POLITECHNIKA ŁÓDZKA

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ, INFORMATYKI
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Kierunek: Matematyka

Specjalność: Matematyczne metody analizy danych biznesowych

Teoria Stevensa pomiaru statystycznego.

Maria Soja
Nr albumu: 210088

Praca licencjacka napisana w Instytucie Matematyki
Politechniki Łódzkiej

Promotor: dr, mgr inż. Piotr Kowalski

ŁÓDŹ, WRZESIEŃ 2019

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Tematem pracy jest teoria Stevensa pomiaru statystycznego. Teoria ta wiąże się nieodłącznie z pojęciem skali w zagadnieniach analizy danych. Pomimo tego, że to zagadnienie pojawia się w wielu książkach z zakresu analizy danych np. w [5], to zaskakującym jest, że nigdzie nie jest ono matematycznie poprawnie wyjaśnione. Ponadto różne pobliskie narzędzia analizy danych są nieporównywalnie lepiej matematycznie opisane. W bibliografiach znajduje się w tych miejscach odniesienie do teorii Stevensa sformułowanej w pracy napisanej przez Adamsa, Fagota, Robinsona [1], która okazuje się być próbą wyjaśnienia nieprecyzyjności z wcześniejszych prac Stevensa. Publikacja pracy miała miejsce w roku 1965, co sugeruje, że odpowiedziała na większość z nękających społeczność pytań. Sama praca okazuje się zawierać znacznie więcej niż definicje skal pomiarowych. Autorzy starają się w niej sformułować bardzo ogólną teorie o formułowaniu wszelkich zdań z zakresu statystyki. W niniejszej pracy podjęta została próba omówienia choć części tej bogato przedstawionej tam teorii.

Praca uporządkowana jest w następujący sposób. W rozdziale drugim znajdują się preliminaria, w których umieszczono między innymi elementy algebraicznej teorii grup oraz teorii mnogości. W rozdziale trzecim omawiane są kolejne aspekty teorii Stevensa pomiaru statystycznego. Część ta rozpoczyna się od wprowadzenia numerical assignment systems (NAS), których zadaniem jest modelowanie rzeczywistych pomiarów wykonywanych w statystyce. W dalszej części wprowadzone są typy skal jako warunki nakładane na poszczególne NAS. W tym miejscu dokonujemy porównania ich założeń z teorią grup algebraicznych. Dalsza część pracy stanowi omówienie teorii niezmienniczości w pomiarach statystycznych. W pracy zaprezentowano kilka twierdzeń o warunkach równoważnych rożnych typów niezmienniczości. Pomimo tego, iż praca ta nie wyczerpuje i nie wyjaśnia w pełni teorii przedstawionej w pracy Adamsa, Fagota, Robinsona [1], wnosi istotną wartość poprzez zaprezentowanie własnych przykładów oraz dowodów twierdzeń zaprezentowanych w pracy, a które wyraźnie rzutują na rozumienie pojęć tej teorii. Ponadto pokazuje, iż tematyka przedstawiona ponad 50 lat temu, dalej jest nietrywialną i nie jest wprowadzana w pełni przez autorów książek z analizy danych z uwagi na jej ogólność i stopień skomplikowania. W rozdziale czwartym podsumujemy matematyczne badania tej teorii i omówimy wypracowane wnioski.

Rozdział 2

Preliminaria

2.1 Elementy teorii mnogości

W naszej pracy rozważane będą zagadnienia wymagające doprecyzowania wielu pojęć z zakresu dziedzin matematyki, takich jak teoria mnogości czy algebra.

Zdefiniujmy parę uporządkowaną. Warto powiedzieć, że w wielu pracach definicje tam użyte są matematycznie niepoprawne.

Definicja 2.1 ([4, Sec 3.3]). *Parą uporządkowaną składającą się z poprzednika a oraz następnika b nazwiemy zbiór składający się z elementów poniżej opisanych i oznaczany:*

$$\langle a; b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Definicja 2.2 (Iloczyn kartezjański[4, Sec 3.4]). *Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle x; y\rangle$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$. Zbiór ten oznaczamy przez $X \times Y$; zatem*

$$X \times Y = \{\langle x; y\rangle : x \in X, y \in Y\}.$$

Definicja 2.3 ([3, Sec 6.1 Def. 6.1]). *Dane są dwa zbiory X i Y. Relacją $\mathcal{R}$ (dwuargumentową) między elementami zbioru X, a elementami zbioru Y nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.*

Chcąc zapisać, że pewien element x jest w relacji $\mathcal{R}$ z pewnym elementem y piszemy

$$x\mathcal{R}y.$$

Najpowszechniej stosowaną relacją jest funkcja.

Definicja 2.4 (Funkcja[4, Sec 4.1]). *Niech dane bedą dwa niepuste zbiory X i Y. Przez funkcję, której argumenty przebiegają zbiór X, wartości zaś należą do zbioru Y, rozumiemy każdy podzbiór f iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ o tej własności, że dla każdego $x \in X$ istnieje jeden i tylko jeden y taki, że $\langle x; y \rangle \in f$.*

Równoważnie zapisujemy, że $f(x) = y$.

Definicja 2.5 (Superpozycja funkcji[4, Sec 4.2 Def. 1.]). *Niech dane będą trzy zbiory X, Y i Z oraz dwie funkcje $f : X \to Y$, oraz $g : Y \to Z$. Funkcje te wyznaczają trzecia funkcję złożoną $h : X \to Z$ (nazywaną superpozycją funkcji f i g) określoną przez warunek*

$$\forall_{x \in X} \quad h(x) = g(f(x)).$$

Definicja 2.6 ([3, Sec 5.2 Def. 5.5]). *Niech $f : X \to Y$.*

1. *Mówimy, że funkcja f jest różnowartościowa i piszemy $f : X \xrightarrow{1-1} Y$, jeśli różnym argumentom przyporządkowuje ona różne wartości, czyli*

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

   Funkcję taką nazywamy też injekcją lub mówimy, że jest $1-1$. Potocznie mówi się, że funkcja różnowartościowa nie skleja argumentów.

2. *Mówimy, że funkcja f jest na i piszemy $f : X \xrightarrow{na} Y$, jeśli każdy element jej przeciwdziedziny jest wartością funkcji dla pewnego jej argumentu, czyli*

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \quad y = f(x).$$

   Funkcję taką nazywamy też surjekcją.

3. *Jeśli funkcja f jest różnowartościowa i na, nazywamy ją wzajemnie jednoznaczną i piszemy $f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$. O takiej funkcji mówimy też, że jest bijekcją.*

2.2 Teoria grup algebraicznych

Bazowym pojęciem algebry jest pojęcie działania.

Definicja 2.7 (Działanie[2, Sec 4.1]). *Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Powiemy, że $\circ$ jest działaniem w zbiorze X jeśli $\circ : X \times X \to X$.*

Definicja 2.8 ([2, Sec 4.1 Def. 4.3]). *Działanie $\circ$ w zbiorze X nazywamy działaniem łącznym, jeśli spełniony jest warunek*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

dla każdych elementów a, b, c ze zbioru X.

Definicja 2.9 ([2, Sec 4.1 Def. 4.4]). *Działanie $\circ$ w zbiorze X nazywamy działaniem przemiennym, jeśli spełnia ono warunek*

$$a \circ b = b \circ a$$

dla każdych elementów a, b ze zbioru X.

Przykładem działania jest dodawanie liczb naturalnych w zbiorze N.

Definicja 2.10 ([2, Sec 4.1 Def. 4.8]). *Element e nazywamy elementem neutralnym w zbiorze X, jeśli*

$$e \circ x = x \circ e = x$$

dla każdego elementu x ze zbioru X.

Definicja 2.11 ([2, Sec 4.2]). *W teorii tej występują następujące struktury algebraiczne.*

- *Strukturę algebraiczną, złożoną z niepustego zbioru X i jednego działania łącznego, nazywamy półgrupą.*

- *Półgrupę, w której istnieje element neutralny, nazywamy półgrupą z jedynką lub monoidem. Półgrupę, w której działanie jest przemienne, nazywamy półgrupę przemienną lub półgrupę abelową.*

- *Półgrupę z jedynką, gdy dla dow. $a \in X$ istnieje element odwrotny a' tzn. taki, że*

  $$a' \circ a = a \circ a' = e$$

  nazywamy grupą.

Rozdział 3

Teoria Pomiaru Statystycznego Stevensa

W poniższym rozdziale będziemy korzystać z artykułu [1].

