

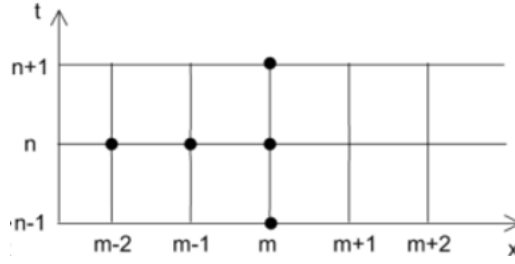
Нелинейные вычислительные процессы 1

Мария Сорока, 771

12 марта 2021 г.

1 Теоретическое задание

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad \sigma = \frac{\lambda \tau}{h} = 0.5 \quad (1)$$



$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu} u_{m+\mu}^{n+\nu} \quad (2)$$

1. Получим аналитический вид для двухпараметрического множества положительных по Фридрихсу схем 1-го порядка аппроксимации относительно двух выбранных коэффициентов.

$$u_m^{n+1} = \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_0^{-1} u_m^{n-1} + \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n + \alpha_{-2}^0 u_{m-2}^n \quad (3)$$

Разложим точное решение уравнения относительно точки (x_m, t^n) в точках шаблона. Далее учтем, что это точное решение. Будем сокращать запись обозначая $u(x_m, t^n) = u$, $u'_x(x_m, t^n) = u_x$, $u'_t u(x_m, t^n) = u_t \dots$

$$u(x_m, t^{n+1}) = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) = u - \tau \lambda u_x + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} u_{xx} - \frac{\tau^3 \lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_m, t^{n-1}) = u - \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) = u + \tau \lambda u_x + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} u_{xx} + \frac{\tau^3 \lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_{m-1}, t^n) = u - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_{m-2}, t^n) = u - 2h u_x + 2h^2 u_{xx} - \frac{4h^3}{3} u_{xxx} + O(h^4)$$

Теперь запишем результат подстановки разложения точного решения в формулу (3).

$$\begin{aligned} & u - \tau \lambda u_x + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} u_{xx} - \frac{\tau^3 \lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4) = \\ & = \alpha_0^0 u + \alpha_0^{-1} (u + \tau \lambda u_x + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} u_{xx} + \frac{\tau^3 \lambda^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)) + \\ & + \alpha_{-1}^0 (u - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4)) + \alpha_{-2}^0 (u - 2h u_x + 2h^2 u_{xx} - \frac{4h^3}{3} u_{xxx} + O(h^4)) \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда условие нулевого порядка: $1 = \alpha_0^0 + \alpha_0^{-1} + \alpha_{-1}^0 + \alpha_{-2}^0$

И первого порядка: $-\sigma = \sigma \alpha_0^{-1} - \alpha_{-1}^0 - 2\alpha_{-2}^0$

Выберем для параметризации искомого множества α_0^0 и α_{-1}^0

Учитывая, что $\alpha_0^{-1} = \frac{2-\sigma-2\alpha_0^0-\alpha_{-1}^0}{2+\sigma}$ и $\alpha_{-2}^0 = \frac{2\sigma-\sigma\alpha_0^0-(\sigma+1)\alpha_{-1}^0}{\sigma+2}$, искомое множество в общем виде и при конкретном числе Куранта имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_0^0 \geq 0 \\ \alpha_{-1}^0 \geq 0 \\ 2 - \sigma - 2\alpha_0^0 \geq \alpha_{-1}^0 \\ 2 - \alpha_0^0 \geq \frac{\sigma+1}{\sigma}\alpha_{-1}^0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0^0 \geq 0 \\ \alpha_{-1}^0 \geq 0 \\ 1.5 - 2\alpha_0^0 \geq \alpha_{-1}^0 \\ 2 - \alpha_0^0 \geq 3\alpha_{-1}^0 \end{cases} \quad (5)$$

2. Получим аналитический вид для однопараметрического множества схем 2-го порядка аппроксимации относительного выбранного коэффициента.

