = \alpha$$

Niech $m := \phi_2 \circ m_0$ oraz $\phi := \phi_1 \circ \Psi$, $x := x$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0(x)) &= \mathcal{F}(m_2(x)) \\ \mathcal{F}(\phi_1 \circ (\Psi \circ \phi_2) \circ m_0(x)) &= \mathcal{F}(\phi_1 \circ m_0(x)) = \mathcal{F}(m_1(x)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(m_2(x)) = \mathcal{F}(m_1(x))$$

$$F(m_2; x) = F(m_1; x)$$

Z dowolności m_1, m_2 raz $x \in [A]$ udowodniliśmy punkt (1).

Udowodnimy $(3) \implies (2)$ Załóżmy, że

$$\forall_{\phi \in \Phi} \forall_{\alpha \in [a]} \quad \mathcal{F}(\phi(\alpha)) = \mathcal{F}(\alpha). \quad (3.2)$$

Niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $x \in [A]$, $\alpha := m(x)$. Z (3.2)

$$\mathcal{F}(\phi(m(x))) = \mathcal{F}(m(x)).$$

Z dowolności wyboru m, ϕ oraz x udowodniliśmy punkt (2). □

Twierdzenie 3.13 (Warunki równoważne niezmienniczości odnośnikowej). *Niech $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ będzie regularnym NAS, niech $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathbb{R}]$ i niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą \mathcal{F} . Wtedy NWSR*

1. F jest odnośnikowo niezmiennicza w stosunku do U

2.

$$\forall_{m \in M} \forall_{\phi \in \Phi}, \forall_{x \in [A]} (\phi(m(x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m](x))) \iff m(x) = \mathcal{F}([m](x))$$

3.

$$\forall_{\phi \in \Phi} \forall_{\alpha \in [a]} \phi(\alpha) = \mathcal{F}(\phi(\alpha)) \iff \alpha = \mathcal{F}(\alpha).$$

Dowód. Udowodnimy (1) \implies (2) Niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $x \in [A]$ Stosujemy przekształcenia równoważne Stosując definicje niezmienniczości odnośnikowej (definicja 3.16 punkt 2.) dla $m_1 := \phi \circ m, m_2 := m, x := x$ mamy

$$\phi(m(x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m](x)) \iff [\phi \circ m](x) = F(\phi \circ m; x)$$

Korzystając z definicji odnośnikowej niezmienniczości

$$\iff [m](x) = F(m; x) \iff m(x) = \mathcal{F}([m](x))$$

Udowodnimy (2) \implies (1) Niech $m_1, m_2 \in M, x \in [A]$. Z regularności NAS istnieje m_0, ϕ_1, ϕ_2 takie, że

$$m_1 = \phi_1 \circ m_0 \quad m_2 = \phi_2 \circ m_0$$

Niech $\alpha = m_0(x)$ wtedy ponownie z regularności NAS istnieje Ψ takie, że dla każdego $\alpha_i \in \alpha$

$$\Psi(\phi_2(\alpha_i)) = \alpha_i$$

Stosując warunek 2. z twierdzenia dla $m := \phi_2 \circ m_0, \phi := \phi_1 \circ \Psi, x := x$

$$\begin{aligned} [m](x) = F(m_1; x) &\iff [\phi_1 \circ m_0](x) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ m_0](x)) \\ &\iff [\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0](x) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0](x)) \end{aligned}$$

Korzystając ponownie z punktu 2.

$$\iff [\Psi_2 \circ m_0](x) = \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0](x)) \iff [m_2](x) = F(m_2; x).$$

Z dowolności m_1, m_2, x, F jest odnośnikowo niezmiennicza.

