

## Быстрое умножение методом Карацубы

*Scribe: Зарубко Мария Владимировна*

## 1 Теория

Алгоритм Карацубы- метод быстрого умножения чисел. В отличие от обычного способа умножения, который имеет вычислительную сложность  $O(n^2)$ , алгоритм Карацубы требует только  $n^{\log_2 3}$  операций. Пусть каждое из рассматриваемых десятичных чисел  $A$  и  $B$  разбиваются на два числа длины  $n$  и тогда их можно представить как:

$$A = a \cdot 10^n + b$$

$$B = c \cdot 10^n + d$$

При наивном умножении  $AB = a \cdot c \cdot 10^{2 \cdot n} + (a \cdot d + c \cdot b) \cdot 10^n + b \cdot d$ , то есть необходимо вычислить  $a \cdot c, b \cdot d, c \cdot b, a \cdot d$ , поэтому сложность алгоритма будет  $4 \cdot n^2$ . При умножении Карацубы необходимо найти  $a \cdot c \cdot x^2 + ((a + b) \cdot (d + c) - a \cdot c - b \cdot d) \cdot x + b \cdot d$ , таким образом вычисляются только  $(a + b) \cdot (d + c), b \cdot d, a \cdot c$ , что уменьшает сложность алгоритма до  $3 \cdot n^2$ .

## 2 Алгоритм

**Algorithm 1** Алгоритм Карацубы

---

```

1: procedure KARATSUBA( $A, B$ )
2:   1. Разложим  $A$  и  $B$  следующим образом:
3:     1.1  $A \leftarrow a \cdot x + b$ 
4:     1.2  $B \leftarrow c \cdot x + d$        $\triangleright$  Где  $x = m^{n/2}$ ,  $n$  - четное и  $m$  - степень системы счисления
5:     1.3  $AB \leftarrow a \cdot c \cdot x^2 + ((a + b) \cdot (d + c) - a \cdot c - b \cdot d)x + b \cdot d$ 
6:   2. Если  $a, b, c, d$  могут быть разложены таким же образом как и  $A, B$ , то вернуться на шаг 1.1
7:   return  $AB$ 

```

---

Данный алгоритм не дает существенного преимущества при вычислении чисел малых длин, но становится намного эффективнее при вычислении чисел порядка десятков десятичных разрядов.

## 3 Сравнение работы алгоритмов

### 3.1 Описание машины, использованной для тестов

Характеристики машины следующие:

**Процессор:** Intel(R) Core(TM) i5-8265U CPU @ 1.60GHz 1.80 GHz

**Оперативная память:** 8,00 ГБ

**Видеоадаптер:** Intel(R) UHD Graphics 620

**Модель материнской платы:** X509FA, ASUSTeK COMPUTER INC.

### 3.2 Анализ

№	Значение x
1	1566156757236357352743265742 <sup>110</sup>
2	987657565464456645689957352743265742 <sup>222</sup>
3	987658437987985843657835983443287890098465673765765757657576249837 <sup>1345</sup>

№	Значение y
1	3487382686478324643475834678 <sup>110</sup>
2	878765362589097888999489283775834678 <sup>222</sup>
3	983247325463743748389924632246746378445654646632342368987475255665 <sup>1345</sup>

№	Скорость работы алгоритма	Скорость работы встроенной функции
1	2.01 s	142 $\mu$ s
2	8.30 s	9.19 ms
3	256.80 s	7.65 ms

[1] [2]

## Bibliography

[1] *Karatsuba algorithm*. URL: <http://www.wikipedia.org>.

[2] Львовский С.М. *Набор и верстка в системе LATEX*. -, 2014.