Условие второго порядка аппроксимации: $\sigma^2 = \sigma^2\alpha_0^{-1} + \alpha_{-1}^0 + 4\alpha_{-2}^0$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2 \frac{2 - \sigma - 2\alpha_0^0 - \alpha_{-1}^0}{2 + \sigma} + \alpha_{-1}^0 + 4 \frac{2\sigma - \sigma\alpha_0^0 - (\sigma + 1)\alpha_{-1}^0}{\sigma + 2} \\ 2\sigma^3 - 8\sigma &= \alpha_0^0(-2\sigma^2 - 4\sigma) + \alpha_{-1}^0(-\sigma^2 - 3\sigma - 2) \end{aligned}$$

Искомое однопараметрическое множество имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^0 = \frac{-2\sigma(\sigma-2)-2\sigma\alpha_0^0}{\sigma+1} \\ \alpha_0^{-1} = \frac{(\sigma^2-3\sigma+2)-2\alpha_0^0}{(\sigma+1)(\sigma+2)} \\ \alpha_{-2}^0 = \frac{2\sigma(\sigma-1)+\sigma\alpha_0^0}{\sigma+2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{-1}^0 = 1 - \frac{2\alpha_0^0}{3} \\ \alpha_0^{-1} = \frac{3-8\alpha_0^0}{15} \\ \alpha_{-2}^0 = \frac{-1+\alpha_0^0}{5} \end{cases} \quad (6)$$

3. Получим аналитический вид для единственной схемы 3-го порядка аппроксимации.

Условие третьего порядка аппроксимации: $-\sigma^3 = \sigma^3\alpha_0^{-1} - \alpha_{-1}^0 - 8\alpha_{-2}^0$

$$-\sigma^3 = \sigma^3 \left(\frac{(\sigma^2 - 3\sigma + 2) - 2\alpha_0^0}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)} \right) - \left(\frac{-2\sigma(\sigma - 2) - 2\sigma\alpha_0^0}{\sigma + 1} \right) - 8 \left(\frac{2\sigma(\sigma - 1) + \sigma\alpha_0^0}{\sigma + 2} \right)$$

Получаем, что $\alpha_0^0 = (\sigma - 1)(\sigma - 2)$

Подставим это значение в выражение для остальных коэффициентов:

$$\begin{cases} \alpha_0^0 = (\sigma - 1)(\sigma - 2) \\ \alpha_{-1}^0 = \frac{2\sigma^2(-\sigma+2)}{\sigma+1} \\ \alpha_0^{-1} = -\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{(\sigma+1)(\sigma+2)} \\ \alpha_{-2}^0 = \frac{\sigma^3-\sigma^2}{\sigma+2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_0^0 = \frac{3}{4} \\ \alpha_{-1}^0 = \frac{1}{2} \\ \alpha_0^{-1} = -\frac{1}{5} \\ \alpha_{-2}^0 = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

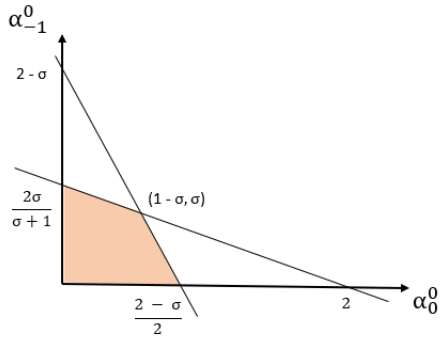
4. Среди положительных по Фридрихсу схем найдем аналитический вид для наиболее точной схемы с минимальной «аппроксимационной вязкостью», а также для остальных вершин двухпараметрического множества монотонности.

По теореме Годунова не существует положительной по Фридрихсу линейной схемы с порядком аппроксимации выше первого, поэтому ищем схему с минимальной "аппроксимационной вязкостью" среди двухпараметрического семейства схем из пункта 1.