Standardowo w analizie pomiaru, wynik będziemy przedstawiać jako funkcję o wartości liczbowej. Pomiary masy w funtach będą reprezentowane przez funkcję, która może być oznaczona jako "Ib"; ta funkcja jest skorelowana z każdym obiektem x,r, który można zważyć wartością liczbową, $Ib(x)$ - waga x w funtach. Dowolną funkcję tego rodzaju nazywamy numerical assignment. Choć w języku polskim nie jest dostępne utarte tłumaczenie tego pojęcia, rozumiemy je jako formę przypisania liczby do danego obiektu. Na przykład przy pomiarze wagi możemy użyć rożnych jednostek. Jest to formalnie przedstawione przez klasę przypisań liczbowych (funkcja funta, funkcja uncji, funkcja tony, itp.). Mówiąc ogólnie o pomiarze, przyjmiemy jako podstawowe pojęcie klasę przypisań liczbowych. Drugim podstawowym pojęciem jest permissible transformation, czyli funkcja odwzorowującą wartości jednego numerical assignment danej klasy na wartości innego numerical assignment. Te dwa pojęcia składają się na numerical assignment system. Zdefiniujmy formalnie czym jest numerical assignment system w ujęciu pracy [1].

Definicja 3.1 (Numerical assignment system (NAS)[1, Def. 1])**.** *Numerical assignment system to uporządkowana czwórka $\langle A, M, a, \Phi \rangle$ spełniająca poniższe warunki:*

1. *A jest niepustym zbiorem, a jest niepustym podzbiorem liczb rzeczywistych, M jest zbiorem funkcji przekształcających A w a, i Φ jest klasą funkcji przekształcających a w siebie.*

2. Dla wszystkich m z M i ϕ z Φ,

$$\phi \circ m \in M.$$

3. Φ zawiera tożsamościową transformację (identyczność) oraz zachodzi

$$\forall_{\phi_1,\phi_2 \in \Phi} \quad \phi_1 \circ \phi_2 \in \Phi.$$

Uwaga 3.2 (O warunku 2)**.** *Warunek 2. powyższej definicji jest po prostu wymogiem na to, aby każde permissible transormation przenosiło dowolne numerical assignment do innego numerical assignment tego samego systemu.*

Uwaga 3.3 (O warunku 3)**.** *Warunek 3. nie jest kluczowy, ale może być wymuszany, ponieważ tożsamościowa transformacja zdecydowanie przypisuje numerical assignment do numerical assignment. Poza tym, musimy pamiętać, że złożenie dwóch transformacji musi zawsze dawać permissible transformation.*

Można zauważyć, że pewne rzeczy przyjmowane za pewnik dotyczące numerical assignment i permissible transfomations nie są zakładane w powyższej definicji. Po pierwsze, w teorii tej nie zakładamy, że permissible transfomations stanowią grupę, w rozumowaniu algebry przypomnianej w definicji 2.13 wymaga ona dodatkowych założeń, np. że dla każdego ϕ z Φ, że Φ zawiera odwrotność ϕ, a to z kolei wymagałoby, żeby dodatkowo wszystkie ϕ z Φ były odwzorowaniem różnowartościowym a w siebie. Autorzy pracy [1] nie zakładali, że numerical assignment z M odwzorowuje A na a. To znaczy, że pomiary nie przyjmują wszystkich możliwych wartości liczbowych. Wreszcie, co może wydawać najpoważniejszym pominięciem, nie zakładamy odwrotności warunku 2. w definicji, to znaczy, że każde numerical assignment z danego NAS może być przeniesione na inny za pomocą pewnej permissible transformation. W poniższych przykładach zilustrujemy dlaczego nie są uzasadnione mocniejsze założenia.

1. **Wagi z różnym maksymalnym obciążeniem**. Jeżeli będziemy ważyć przedmiot, którego waga jest większa od maksymalnego obciążenia jednej z wag, wtedy wyniki naszych pomiarów będą się różnić.

2. **Termometry z różnymi maksymalnymi i minimalnymi stopniami**. Jeżeli temperatura będzie wyższa lub niższa niż skala jednego termometru, wtedy wyniki naszych pomiarów również będą się różnić.

W teorii tej założone są zatem warunki dużo słabsze od przypomnianych grup algebraicznych. Tak słabe założenia mają uzasadnienie w zadaniach statystycznych. Stanowi to jednak duży problem w opracowaniu matematycznych następstw. Z uwagi na takie problemy rozważany jest często NAS regularny. Jego założenia są wypośrodkowane pomiędzy zwykłym NASem, a tym co zakładamy o grupach algebraicznych.

Definicja 3.4 ([1, Def. 2]). *Numerical assignment system $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są poniższe warunki:*

1. *Elementy z M i Φ są różnowartościowe.*

2. *Istnieje $m_0 \in M$, $m_0 : A \to a$ i które generuje M w tym sensie, że dla każdego $m \in M$ istnieje takie $\phi \in \Phi$, że*

$$\phi \circ m_0 = m.$$

3. *Dla wszystkich skończonych n i elementów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in a$ i $\phi \in \Phi$, istnieje taka funkcja $\Psi \in \Phi$, $\Psi : a \to a$, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$*

$$\Psi(\Phi(\alpha_i)) = \alpha_i.$$

   Warunek ten nazywa się skończoną odwracalnością.

3.1 Typy skal

Definicje Stevensa typów skal są jednym z najważniejszych pojęć w jego teorii. Skala w teorii tej służy uporządkowaniu, określeniu różnych systemów NAS.

Definicja 3.5 ([1, Def. 3]). *Niech $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ będzie NAS. Wtedy powyższe U jest:*

1. *Skalą nominalną, gddy Φ jest zbiorem wszystkich różnowartościowych funkcji odwzorowujących a w siebie.*

2. *Skalą porządkową, gddy Φ jest zbiorem wszystkich ściśle rosnących odwzorowań a w siebie.*

3. *Skalą interwałową (nazywaną też przedziałową), gddy a jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych i* Φ *jest zbiorem wszystkich funkcji* ϕ*, takich, że istnieją* β, γ *gdzie* $\beta > 0$ *i*

$$\phi(\alpha) = \beta\alpha + \gamma$$

dla wszystkich α *z a.*

4. *Skalą ilorazową (nazywaną też stosunkową), gddy a jest zbiorem liczb dodatnich rzeczywistych i* Φ *jest zbiorem wszystkich przekształceń takich, że istnieje* $\beta > 0$ *i*

$$\phi(\alpha) = \beta\alpha$$

dla wszystkich α *z a.*

Zauważmy, że skale w powyższej definicji są uporządkowane od najsłabszej do najmocniejszej, czyli dla dowolnej skali spełnione są założenia skal słabszych.

Przykład 1. *Przykładem zmiennej w skali nominalnej jest płeć, gdzie mamy dwie wartości. Kobieta i mężczyzna, którym przykładowo można przypisać odpowiednio 1 i 0. W skali porządkowej zmienną może być stopień wysmażenia mięsa, czyli przykładowo słabo, średnio i mocno. Zmienne te możemy uporządkować i przypisać odpowiednio wartości 1, 2 i 3. W skali interwałowej różne pomiary temperatury możemy uporządkować oraz obliczyć jaka jest różnica pomiędzy pomiarami i przypisać im odpowiednie wartości liczbowe.*

3.2 Operacje statystyczne

Sformułujemy jeszcze jedną wstępną koncepcje tj. operację statystyczną lub bardziej ogólnie, operację matematyczną na pomiarach. W obliczeniach statystycznych wykonuje się bardzo wiele różnych operacji. Należałoby zatem sformułować bardzo ogólną definicje działań matematycznych, która by uwzględniała wszystkie poszczególne przypadki. Skupmy się zatem na specjalnej klasie działań matematycznych i statystycznych, w których wynik jest obliczany ze skończonej liczby pomiarów (liczba ta nie musi być ustalona z góry) w pewien jednakowy sposób. Zawiera to w szczególnych przypadkach dobrze znane operacje, jak np. obliczenie średniej, mediany, odchylenia standardowego, a także bardziej elementarne działania matematyczne, takie jak na przykład dodawanie i odejmowanie. Nie zawiera natomiast działań stosowanych do nieskończonych sekwencji. Wydaje się, że standardowe operacje statystyczne mogą być przedstawione jako specjalne przypadki uogólnionej funkcji rzeczywistej. Posłużmy się następującym pojęciem pomocniczym. Poniższe dwie definicje zostały opracowane na podstawie [1, Sec. 4]

Definicja 3.6 (Domknięcie zbioru skończonymi ciągami)**.** *Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Oznaczmy przez $S(A)$ zbiór wszystkich skończonych ciągów o elementach w A, tzn.*

$$S(A) = \left\{(a_n)_{n=1}^{N}; N \in \mathbb{N}, \forall_{n\in\{1,\ldots,N\}} a_n \in A\right\}.$$

Oznaczmy dalej przez $A_1 = A$, natomiast przez $A_2 = S(A_1) \cup A_1$. Ogólnie niech $A_n = S(A_{n-1}) \cup A_{n-1}, n > 1$. Wtedy domknięciem zbioru A skończonymi ciągami nazywamy

$$[A] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Domknięcie w pewien szczególny sposób przenosi się również na funkcje.

