Tema nr. 4

În fişierele (a_i.txt, b_i.txt, $i=1,\ldots,5$) postate pe pagina laboratorului, sunt memorate pentru 5 sisteme liniare cu matrice rară (dimensiunea sistemului $\boldsymbol{n}$ este ‚*mare*' iar matricea are '*puține*' elemente $\boldsymbol{a_{ij} \neq 0}$), $\boldsymbol{Ax = b}$, următoarele elemente:

Pentru matricea $\boldsymbol{A}$ (fişierele a_i.txt):

- $\boldsymbol{n}$ dimensiunea sistemului,
- $\boldsymbol{a_{ij} \neq 0,\ i,\ j}$ - elementele nenule din matricea rară $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, indicii de linie și de coloană ai respectivului element,

Pentru vectorul $\boldsymbol{b}$ (fişierele b_i.txt)

- $\boldsymbol{n}$,
- $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{i=1,2,\ldots,n}$ toate elementele vectorului termenilor liberi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

1. Folosind fişierele ataşate, să se citească dimensiunea sistemului, vectorul termenilor liberi şi să se genereze structurile de date necesare pentru memorarea economică a matricei rare şi a vectorului termenilor liberi. Pentru matricea $\boldsymbol{A}$ se va folosi schema de memorare rară descrisă mai jos. Se presupune că elementele nenule ale matricei sunt plasate aleator în fișier (nu sunt ordonate după indicii de linie sau de coloană, sau altfel). Să se verifice că elementele de pe diagonală ale matricei sunt nenule.
   Să se implementeze două metode de memorare rară a matricelor, una fiind cea descrisă în acest text, iar a doua la alegere. Pentru ambele metode să se implementeze cerințele descrise în continuare. Alte metode de memorare rară a matricelor găsiți aici.
   Se consideră dată precizia calculelor $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-p}}$.

2. Folosind memorarea rară a matricei $\boldsymbol{A}$, să se aproximeze soluția sistemului liniar:

$$\boldsymbol{Ax=b} \qquad \textbf{(1)}$$

   folosind metoda Gauss-Seidel. Afişaţi şi numărul de iteraţii calculate până la obţinerea soluţiei aproximative.

3. Să se verifice soluția calculată afișând norma:

$$\left\| \boldsymbol{A x_{GS} - b} \right\|_\infty$$

unde $\boldsymbol{x_{GS}}$ este aproximarea soluției exacte obținută cu algoritmul Gauss-Seidel.

4. În toate calculele care includ matricea $\boldsymbol{A}$, se cere să se utilizeze memorarea rară a matricei (să nu se aloce în program nici o matrice clasică).

5. La implementarea metodei Gauss-Seidel să se folosească un singur vector $\boldsymbol{x_{GS}}$.

Bonus 25 pt. : să se calculeze suma a două matrice rare (a.txt, b.txt, aplusb.txt). Să se verifice că suma matricelor din fișierele a.txt și b.txt este matricea din fișierul aplusb.txt. Două elemente care au aceiași indici de linie și coloană ***(i, j)*** sunt considerate egale dacă $|c_{ij}-d_{ij}| < \varepsilon$. Pentru memorarea matricelor folosiţi una din metodele rare de memorare a matricelor.

Observații: 1) La rezolvarea problemelor de mai sus să nu se recurgă la alocarea de matrice clasice și nici să nu se folosească o funcție ***val(i,j)*** care returnează pentru orice ***(i,j)*** valoarea elementului corespunzător din matrice.
2) Implementarea schemei de memorare rară descrisă în acest fișier este **obligatorie** (neimplementarea ei se penalizează).
3) Dacă în fișierele atașate apar mai multe valori cu aceiași indici de linie și coloană:

$\boldsymbol{val_1 , i, j}$

…

$\boldsymbol{val_2 , i, j}$

…

$\boldsymbol{val_k , i, j}$

o astfel de situație are următoarea semnificație:

$$\boldsymbol{a_{ij} = val_1 + val_2 + \cdots + val_k} \ .$$

Memorarea matricelor rare (schema de memorare economică)

Un vector 'rar' este un vector cu 'puține' elemente nenule. Un asemenea vector se memorează eficient într-o structură care va reține doar valorile nenule și poziția în vector a respectivei valori:

$$\{(val \neq 0, i);\ x_i = val\}.$$

O matrice rară poate fi memorată economic ca un vector de vectori memorați rar – fiecare linie a matricei se memorează într-un vector rar.