Минимизируем модуль коэффициента перед h^2 : $k = \sigma^2 - \sigma^2\alpha_0^{-1} - \alpha_{-1}^0 - 4\alpha_{-2}^0 =$

$$\begin{aligned} &= \sigma^2 - \sigma^2 \frac{2 - \sigma - 2\alpha_0^0 - \alpha_{-1}^0}{2 + \sigma} - \alpha_{-1}^0 - 4 \frac{2\sigma - \sigma\alpha_0^0 - (\sigma + 1)\alpha_{-1}^0}{\sigma + 2} = \\ &= -\frac{-2\sigma^3 + 8\sigma + \alpha_0^0(-2\sigma^2 - 4\sigma) + \alpha_{-1}^0(-\sigma^2 - 3\sigma - 2)}{2 + \sigma} = 2\sigma(\sigma - 2) + 2\sigma\alpha_0^0 + (\sigma + 1)\alpha_{-1}^0 \end{aligned}$$

Это линейная по обоим аргументам функция, поэтому чтобы ее минимизировать достаточно рассмотреть ее значения в угловых точках множества (5). Чтобы было проще изобразим это множество при произвольном положительном и меньшим единицы числе Куранта.

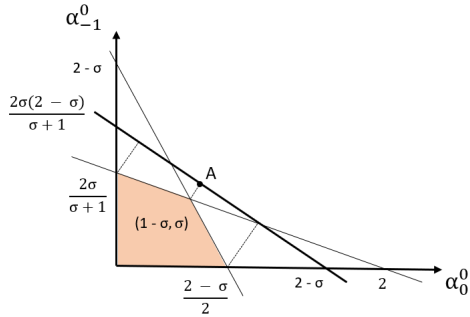


Точка $(0, 0)$: $k = 2\sigma(\sigma - 2)$
Точка $(\frac{2-\sigma}{2}, 0)$: $k = \sigma(\sigma - 2)$
Точка $(0, \frac{2\sigma}{\sigma+1})$: $k = 2\sigma(\sigma - 1)$
Точка $(1 - \sigma, \sigma)$: $k = \sigma(\sigma - 1)$

Минимум модуля достигается в точке $(1 - \sigma, \sigma)$ и равен $\sigma(1 - \sigma)$

5. Среди схем 2-го порядка аппроксимации найдем аналитический вид для наиболее близкой ко множеству положительных по Фридрихсу схем.

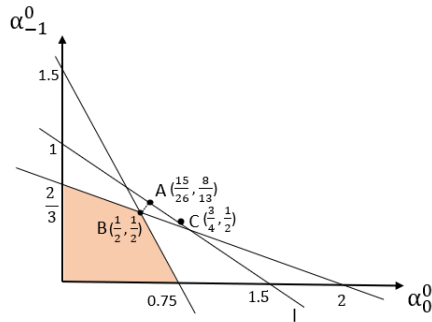
Чтобы сделать это, опустим перпендикуляры из вершин четырехугольника на прямую, изображающую множество (6), и выберем минимальный из них. В силу того как соотносятся углы наклонов прямых, ближайшей точкой к множеству (6) будет точка $(1 - \sigma, \sigma)$, а искомой схемой второго порядка, схема, отмеченная точкой A = (x, y). Найдем эту точку.



$$\begin{cases} y = \frac{-2\sigma(\sigma-2)-2\sigma x}{\sigma+1} \\ x - (1 - \sigma) - \frac{2\sigma}{\sigma+1}(y - \sigma) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-7\sigma^3-5\sigma^2-\sigma-1}{5\sigma^2+2\sigma+1} \\ y = \frac{-2\sigma-2\sigma^3-3\sigma^2-2\sigma-1}{\sigma+1} \end{cases}$$

6. Изобразим все полученные схемы при числе Куранта равном 0.5:



Здесь закрашенная область - множество схем первого порядка монотонных по Фридрихсу

Прямая l - множество схем второго порядка

Точка C - схема третьего порядка

Точка B - схема с наименьшей аппроксимационной вязкостью

Точка A - наиболее близкая к множеству монотонных схем первого порядка схема второго порядка

2 Практическое задание

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & t > 0, 0 < x \leq 2 \\ u(0, x) = \phi(x) \\ u(t, 0) = 0, & 0 < t \leq 1 \end{cases} \quad \phi(x) = \begin{cases} 10x - 4, & 0.4 \leq x \leq 0.5 \\ -10x + 6, & 0.5 \leq x \leq 0.6 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Шаблон трехслойный, поэтому есть необходимость определить два первых временных слоя. Определим один из них по начальному условию, а второй по значению точного решения.