Definicja 3.7 (Rozszerzenie funkcji na skończone ciągi)**.** *Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Niech $m : A \to \mathbb{R}$. Wtedy funkcja $[m] : [A] \to [\mathbb{R}]$ dana jest formułą, że*

- *jeśli $x \in A$ to $[m](x) = m(x) \in \mathbb{R}$*
- *jeśli $x \notin A$ to jest ciągiem elementów z $[A]$. Oznaczmy $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Wtedy*

$$[m](x) = [m]((x_1, x_2, \ldots, x_N)) = ([m](x_1), [m](x_2), \ldots, [m](x_N)) \in [\mathbb{R}].$$

Funkcja $[m]$ nazywana jest rozszerzeniem funkcji m na skończone ciągi.

Więc jeżeli x jest dowolnym ciągiem, $[m](x)$ jest po prostu odpowiadającym ciągiem wartości. Używając tego pojęcia możemy zdefiniować uogólnioną funkcję rzeczywistą, której dziedzina jest podzbiorem $[\mathbb{R}]$. Większość konkretnych funkcji statystycznych, które chcemy uwzględnić mają zdecydowanie bardziej ograniczone dziedziny, ale pożądane jest rozważenie wszystkich funkcji tej klasy razem. Przykładem takich funkcji uogólnionych jest funkcja, której dziedziną są wszystkie uporządkowane pary liczb rzeczywistych, wykonująca działanie dodawania par lub działanie, które znajduje różnicę dwóch średnich. Może być rozumiane jako działanie posiadające dziedzinę składającą się z klasy wszystkich uporządkowanych par skończonego ciągu liczb rzeczywistych. Uogólnione działanie na pomiarach jest intuicyjnie wynikiem zastosowania uogólnionej funkcji rzeczywistej do liczb przypisanych przez numerical assignment. Zatem uogólnione operacje na pomiarach są generowane przez odpowiednie uogólnione funkcje rzeczywiste. Formalne definicje tych dwóch pojęć są następujące.

Definicja 3.8 ([1, Def. 4.1])**.** *Niech $\mathcal{D} \subset [\mathbb{R}]$. Wtedy funkcję $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to [\mathbb{R}]$ nazywamy uogólnioną funkcją rzeczywistą.*

Przykład 2. *Przykładem takiej funkcji jest wzięcie średniej liczb dowolnego ciągu czyli niech $\mathcal{D} = S(\mathbb{R})$, $Mean : S(\mathbb{R}) \to [\mathbb{R}] \supset \mathbb{R}$*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S(\mathbb{R})} \quad Mean((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}.$$

Przykład 3. *Kolejnym przykładem takiej funkcji jest funkcja sortująca liczby.*

$$Sort((5,1,7,8,0)) = (0,1,5,7,8).$$

Albo funkcja która filtruje liczby ujemne.

$$FN((-1,2,7,-3,-4,5,6)) = (2,7,5,6)$$

Dobrym przykładem jest też funkcja, która dodaje do każdej wartości liczbę 2.

$$ADD2((1,3,5,0)) = (3,5,7,2)$$

Definicja 3.9 ([1, Def. 4.2])**.** *Niech $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to [\mathbb{R}]$, $\mathcal{D} \subset [\mathbb{R}]$ Wtedy*

$$D = \left\{\langle m; x\rangle \,; m : A \to \mathbb{R}, x \in [A]\,, [m]\,(x) \in \mathcal{D}\right\}.$$

Funkcję $F : D \to [\mathbb{R}]$ opisaną formułą

$$F : \langle m; x\rangle \longmapsto \mathcal{F}([m]\,(x)),$$

nazywamy uogólnionym działaniem na pomiarach.

Należy zauważyć, że w definicji uogólnionej funkcji rzeczywistej, nie określono dokładnej przeciwdziedziny dla takich funkcji. Funkcje te zatem mogą być bardzo dowolne. W dalszej części będziemy się zajmować głównie funkcjami, których przeciwdziedziny są liczby rzeczywiste. Funkcje te służą do formułowania statystycznych wniosków. Teoria dalej skupia się wokół wprowadzenia koncepcji niezmienniczości tych funkcji. Tj. niezależność zdań statystycznych od przyjętej techniki pomiaru.

3.3 Niezmienniczość statystycznych operacji

Definiujemy trzy rodzaje niezmienniczości dla uogólnionych operacji na pomiarach względem NAS.

Definicja 3.10 ([1, Def. 5])**.** *Niech $U = \langle A, M, a, \Phi\rangle$ będzie NAS $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to [\mathbb{R}]$, $\mathcal{D} \subset [\mathbb{R}]$ i F jest uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadających $\mathcal{F}$. Wtedy:*

1. *F jest bezwzględnie niezmiennicza względem U, gddy*

$$\forall_{m_1,m_2\in M}\forall_{\overline{x}\in[A]} \quad [m_1]\,(\overline{x}), [m_2]\,(\overline{x}) \in \mathcal{D} \implies F(m_1;\overline{x}) = F(m_2;\overline{x}).$$

2. *F jest odnośnikowo niezmiennicza względem U, gddy dla dow. m_1, $m_2 \in M$ $x \in A$ i $\overline{x} \in [A]$ o ile $[m_1]\,(\overline{x})$, $[m_2]\,(\overline{x}) \in \mathcal{D}$ to mamy:*

$$m_1(x) = F(m_1;\overline{x}) \iff m_2(x) = F(m_2;\overline{x}).$$

3. *F jest porównawczo niezmiennicza względem U, gddy dla dow. m_1, $m_2 \in M$ i $\overline{x}$, $\overline{y} \in [A]$ o ile $[m_1]\,(\overline{x}), [m_2]\,(\overline{x}), [m_1]\,(\overline{y}), [m_2]\,(\overline{y}) \in \mathcal{D}$ to mamy:*

$$F(m_1;\overline{x}) = F(m_1;\overline{y}) \iff F(m_2;\overline{x}) = F(m_2;\overline{y}).$$

Kolejne twierdzenia ograniczone są do regularnych NASów.

Przykład 4. *Bezwzględnie niezmiennicza względem U jest np. funkcja:*

$$F(m;\overline{x}) = Count(m;\overline{x}).$$

Funkcja ta bierze dowolny ciąg i liczy ile jest w nim różnych elementów.

Przykład 5. *Odnośnikowo niezmiennicze w stosunku do skal interwałowych są np. funkcje*

$$F(m;\overline{x}) = Mean(m;\overline{x}),$$

które liczą średnią dowolnego ciągu.

Istotnie. Niech U będzie skalą interwałową oraz NAS regularny. Niech $m_1, m_2 \in M$ i niech $x \in A$, $\overline{x} \in [A]$. Z regularności U istnieje $m_0 \in M$, że

$$m_1 = \phi_1 \circ m_0, \quad m_2 = \phi_2 \circ m_0.$$

Ponadto, gdyż U jest interwałowa to istnieją takie β_1, γ_1, β_2, γ_2, że

$$\phi_1(\alpha) = \beta_1\alpha + \gamma_1, \quad \phi_2(\alpha) = \beta_2\alpha + \gamma_2.$$

Niech $m_(x) = F(m;\overline{x})$. Wtedy

$$\phi_1 \circ m_0(x) = Mean(\phi_1 \circ m_0;\overline{x}).$$

Z postaci ϕ_1 i własności średniej

$$\begin{aligned}
\beta_1 m_0(x) + \gamma_1 &= \beta_1 Mean(m_0;\overline{x}) + \gamma_1, \\
\beta_1 m_0(x) &= \beta_1 Mean(m_0;\overline{x}), \\
m_0(x) &= Mean(m_0;\overline{x}), \\
\beta_2 m_0(x) &= Mean(\beta_2 m_0;\overline{x}), \\
\beta_2 m_0(x) + \gamma_2 &= Mean(\beta_2 m_0 + \gamma_2;\overline{x}), \\
m_2(x) &= F(m_2;\overline{x}).
\end{aligned}$$

Zatem

$$m_1(x) = F(m_1;\overline{x}) \implies m_2(x) = F(m_2;\overline{x}).$$

Wobec symetrii oznaczeń mamy

$$m_2(x) = F(m_2;\overline{x}) \implies m_1(x) = F(m_1;\overline{x}).$$

Skąd

$$m_1(x) = F(m_1;\overline{x}) \iff m_2(x) = F(m_2;\overline{x}).$$

Z dowolności m_1, m_2 oraz x, F jest odnośnikowo niezmiennicza względem U.

Przykład 6. *Porównawczo niezmiennicze w stosunku do skal porządkowych są funkcje maximum oraz minimum z próby.*

Twierdzenie 3.11 (Warunki równoważne niezmienniczości bezwzględnej [1, Tw. 1])**.** *Niech $U = \langle A, M, a, \Phi\rangle$ będzie regularnym NAS, niech $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to [\mathbb{R}]$, $\mathcal{D} \in [\mathbb{R}]$ i niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą $\mathcal{F}$. Wtedy:*

NWSR.

1. *F jest niezmiennicza bezwzględnie w stosunku do U.*

2.

$$\forall_{m\in M}\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\overline{x}\in[A]}\quad [m]\,(\overline{x}),[\phi\circ m]\,(\overline{x}))\in\mathcal{D}\implies \mathcal{F}([\phi\circ m]\,(\overline{x}))=\mathcal{F}([m]\,(\overline{x})).$$

3.

$$\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]}\quad \overline{\alpha},[\phi]\,(\overline{\alpha})\in\mathcal{D}\implies \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha}))=\mathcal{F}(\overline{\alpha}).$$

Dowód. Udowodnimy (1) $\implies$ (2) Niech F będzie bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do U

$$\forall_{m_1,m_2\in M}\forall_{\overline{x}\in[A]}\quad [m_1]\,(\overline{x}),[m_2]\,(\overline{x})\in\mathcal{D}\implies F(m_1;\overline{x})=F(m_2;\overline{x}). \tag{3.1}$$

Niech $m\in M,\phi\in\Phi$ i $\overline{x}\in[A]$. Wtedy

$$\mathcal{F}([\phi\circ m]\,(\overline{x}))=F(\phi\circ m;\overline{x}).$$

Oczywiście $\phi\circ m\in M$. Zatem z (3.1)

$$F(\phi\circ m;\overline{x})=F(m;\overline{x})=\mathcal{F}([m]\,(\overline{x})).$$

Udowodnimy (2) $\implies$ (1) Niech $m_1,m_2\in M$, niech $\overline{x}\in[A]$. Z regularności U, istnieje $m_0\in M$ takie, że

$$m_1=\phi_1\circ m_0,\quad m_2=\phi_2\circ m_0.$$

Wtedy wyznaczają $\overline{\alpha}=m_0(\overline{x})$. Ponadto z regularności U istnieje $\Psi:a\to a$, że

$$\Psi(\phi_2(\overline{\alpha}))=\overline{\alpha}.$$

Niech $m:=\phi_2\circ m_0$ oraz $\phi:=\phi_1\circ\Psi$, $\overline{x}=\overline{x}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}([\phi_1\circ\Psi\circ\phi_2\circ m_0]\,(\overline{x})) &= \mathcal{F}([m_2]\,(\overline{x})),\\
\mathcal{F}([\phi_1\circ(\Psi\circ\phi_2)\circ m_0]\,(\overline{x})) &= \mathcal{F}([\phi_1\circ m_0]\,(\overline{x}))=\mathcal{F}([m_1]\,(\overline{x})),\\
\mathcal{F}([m_2]\,(\overline{x})) &= \mathcal{F}([m_1]\,(\overline{x})),\\
F(m_2;\overline{x}) &= F(m_1;\overline{x}).
\end{aligned}$$

Z dowolności m_1,m_2 oraz $\overline{x}\in[A]$ udowodniliśmy punkt (1).

Udowodnimy (3) $\implies$ (2) Załóżmy, że

$$\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]}\quad \overline{\alpha},[\phi]\,(\overline{\alpha})\in\mathcal{D}\implies \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha}))=\mathcal{F}(\overline{\alpha}). \tag{3.2}$$

Niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $\overline{x} \in [A]$, $\overline{\alpha} := m(\overline{x})$. Z (3.2)

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x}))) = \mathcal{F}(m(\overline{x})).$$

Z dowolności wyboru m, ϕ oraz $\overline{x}$ udowodniliśmy punkt (2).

Udowodnimy (2) $\implies$ (3) Załóżmy, że

$$\forall_{m \in M} \forall_{\phi \in \Phi} \forall_{\overline{x} \in [A]} \quad [m]\,(\overline{x}), [\phi \circ m]\,(\overline{x}) \in \mathcal{D} \implies \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})). \tag{3.3}$$

Niech $\phi \in \Phi$, $\overline{\alpha} \in [a]$ oraz $\overline{\alpha}$, $[\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D}$. Niech $m \in M$, $\overline{x} \in [A]$, $[m]\,(\overline{x}) := \overline{\alpha}$,

$$\mathcal{F}(\overline{\alpha}) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})).$$

Z (3.3)

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x}) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})).$$

Zatem mamy

$$\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}(\overline{\alpha}).$$

Z dowolności wyboru ϕ, $\overline{\alpha}$, m, $\overline{x}$ udowodniliśmy punkt (3). □

Uwaga 3.12. *Pewne wątpliwości pojawiają się w części dowodu* (2) $\implies$ (3)*. Mianowicie, nie jesteśmy absolutnie przekonani, że* m *występujące w tej konstrukcji w każdym przypadku udaje się znaleźć. W szczególności można pomyśleć, że zbiór* A *składa się ze zbyt małej liczby obiektów względem liczby wartości w zbiorze wartości pomiarów tj.* a*. Własność taka jest prawdziwa przy założeniu, że zarówno zbiór* a *jak i klasa* M *są dostatecznie bogate w elementy. Jednocześnie świadomi jesteśmy, że założenie takie jest bardzo naturalne w statystyce, lecz w samej pracy nie zostało ono przez autorów wyszczególnione.*

Twierdzenie 3.13 (Warunki równoważne niezmienniczości odnośnikowej [1, Tw. 1])**.** *Niech* $U = \langle A, M, a, \Phi \rangle$ *będzie regularnym NAS, niech* $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to [\mathbb{R}]$ *i niech* F *będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą* $\mathcal{F}$*. Wtedy NWSR*

1. F *jest odnośnikowo niezmiennicza w stosunku do* U*.*

2. *Dla dow.* $m \in M$, $\phi \in \Phi$, $x \in A$ *i* $\overline{x} \in [A]$ *o ile* $[m]\,(\overline{x}), [\phi \circ m]\,(\overline{x})) \in \mathcal{D}$ *to mamy:*

$$([\phi \circ m]\,(x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x}))) \iff m(x) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})).$$

3.

$$\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\alpha\in a}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]}\quad \overline{\alpha},[\phi]\left(\overline{\alpha}\right)\in\mathcal{D}\implies\Big[\phi(\alpha)=\mathcal{F}([\phi]\left(\overline{\alpha}\right))\iff\alpha=\mathcal{F}(\overline{\alpha})\Big].$$

Dowód. Udowodnimy (1) $\implies$ (2) Załóżmy, że dla dow. m_1, $m_2\in M$, $x\in A$ i $\overline{x}\in[A]$ o ile $[m_1]\left(\overline{x}\right),[m_2]\left(\overline{x}\right)\in\mathcal{D}$ to mamy:

$$m_1(x)=F(m_1;\overline{x})\iff m_2(x)=F(m_2;\overline{x}).\tag{3.4}$$

Niech $m\in M,\phi\in\Phi$, $x\in A$ i $\overline{x}\in[A]$. Stosujemy przekształcenia równoważne. Dla $m_1:=\phi\circ m$,$m_2:=m$, $x:=x$, $\overline{x}:=\overline{x}$ mamy

$$\phi\circ m(x)=\mathcal{F}(([\phi\circ m]\left(\overline{x}\right))\iff[\phi\circ m]\left(x\right)=F(\phi\circ m;\overline{x}).$$

Z (3.4) mamy

$$\iff m(x)=F(m;\overline{x})\iff m(x)=\mathcal{F}([m]\left(\overline{x}\right)).$$

Udowodnimy (2) $\implies$ (1) Załóżmy, że dla dow. $m\in M$, $\phi\in\Phi$, $x\in A$ i $\overline{x}\in[A]$ o ile $[m]\left(\overline{x}\right),[\phi\circ m]\left(\overline{x}\right))\in\mathcal{D}$ to mamy:

$$([\phi\circ m]\left(x\right))=\mathcal{F}([\phi\circ m]\left(\overline{x}\right)))\iff m(x)=\mathcal{F}([m]\left(\overline{x}\right)).\tag{3.5}$$

Niech $m_1,m_2\in M$, $x\in A$, $\overline{x}\in[A]$ i niech $[m_1]\left(\overline{x}\right)$, $[m_2]\left(\overline{x}\right)\in\mathcal{D}$. Z regularności NAS istnieje m_0, ϕ_1, ϕ_2 takie, że

$$m_1=\phi_1\circ m_0\quad m_2=\phi_2\circ m_0.$$

Niech $\alpha=m_0(x)$ i $\overline{\alpha}=[m_0]\left(\overline{x}\right)$ wtedy ponownie z regularności NAS istnieje Ψ takie, że dla każdego $\alpha_i\in\alpha$

$$\Psi(\phi_2(\overline{\alpha_i}))=\overline{\alpha_i},$$

oraz

$$\Psi(\phi_2(\alpha))=\alpha.$$

Z (3.5) dla $m:=\phi_2\circ m_0$, $\phi:=\phi_1\circ\Psi$, $\overline{x}:=\overline{x}$, $x:=x$. Równoważnie przekształcając

$$\begin{aligned}m_1(x)&=F(m_1;\overline{x}),\\(\phi_1\circ m_0)(x)&=F(\phi_1\circ m_0;\overline{x}),\\(\phi_1\circ\Psi\circ\phi_2\circ m_0)(x)&=F(\phi_1\circ\Psi\circ\phi_2\circ m_0;\overline{x}).\end{aligned}$$

Korzystając ponownie z (3.5)

$$(\phi_2 \circ m_0)(x) = F(\phi_2 \circ m_0; \overline{x}),$$

$$m_2(x) = F(m_2; \overline{x}).$$

Z dowolności m_1, m_2, x i $\overline{x}, F$ jest odnośnikowo niezmiennicza.