Udowodnimy (3) \implies (2) Załóżmy, że

$$\forall \phi \in \Phi \forall \alpha \in [a] \quad \phi(\alpha) = \mathcal{F}(\phi(\alpha)) \iff \alpha = \mathcal{F}(\alpha). \quad (3.3)$$

Niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $x \in [A]$, $\alpha := m(x)$. Z (3.3)

$$(\phi(m(x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m](x)) \iff m(x) = \mathcal{F}([m](x)).$$

Z dowolności wyboru m, ϕ oraz x udowodniliśmy punkt (2). \square

Twierdzenie 3.14 (Warunki równoważne niezmienniczości porównawczej). *Niech $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ będzie regularnym NAS, niech $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathbb{R}]$ i niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą \mathcal{F} . Wtedy NWSR*

1. *F jest porównawczo niezmiennicza w stosunku do U .*

2.

$$\forall m \in M \forall \phi \in \Phi \forall x, y \in [A] \quad \mathcal{F}([\phi \circ m](x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m](y)) \iff \mathcal{F}([m](x)) = \mathcal{F}([m](y)).$$

3.

$$\forall \phi \in \Phi \forall \alpha, \beta \in [a] \quad \mathcal{F}(\phi(\alpha)) = \mathcal{F}(\phi(\beta)) \iff \mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\beta).$$

Dowód. Udowodnimy (1) \implies (2) Niech F będzie porównawczo niezmiennicza oraz niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $x, y \in [A]$ wtedy dla $m_1 := \phi \circ m, m_2 := m, x := x, y := y$ mamy $F(\phi \circ m; x) = F(\phi \circ m; y) \iff F(m; x) = F(m; y)$ Następujące stwierdzenia są równoważne

$$\mathcal{F}([\phi \circ m](x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m](y))$$

Zauważmy, że

$$F(\phi \circ m; x) = \mathcal{F}([\phi \circ m](x)), \quad F(\phi \circ m; y) = \mathcal{F}(\phi \circ [m](y)).$$

Zatem równoważne zdanie jest równe

$$F(\phi \circ m; x) = F(\phi \circ m; y)$$

Dzięki warunkowi porównawczej niezmienniczości to z kolei jest równoważne $F(m; x) = F(m; y)$. Zauważmy, że

$$F(m; x) = \mathcal{F}([m](x)) \quad \text{oraz} \quad F(m; y) = \mathcal{F}([m](y))$$

Zatem ostatecznie jest równoważne

$$\mathcal{F}([m](x)) = \mathcal{F}([m](y))$$

Z dowolności $x, y \in [A]$, $m_1, m_2 \in M$ udowodniliśmy punkt (2)

Udowodnimy (2) \implies (1) Niech $m_1, m_2 \in M, x, y \in [A]$. Z regularności NAS istnieją m_0, ϕ_1, ϕ_2 takie, że

$$m_1 = \phi_1 \circ m_0 \quad m_2 = \phi_2 \circ m_0$$

Niech $\alpha = m_0(x)$ wtedy ponownie z regularności NAS istnieje Ψ takie, że dla każdego $\alpha_i \in \alpha$

$$\Psi(\phi_2(\alpha_i)) = \alpha_i$$

Dla $m := \phi_2 \circ m_0$, $\phi := \phi_1 \circ \Psi$, $x := x, y := y$ mamy $\mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0](x)) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0](y)) \iff \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0](x)) = \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0](y))$

$$\begin{aligned} F(m_1; x) = F(m_1; y) &\iff \mathcal{F}([\phi_1 \circ m_0](x)) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ m_0](y)) \\ &\iff \mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0](x)) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0](y)) \\ &\iff^2. \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0](x)) = \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0](y)) \\ &\iff F(m_2; x) = F(m_2; y) \end{aligned}$$

Z dowolności m_1, m_2 i x, y F jest porównawczo niezmiennicza.

Udowodnimy (3) \implies (2) Załóżmy, że

$$\forall \phi \in \Phi \forall \alpha, \beta \in [a] \quad \mathcal{F}(\phi(\alpha)) = \mathcal{F}(\phi(\beta)) \iff \mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\beta). \quad (3.4)$$

Niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $x, y \in [A]$, $\alpha := m(x), \beta := m(y)$. Z (3.4)

$$\mathcal{F}([\phi \circ m](x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m](y)) \iff m(x) = \mathcal{F}([\phi \circ m](y)).$$

Z dowolności wyboru m, ϕ oraz x, y udowodniliśmy punkt (2). □

Twierdzenie 3.15. Niech $U = \langle A, M, a, \phi \rangle$ będzie regularnym NAS $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathbb{R}]$, oraz niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą \mathcal{F} . Wtedy:

1. F jest bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do U

$$\forall \phi \in \Phi \forall \alpha \in [a] \quad \mathcal{F}(\phi(\alpha)) = \mathcal{F}(\alpha).$$

2. Jeżeli dla każdego $\alpha \in [a]$ takiego, że α jest w \mathcal{D} , $\mathcal{F}(\alpha)$ jest w a , wtedy F jest odnośnikowo niezmiennicza w stosunku do U wtedy i tylko wtedy gdy dla wszystkich $\phi \in \Phi$ i $\alpha \in [a]$ takie, że α i $\phi(\alpha)$ są w \mathcal{D} ,

$$\mathcal{F}(\phi(\alpha)) = \phi(\mathcal{F}(\alpha)).$$

3. F jest porównawczo niezmiennicza w stosunku do U

$$\forall \phi \in \Phi \exists \psi_\phi \forall \alpha \in [a] \quad \mathcal{F}(\phi(\alpha)) = \psi_\phi(\mathcal{F}(\alpha)).$$

Dowód.

□

Powyższe twierdzenie pokazuje, że warunki bezwzględnej, referencyjnej oraz porównawczej niezmienniczości operacji F są równoważne (przynajmniej w szerokim zakresie warunków określonych w twierdzeniu) różnym rodzajom praw transformacji, które odnoszą się do wartości od $\mathcal{F}(\phi(\alpha))$ do $\mathcal{F}(\alpha)$. W pierwszym przypadku wartości te muszą być równe. W przypadku referencyjnej niezmienniczości wymagane jest, aby wartości \mathcal{F} przekształcić zgodnie z tym samym prawem, co podstawowa transformacja pomiarów. W przypadku porównawczej niezmienniczości wymagane jest, aby każda transformacja podstawowych pomiarów mogła określić odpowiednią transformację wartości operacji. Jedną bezpośrednią konsekwencją tego, wspomnianą wcześniej, jest to, że (zakładając, że ograniczenia przedstawione w hipotezie twierdzenia są spełnione), bezwzględna i referencyjna niezmienniczość są szczególnymi przypadkami niezmienniczości porównawczej.

Pewne problemy matematyczne powstają podczas prób określenia wewnętrznych warunków koniecznych i wystarczających, aby uogólniona operacja na pomiarach, F , była niezmienna w każdym z naszych trzech sensów w odniesieniu do NAS z czterech podstawowych typów skali. Z naukowego punktu widzenia najciekawsze z tych wyników dotyczą warunków, które muszą być spełnione, aby F była niezmienna w stosunku do skal porządkowych lub słabszych. Załóżmy, że dziedzina F to zbiór par $m; \mathbf{x}$, w którym \mathbf{x} jest skończonym ciągiem jednostek. Następnie, jeśli F jest porównawczo niezmiennicza w stosunku do skali porządkowej lub słabszej, ale nie jest bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do tej skali,

$$F(m; x_1, \dots, x_n) = F(m; y_1, \dots, y_m)$$

można otrzymać w przypadku

$$m(x_i) = m(y_j) \text{ dla } i = 1, \dots, m \text{ i } j = 1, \dots, m.$$

Oznacza to, że nie można zdefiniować rozsądnej miary rozpraszania dla tych skal, ponieważ (i) taka miara nie powinna być bezwzględnie niezmiennicza (gdyby tak było, przypisałaby równe rozproszenia do dowolnych dwóch zbiorów tej samej liczby elementów) i (ii) powinno być możliwe, gdy dwóm zbiorom $\{x_1, \dots, x_n\}$ i $\{y_1, \dots, y_m\}$ można przypisać równe rozproszenia, nawet jeśli żaden obiekt z pierwszego zbioru nie ma miary równej obiektowi w drugim (tj. $m(x_i) \neq m(y_j)$ dla wszystkich i, j).