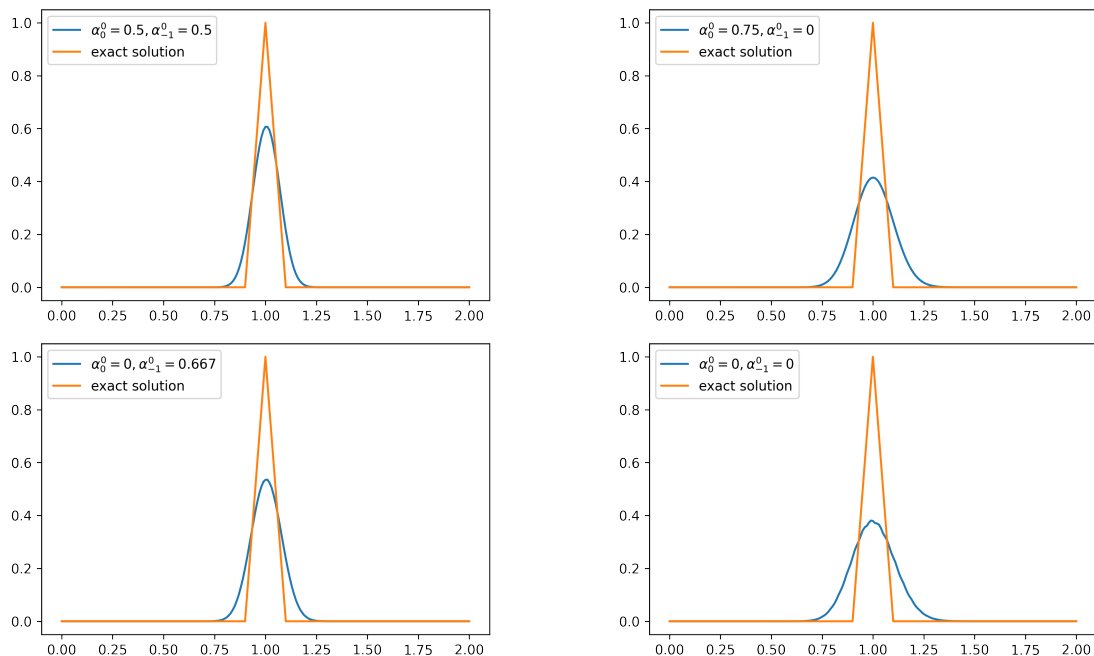
Еще одна проблема возникает с определением значения решения в точках (t, h) . Эти значения нельзя получить по основной схеме.

Если основная схема имеет первый порядок, то достаточно положить $u_1^{n+1} = u_0^{n+1} + O(h) = 0 + O(h)$

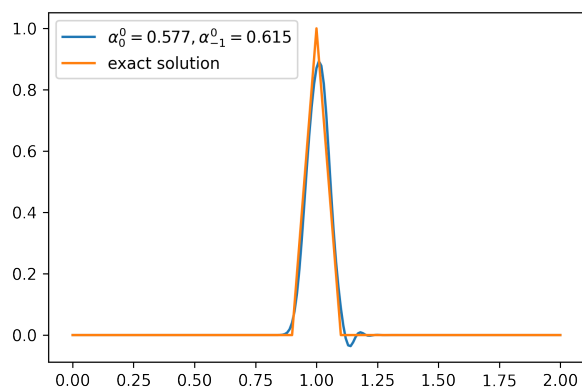
В случае второго порядка: $u_1^{n+1} = u_1^n + \tau u'_t(t^n, h) + O(\tau^2) = u_1^n - \tau u'_x(t^n, h) + O(\tau^2) = u_1^n - \tau \frac{(u_1^n - u_0^n)}{h} + O(\tau^2) = u_1^n(1 - \frac{\tau}{h}) + O(\tau^2)$

В случае третьего: $u_1^{n+1} = u_1^n + \tau u'_t(t^n, h) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(t^n, h) + O(\tau^3) = u_1^n - \tau \frac{(u_2^n - u_0^n)}{2h} + \frac{\tau^2}{2} \frac{(u_2^n - 2u_1^n + u_0^n)}{h^2} + O(\tau^3) = u_1^n(1 - \frac{\tau^2}{h^2}) + u_2^n(\frac{\tau^2}{2h^2} - \frac{\tau}{2h}) + O(\tau^3)$