Metode iterative de rezolvare a sistemelor liniare

Pp. că **det** $A \neq 0$, vom nota soluția exactă a sistemului (1) cu x^*:

$$x^* := A^{-1}b.$$

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare au fost deduse pentru sistemele de dimensiune '*mare*' (n '*mare*'), cu matricea sistemului A, matrice rară (cu '*puține*' elemente a_{ij} nenule). În cazul metodelor iterative matricea A nu se transformă (ca în cazul algoritmului de eliminare Gauss sau a descompunerilor LU sau a factorizărilor QR) ci sunt folosite doar elementele nenule ale matricei pentru aproximarea soluției exacte x^*. Pentru matricele rare se folosesc scheme de memorare economice specifice.

Pentru a aproxima soluția x^* se construiește un șir de vectori $\left\{x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ care, în anumite condiții, converge la soluția exactă x^* a sistemului (1):

$$x^{(k)} \to x^*\ ,\ \text{pentru } k \to \infty$$

Vectorul $x^{(0)}$ se inițializează, de obicei, cu 0:

$$x_i^{(0)} = 0\ ,\ i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

Atunci când converge, limita șirului este chiar x^* soluția sistemului (1).

Metoda Gauss-Seidel

Vom presupune că toate elementele diagonale ale matricei $\boldsymbol{A}$ sunt nenule:

$$a_{ii} \neq 0\,,\;\; i=1,\ldots,n$$

Când se citește matricea din fișier, se cere să se verifice dacă elementele diagonale ale matricei sunt nenule ($|a_{ii}| > \varepsilon,\ \forall\, i$). Dacă există un element diagonal nul, nu se poate rezolva sistemul liniar folosind metoda iterativă Gauss-Seidel.

Șirul de vectori generat de metoda Gauss-Seidel este următorul:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}}\;,\quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$= \frac{\left(b_i - \sum_{\substack{\text{valori nenule de pe linia i}\\ \text{cu exceptia elementului diagonal}}} val * x_{indice\,coloana}^{(?)}\right)}{\textbf{valoarea elementului diagonal de pe linia } i}\;,\quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

Formula de calcul de mai sus trebuie adaptată noului tip de memorare a matricei $\boldsymbol{A}$. În sumele de mai sus sunt necesare doar elementele a_{ij} nenule. Pentru un calcul rapid al componentei $\boldsymbol{i}$ a vectorului de aproximare $x_i^{(k+1)}$ avem nevoie să accesăm ușor elementele liniei $\boldsymbol{i}$ ale matricei $\boldsymbol{A}$, din acest motiv în schema economică de memorare vom ţine cont de acest lucru.

Pentru metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare convergența sau divergența șirului $\{x^{(k)}\}$ nu depinde de alegerea iterației inițiale $x^{(0)}$.

Pentru a aproxima soluția x^* trebuie să calculăm un termen al șirului $x^{(k)}$ pentru $\boldsymbol{k}$ suficient de mare. Se știe că, dacă diferența dintre doi termeni consecutivi ai șirului $\{x^{(k)}\}$ devine suficient de *‚mică'*, atunci ultimul vector calculat este *‚aproape'* de soluția căutată:

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq \varepsilon \Rightarrow \| x^{(k)} - x^* \| \leq c\,\varepsilon\,,\; c \in \mathbb{R}_+ \rightarrow\; x^{(k)} \approx x^* \qquad (2)$$

Nu este nevoie să memorăm toți vectorii calculați ai șirului $\{x^{(k)}\}$ ci avem nevoie doar de ultimul vector, cel care satisface prima inegalitate din relația (2) ($\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq \varepsilon$).

În program s-ar putea utiliza doar doi vectori:

$$x^c \text{ pentru vectorul } x^{(k+1)} \text{ şi } x^p \text{ pentru vectorul } x^{(k)}.$$

În cazul metodei Gauss-Seidel se poate folosi un singur vector pe parcursul calculelor.

$$x_{GS} = x^c = x^p.$$

În cazul folosirii unui singur vector pentru aproximarea soluției, aplicarea formulei (3) și calculul normei $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|=\|x^c-x^p\|$ trebuie făcute în același timp (în aceeași buclă *for*).

Schemă de implementare a unei metode iterative (folosind 2 vectori)

$x^c = x^p = 0;$

$k=0;$

do

{

$x^p = x^c;$

calculează noul x^c folosind x^p (cu formula (3));

calculează $\Delta x = \| x^c - x^p \|;$

$k=k+1;$

}

while ($\Delta x \geq \varepsilon$ **şi** $k \leq k_{max}$ **şi** $\Delta x \leq 10^8$) //($k_{max} = 10000$)

if ($\Delta x < \varepsilon$) $x^c \approx x^*$; // x^c este aproximarea căutată a soluției

else ‚*divergență*';

Exemplu:

Matricea:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{102.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{2.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{3.5} & \mathbf{104.88} & \mathbf{1.05} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.33} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{100.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{1.3} & \mathbf{0.0} & \mathbf{101.3} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.73} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{1.5} & \mathbf{102.23} \end{pmatrix}$$

se poate memora economic astfel:

{ { (2.5, 2) , (102.5, 0)},
{ (3.5, 0), (0.33, 4),(1.05, 2), (104.88, 1)},
{ (100.0, 2)},
{ (1.3, 1) , (101.3, 3)},
{ (1.5, 3), (0.73, 0), (102.23, 4)} }.

Presupunem. că:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.0} \\ \mathbf{2.0} \\ \mathbf{3.0} \\ \mathbf{4.0} \\ \mathbf{5.0} \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} \mathbf{6.0} \\ \mathbf{7.0} \\ \mathbf{8.0} \\ \mathbf{9.0} \\ \mathbf{1.0} \end{pmatrix}$$

$x_0^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_0 - a_{01}x_1^{(0)} - a_{02}x_2^{(0)} - a_{03}x_3^{(0)} - a_{04}x_4^{(0)}) / a_{00} =$$

$$= (6.0 - 0.0 * 2.0 - 2.5 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.0 * 5.0) / 102.5$$

(varianta economică foloseşte doar elementele nenule de pe linia 1)

$$= (6.0 - 2.5 * 3.0) / 102.5 = -0.01463414...$$

$x_1^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_1 - a_{10} x_0^{(1)} - a_{12} x_2^{(0)} - a_{13} x_3^{(0)} - a_{14} x_4^{(0)}) / a_{11} =$$

$$= (7.0 - 3.5 * (-0.01463414...) - 1.05 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.33 * 5.0) / 104.88$$

(varianta economică foloseşte elementele nenule de pe linia a 2-a)

$$= (7.0 - 1.05 * 3.0 - 3.5 * (-0.01463414...) - 0.33 * 5.0) / 104.88 = 0.0214647...$$

$x_2^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_2 - a_{20} x_0^{(1)} - a_{21} x_1^{(1)} - a_{23} x_3^{(0)} - a_{24} x_4^{(0)}) / a_{22} =$$

$$= (8.0 - 0.0 * (-0.01463414...) - 0.0 * (0.0214647...) - 0.0 * 4.0 - 0.0 * 5.0) / 100.0$$

(varianta economică foloseşte elementele nenule de pe linia 3)

$$= (8.0) / 100.00 = 0.08$$

$x_3^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_3 - a_{30} x_0^{(1)} - a_{31} x_1^{(1)} - a_{32} x_2^{(1)} - a_{34} x_4^{(0)}) / a_{33} =$$

$$= (9.0 - 0.0 * (-0.01463414...) - 1.3 * (0.0214647...) - 0.0 * 0.08 - 0.0 * 5.0) / 102.23$$

(varianta economică foloseşte elementele nenule de pe linia 3)

$$= (9.0 - 1.3 * (0.0214647...)) / 101.30 = 0.0885696...$$

$x_4^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_4 - a_{40} x_0^{(1)} - a_{41} x_1^{(1)} - a_{42} x_2^{(1)} - a_{43} x_4^{(1)}) / a_{44} =$$

$$= (1.0 - 0.73 * (-0.01463414...) - 0.0 * (0.0214647...) - 0.0 * 0.08 - 1.5 * (0.0885696...)) / 102.23$$

(varianta economică foloseşte elementele nenule de pe linia 3)

$$= (1.0 - 1.5 * (0.0885696...) - 0.73 * (-0.01463414...)) / 101.30 = 0.0085868...$$

$x^{(k+1)}[i]$ (varianta economică foloseşte doar elementele nenule de pe linia i)

$$= \frac{\left(b[i] - \sum (\text{valoare} \neq 0 \text{ de pe linia } i) * x^{(?)}[\text{indice de coloană corespunzător valorii}]\right)}{\text{valoarea elementului diagonal de pe linia } i}$$

Sistemele memorate în fișierele postate pe pagina cursului au următoarele soluții:

- (a_1.txt, b_1.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = 1, \forall i = 0,\ldots,n-1}$,
- (a_2.txt, b_2.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = \frac{2.0}{3.0}, \forall i = 0,\ldots,n-1}$
- (a_3.txt, b_3.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = 0.3 * i\ , \forall i = 0,\ldots,n-1}$
- (a_4.txt, b_4.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = \frac{i}{9.0}, \forall i = 0,\ldots,n-1}$
- (a_5.txt, b_5.txt) are soluția $\boldsymbol{x_i = 3.0\ , \forall i = 0,\ldots,n-1}$. (?!?)