3.4 Twierdzenia i ich funkcje prawdy

Zastosowanie jednego z kryteriów z powyższych pięciu definicji niezmienniczości do operacji statystycznej może dać inny wynik niż wynik innego kryterium. Potrzebna jest dalsza specyfikacja, w jakich okolicznościach stosuje się każde ze specjalnych kryteriów. Proponujemy następujące kryterium: operacja statystyczna nie powinna być traktowana jako właściwa lub nieodpowiednia, tylko w odniesieniu do rodzajów stwierdzeń, które są na jej temat. Bardziej szczegółowo, kryterium polega na tym, że operacja statystyczna jest odpowiednia zarówno w odniesieniu do stwierdzenia (bardziej ogólnie, klasy stwierdzeń reprezentowanych przez funkcję zdaniową), jak i do NAS. W przypadku prawdziwej wartości stwierdzenia (lub jakiegokolwiek stwierdzenia klasy) nie jest zmieniany, gdy mowa jest o innym numerical assignment tego samego systemu. Nasze kryterium odnosi się zatem, przede wszystkim do stwierdzeń lub klas stwierdzeń, a ponadto do operacji statystycznych, których mogą dotyczyć. Jednym z ważnych zastosowań jest formułowanie stwierdzeń dotyczących mierzalnych właściwości w populacjach i proponujemy kryterium stosowności dla tego rodzaju zastosowania.

Teraz przedstawiamy sposób na uszczegółowienie powyższych intuicyjnych pomysłów. Przede wszystkim musimy dać bardziej precyzyjny sens koncepcji „stwierdzenia o pomiarach” lub „stwierdzenia o statystycznej operacji pomiarów”. Opis składniowy tego typu stwierdzeń (na tyle ogólny, by uwzględnić większość interesujących naukowo przypadków) wydaje się bezowocny, gdyż stwierdzenia te są po prostu zbyt zróżnicowane. Dla naszego obecnego celu wystarczy jednak nie rozważać samych stwierdzeń, ale ich warunków prawdy, które mogą być reprezentowane przez odpowiednie funkcje prawdy. Jako przykład rozważmy poniższy wzór, zrównując miarę jednostki x ze

średnią miary jednostek w skończonym ciągu $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$:

$$m(x) = \text{Mean}([m](x)). \quad (3.5)$$

Warunki prawdy tego wzoru są reprezentowane przez funkcję $F(m; x, \mathbf{x})$, która przyjmuje wartość „prawda” dla określonego numerical assignment m , obiekt x i ciąg \mathbf{x} , na wypadek, gdyby te trzy spełniały wzór, tj. tylko w przypadku, gdy $m(x)$ jest równe $\text{Mean}([m](x))$. Jeśli arbitralnie reprezentujemy wartość „prawda” przez „1”, a wartość „fałsz” przez „0”, to funkcja prawdy $F(m; x, \mathbf{x})$ może być precyzyjnie zdefiniowana w następujący sposób. Dziedzina F to zbiór uporządkowanych trójek $m; x, \mathbf{x}$ takich, że m jest numerical assignment z pewną dziedziną A , x jest elementem z A , a \mathbf{x} jest skończonym ciągiem elementów z A i dla wszystkich $m; x, \mathbf{x}$ z dziedziny F ,

$$F(m; x, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m(x) = \text{Mean}([m](x)), \\ 0 & \text{wpp} \end{cases} \quad (3.6)$$

Powyższe sugeruje, że przynajmniej dla ograniczonej klasy wzorów, takich jak (3.5), wzory te mogą być wykonane tak, aby odpowiadały funkcjom prawdy w prosty i jednolity sposób (funkcja prawdy jest definiowana w kategoriach wzoru jak w (3.6)). Co więcej, te funkcje prawdy są postrzegane jako szczególne przypadki uogólnionych operacji na pomiarach.

Definicja 3.16. *Uogólniona funkcja prawdy pomiaru jest uogólnioną operacją na pomiarach, których wartości wynoszą tylko 0 i 1.*

3.5 Empiryczne znaczenie stwierdzeń

Mając powiązane funkcje prawdy z wzorami w sposób opisany powyżej, możliwe staje się zastosowanie precyzyjnych pojęć niezmienniczości zdefiniowanych w poprzedniej sekcji do funkcji prawdy (przynajmniej do tych, które są uogólnionymi operacjami na pomiarach), a pośrednio do wzorów, których są funkcjami prawdy. Idea kryjąca się za definicją empirycznego znaczenia dla stwierdzeń (dokładniej wzorów) polega na tym, że ich prawda nie może być zmieniona przez zmianę permissible numerical assignment. Jasne jest, że chodzi o wymóg, aby funkcja prawdy odpowiadająca wzorowi była bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do danego systemu pomiarowego. Dlatego możemy zdefiniować:

Definicja 3.17. *Wzór jest empirycznie znaczący w stosunku do numerical assignment system wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcje prawdy są bezwzględnie niezmiennicze w stosunku do tego systemu.*

Oczywiście definicja ta jest nieprecyzyjna z powodu nieprecyzyjności w warunkach wzoru i wzoru funkcji prawdy, który celowo nie został precyzyjnie zdefiniowany. W obronie sformułowania powyższej definicji w ten sposób można powiedzieć, że jej zastosowania są dość jasne w tych przypadkach, w których stosuje się ją do wzorów takich jak (3.5), dla których precyzyjnie określona funkcja prawdy jest definiowana w sposób (3.6). Oznacza to, że jeśli wzór jest wystarczająco jasny, aby możliwe było precyzyjne zdefiniowanie odpowiedniej funkcji prawdy, wówczas zastosowanie definicji staje się jednoznaczne.

3.6 Odpowiedniość stwierdzeń dotyczących operacji statystycznych

Główną cechą naszej analizy jest to, że nie można mówić o statystyce (reprezentowanej przez uogólnioną operację na pomiarach), że jest odpowiednia lub nieodpowiednia. Operacje te powinny być raczej uważane za odpowiednie lub nieodpowiednie w stosunku do wzoru (i NAS).

Definicja 3.18. *Uogólniona operacja na pomiarach jest odpowiednia w stosunku do wzoru i NAS wtedy i tylko wtedy gdy wzór jest empirycznie znaczący w stosunku do NAS.*

Należy zauważyć, że to kryterium adekwatności dla operacji statystycznej względem wzoru nie wymaga wyrażnie, aby wzór był konstruowany z warunkami operacji. W rzeczywistości to, czy operacja jest odpowiednia w stosunku do wzoru i NAS zależy tylko od relacji między wzorem, a NAS. Z tego wynika, że jeśli jakakolwiek operacja statystyczna jest odpowiednia w stosunku do wzoru i NAS, to każda inna operacja jest również odpowiednia w stosunku do tej samej wzoru i NAS. To pokazuje, że po prostu przeszliśmy przez trudny problem próby określenia warunków, które musiałyby być spełnione przez wzór w odniesieniu do operacji statystycznej. W ważnych zastosowaniach tego kryterium będziemy zajmować się tylko wzorami, które odnoszą się do

danej operacji (można powiedzieć, że wzór (3.5) dotyczy średniej operacji).

Teraz pokazujemy każdy z trzech specjalnych rodzajów niezmienniczości jako specjalne przypadki niezmienniczości względem wzoru lub klasy wzorów. Poszczególne wzory, o których mowa, są tym, co nazywamy bezwzględnym, referencyjnym i wzorami porównawczymi. Są one definiowane w sposób określony: najpierw określamy, jakie muszą być funkcje prawdy tych wzorów, a następnie definiujemy wzór, który będzie tego rodzaju, na wypadek, gdyby miał jedną z nich jako swoją funkcję prawdy. Należy założyć, co może być bardzo wątpliwe, a mianowicie, że wszystkie te funkcje prawdy są funkcjami prawdy jakiegoś wzoru.

Definicja 3.19. *Niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach z dziedziną \mathcal{D} . Wtedy:*

1. *Dla wszystkich liczb rzeczywistych α , $ABS_{F,\alpha}$ jest funkcją z dziedziną \mathcal{D} taką, że dla wszystkich $m; \mathbf{x} \in \mathcal{D}$,*

$$ABS_{F,\alpha}(m; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } F(m; \mathbf{x}) = \alpha, \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

2. *REF_F jest funkcją z dziedziną \mathbf{D}' składającą się ze wszystkich uporządkowanych trójek $m; x, \mathbf{x}$, gdzie $m; \mathbf{x}$ jest w \mathcal{D} i x jest w dziedzinie m , taka że*

$$REF_F(m; x, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m(x) = F(m; \mathbf{x}), \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

3. *$COMP_F$ jest funkcją z dziedziną \mathcal{D}'' składającą się ze wszystkich uporządkowanych trójek $m; \mathbf{x}, \mathbf{y}$, gdzie $m; \mathbf{x}$ i $m; \mathbf{y}$ są w \mathcal{D} taka że*

$$COMP_F(m; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } F(m; \mathbf{x}) = F(m; \mathbf{y}), \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

4. *Dowolny wzór jest wzorem bezwzględnym, odnośnikowym lub porównawczym F , ponieważ ma pewną funkcję $ABS_{F,\alpha}$ lub funkcję REF_F lub funkcję $COMP_F$ odpowiednio jako funkcję prawdy.*

Jest to oczywiste, pod warunkiem, że istnieją symbole dla wszystkich liczb rzeczywistych (ogólniej, każda z powyższych funkcji prawdy jest funkcją prawdy jakiegoś wzoru), że:

Twierdzenie 3.20. *Niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach taka że dla wszystkich rzeczywistych α , $ABS_{F,\alpha}$ i REF_F $COMP_F$ są także uogólnionymi operacjami na pomiarach, oraz niech U będzie numerical assignment systemem. Wtedy:*

1. *F jest bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do U wtedy i tylko wtedy gdy, jest odpowiednia w stosunku do wszystkich bezwzględnych wzorów F i U .*
2. *F jest odnośnikowo niezmiennicza w stosunku do U wtedy i tylko wtedy gdy, jest odpowiednia w stosunku do wszystkich referencyjnych wzorów F i U .*
3. *F jest porównawczo niezmiennicza w stosunku do U wtedy i tylko wtedy gdy, jest odpowiednia w stosunku do wszystkich porównawczych wzorów F i U .*

Oczywiste jest, że różnorodność różnych wzorów obejmujących operację statystyczną, którą możemy być zainteresowani, jest dość duża. Wyodrębniając trzy rodzaje niezmienniczości omówione powyżej, które są obecnie postrzegane jako warunki poprawności operacji względem tych specjalnych klas wzorów, skoncentrowaliśmy się na wąskiej klasie możliwych wymagań niezmienniczości. Sugeruje to poszerzenie zakresu dochodzenia, aby w miarę możliwości określić, jakie są ogólne warunki, które musi spełnić operacja statystyczna, tak aby była ona odpowiednia w odniesieniu do dowolnego arbitralnego wzoru i dowolnego typu skali głównej. W związku z tym możemy sobie wyobrazić, czy następujący wzór obejmujący operację średniej jest empirycznie znaczący w stosunku do niektórych NAS:

$$Mean(m; \mathbf{x}) + Mean(m; \mathbf{y}) > Mean(m; \mathbf{z}).$$

Lub, bardziej ogólnie, możemy chcieć określić warunki empirycznej istotności i odpowiedniości dla wzorów obejmujących więcej niż jedną operację statystyczną, tak jak w przypadku współczynnika zmienności:

$$\frac{Mean(m; \mathbf{x})}{SD(m; \mathbf{x})} > \frac{Mean(m; \mathbf{y})}{SD(m; \mathbf{y})}$$

Oczywiste jest, że istnieje duża różnorodność wymagań niezmienniczości, które mogą powstać w celu zapewnienia odpowiedniości operacji statystycznych w stosunku do różnych rodzajów stwierdzeń, a trzy dotychczas omówione rodzaje wyraźnie ich nie wyczerpują.

3.7 Fundamentalne systemy pomiarowe

Do tej pory klasy M i Φ w NAS $\langle A, M, a, \Phi \rangle$ zostały potraktowane jako niezanalizowane. Jest jeden rodzaj pomiaru, w którym M i Φ mogą być wyraźnie scharakteryzowane. Są to te, w których miary liczbowe są związane z jasno zdefiniowanymi operacjami obserwacyjnymi i relacjami zgodnie z precyzyjnymi regułami, które pokazują, które cechy numerical assignment są arbitralne i odzwierciedlające wewnętrzne aspekty danych. Klasy te nazywamy podstawowymi systemami pomiarowymi (fundamental measurement systems - w skrócie FMS). W następnej części pokażemy, że jeśli pomiary mogą być analizowane w ten sposób, wymóg empirycznego znaczenia wzorów w stosunku do tych systemów jest równoważny do efektu, który wzór określa wewnętrzną właściwość lub relacja mierzonych obiektów.

