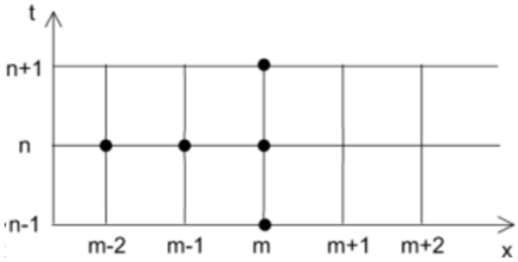
Нелинейные вычислительные процессы 1

Мария Сорока, 771

11 марта 2021 г.

1 Теоретическое задание

$$u_t + \lambda u_x = 0, \qquad \sigma = \frac{\lambda \tau}{h} = 0.5 \tag{1}$$



$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} \tag{2}$$

1. Получим аналитический вид для двухпараметрического множества положительных по Фридрихсу схем 1-го порядка аппроксимации относительно двух выбранных коэффициентов.

$$u_m^{n+1} = \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_0^{-1} u_m^{n-1} + \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n + \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n \tag{3}$$

Разложим точное решение уравнения относительно точки (x_m, t^n) в точках шаблона. Далее учтем, что это точное решение. Будем сокращать запись обозначая $u(x_m, t^n) = u$, $\;u'_x(x_m, t^n) = u_x$, $\;u'_t u(x_m, t^n) = u_t \ldots$

$$u(x_m, t^{n+1}) = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) = u - \tau\lambda u_x + \frac{\tau^2\lambda^2}{2} u_{xx} - \frac{\tau^3\lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_m, t^{n-1}) = u - \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) = u + \tau\lambda u_x + \frac{\tau^2\lambda^2}{2} u_{xx} + \frac{\tau^3\lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_{m-1}, t^n) = u - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_{m-2}, t^n) = u - 2h u_x + 2h^2 u_{xx} - \frac{4h^3}{3} u_{xxx} + O(h^4)$$

Теперь запишем результат подстановки разложения точного решения в формулу (3).

$$\begin{gathered} u - \tau\lambda u_x + \frac{\tau^2\lambda^2}{2} u_{xx} - \frac{\tau^3\lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4) = \\ = \alpha_0^0 u + \alpha_0^{-1}(u + \tau\lambda u_x + \frac{\tau^2\lambda^2}{2} u_{xx} + \frac{\tau^3\lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)) + \\ + \alpha_{-1}^0(u - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)) + \alpha_{-2}^0(u - 2h u_x + 2h^2 u_{xx} - \frac{4h^3}{3} u_{xxx} + O(h^4)) \end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда условие нулевого порядка: $1 = \alpha_0^0 + \alpha_0^{-1} + \alpha_{-1}^0 + \alpha_{-2}^0$
И первого порядка: $-\sigma = \sigma\alpha_0^{-1} - \alpha_{-1}^0 - 2\alpha_{-2}^0$

Выберем для параметризации искомого множества α_0^0 и α_{-1}^0
Учитывая, что $\alpha_0^{-1} = \frac{2-\sigma-2\alpha_0^0-\alpha_{-1}^0}{2+\sigma}$ и $\alpha_{-2}^0 = \frac{2\sigma-\sigma\alpha_0^0-(\sigma+1)\alpha_{-1}^0}{\sigma+2}$, искомое множество в общем виде и при конкретном числе Куранта имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_0^0 \geq 0 \\ \alpha_{-1}^0 \geq 0 \\ 2-\sigma-2\alpha_0^0 \geq \alpha_{-1}^0 \\ 2-\alpha_0^0 \geq \frac{\sigma+1}{\sigma}\alpha_{-1}^0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_0^0 \geq 0 \\ \alpha_{-1}^0 \geq 0 \\ 1.5-2\alpha_0^0 \geq \alpha_{-1}^0 \\ 2-\alpha_0^0 \geq 3\alpha_{-1}^0 \end{cases} \tag{5}$$

2. Получим аналитический вид для однопараметрического множества схем 2-го порядка аппроксимации относительного выбранного коэффициента.
Условие второго порядка аппроксимации: $\sigma^2 = \sigma^2\alpha_0^{-1} + \alpha_{-1}^0 + 4\alpha_{-2}^0$

$$\sigma^2 = \sigma^2\frac{2-\sigma-2\alpha_0^0-\alpha_{-1}^0}{2+\sigma} + \alpha_{-1}^0 + 4\frac{2\sigma-\sigma\alpha_0^0-(\sigma+1)\alpha_{-1}^0}{\sigma+2}$$
$$2\sigma^3 - 8\sigma = \alpha_0^0(-2\sigma^2-4\sigma) + \alpha_{-1}^0(-\sigma^2-3\sigma-2)$$

Искомое однопараметрическое множество имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^0 = \frac{-2\sigma(\sigma-2)-2\sigma\alpha_0^0}{\sigma+1} \\ \alpha_0^{-1} = \frac{(\sigma^2-3\sigma+2)-2\alpha_0^0}{(\sigma+1)(\sigma+2)} \\ \alpha_{-2}^0 = \frac{2\sigma(\sigma-1)+\sigma\alpha_0^0}{\sigma+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{-1}^0 = 1-\frac{2\alpha_0^0}{3} \\ \alpha_0^{-1} = \frac{3-8\alpha_0^0}{15} \\ \alpha_{-2}^0 = \frac{-1+\alpha_0^0}{5} \end{cases} \tag{6}$$

3. Получим аналитический вид для единственной схемы 3-го порядка аппроксимации.
Условие третьего порядка аппрокисмации: $-\sigma^3 = \sigma^3\alpha_0^{-1} - \alpha_{-1}^0 - 8\alpha_{-2}^0$

$$-\sigma^3 = \sigma^3(\frac{(\sigma^2-3\sigma+2)-2\alpha_0^0}{(\sigma+1)(\sigma+2)}) - (\frac{-2\sigma(\sigma-2)-2\sigma\alpha_0^0}{\sigma+1}) - 8(\frac{2\sigma(\sigma-1)+\sigma\alpha_0^0}{\sigma+2})$$

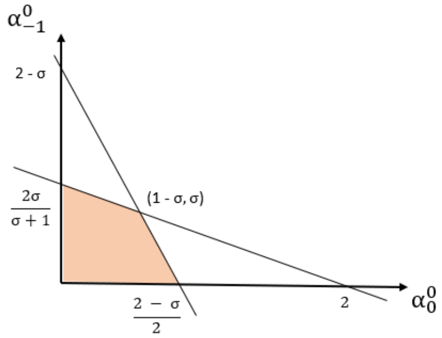
Получаем, что $\alpha_0^0 = (\sigma-1)(\sigma-2)$
Подставим это значение в выражение для остальных коэффициентов:

$$\begin{cases} \alpha_0^0 = (\sigma-1)(\sigma-2) \\ \alpha_{-1}^0 = \frac{2\sigma^2(-\sigma+2)}{\sigma+1} \\ \alpha_0^{-1} = -\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{(\sigma+1)(\sigma+2)} \\ \alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma^3-\sigma^2}{\sigma+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_0^0 = \frac{3}{4} \\ \alpha_{-1}^0 = \frac{1}{2} \\ \alpha_0^{-1} = -\frac{1}{5} \\ \alpha_{-2}^0 = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

4. Среди положительных по Фридрихсу схем найдем аналитический вид для наиболее точной схемы с минимальной «аппроксимационной вязкостью», а также для остальных вершин двухпараметрического множества монотонности.
По теореме Годунова не существует положительной по Фридрихсу линейной схемы с порядком аппроксимации выше первого, поэтому ищем схему с минимальной "аппроксимационной вязкостью"среди двухпараметрического семейства схем из пункта 1.
Минимизируем модуль коэффициента перед h^2: $k = \sigma^2 - \sigma^2\alpha_0^{-1} - \alpha_{-1}^0 - 4\alpha_{-2}^0 =$

$$= \sigma^2 - \sigma^2\frac{2-\sigma-2\alpha_0^0-\alpha_{-1}^0}{2+\sigma} - \alpha_{-1}^0 - 4\frac{2\sigma-\sigma\alpha_0^0-(\sigma+1)\alpha_{-1}^0}{\sigma+2} =$$
$$= -\frac{-2\sigma^3+8\sigma+\alpha_0^0(-2\sigma^2-4\sigma)+\alpha_{-1}^0(-\sigma^2-3\sigma-2)}{2+\sigma} = 2\sigma(\sigma-2) + 2\sigma\alpha_0^0 + (\sigma+1)\alpha_{-1}^0$$

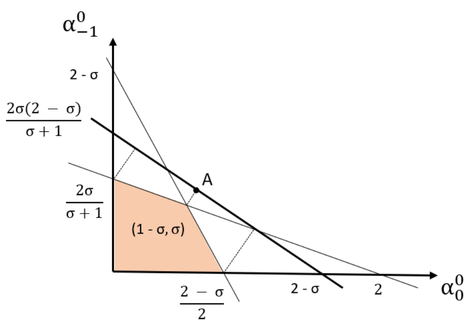
Это линейная по обоим аргументам функция, поэтому чтобы ее минимизировать достаточно рассмотреть ее значения в угловых точках множества (5). Чтобы было проще изобразим это множество при произвольном положительном и меньшим единицы числе Куранта.



Точка $(0, 0)$: $k = 2\sigma(\sigma - 2)$
Точка $(\frac{2-\sigma}{2}, 0)$: $k = \sigma(\sigma - 2)$
Точка $(0, \frac{2\sigma}{\sigma+1})$: $k = 2\sigma(\sigma - 1)$
Точка $(1 - \sigma, \sigma)$: $k = \sigma(\sigma - 1)$

Минимум модуля достигается в точке $(1 - \sigma, \sigma)$ и равен $\sigma(1 - \sigma)$

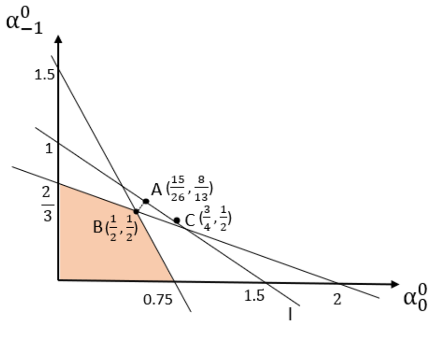
5. Среди схем 2-го порядка аппроксимации найдем аналитический вид для наиболее близкой ко множеству положительных по Фридрихсу схем.
Чтобы сделать это, опустим перпендикуляры из вершин четырехугольника на прямую, изображающую множество (6), и выберем минимальный из них. В силу того как соотносятся угля наклонов прямых, ближайшей точкой к множеству (6) будет точка $(1 - \sigma, \sigma)$, а искомой схемой второго порядка, схема, отмеченная точкой A = (x, y). Найдем эту точку.



$$\begin{cases} y = \frac{-2\sigma(\sigma-2)-2\sigma x}{\sigma+1} \\ x - (1-\sigma) - \frac{2\sigma}{\sigma+1}(y - \sigma) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{7\sigma^3-5\sigma^2-\sigma-1}{5\sigma^2+2\sigma+1} \\ y = \frac{-2\sigma}{\sigma+1}\frac{-2\sigma^3-3\sigma^2-2\sigma-1}{5\sigma^2+2\sigma+1} \end{cases}$$

6. Изобразим все полученные схемы при числе Куранта равном 0.5:



Здесь закрашенная область - множество схем первого порядка монотонных по Фридрихсу
Прямая l - множество схем второго порядка
Точка C - схема третьего порядка
Точка B - схема с наименьшей аппроксимационной вязкостью
Точка A - наиболее близкая к множеству монотонных схем первого порядка схема второго порядка