Matematický pohled na mince

(Coins from a mathematical point of view)

Ľubomíra Dvořáková, Marie Dohnalová, Praha

Abstrakt

V článku zmíníme pojmy týkající se platby mincemi (či bankovkami), které souvisejí s optimalitou. V případě problému platby (říká se také rozměňování – anglicky "change making problem"), tj. skládání částky z mincí bez možnosti vracení, jsou úlohy spojené s optimalitou dobře prozkoumané. Analogické úlohy zformulujeme pro směnu, tj. skládání částky z mincí s možností vracení. Zde zůstává naopak řada problémů otevřená.

Úvod

Už jste někdy přemýšleli o výhodách a nevýhodách hodnot českých mincí? Platíme každou částku relativně nízkým počtem mincí? Lze takové výhodné platby provádět hladovým algoritmem? Nevyplatilo by se do českého systému nějakou minci přidat? A bylo výhodné ukončit v roce 2008 platnost padesátníku? A co když porovnáme české koruny s americkými centy, eury nebo některými exotickými měnami? Budou v nějakých ohledech české koruny výhodnější? Tyto a podobné otázky si klade J. Shallit a kol. v článku [4], který nás inspiroval ke studiu této problematiky, a také první z autorek v článku [1].

My se nyní ovšem téměř odpoutáme od reálných systémů mincí a budeme studovat problematiku obecněji. V první části definujeme a prozkoumáme platbu a speciálně optimální reprezentaci a s ní související optimální systémy mincí. Dále se budeme zabývat hladovou reprezentací a s ní spjatými optimálními hladovými systémy. Vyšetříme, jaký vztah mezi optimálními a hladovými reprezentacemi splňují obvykle reálné systémy mincí. Dále uvedeme známé výsledky týkající se složitosti nejznámějších platebních problémů.

Ve druhé části definujeme směnu a zformulujeme pro ni analogické pojmy jako pro platbu. Uvedeme, které problémy zůstávají v případě směny otevřené, a zmíníme, jaké výsledky z teorie numeračních systémů by mohly při jejich řešení pomoci.

1 Platba

Platbou rozumíme, vágně řečeno, skládání částky pomocí daných mincí.

Definice 1. *Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$ (mince), kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, dále $N \in \mathbb{N}$ (nejmenší bankovka) a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ (částka). Pokud $n = \sum_{i=1}^{D} a_i e_i$, kde $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ nazveme* reprezentací n (při platbě). [1] *Říkáme, že tato reprezentace je* optimální, *pokud $\sum_{i=1}^{D} a_i$ je minimální mezi všemi reprezentacemi částky n.*

[1] Často budeme pro jednoduchost nazývat reprezentací přímo zápis ve tvaru $\sum_{i=1}^{D} a_i e_i$.

počet mincí D	hodnoty	$\varnothing$ cost
3	1,12,19	5,21
4	1,5,18,25	3,93
5	1,5,16,23,33	3,33
6	1,2,7,19,29,33	3,01

Tabulka 1: Optimální systémy pro platbu částek $1-100$ ($N=100$) pro počet mincí $D \in \{3,4,5,6\}$ získané programem v Javě.

Příklad 1. *Uvažujeme-li české koruny $e_1 = 1, e_2 = 2, e_3 = 5, e_4 = 10, e_5 = 20, e_6 = 50$, pak*

$$30 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10 = 30 \cdot 1,$$

tedy $(0,1,1,0,0,0)$ a $(0,0,0,0,0,30)$ jsou příklady reprezentací částky 30Kč, přičemž první z nich je optimální. Jak uvidíme za chvíli, v případě českých korun má každá částka jedinou optimální reprezentaci. Nemusí tomu tak ovšem být vždy.

Mějme mince v hodnotách $e_1 = 1, e_2 = 2, e_3 = 3, e_4 = 4$, potom

$$5 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2,$$

tedy optimální reprezentace 5 jsou $(1,0,0,1)$ i $(0,1,1,0)$.

Poznámka 1. *Pro zajištění jednoznačnosti optimální reprezentace se obvykle definice doplňuje tak, že optimání reprezentací rozumíme lexikograficky největší [2] z reprezentací, které obsahují minimální počet mincí. V předchozím příkladě je tedy optimální reprezentací 5 při takto rozšířené definici reprezentace $(1,0,0,1)$.*

Přirozenou úlohou je hledání systémů mincí, kde průměrný počet mincí použitých v optimálních reprezentacích je minimální. Zavedeme takové systémy formálně.

Definice 2. *Mějme $D, N \in \mathbb{N}$. Pak systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, nazveme* optimální (pro platbu)*, jestliže nabývá minimální hodnoty výraz (v tabulkách ho označíme $\varnothing$ cost):*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\textit{počet mincí v optimální reprezentaci } n \textit{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Poznámka 2. *Právě fakt, že pro čtyři mince a částky $1-100$ obsahuje optimální systém mince v hodnotách $1, 5, 18, 25$ (viz tabulka 1), vysvětluje název článku J. Shallita a kol.: What this country needs is an 18¢ piece [4]. V US systému*

[2] Říkáme, že posloupnost $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ je lexikograficky větší než $(b_D, \ldots, b_2, b_1)$, pokud jsou různé a nejvyšší index j, kde se liší, splňuje $a_j > b_j$.

centů v hodnotách $1, 5, 10, 25$ *by stačilo pro zajištění optimality nahradit desetník hodnotou* 18¢. *Dá se ale očekávat, že k tomu nikdo jiný než matematici nebude svolný.*

Hledat optimální reprezentace částek není obvykle jednoduchá úloha. K její složitosti se zanedlouho dostaneme. Představme nyní typ reprezentací, které se hledají snadno.

Definice 3. *Mějme* $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, *kde* $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$ *a* $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. *Reprezentaci* $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ *nazveme* hladovou reprezentací n (při platbě), *pokud je získaná hladovým algoritmem. Tedy v prvním kroku klademe* $a_D := k$, *kde* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n - ke_D \geq 0$ *a* $n - ke_D$ *je minimální, a podobně pokračujeme pro částku* $n - a_D e_D$.

Poznámka 3. *Hladová reprezentace je vždy jediná. Z hladového algoritmu je vidět, že hladová reprezentace je lexikograficky největší ze všech reprezentací.*

Příklad 2. *Uvažujeme-li české koruny, pak hladovým algoritmem dostaneme* $30 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10$, *tj. hladová reprezentace je rovna* $(0, 1, 1, 0, 0, 0)$ *a splývá s optimální reprezentací. Tato situace nastává pro všechny částky.*

V jiných systémech mincí ale nemusí být optimální a hladová reprezentace každé částky stejná. Například pro optimální systém čtyř mincí $e_1 = 1, e_2 = 5, e_3 = 18, e_4 = 25$ *máme* $36 = 2 \cdot 18 = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1$, *přičemž první reprezentace* $(0, 2, 0, 0)$ *je optimální a druhá* $(1, 0, 2, 1)$ *je hladová.*

Opět se nabízí úloha hledat systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitých v hladových reprezentacích je minimální. Definujme takové systémy formálně.

Definice 4. *Mějme* $D, N \in \mathbb{N}$. *Pak systém* $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, *kde* $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, *nazveme* optimální hladový (pro platbu), *jestliže nabývá minimální hodnoty výraz:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\text{počet mincí v hladové reprezentaci } n \text{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Zajímavou úlohou je zkoumat systémy mincí, v nichž splývá optimální a hladová reprezentace každé částky. V příkladu 2 jsme zmiňovaly, že pro české koruny tomu tak je, ale uváděly jsme zároveň příklad systému, kde tomu tak není. V dalším textu představíme Pearsonův algoritmus, který umožňuje tuto úlohu pro daný systém efektivně řešit. Právě tento algoritmus nám umožnil prozkoumat chování reálných systémů mincí. Vyšetřovaly jsme systémy mincí celkem 195 států (těch, které USA uznávají za nezávislé státy) a zdá se, že podmínka, aby optimální reprezentace šlo počítat hladovým algoritmem, tj. aby optimální a hladové reprezentace všech částek splývaly, hraje důležitou roli při volbě systémů mincí. K neshodě optimálních a hladových reprezentací dochází pouze pro:

- západoafrický frank (Benin, Burkina Faso, Pobřeží slonoviny),

počet mincí D	hodnoty	∅ cost
3	1,5,22	5,34
3	1,5,23	5,34
4	1,3,11,37	4,16
4	1,3,11,38	4,16
5	1,3,7,18,45	3,50
6	1,2,5,11,25,62	3,17
6	1,2,5,11,25,63	3,17
6	1,2,5,11,25,64	3,17
6	1,2,5,13,29,64	3,17
6	1,2,5,13,29,65	3,17
6	1,2,5,13,29,66	3,17

Tabulka 2: Optimální hladové systémy pro platbu částek $1-100$ ($N=100$) pro počet mincí $D \in \{3,4,5,6\}$ získané programem v Javě. Žádný ze systémů není zároveň optimální.

- jamajský dolar,
- malgašský ariar (Madagaskar),
- somoni (Tádžikistán).

Neshodu způsobuje navíc vždy přítomnost mincí v hodnotách $1, 10, 25$, protože pak platí např.:

$$30 = 3 \cdot 10 = 1 \cdot 25 + 5 \cdot 1,$$

přičemž první reprezentace je optimální a druhá je hladová.

1.1 Složitost některých platebních problémů

Hledat optimální reprezentace a optimální systémy mincí je časově náročná úloha. O složitosti je známo následující (detaily jsou k nalezení v [4]):

Otázka: Mějme $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$ a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Jak těžké je najít optimální reprezentaci n?
Odpověď: Není znám polynomiální algoritmus v D, který by pracoval s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$.

Otázka: Mějme $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$ a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Jak těžké je rozhodnout, zda je stejná optimální a hladová reprezentace n?
Odpověď: Není znám polynomiální algoritmus v D, který by pracoval s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$.

Otázka: Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$. Jak těžké je zjistit, zda je stejná optimální a hladová reprezentace každé částky $n \in \mathbb{N}$?
Odpověď (překvapivě!): Existuje Pearsonův polynomiální algoritmus v D (přesná složitost je $\mathcal{O}(D^3)$) operující s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$. Popišme si stručně, jak Pearsonův algoritmus [5] funguje:

- Pokud nesplývá pro každou částku optimální a hladová reprezentace, pak existují $i, j \in \mathbb{N}$, kde $1 \leq j \leq i < D$, taková, že optimální reprezentace nejmenšího protipříkladu je tvaru:

$$n = (a_j + 1)e_j + a_{j+1}e_{j+1} + \ldots + a_i e_i, \tag{1}$$

  kde hladová reprezentace $e_{i+1} - 1 = \sum_{k=1}^{i} a_k e_k$.

- Testujeme tedy všechna i, j připadající v úvahu a hledáme nejmenší n ve tvaru (1), pro které počet mincí v hladové reprezentaci je větší než počet mincí v reprezentaci (1), tj. než $(a_j + 1) + a_{j+1} + \ldots + a_i$. Pokud takové n najdeme, pak jde o nejmenší částku, jejíž optimální a hladová reprezentace nesplývá. Pokud takové n nenajdeme, pak splývají optimální a hladové reprezentace všech částek.

Příklad 3. *Ukažme si využití Pearsonova algoritmu k zodpovězení otázky, zda splývají optimální a hladové reprezentace všech částek pro systém mincí v hodnotách $1, b, b^2, \ldots, b^{D-1}$, kde $b > 1$. Podle Pearsonova algoritmu, pokud by existovala částka, pro niž jsou různé optimální a hladová reprezentace, pak by nejmenší takový protipříklad měl tvar:*

$$n = be_j + (b-1)e_{j+1} + \ldots + (b-1)e_i, \tag{2}$$

protože hladová reprezentace $e_{i+1} - 1 = b^i - 1 = \sum_{k=0}^{i-1}(b-1)b^k = \sum_{k=1}^{i}(b-1)e_k$. Není těžké si rozmyslet, že $n = e_{i+1}$. Odtud ale plyne, že hladová (i optimální) reprezentace n obsahuje jedinou minci, a to e_{i+1}, což je méně než $b + (b-1)(i-j)$ (počet mincí v reprezentaci (2)*). Proto optimální i hladové reprezentace všech částech splývají.*

2 Směna

Obvyklým problémem při placení mincemi je také směna, kdy připouštíme i možnost vracení.

Definice 5. *Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$ (mince), kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, dále $N \in \mathbb{N}$ (nejmenší bankovka) a $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ (částka). Pokud $n = \sum_{i=1}^{D} a_i e_i$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$, pak $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ nazveme* reprezentací n (při směně)*. Říkáme, že tato reprezentace je* optimální*, pokud $\sum_{i=1}^{D} |a_i|$ je minimální mezi všemi reprezentacemi částky n.*

Příklad 4. *Optimální reprezentace dané částky při směně používá samozřejmě méně nebo stejně mincí jako optimální reprezentace této částky při platbě. Např. pro české koruny máme:*

$$8 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 10 + (-1) \cdot 2,$$

přičemž první reprezentace je optimální při platbě a potřebuje tři mince a druhá je optimální při směně a potřebuje jen dvě mince.

Jistě opět není optimální reprezentace jednoznačná. Jednak v případech, kdy nebyla optimální reprezentace jednoznačná při platbě, nemůže být jednoznačná ani při směně. Ale navíc může nejednoznačnost vzniknout právě připuštěním širší množiny koeficentů. Např. pro české mince je optimální reprezentace každé částky při platbě jednoznačná, ale optimální reprezentace částky 15 *při směně má dvě možné podoby:*

$$15 = 1 \cdot 20 - 1 \cdot 5 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5.$$

Navíc už není jasné, proč upřednostnit mezi všemi optimálními reprezentacemi lexikograficky největší. Proč by např. pro mince $1, 2, 98, 100$ *měla mít přednost reprezentace* $2 = 1 \cdot 100 + (-1) \cdot 98$ *před* $2 = 2 \cdot 1$*? Poznamenejme, že pro optimální i hladovou reprezentaci při platbě platilo tvrzení: Pokud* $(a_D, \dots, a_2, a_1)$ *a* $(b_D, \dots, b_2, b_1)$ *jsou posloupnosti s členy z* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *a zároveň* $a_i \geq b_i$ *pro každé* $i \in \{1, 2, \dots, D\}$*, potom platí implikace: je-li* $(a_D, \dots, a_2, a_1)$ *optimální, resp. hladová reprezentace, potom* $(b_D, \dots, b_2, b_1)$ *je také optimální, resp. hladová reprezentace. Tato vlastnost či nějaká jí podobná se při směně nezachovává.*

Analogicky jako v případě platby nás mohou zajímat systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitých v optimálních reprezentacích je minimální.

Definice 6. *Mějme* $D, N \in \mathbb{N}$. *Pak systém* $e_1, e_2, \dots, e_D \in \mathbb{N}$*, kde* $1 = e_1 < e_2 < \dots < e_D$*, nazveme* optimální (pro směnu)*, jestliže nabývá minimální hodnoty výraz:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\textit{počet mincí v optimální reprezentaci } n \textit{ pro mince } e_1, e_2, \dots, e_D).$$

Opět platí, že pro hledání optimální reprezentace nemáme k dispozici efektivní algoritmus, proto se pokusíme najít jednoduchou reprezentaci, která se nabízí jako analogie hladové reprezentace.

Definice 7. *Mějme* $D, N \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \dots, e_D \in \mathbb{N}$*, kde* $1 = e_1 < e_2 < \dots < e_D$ *a* $n \in \{1, 2, \dots, N\}$*. Reprezentaci* $(a_D, \dots, a_2, a_1)$ *nazveme* hladovou reprezentací n (při směně)*, pokud je získaná "zobecněným" hladovým algoritmem, kdy v každém kroku bereme nejbližší větší či menší minci. Tedy v prvním kroku najdeme* $j \in \{1, \dots, D-1\}$ *tak, že* $e_j \leq n \leq e_{j+1}$*. Pokud* $n - e_j \leq e_{j+1} - n$*, pak píšeme* $n = e_j + z$ *a zbytek* z *reprezentujeme dále analogicky (dokud není nulový). Pokud* $n - e_j \geq e_{j+1} - n$*, pak píšeme* $n = e_{j+1} - z$ *a zbytek* z *reprezentujeme dále analogicky (dokud není nulový).*

počet mincí D	hodnoty	$\varnothing$ cost
3	1,18,25	4,01
3	1,20,28	4,01
4	1,21,30,35	3,16
5	1,11,34,40,49	2,77
5	1,26,30,40,47	2,77
6	1,5,26,34,45,48	2,53
6	1,5,26,37,46,49	2,53

Tabulka 3: Optimální systémy pro směnu částek $1 - 100$ ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané programem v Javě.

Příklad 5. *Hladová reprezentace při směně už nemusí být jednoznačná. Uvažujeme-li např. české koruny, pak hladové reprezentace částky* 35 *jsou hned čtyři:*

$$\begin{aligned}
35 &= 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5,\\
35 &= 2 \cdot 20 + (-1) \cdot 5,\\
35 &= 1 \cdot 50 + (-1) \cdot 10 + (-1) \cdot 5,\\
35 &= 1 \cdot 50 + (-1) \cdot 20 + 1 \cdot 5.
\end{aligned}$$

Čtenář si ale snadno dokáže (třeba pomocí indukce), že pro danou částku obsahuje každá hladová reprezentace stejný počet mincí.

Poznámka 4. *Zatímco každá reprezentace při platbě je zároveň reprezentací při směně, a tudíž optimální reprezentace dané částky při směně používá maximálně tolik mincí, kolik optimální reprezentace této částky při platbě, pro hladovou reprezentaci už toto není pravda. Existují systémy mincí takové, že některé částky obsahují v hladové reprezentaci při směně více mincí než v hladové reprezentaci při platbě.*

Např. pro systém mincí $e_1 = 1, e_2 = 3, e_3 = 5, e_4 = 10$ *máme:*

$$\begin{aligned}
8 &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3,\\
8 &= 1 \cdot 10 + (-2) \cdot 1 = 1 \cdot 10 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1,
\end{aligned}$$

přičemž první reprezentace obsahuje dvě mince a je hladová při platbě a druhé dvě obsahují tři mince a jsou hladové při směně.

Opět jsme vyšetřovaly systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitý v hladových reprezentacích při směně je minimální.

Definice 8. *Mějme* $D, N \in \mathbb{N}$. *Pak systém* $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, *kde* $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, *nazveme* optimální hladový (pro směnu), *jestliže nabývá minimální hodnoty výraz:*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\text{\textit{počet mincí v hladové reprezentaci} } n \text{ \textit{pro mince} } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

počet mincí D	hodnoty	$\varnothing$ cost
3	1,6,33	4,18
4	1,4,13,48	3,34
4	1,4,15,48	3,34
5	1,2,7,22,71	2,96
5	1,2,7,23,74	2,96
5	1,2,7,23,75	2,96
6	1,2,7,12,41,70 (71, 80, 81)	2,73
6	1,2,7,12,42,81	2,73
6	1,2,7,12,51,80 (81)	2,73
6	1,2,7,12,52,81	2,73
6	1,2,7,13,44,85	2,73
6	1,2,7,13,54,85	2,73

Tabulka 4: Optimální hladové systémy pro směnu částek $1-100$ ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané programem v Javě. Když existuje více optimálních hladových systémů a liší se pouze v nejvyšší minci, uvádíme hodnotu různých variant nejvyšší mince v závorce.

Podobně jako v případě platby by nás mohlo zajímat, kdy splývá optimální a hladová reprezentace při směně. Protože nyní není ani optimální ani hladová reprezentace dána jednoznačně, je nejprve třeba upřesnit, co budeme vlastně vyšetřovat. Uvažujme $D, N \in \mathbb{N}$, systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, a částku $n \in \{1, \ldots, N\}$.

- Je zřejmé z definice 6, že každá optimální reprezentace n při směně obsahuje stejný počet mincí, označme jej K.
- Zmiňovaly jsme, že každá hladová reprezentace n při směně obsahuje stejný počet mincí, označme jej M.
- Pokud $K = M$, potom každá hladová reprezentace n je zároveň optimální.
- Pokud $K < M$, potom žádná hladová reprezentace n není optimální.
- Nyní můžeme zkoumat, zda pro částku n platí:
  1. $K = M$ (tj. hladové reprezentace jsou zároveň optimální),
  2. $K = M$ a navíc optimální reprezentace jsou hladové.

Příklad 6. *Uvažujme mince* $e_1 = 1, e_2 = 3, e_3 = 5, e_4 = 10$. *Potom* $8 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3$ *je optimální reprezentace při směně, která není hladová při směně. Dále* $8 = 1 \cdot 10 + (-2) \cdot 1$ *je hladová reprezentace při směně, která není optimální při směně. Proto v takovém systému nesplývají reprezentace částek ani podle kritéria 1. ani podle kritéria 2.*

Příklad 7. *Uvažujme mince* $e_1 = 1, e_2 = 2, e_3 = 3, e_4 = 5, e_5 = 8$. *Potom* $7 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2$ *je optimální reprezentace při směně, která není hladová při směně. Dále* $7 = 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 1$ *je hladová reprezentace při směně, která je zároveň optimální při směně. Proto v takovém systému nesplývají reprezentace částek podle kritéria 2.*

2.1 Otevřené problémy pro směnu

Článek zakončíme shrnutím otázek týkajících se směny, na něž nám nejsou známy odpovědi.

1. Existuje analogie Pearsonova algoritmu pro směnu? Tedy existuje efektivní algoritmus, který pro daný systém rozhodne, zda splývají optimální a hladové reprezentace všech částek (ať už podle kritéria 1., nebo podle kritéria 2.)?

2. Splývá optimální a hladová reprezentace každé částky při směně:

   (a) v systému mincí $1, b, b^2, \ldots, b^{D-1}$, kde $b > 1$ (ať už podle kritéria 1., nebo podle kritéria 2.)? Algoritmus pro hledání jedné optimální reprezentace každé částky je známý [3].

   (b) v systému mincí v hodnotách Fibonacciho čísel $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ (a to podle kritéria 1., protože podle kritéria 2. nesplývají, viz příklad 7)? Algoritmus pro hledání jedné optimální reprezentace každé částky je známý [2].

3. Lze definovat hladovou reprezentaci při směně lépe? Tedy tak, aby vždy používala menší nebo stejný počet mincí jako hladová reprezentace při platbě dané částky.

Reference

[1] Balková Ľ., Šťastná A., *Jsou české mince optimální?*, Rozhledy matematicko–fyzikální *90 (1–2)* (2015), 14–22.

[2] Heuberger C., *Minimal expansions in redundant number systems: Fibonacci bases and greedy algorithms*, Period. Math. Hungar. *49* (2004), 65–89.

[3] Heuberger C., Prodinger H., *On minimal expansions in redundant number systems: Algorithms and quantitative analysis*, Computing *66* (2001), 377–393.

[4] Kleber M., Shallit J., Vakil R., *What this country needs is an 18¢ piece*, Mathematical Intelligencer *25* (2003), 20–23.

[5] Pearson D., *A polynomial-time algorithm for the change-making problem*, Operations Research Letters *33 (3)* (2005), 231–234.

doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D.
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze
Trojanova 13
Praha 2, 120 00
lubomira.dvorakova@fjfi.cvut.cz

Marie Dohnalová
gymnázium EDUCAnet Praha
Roztylská 1
Praha 4, 14000
marie.dohnalova21@gmail.com