Pojęcie fundamentalnego systemu pomiarowego, który reprezentujemy formalnie, zależy od następujących.

1. Zbiór A empirycznych obiektów, które są mierzone pod pewnym względem (ten sam zestaw, który jest pierwszym elementem odpowiednich NAS, $\langle A, M, a, \Phi \rangle$).
2. Jedna lub więcej operacji obserwacyjnych i relacji, R_1, R_2, \dots zdefiniowane nad zbiorem A (Z teoretycznego punktu widzenia operacje są specjalnym rodzajem relacji; stąd nie ma strat w ogólności w reprezentowaniu wszystkich podstawowych operacji i relacji empirycznych jako relacji teoretyczno-ustalonych).
3. Klasa a liczb rzeczywistych, które są możliwymi wartościami miar obiektów w A (tak samo jak trzeci element odpowiedniego NAS).
4. Dla każdej empirycznej operacji lub relacji R_i , odpowiadająca jej numeryczna operacja lub relacja R_i (o takiej samej liczbie argumentów jak R_i) jest zdefiniowana nad a .
5. Klasa $M : A \rightarrow a$, które mają właściwość odwzorowania każdego R_i na odpowiadający mu R_i tj. zbiór wszystkich funkcji m z $A \rightarrow a$ taki, że dla każdego R_i , jeśli R_i jest relacją n -miejsc nad A , to dla wszystkich $x_1, \dots, x_n \in A$,

$R_i(x_1, \dots, x_n)$ trzyma wtedy i tylko wtedy, gdy $R_i(m(x_1), \dots, m(x_n))$ trzyma.

6. Klasa $\Phi : a \rightarrow a$, która ma własności odwzorowywania każdego $R_i \rightarrow R_i$ tj. zbiór wszystkich funkcji $\phi : a \rightarrow a$, że dla każdego R_i jeżeli R_i jest relacją n -miejsc, wtedy dla wszystkich $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in a$

$R_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ trzyma wtedy i tylko wtedy, gdy $R_i(\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_n))$ trzyma.

Technicznie rzecz biorąc, system $G = \langle A, R_1, R_2, \dots \rangle$, w którym A jest zbiorem, a R_1, R_2, \dots są relacjami nad A , nazywany jest relational system, a system $\mathcal{G} = \langle a, \mathcal{R}_\infty, \mathcal{R}_\epsilon, \dots \rangle$ jest nazywany numerical relational system, ponieważ jest to relational system, którego dziedzina, a , jest klasą liczb rzeczywistych. Funkcja $m : A \rightarrow a$ w taki sposób, aby przenosić każde R_i do odpowiedniego R_i (w sposób 5 powyżej) nazywana jest homomorficznym osadzeniem G w \mathcal{G} i dowolna funkcja $\phi : a \rightarrow a$ w taki sposób, aby przenosić każde R_i w siebie nazywamy homomorficznym osadzeniem \mathcal{G} w siebie. Z tą terminologią możemy zdefiniować:

Definicja 3.21. *Fundamentalny system pomiarów jest to uporządkowana czwórka $\langle G, M, \mathcal{G}, \Phi \rangle$ taka, że:*

1. G jest systemem relacyjnym i \mathcal{G} jest numerical relational system.
2. M jest klasą homomorficznego osadzenia G w \mathcal{G} .
3. Φ jest klasą homomorficznego osadzenia \mathcal{G} w siebie.

Oczywiście klasy M i Φ są definiowalne w warunkach G i \mathcal{G} . Celem ich wyraźnego przedstawienia jest ułatwienie porównania z NAS, które odpowiadają FMS.

Rozdział 4

Podsumowania

Bibliografia

- [1] T. Poreda J. Jędrzejewski. *Algebra liniowa z elementami geometrii analotycznej*. Politechnika Łódzka, 2011.
- [2] Jan Kraszewski. *Wstęp do matematyki*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2007.
- [3] Kazimierz Kuratowski. *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, volume 9. Państwowe Wydawn. Naukowe, 2004.