Conjunto de Números Reales

Prof. José Suero.

Universidad Simón Bolívar. (USB)

1 Preliminares de la teoría de conjuntos.
- Notación.
- Operaciones.

2 Implicaciones lógicas.
- Elementos básicos de lógica.
- Demostración matemática.

3 El conjunto de números reales.
- Relación de orden en $\mathbb{R}$.
- Intervalos.
- Operaciones en $\mathbb{R}$.
- Valor absoluto.

- A los conjuntos se les denota utilizando letras mayúsculas.
- A los objetos de un conjunto se le conocen como elementos, y se denotan utilizando letras minúsculas.
- Se utiliza el símbolo $\in$ o $\notin$ para denotar la pertenencia o no, de algún elemento a un conjunto dado.
- Se puede definir a un conjunto por ***extensión*** o por ***descripción***, es decir, se puede presentar todos o algunos de los elementos del conjunto o enunciar las propiedades que cumplen.
  En ambos caso se utilizará las llaves para representar los conjuntos.

$$A = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 9\}$$

- Sean A y B son dos conjuntos. Si para todo $x \in A$, entonces $x \in B$, se dice que A es ***subconjunto*** de B y se denota por $A \subseteq B$.
- El conjunto que no posee ningún elemento se le conoce como ***vacío*** y se denota por $\varnothing$.
- En nuestro caso, se considera un conjunto universal como punto de referencia y este será el ***conjunto de los números reales***.

Definición

El ***conjunto de los números reales*** es el conjunto formado por todas las expresiones decimales (periódicas y no periódicas) y se denota por $\mathbb{R}$.

Dentro del conjunto de los números reales se consideran los siguientes subconjuntos notables:

- ***Conjunto de los Números Naturales***.
  Se denota por $\mathbb{N}$.
- ***Conjunto de los Números Enteros***.
  Se denota por $\mathbb{Z}$.
- ***Conjunto de los Números Racionales***.
  Se denota por $\mathbb{Q}$.
- ***Conjunto de los Números Irracionales***.
  Se denota por $\mathbb{I}$.

Sea A un conjunto. Se define el complemento de A como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \notin A$ y se denota A^c.

$$A^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$$

Sean A yB dos conjuntos, se definen las siguientes operaciones:

- ***Unión***.

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \vee x \in B\}$$

- ***Intersección***.

$$A \cap B = \{a \in \mathbb{R} : a \in A \wedge x \in B\}$$

- ***Diferencia***.

$$A - B = A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \wedge x \notin B\}$$

1 Preliminares de la teoría de conjuntos.
- Notación.
- Operaciones.

2 Implicaciones lógicas.
- Elementos básicos de lógica.
- Demostración matemática.

3 El conjunto de números reales.
- Relación de orden en $\mathbb{R}$.
- Intervalos.
- Operaciones en $\mathbb{R}$.
- Valor absoluto.

Si P entonces Q

$$P \Rightarrow Q$$

Algunas consideraciones

- Proposiciones.
- Negación. $\neg P$
- Equivalencia Lógica. $P \Leftrightarrow Q$
- Cuantificadores. $\forall, \exists$

Razonamientos Válidos

Diremos que un razonamiento es valido o correcto si y sólo si la conjunción de un conjunto de premisas (Hipótesis) implica lógicamente a una conclusión (Tésis).

$$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow C$$

Tipos de demostraciones:

- Método directo.
- Por casos.
- Método del contrarecíproco.
- Reducción al absurdo.

1 Preliminares de la teoría de conjuntos.
- Notación.
- Operaciones.

2 Implicaciones lógicas.
- Elementos básicos de lógica.
- Demostración matemática.

3 El conjunto de números reales.
- Relación de orden en $\mathbb{R}$.
- Intervalos.
- Operaciones en $\mathbb{R}$.
- Valor absoluto.

Definición

El ***conjunto de los números reales*** es el conjunto formado por todas las expresiones decimales.

Se puede comparar dos números reales y esto permite obtener un conjunto ordenado.

Propiedad (Propiedad de tricotomía)

Dado $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes condiciones.

- $a = b$
- $a < b$
- $a > b$

Propiedad (Propiedad de transitiva)

Dado $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene que:

- *Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.*
- *Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

Adicionalmente de los símbolos "$<$" y "$>$", tambien se considera los símbolos, "$\leq$" y "$\geq$" y se hace referencia a:

- $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$.
- $a \geq b$ significa que $a > b$ o $a = b$.

Se puede establecer una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta. ***"Recta Numérica"***

Definición

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se puede definir el conjunto formado por los números reales que se encuentran entre a y b, incluyéndolos o no. A estos conjuntos se les conoce como ***intervalos***.

Intervalos	Expresión Algebraíca
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Observación

Adicionalmente, se considera los siguientes intervalos utilizando los símbolos $+\infty$ y $-\infty$.

Intervalos	Expresión Algebraíca
$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$

Definición

En el conjunto de los números reales se definen las operaciones de ***Adición*** y ***Multiplicación***, denotadas por "+" y "·" , que verifica las siguientes propiedades:

Propiedad	Adición
Conmutativa	$a+b=b+a$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$
Existencia del Neutro	$\exists\ 0 \in R : a+0=0+a=a$
Existencia del opuesto	$\forall\ a \in \mathbb{R},\ \exists\ -a \in \mathbb{R} : a+(-a)=0$

Definición

En el conjunto de los números reales se definen las operaciones de ***Adición*** y ***Multiplicación***, denotadas por "+" y "·" que verifica las siguientes propiedades:

Propiedad	Multiplicación
Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existencia de la identidad	$\exists\ 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Existencia del inverso	$\forall\ a \in \mathbb{R}^*,\ \exists\ a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$

Propiedad	Adición y Multiplicación
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Observación

El caso de la sustracción y la división son casos particulares de la adición y multiplicación respectivamente.

Propiedad

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces se verifica las siguientes propiedades:

- $\forall\ a \in \mathbb{R},\ a = a.$
- *Si* $a = b$ *entonces* $b = a.$
- *Si* $a = b$ *y* $b = c$ *entonces* $a = c.$
- *Si* $a = b,$ *entonces* $a + c = b + c.$
- *Si* $a = b,$ *entonces* $a \cdot c = b \cdot c.$
- $\forall\ a \in \mathbb{R},\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$

Propiedad

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *entonces se verifica las siguientes propiedades:*

- *Si* $a < b$, *entonces* $a + c < b + c$.
- *Si* $a < b$ *y* $c > 0$ *entonces* $a \cdot c < b \cdot c$.
- *Si* $a < b$ *y* $c < 0$ *entonces* $a \cdot c > b \cdot c$.
- *Si* $0 < a < b$, *entonces* $a^2 < b^2$.
- *Si* $0 > a > b$, *entonces* $a^2 < b^2$.
- *Si* $0 < a < b$, *entonces* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Propiedad

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces se verifica las siguientes propiedades:*

- *Si* $a \cdot b = 0$, *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$.
- *Si* $a \cdot b > 0$, *entonces* $\begin{cases} a > 0 & y & b > 0 \\ & o & \\ a < 0 & y & b < 0 \end{cases}.$
- *Si* $a \cdot b < 0$, *entonces* $\begin{cases} a > 0 & y & b < 0 \\ & o & \\ a < 0 & y & b > 0 \end{cases}.$

Propiedad

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica las siguientes propiedades:

- *Si* $a \cdot b \geqslant 0$, *entonces* $\left\{\begin{array}{ccc} a \geqslant 0 & y & b \geqslant 0 \\ & o & \\ a \leq 0 & y & b \leq 0 \end{array}\right.$.
- *Si* $a \cdot b \leq 0$, *entonces* $\left\{\begin{array}{ccc} a \geq 0 & y & b \leq 0 \\ & o & \\ a \leq 0 & y & b \geq 0 \end{array}\right.$.

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces el ***valor absoluto*** a, denotado por $|a|$, es a si a es no negativo, y es $-a$ si a es negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases} .$$

Propiedad

Dado $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica las siguientes propiedades.

- $|a-b| = \begin{cases} a-b & si \quad a \geqslant b \\ b-a & si \quad a < b \end{cases}.$
- $|a| < b$ *si y sólo si* $-b < a < b$.
- $|a| \leq b$ *si y sólo si* $-b \leq a \leq b$.
- $|a| > b$ *si y sólo si* $a > b$ *o* $a < -b$.
- $|a| \geq b$ *si y sólo si* $a \geq b$ *o* $a \leq -b$.

Teorema

Sea a un número real, entonces

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Teorema

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ *con* $b \neq 0$.

Teorema (Desigualdad triangular.)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Teorema

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

Teorema

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|.$$