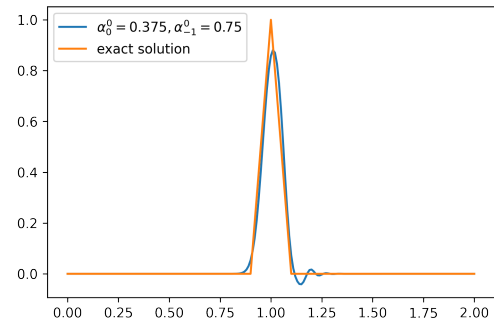
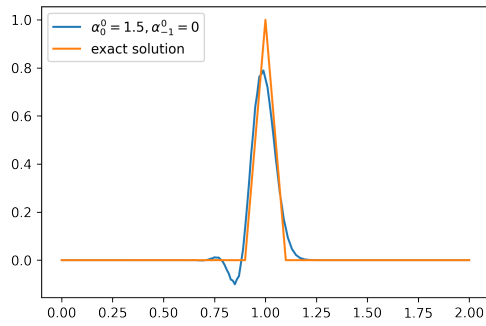
1. Результаты расчета по четырем схемам первого порядка - вершинам области монотонности:



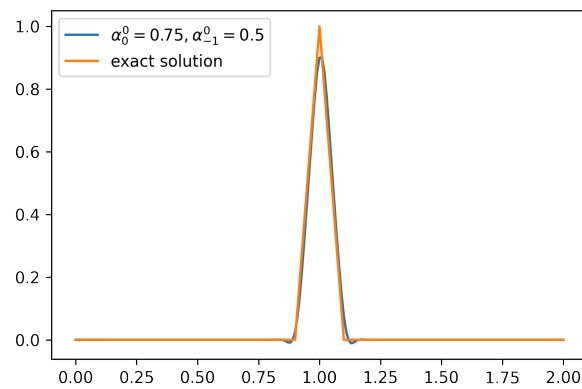
2. Результаты для схемы А:



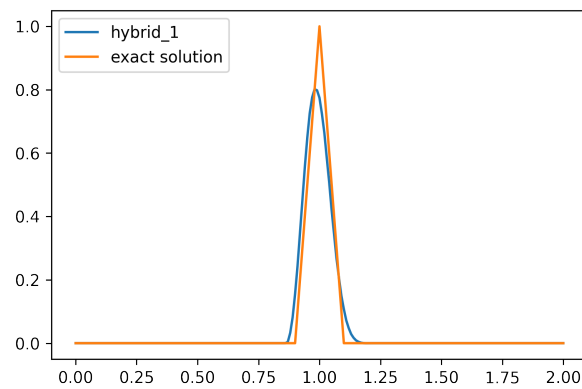
3. Результаты для схем с параметрами $(1.5, 0)$ и $(\frac{3}{8}, \frac{3}{4})$, где вторая точка лежит на пересечении однопараметрического множества и четвертой прямой из множества (5):



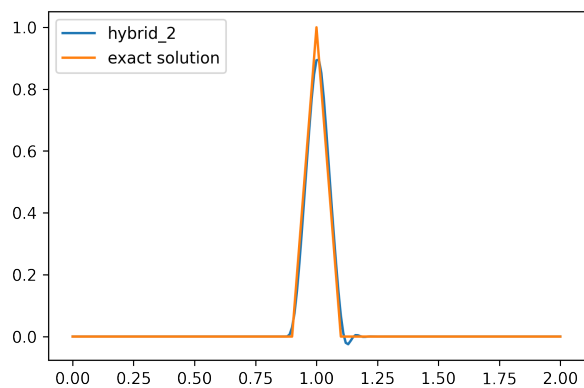
4. Результат для схемы третьего порядка аппроксимации:



5. Результат для гибридной схемы, полученной с использованием схем из пункта (3п) и сеточно-характеристического критерия монотонности:



6. Результат для гибридной схемы, совмещающей схему третьего порядка точности и схему с параметрами $(\frac{3}{8}, \frac{3}{4})$:



7. Результат для гибридной схемы, совмещающей схему третьего порядка точности и схемы из пункта 3:

