Metodo de Newton para sistemas no lineales

Karla Marielos Aguilar Figueroa 00078913

Índice

1. Metodo de Newton

Estos sistemas son un conjunto de ecuaciones no lineales que tienen multiples variables y describen fenómenos bastantes complejos como los simulados por computadora.

Dado un sistema de dos ecuaciones, se desea hallar el punto (x, y) que hace que dichas ecuaciones sean iguales a cero. Dicho de otra forma, este punto ser a raíz de ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

Aplicando a este caso el metodo de Newton, se puede generar un sistema matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_0}{y_0} \end{bmatrix} - J^{-1}|_{x_0,y_0}; \begin{bmatrix} \dfrac{f_1(x_0,y_0)}{f_2(x_0,y_0)} \end{bmatrix}$$

Para comenzar, hay que definir los valores para los puntos iniciales y calcular J^{-1}, que correspondea la matriz inversa del jacobiano del sistema de ecuaciones que se calcula de la siguiente forma:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

A partir de entonces, se calcula el valor siguiente de la aproximaciòn y se repite iterativamente este procedimiento. En general, para un vector X de raìces a encontrar y F(·) un vector de funciones que corresponden al sistema de ecuaciones F(X) = 0:

$$G(x) = X - J(x)^{-1}.F(X) \tag{4}$$

y el procedimiento de la iteracion funcional pasa de seleccionar x^0 a generar, para $K \geq 1$

$$x^k = G(x^{k-1}) = x^{k-1} - J(x^{k-1})^{-1}F(x^{k-1}) \tag{5}$$

Concluyendo que esto es metodo de Newton para sistemas no lineales, y generalmente se espera que de una convergencia cuadratica, siempre y cuando se conozca un valor inicial suficientemente preciso y exista $J(p)^{-1}$.

Conceptos

- Matriz Jacobiana: Es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Se representa de la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

- Matriz Inversa: Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A, y se expresa A^{-1}, a la única matriz que cumple que:

$$A.A^{-1} = I = A^{-1}.A \tag{6}$$

  Es decir, la matriz inversa de A es la única matriz que al multiplicarla por ella obtenemos la matriz identidad del orden correspondiente.

  La matriz inversa no siempre existe, para que exista, es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz sea distinto de cero.

  En matematicas, en particular en algebra lineal, una matriz cuadrada A de orden n se dice que es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada matriz inversa de A y representada como A^1, tal que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{7}$$

Resumen del Metodo

El método de Newton-Raphson (un método basado en la serie de Taylor) es un método el cual se aproxima a la raíz por medio de rectas tangentes.

A partir de un valor inicial x_0 traza recta tangente a la curva y busca el valor de dicha tangente que corte al eje de las abscisas. Una vez que encontró el valor (que pasa a ser nuestro valor mas próximo a la raíz x_1) vuelve a trazar la recta tangente a la curva y así tantas veces como sea necesario hasta representar una aproximación mejorada de la raíz.

- Es eficiente en ecuaciones no lineales.
- Este metodo trabaja con un proceso iterativo (mas rapido) a diferencia de otros metodos que trabaja sobre intervalos.
- Como desventaja el calcular la derivada para poder obtener la matriz jacobiana y en ocasiones estas pueden ser largas.

2. Aplicaciones

El algoritmo que utilizamos en este caso fue el m etodo de Newton adaptado para trabajar consistemas no lineales denfunciones ynvariables que mapean R3 a R3 de forma iterativa. Como ya se mencion o en esta forma, el metodo de Newton debe trabajar para resolver varias ecuacionescon varias incognitas es decir, un sistema de ecuaciones. La caracteristica principal de este sistema es ser no lineal, por lo que los metodos convencionales para resolver el SEL resultan ser no utiles.A consecuencia de esto se necesita otro tipo de metodo. Uno de los candidatos es el metodos de Newton, sin embargo este metodo esta definido para una variable y se deduce de un polinomio de series de potencias, un polinomio de taylor de segundo grado para ser precisos. Por lo que,este metodo no puede aplicarse directamente al sistema y necesita ser adaptado. Para ejemplificar el uso del metodo de Newton para un sistema no lineal, se considero un sistema de ecuaciones de 2 incognitas en R^3 , el cual tiene una solucion aproximada $(u, v)(1, 1)$ y una punto inicial de $(u_0, v_0) = (2, 2)$.

$$\begin{cases} f_1(u,v) = 6u^3 + uv - 3v^3 - 4 = 0 \\ f_2(u,v) = u^2 - 18uv^2 + 16v^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

(8)

Calculo de matriz Jacobiana $J(u, v)$

$$DF(u,v) = \begin{bmatrix} 18u^2 + v & u - 9v^2 \\ 2u - 18v^2 & -36uv + 48v^2 \end{bmatrix}$$

Al evaluar la matriz Jacobiana,la funcion F(x) en (2,2), se obtuvo las siguiente vectores con los resultados.

$$F(x) = \begin{bmatrix} 24 & -11 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 74 & -34 \\ -68 & 48 \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema de ecuaciones lineales J(x)y = F(x) Al resolver dicho sistema de euaciones lineales, se elimina el problema de calcular la matriz inversa del jacobiano, aumentando la eficiencia del metodo.

$$SEL = \begin{bmatrix} -0.62741935483871 & -0.659677419354839 \end{bmatrix}$$

Finalmente al resolver todo el sistema por el metodo de Newton se obtuvo el siguiente resultado, para este caso en el libro de Timothy se obtenian 8 iteraciones y en nuestro caso se obtienen 6 iteraciones.

$$Iteracion = 0$$

$$SoluciondelSistema = \begin{bmatrix} 1.37258064516129 & 1.34032258064516 \end{bmatrix}$$

$$Iteracion = 1$$

$$SoluciondelSistema = \begin{bmatrix} 1.07838681200443 & 1.05380123264984 \end{bmatrix}$$

$$Iteracion = 2$$

$$SoluciondelSistema = \begin{bmatrix} 1.0053496889652 & 1.00269261871539 \end{bmatrix}$$

$$Iteracion = 3$$

$$SoluciondelSistema = \begin{bmatrix} 1.00003367866506 & 1.0000224377201 \end{bmatrix}$$

$$Iteracion = 4$$

$$SoluciondelSistema = \begin{bmatrix} 1.00000000111957 & 1.00000000057894 \end{bmatrix}$$

$$Iteracion = 5$$

$$SoluciondelSistema = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Referencias

[1] Burden, Richard Faires, J. Douglas (2010). Newton's method enNumerical Analysis,novena edición, Cengage Learni.

[2] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin.The LaTeX Companion.Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.

[3] Timothy Sauer, Analisis Numerico, Segunda Edicion, Pearson Education, 2013.

[4] Shoichiro Nakamura,Metodos Numericos Aplicados con Software,Primera Edicion, Pearson Education (1992).