Udowodnimy (3) $\implies$ (2) Załóżmy, że

$$\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\alpha\in a}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]} \quad \overline{\alpha}, [\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D} \implies \Big[\phi(\alpha) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) \iff \alpha = \mathcal{F}(\overline{\alpha})\Big]. \tag{3.6}$$

Niech $m \in M, \phi \in \Phi$, $x \in A$ i $\overline{x} \in [A]$ i niech $\overline{\alpha}$, $[\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D}$. Dla $\alpha := m(x)$, $\overline{\alpha} := [m]\,(\overline{x})$. Równoważnie

$$\phi \circ m(x) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})),$$

$$\phi(\alpha) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})).$$

Z (3.6)

$$\alpha = \mathcal{F}(\overline{\alpha}), \quad m(x) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})).$$

Z dowolności wyboru m, ϕ oraz x udowodniliśmy punkt (2).

Udowodnimy (2) $\implies$ (3) Załóżmy, że dla dow. $m \in M$, $\phi \in \Phi$, $x \in A$ i $\overline{x} \in [A]$ o ile $[m]\,(\overline{x}), [\phi \circ m]\,(\overline{x})) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$([\phi \circ m]\,(x)) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x}))) \iff m(x) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})) \tag{3.7}$$

Niech $\phi \in \Phi$, $\alpha \in a$, $\overline{\alpha} \in [a]$. Wtedy istnieje x i $\overline{x}$ oraz takie m, że

$$\alpha = m(x) \quad i \quad \overline{\alpha} = [m]\,(\overline{x}).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})), \\ \phi \circ m(x) &= \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})). \end{aligned}$$

Z (3.7) mamy

$$\begin{aligned} m(x) &= \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})), \\ \alpha &= \mathcal{F}(\overline{\alpha}). \end{aligned}$$

Z dowolności ϕ, α, $\overline{\alpha}$ udowodniliśmy punkt (3). $\square$

Twierdzenie 3.14 (Warunki równoważne niezmienniczości porównawczej [1, Tw. 1]). *Niech $U = \langle A, M, a, \Phi\rangle$ będzie regularnym NAS, niech $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to [\mathbb{R}]$ i niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą $\mathcal{F}$. Wtedy NWSR*

1. *F jest porównawczo niezmiennicza w stosunku do U.*

2. *Dla dow. $m \in M$, $\phi \in \Phi$ i $\overline{x}, \overline{y} \in [A]$ o ile $[m]\,(\overline{x}), [m]\,(\overline{y}), [\phi \circ m]\,(\overline{x})), [\phi \circ m]\,(\overline{y})) \in \mathcal{D}$ to mamy:*

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{y}))) \iff \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{y})).$$

3. *Dla dow. $\phi \in \Phi$ i $\overline{\alpha}$,$\overline{\beta} \in [a]$ o ile $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, [\phi]\,(\overline{\alpha}), \phi(\overline{\beta}) \in \mathcal{D}$ to mamy:*

$$\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta})) \iff \mathcal{F}(\overline{\alpha}) = \mathcal{F}(\overline{\beta}).$$

Dowód. Udowodnimy (1) $\implies$ (2) Niech F będzie porównawczo niezmiennicza oraz niech $m \in M, \phi \in \Phi$, $x, y \in A$ i $\overline{x}, \overline{y} \in [A]$ wtedy dla $m_1 := \phi \circ m, m_2 := m, x := x, y := y, \overline{x} := \overline{x}, \overline{y} := \overline{y}$ mamy:

$$F(\phi \circ m; \overline{x}) = F(\phi \circ m; \overline{y}) \iff F(m; \overline{x}) = F(m; \overline{y}).$$

Następujące stwierdzenie jest równoważne

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{y})). \tag{3.8}$$

Zauważmy, że

$$F(\phi \circ m; \overline{x}) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})), \quad F(\phi \circ m; y) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{y})).$$

Zatem równoważne zdanie (3.8) jest równe zdaniu

$$F(\phi \circ m; \overline{x}) = F(\phi \circ m; \overline{y}).$$

Dzięki warunkowi porównawczej niezmienniczości, a to z kolei jest równoważne

$$F(m; \overline{x}) = F(m; \overline{y}).$$

Zauważmy, że

$$F(m; \overline{x}) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})) \quad \text{oraz} \quad F(m; \overline{y}) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{y})).$$

Zatem ostatecznie jest równoważne

$$\mathcal{F}([m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{y})).$$

Z dowolności $\overline{x}, \overline{y} \in [A]$, $m_1, m_2 \in M$ udowodniliśmy punkt (2).

Udowodnimy (2) $\implies$ (1) Załóżmy, że dla dow. $m \in M$, $\phi \in \Phi$ i $\overline{x}$, $\overline{y} \in [A]$ o ile $[m]\,(\overline{x}), [m]\,(\overline{y}), [\phi \circ m]\,(\overline{x})), [\phi \circ m]\,(\overline{y})) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{y}))) \iff \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{y})). \tag{3.9}$$

Niech $m_1, m_2 \in M, \overline{x}, \overline{y} \in [A]$. Z regularności NAS istnieją m_0, ϕ_1, ϕ_2 takie, że

$$m_1 = \phi_1 \circ m_0, \quad m_2 = \phi_2 \circ m_0.$$

Niech $\overline{\alpha} = [m_0]\,(\overline{x})$ wtedy ponownie z regularności NAS istnieje Ψ takie, że dla każdego $\overline{\alpha_i} \in \alpha$

$$\Psi(\phi_2(\overline{\alpha_i})) = \overline{\alpha_i}.$$

Dla $m := \phi_2 \circ m_0$, $\phi := \phi_1 \circ \Psi$, $\overline{x} := \overline{x}, \overline{x} := \overline{x}$ mamy

$$\mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0]\,(\overline{y})) \iff \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0]\,(\overline{x})) = ([\phi_2 \circ m_0]\,(\overline{y})).$$

$$\begin{aligned} F(m_1; \overline{x}) = F(m_1; \overline{y}) \quad &\iff \quad \mathcal{F}([\phi_1 \circ m_0]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ m_0]\,(\overline{y})) \\ &\iff \quad \mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi_1 \circ \Psi \circ \phi_2 \circ m_0]\,(\overline{y})) \end{aligned}$$

Wobec (3.9)

$$\begin{aligned} &\iff \quad \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi_2 \circ m_0]\,(\overline{y})) \\ &\iff \quad F(m_2; \overline{x}) = F(m_2; \overline{y}). \end{aligned}$$

Z dowolności m_1, m_2 i $\overline{x}$, $\overline{y}$, F jest porównawczo niezmiennicza.

Udowodnimy (3) $\implies$ (2) Załóżmy, że dla dow. $\phi \in \Phi$ i $\overline{\alpha}$,$\overline{\beta} \in [a]$ o ile $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $[\phi]\,(\overline{\alpha})$, $\phi(\overline{\beta}) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta})) \iff \mathcal{F}(\overline{\alpha}) = \mathcal{F}(\overline{\beta}). \tag{3.10}$$

Niech $m \in M, \phi \in \Phi$ i $\overline{x}, \overline{y} \in [A]$, $\overline{\alpha} := [m]\,(\overline{x})$, $\overline{\beta} := [m]\,(\overline{y})$. Z (3.10)

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})) \iff \mathcal{F}([m]\,(\overline{x}) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{y})).$$

Z dowolności wyboru m, ϕ oraz $\overline{x}$, $\overline{y}$ udowodniliśmy punkt (2).

Udowodnimy (2) $\implies$ (3) Załóżmy, że dla dow. $m \in M$, $\phi \in \Phi$ i $\overline{x}$, $\overline{y} \in [A]$ o ile $[m]\,(\overline{x}), [m]\,(\overline{y}), [\phi \circ m]\,(\overline{x})), [\phi \circ m]\,(\overline{y})) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{y}))) \iff \mathcal{F}([m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{y})). \tag{3.11}$$

Niech $\phi \in \phi$, $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in [a]$ oraz $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\phi(\overline{\alpha})$, $\phi(\overline{\beta}) \in \mathcal{D}$ i $[m]\,(\overline{x}) := \overline{\alpha}$, $[m]\,(\overline{y}) := \overline{\beta}$. Rozumujemy równoważnie

$$\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta}).$$

Niech $m \in M$, $\overline{x}$, $\overline{y} \in [A]$ takie, że

$$\overline{\alpha} = [m]\,(\overline{x}), \quad \overline{\beta} = [m]\,(\overline{y}).$$

Wtedy z pierwszej równoważności

$$\mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{x}) = \mathcal{F}([\phi \circ m]\,(\overline{y}).$$

Z (3.11)

$$\mathcal{F}([m]\,(\overline{x})) = \mathcal{F}([m]\,(\overline{y})),$$

$$\mathcal{F}(\overline{\alpha}) = \mathcal{F}(\overline{\beta}).$$

Z dowolności ϕ, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ udowodniliśmy punkt (3). □

Twierdzenie 3.15 ([1, Tw. 2])**.** *Niech $U = \langle A, M, a, \phi\rangle$ będzie regularnym NAS, $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to [\mathbb{R}]$ oraz niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach odpowiadającą $\mathcal{F}$. Wtedy:*

1. *F jest bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do U, gddy*

$$\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]} \quad \overline{\alpha}, [\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D} \implies \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}(\overline{\alpha}).$$

2. *Jeżeli dla wszystkich $\overline{\alpha} \in [a]$ takich, że $\overline{\alpha} \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}(\alpha) \in a$, wtedy F jest odnośnikowo niezmiennicza w stosunku do U, gddy*

$$\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]} \quad \overline{\alpha}, [\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D} \implies \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = [\phi]\,(\mathcal{F}(\overline{\alpha})).$$

3. *F jest porównawczo niezmiennicza w stosunku do U, gddy dla wszystkich $\phi \in \Phi$ istnieje Ψ_ϕ, które jest różnowartościowe takie, że*

$$\forall_{\overline{\alpha}\in[a]} \quad \overline{\alpha}, [\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D} \implies \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})).$$

Dowód. 1. Dowód (1) wynika wprost z twierdzenia 3.13

2. Udowodnimy warunek dostateczny. Załóżmy, że

$$\forall_{\phi\in\Phi}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]} \quad \overline{\alpha}, [\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D} \implies \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = [\phi]\,(\mathcal{F}(\overline{\alpha})). \tag{3.12}$$

Niech $m_1, m_2 \in M$ $x \in A$ i $\overline{x} \in [A]$ i $[m_1]\,(\overline{x}), [m_2]\,(\overline{x}) \in \mathcal{D}$

$$m_1(x) = F(m_1; \overline{x}) = F([m_1]\,(\overline{x})).$$

Z regularności NAS istnieje m_0, ϕ_1, ϕ_2 takie, że

$$m_1 = \phi_1 \circ m_0, \quad m_2 = \phi_2 \circ m_0.$$

Niech $\alpha = m_0(x)$, $\overline{\alpha} = [m_0]\,(\overline{x})$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Dalej z regularności U istnieje $\Psi : a \to a$

$$\Psi(\phi_1(\overline{\alpha_i})) = \overline{\alpha_i},$$

$$\Psi(\phi_1(\alpha)) = \alpha.$$

$$\begin{aligned}
m_1(x) &= \mathcal{F}([m_1]\,(\overline{x})), \\
\phi_1 \circ m_0(x) &= \mathcal{F}([\phi_1 \circ m_0]\,(\overline{x})) \quad /\Psi(\cdot), \\
\Psi \circ \phi_1 \circ m_0(x) &= \Psi(\mathcal{F}([\psi_1 \circ m_0]\,(\overline{x}))) \quad /\phi_2(\cdot), \\
m_2(x) &= \phi_2(\Psi(\mathcal{F}([\phi_1 \circ m_0]\,(x)))).
\end{aligned}$$

Dla $\phi := \phi_2 \circ \Psi$, $\overline{\alpha} := [m_1]\,(\overline{x})$ z (3.12)

$$\begin{aligned}
m_2(x) &= \mathcal{F}([\phi_2 \circ \Psi \circ \phi_1 \circ m_0])(\overline{x})), \\
m_2(x) &= \mathcal{F}([m_2]\,(\overline{x})).
\end{aligned}$$

Z uwagi na symetrię oznaczeń implikacja w drugą stronę jest oczywista. Z dowolności m_1, m_2, x i $\overline{x}$, F jest odnośnikowo niezmiennicza.

Udowodnimy warunek konieczny. Załóżmy, że dla dow. $\phi \in \Phi$, $\alpha \in a$ i $\overline{\alpha} \in [a]$ o ile $\overline{\alpha}, [\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$\phi(\alpha)) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) \iff \alpha = \mathcal{F}(\overline{\alpha}). \tag{3.13}$$

Niech $\phi \in \Phi$, $\overline{\alpha} \in [a]$ i $\overline{\alpha}$, $\phi(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D}$. Niech $\alpha = \mathcal{F}(\overline{\alpha})$ z (3.13) mamy

$$\phi(\alpha) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})),$$

jednocześnie $\alpha = \mathcal{F}(\overline{\alpha}))$, zatem

$$\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \phi(\alpha) = \phi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})).$$

Z dowolności ϕ i $\alpha, \overline{\alpha}$ udowodniliśmy punkt (2).

3. Udowodnimy warunek dostateczny. Załóżmy, że

$$\forall_{\phi\in\Phi}\exists_{\psi_\phi\in\Phi}\forall_{\overline{\alpha}\in[a]} \quad \overline{\alpha}, [\phi]\,(\overline{\alpha}) \in \mathcal{D} \implies \mathcal{F}(\phi(\overline{\alpha})) = \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})).$$

Niech $\phi \in \Phi$. Wtedy istnieje

$$\Psi_\phi : \forall_{\overline{\alpha}\in[a]}\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})). \tag{3.14}$$

Niech $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in [a]$. Wtedy z (3.14)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) &= \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})), \\ \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta})) &= \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\beta})). \end{aligned}$$

Równoważnie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) &= \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta})), \\ \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})) &= \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\beta})). \end{aligned}$$

Ponieważ $\Psi_\phi \in \Phi$, więc jest różnowartościowa. Zatem mamy

$$\mathcal{F}(\overline{\alpha}) = \mathcal{F}(\overline{\beta}).$$

Udowodnimy warunek konieczny. Załóżmy, że dla dow $\phi \in \Phi$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta} \in [a]$ o ile $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \phi(\overline{\alpha}), [\phi]\,(\overline{\beta}) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta})) \iff \mathcal{F}(\overline{\alpha}) = \mathcal{F}(\overline{\beta}). \tag{3.15}$$

Niech $\phi \in \Phi$. Niech Ψ_ϕ będzie taka, że $\Psi_\phi : z \longmapsto \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha}))$, gdzie $\overline{\alpha} \in [a] \wedge z = \mathcal{F}(\overline{\alpha})$ Pokażemy, że definicja jest poprawna. Aby tak było, wartość funkcji nie może zależeć od wyboru $\overline{\alpha}$. Niech $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta} \in [a] \wedge \mathcal{F}(\overline{\alpha}) = z = \mathcal{F}(\overline{\beta})$. Z (3.15) mamy natychmiast, że $\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta})$. To oznacza jednak, że $\Psi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})) = \Psi(\mathcal{F}(\overline{\beta}))$. Pozostaje pokazać, że Ψ_ϕ jest różnowartościowa. Niech $z_1, z_2 \in \mathcal{D}(\Psi_\phi)$. Zatem istnieją reprezentanci $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, że $\mathcal{F}(\overline{\alpha}) = z_1$, $\mathcal{F}(\overline{\beta}) = z_2$.

$$\begin{aligned} \Psi_\phi(z_1) &= \Psi_\phi(z_2), \\ \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\alpha})) &= \Psi_\phi(\mathcal{F}(\overline{\beta})). \end{aligned}$$

Z (3.15)

$$\mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\alpha})) = \mathcal{F}([\phi]\,(\overline{\beta})) \implies \mathcal{F}(\overline{\alpha}) = \mathcal{F}(\overline{\beta}) \implies z_1 = z_2.$$

Z dowolności ϕ, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ udowodniliśmy implikacje.

□

Powyższe twierdzenie pokazuje, że warunki bezwzględnej, referencyjnej oraz porównawczej niezmienniczości operacji F są równoważne (przynajmniej w szerokim zakresie warunków określonych w twierdzeniu) różnym rodzajom praw transformacji, które odnoszą się do wartości $\mathcal{F}(\phi(\alpha))$ i $\mathcal{F}(\alpha)$.

3.4 Twierdzenia i ich funkcje prawdy

Szczególnym przypadkiem operacji statystycznej na pomiarach jest np. funkcja $F(m; x, \overline{x})$, która przyjmuje wartość „prawda”, gdy dla określonego numerical assignment m, obiekt x i ciąg $\overline{x}$ spełnia warunek

$$m(x) = Mean([m]\,(\overline{x})). \tag{3.16}$$

Jeśli arbitralnie reprezentujemy wartość „prawda” przez „1”, a wartość „fałsz” przez „0”, to taka funkcja $F(m; x, \overline{x})$ może być precyzyjnie zdefiniowana w ten sposób. Dziedzina F to zbiór uporządkowanych trójek $m; x, \overline{x}$ takich, że m jest numerical assignment z pewną dziedziną A, x jest elementem z A, a $\overline{x}$ jest skończonym ciągiem elementów z A i dla wszystkich $m; x, \overline{x}$ z dziedziny F,

$$F(m; x, \overline{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{gdy} \quad m(x) = Mean([m]\,(\overline{x})), \\ 0 \quad \text{wpp} \end{cases} \tag{3.17}$$

Powyższe sugeruje, że przynajmniej dla ograniczonej klasy zdań statystycznych, takich jak (3.16), wzory te mogą być wykonane tak, aby odpowiadały funkcjom prawdy w prosty i jednolity sposób.

Definicja 3.16 ([1, Def. 6]). *Uogólniona funkcja prawdy pomiaru nazywamy uogólnioną operacją na pomiarach, których wartości wynoszą tylko* 0 *i* 1.

Mając powiązane funkcje prawdy z wzorami w sposób opisany powyżej, możliwe staje się zastosowanie precyzyjnych pojęć niezmienniczości zdefiniowanych w poprzedniej sekcji do funkcji prawdy (przynajmniej do tych, które są uogólnionymi operacjami na pomiarach). Idea kryjąca się za definicją empirycznego znaczenia dla stwierdzeń (dokładniej wzorów) polega na tym, że ich prawda nie może być zmieniona przez zmianę numerical assignment. Jasne jest, że chodzi o wymóg, aby funkcja prawdy odpowiadająca wzorowi była bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do danego systemu pomiarowego. Dlatego możemy zdefiniować:

Definicja 3.17 ([1, Def. 7]). *Wyrażenie $W(F)$ jest empirycznie znaczące względem U, gdy jego funkcje prawdy są niezmiennicze bezwzględnie.*

Oczywiście definicja ta jest nieprecyzyjna z powodu nieprecyzyjności w warunkach wzoru i wzoru funkcji prawdy, który celowo nie został precyzyjnie zdefiniowany.

Definicja 3.18 ([1, Def. 8]). *F jest względnie odpowiednie w stosunku do wyrażenia W oraz U (NAS) wtedy i tylko wtedy, gdy $W(F)$ jest empirycznie znaczące względem U.*

Teraz pokazujemy każdy z trzech specjalnych rodzajów niezmienniczości jako specjalne przypadki niezmienniczości względem wzoru lub klasy wzorów. Poszczególne wzory, o których mowa, są tym, co nazywamy bezwzględnym, referencyjnym i wzorami porównawczymi. Są one definiowane w sposób okrężny: najpierw określamy, jakie muszą być funkcje prawdy tych wzorów, a następnie definiujemy wzór, który będzie tego rodzaju, na wypadek, gdyby miał jedną z nich jako swoją funkcję prawdy.

Definicja 3.19 ([1, Def. 9]). *Niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach z dziedziną $\mathcal{D}$. Wtedy:*

1. *Dla wszystkich liczb rzeczywistych α, $ABS_{F,\alpha}$ jest funkcją z dziedzina $\mathcal{D}$ taką, że dla wszystkich $m; \overline{x} \in \mathcal{D}$,*

$$ABS_{F,\alpha}(m; \overline{x}) = \begin{cases} 1 & gdy \quad F(m; \overline{x}) = \alpha, \\ 0 & wpp \end{cases}$$

2. *REF_F jest funkcją z dziedziną $\mathcal{D}'$ składającą się ze wszystkich uporządkowanych trójek $m; x, \overline{x}$, gdzie $m; \overline{x}$ jest w $\mathcal{D}$ i x jest w dziedzinie m taka, że*

$$REF_F(m; x, \overline{x}) = \begin{cases} 1 & gdy \quad m(x) = F(m; \overline{x}), \\ 0 & wpp \end{cases}$$

3. *$COMP_F$ jest funkcją z dziedziną $\mathcal{D}''$ składająca się ze wszystkich uporządkowanych trójek $m; \overline{x}, \overline{y}$, gdzie $m; \overline{x}$, $m; \overline{y} \in \mathcal{D}$ taka, że*

$$COMP_F(m; \overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 1 & gdy \quad F(m; \overline{x}) = F(m; \overline{y}), \\ 0 & wpp \end{cases}$$

4. *Rozważane są tylko takie wyrażenia, które wykorzystują pewne funkcje $ABS_{F,\alpha}$, REF_F lub $COMP_F$ jako swoje funkcje prawdy.*

Przykład 7 (Funkcji ABS)**.** *Rozważmy próbę losową $\overline{x}$. Niech F zwraca graniczny poziom istotności z testu istotności dla $\overline{x}$ przy pomiarze m. Jeżeli $F(m; \overline{x}) = \alpha$ funkcja ABS_α zwróci 1 oraz w przeciwnym przypadku 0.*

Przykład 8 (Funkcji REF)**.** *Osobnik x ma wzrost równy średniej z populacji $\overline{x}$, wtedy funkcja REF zwraca 1 w przeciwnym przypadku 0.*

Przykład 9 (Funkcji COMP)**.** *Średnia wzrostu populacji $\overline{x}$ i $\overline{y}$ są równe, wtedy funkcja $COMP$ zwraca 1 w przeciwnym przypadku 0.*

Twierdzenie 3.20 ([1, Tw. 3])**.** *Niech F będzie uogólnioną operacją na pomiarach taka, że dla wszystkich rzeczywistych α, $ABS_{F,\alpha}$ oraz REF_F i $COMP_F$ są także uogólnionymi operacjami na pomiarach oraz niech U będzie NAS. Wtedy:*

1. *F jest bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do U, gddy dla dow. α, jest względnie odpowiednia w stosunku do $ABS_{F,\alpha}$ i U.*

2. *F jest odnośnikowo niezmiennicza w stosunku do U, gddy jest względnie odpowiednia w stosunku do REF_F i U.*

3. *F jest porównawczo niezmiennicza w stosunku do U, gddy jest względnie odpowiednia w stosunku do $COMP_F$ i U.*

Dowód. 1. Udowodnimy warunek konieczny. Niech F będzie bezwzględnie niezmiennicza w stosunku do U

$$\forall_{m_1,m_2\in M}\forall_{\overline{x}\in[A]} \quad [m_1](\overline{x}),[m_2](\overline{x})\in\mathcal{D} \implies F(m_1;\overline{x})=F(m_2;\overline{x}). \tag{3.18}$$

Niech $\alpha\in\mathbb{R}$. Pokażemy, że $ABS_{F,\alpha}$ jest bezwzględnie niezmiennicza. Niech m_1, $m_2\in M$ oraz niech $\overline{x}\in[A]$

I. Jeśli $ABS_{F,\alpha}(m_1;\overline{x})=1$ to

$$F(m_1;\overline{x})=\alpha.$$

Z (3.18)

$$F(m_2;\overline{x})=\alpha.$$

Stąd

$$ABS_{F,\alpha}(m_2;\overline{x})=1.$$

II. Jeśli $ABS_{F,\alpha}(m_1;\overline{x})=0$ to

$$F(m_1;\overline{x})\neq\alpha.$$

Z (3.18)

$$F(m_2;\overline{x})\neq\alpha.$$

Stąd

$$ABS_{F,\alpha}(m_2;\overline{x})=0.$$

Zatem

$$ABS_{F,\alpha}(m_1;\overline{x})=ABS_{F,\alpha}(m_2;\overline{x}).$$

Z dowolności m_1, m_2, $\overline{x}$ oraz α pokazaliśmy, że $ABS_{F,\alpha}$ jest bezwzględnie niezmiennicza.

Udowodnimy warunek dostateczny. Rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że F nie jest bezwzględnie niezmiennicza. Zatem istnieją m_1, $m_2\in M$ oraz $\overline{x}\in[A]$ takie, że

$$F(m_1;\overline{x})\neq F(m_2;\overline{x}).$$

Niech $\alpha=F(m_1;\overline{x})$. Rozważmy wyrażenie $ABS_{F,\alpha}$ z założenia jest ono bezwzględnie niezmiennicze, wtedy $ABS_{F,\alpha}(m_1;\overline{x})=1$. Skoro jest bezwzględnie niezmiennicza to $ABS_{F,\alpha}(m_1;\overline{x})=ABS_{F,\alpha}(m_2;\overline{x})=1$. Z definicji $ABS_{F,\alpha}(m_2;\overline{x})$

mamy, że $F(m_2;\overline{x}) = \alpha$, a $\alpha = F(m_1;\overline{x})$. Sprzeczność, jest ona efektem takiego przypuszczenia, że $F(m_1;\overline{x}) \neq F(m_2;\overline{x})$, stąd teza.

2. Udowodnimy warunek konieczny. Niech F będzie odnośnikowo niezmiennicza w stosunku do U. Dla dow. m_1, $m_2 \in M$ $x \in A$ i $\overline{x} \in [A]$ o ile $[m_1](\overline{x})$, $[m_2](\overline{x}) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$m_1(x) = F(m_1;\overline{x}) \iff m_2(x) = F(m_2;\overline{x}). \tag{3.19}$$

Pokażemy, że REF_F jest bezwzględnie niezmiennicza. Niech $m_1, m_2 \in M$ oraz niech $\overline{x} \in [A]$

I. Jeśli $REF_F(m_1;x,\overline{x}) = 1$ to z definicji

$$m_1(x) = F(m_1;\overline{x}).$$

Z (3.19)

$$m_2(x) = F(m_2;\overline{x}).$$

Stąd

$$REF_F(m_2;x,\overline{x}) = 1.$$

II. Jeśli $REF_F(m_1;x,\overline{x}) = 0$ to z definicji

$$m_1(x) \neq F(m_1;\overline{x}).$$

Z (3.19)

$$m_2(x) \neq F(m_2;\overline{x}).$$

Stąd

$$REF_F(m_2;x,\overline{x}) = 0.$$

Zatem

$$REF_F(m_1;x,\overline{x}) = REF_F(m_2;x,\overline{x}).$$

Z dowolności m_1, m_2, $\overline{x}$, x oraz α pokazaliśmy, że REF_F jest bezwzględnie niezmiennicza.

Udowodnimy warunek dostateczny. Rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że F nie jest bezwzględnie niezmiennicza. Zatem istnieją m_1, $m_2 \in M$ oraz$x \in A$ $\overline{x} \in [A]$ takie, że

$$m_1(x) = F(m_1;\overline{x}) \not\Leftrightarrow m_2(x) = F(m_2;\overline{x}).$$

I. Jeśli $m_1(x) = F(m_1; \overline{x})$ wtedy

$$REF_F(m_1; x, \overline{x}) = 1.$$

Z bezwzględnej niezmienniczości

$$REF_F(m_2; x, \overline{x}) = 1.$$

Wtedy

$$m_2(x) = F(m_2; \overline{x}).$$

Sprzeczność.

II. Jeśli $m_1(x) \neq F(m_1; \overline{x})$ wtedy

$$REF_F(m_1; x, \overline{x}) = 0.$$

Z bezwzględnej niezmienniczości

$$REF_F(m_2; x, \overline{x}) = 0.$$

Wtedy

$$m_2(x) \neq F(m_2; \overline{x}).$$

Sprzeczność.

Skoro wszystkie przypadki skończyły się uzyskaniem sprzeczności to nasze przypuszczenie musi być fałszywe.

3. Udowodnimy warunek konieczny. Niech F będzie porównawczo niezmiennicza w stosunku do U dla dow. $m_1, m_2 \in M$ i $\overline{x}, \overline{y} \in [A]$ o ile $[m_1](\overline{x}), [m_2](\overline{x}), [m_1](\overline{y}), [m_2](\overline{y}) \in \mathcal{D}$ to mamy:

$$F(m_1; \overline{x}) = F(m_1; \overline{y}) \iff F(m_2; \overline{x}) = F(m_2; \overline{y}). \tag{3.20}$$

Pokażemy, że $COMP_F$ jest bezwzględnie niezmiennicza, to znaczy

$$\forall_{m_1, m_2 \in M} \forall_{\overline{x}, \overline{y} \in [A]} \quad COMP_F(m_1; \overline{x}, \overline{y}) = COMP_F(m_2; \overline{x}, \overline{y}). \tag{3.21}$$

Niech m_1, $m_2 \in M$ oraz niech $\overline{x}$, $\overline{y} \in [A]$. Wtedy

I. Jeśli $COMP_F(m_1; \overline{x}, \overline{y}) = 1$ to

$$F(m_1; \overline{x}) = F(m_1; \overline{y}).$$

To z (3.20)

$$F(m_2; \overline{x}) = F(m_2; \overline{y}).$$

Stąd

$$COMP_F(m_2; \overline{x}, \overline{y}) = 1.$$

II. Jeśli $COMP_F(m_1; \overline{x}, \overline{y}) = 0$ to

$$F(m_1; \overline{x}) \neq F(m_1; \overline{y}).$$

To z (3.20)

$$F(m_2; \overline{x}) \neq F(m_2; \overline{y}).$$

Stąd

$$COMP_F(m_2; \overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Zatem

$$COMP_F(m_1; \overline{x}, \overline{y}) = COMP_F(m_2; \overline{x}, \overline{y}).$$

Z dowolności m_1, m_2, $\overline{x}$, $\overline{y}$ pokazaliśmy, że $COMP_F$ jest bezwzględnie niezmiennicza.

Udowodnimy warunek dostateczny. Rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, że F nie jest bezwzględnie niezmiennicza. Zatem istnieją m_1, $m_2 \in M$ oraz$x \in A$ $\overline{x}, \overline{y} \in [A]$ takie, że

$$F(m_1; \overline{x}) = F(m_1; \overline{y}) \not\Leftrightarrow F(m_2; \overline{x}) = F(m_2; \overline{y}).$$

I. Jeśli $F(m_1; \overline{x}) = F(m_1; \overline{y})$ wtedy

$$COMP_F(m_1; \overline{x}, \overline{y}) = 1.$$

Z (3.21)

$$COMP_F(m_2; \overline{x}, \overline{y}) = 1.$$

Z definicji $COMP_F$

$$F(m_2; \overline{x}) = F(m_2; \overline{y}).$$

Sprzeczność.

II. Jeśli $F(m_1; \overline{x}) \neq F(m_1; \overline{y})$ wtedy

$$COMP_F(m_1; \overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Z (3.21)

$$COMP_F(m_2; \overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Z definicji $COMP_F$

$$F(m_2; \overline{x}) \neq F(m_2; \overline{y}).$$

Sprzeczność.

Skoro wszystkie przypadki skończyły się uzyskaniem sprzeczności to nasze przypuszczenie musi być fałszywe.

$\square$

Rozdział 4

Podsumowania

W pracy została opisana część teorii przedstawionej przez Adamsa, Fagota, Robinsona [1] będąca uporządkowaniem teorii Stevensa pomiaru statystycznego. Praca choć dotyczy statystyki, tak naprawdę wykorzystuje zaawansowaną logikę matematyczną oraz teorię grup algebraicznych. W naszej pracy czytelnik może odszukać zarówno ciekawe przykłady prezentujące wykorzystanie tej teorii, jak również dowody pominięte przez autorów artykułu. Co więcej, jest to jedno z nielicznych tłumaczeń tej teorii na język polski a zatem jedna z nielicznych prac zawierająca tłumaczenie oraz matematyczny opis skal pomiaru. Praca ponadto doprecyzowuje kilka pojęć, dokonuje sprawdzenia oraz korekty czasem niejednoznacznych oznaczeń.

W rozdziale 3. zostały wprowadzone definicje NAS oraz NAS regularnego, spełnia mocniejsze założenia, ale jednak słabsze niż założenia odpowiadające grupom algebraicznym. Kluczowe przykłady zostały przedstawione. Omówione również zostały typy skal, dla których wyraźnie widać prawidła jakościowo je porządkujące. W sekcji 3.2 rozdziału 3. wprowadzone zostały pojęcia niezbędne do uogólnienia funkcji na funkcje, działające na skończonych ciągach. Za pomocą tych pojęć dalej definiowane są bardzo ogólnie operacje statystyczne. Pojęcia te wykorzystywane są dalej w sekcji 3.3 do określania tzw. niezmienniczosci stwierdzeń statystycznych. Teoria stara się podać warunki jakie muszą spełniać operacje statystyczne, aby ich wykonywanie na różnych sposobach pomiaru nie prowadziło do różnych konkluzji. W dalszej części tejże sekcji znajdują się różne warunki równoważne niezmienniczości wprowadzone w ramach tej teorii. Część ta zawiera samodzielnie opracowane dowody, jak również podnosi ciekawe komentarze. Wreszcie, w sekcji 3.4 przedstawione są szczególne przypadki istotnych, z punktu widzenia niezmieniczosci, funkcje operacji statystycznych. Sekcja kończy się dowodem twierdzenia o warunkach równoważnych różnych rodzajów niezmienniczości.

Bibliografia

[1] Ernest W Adams, Robert F Fagot, and Richard E Robinson. A theory of appropriate statistics. *Psychometrika*, 30(2):99–127, 1965.

[2] Tadeusz Poreda Jacek Jędrzejewski. *Algebra liniowa z elementami geometrii analotycznej*. Politechnika Łódzka, 2011.

[3] Jan Kraszewski. *Wstęp do matematyki*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2007.

[4] Kazimierz Kuratowski. *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, volume 9. Państwowe Wydawn. Naukowe, 1966.

[5] Marek Walesiak and Eugeniusz Gatnar. *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009.