Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Normes

3.1.1 Définitions, propriétés

Définition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application
$N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

i) Séparation : $\forall x \in E,\ \ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$

ii) Homogénéité : $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

iii) Inégalité triangulaire : $\forall x,\, y \in E,\ \ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Remarque 1
On peut remplacer la condition de séparation dans i) par

$$i')\ \forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$$

La notation usuelle pour une norme sur un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E est N ou $\|\,.\,\|$.

Proposition 1
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors la restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F.

Démonstration. Preuve évidente, à faire. □

Proposition 2
(Inégalité triangulaire inversée) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors pour tout x, $y \in E$, on a
$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|.$$

Démonstration. Soient x, $y \in E$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a
$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$
ce qui n'est autre que
$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \tag{3.1}$$
On montre de même (par symétrie entre x et y) que
$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\| \tag{3.2}$$
(3.1) et (3.2) nous donnent
$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|.$$
□

Définition 2
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle vecteur unitaire (ou normé) tout vecteur de E de norme 1.
A tout vecteur x non nul on peut associer le vecteur unitaire $\dfrac{x}{\|x\|}$.

3.1.2 Distance associée

Définition 3
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application
$$\begin{array}{rccc} d & : & E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

Proposition 3
La distance d associée à une norme $\|\cdot\|$ sur E vérifie

i) Séparation : $\forall x, \, y \in E, \, d(x, y) = 0 \iff x = y$

ii) Symétrie : $\forall x, \, y \in E, \, d(x, y) = d(y, x)$

iii) Inégalité triangulaire : $\forall x, \, y, \, z \in E, \, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Démonstration. La preuve est évidente et découle de la définition de la norme. □

Définition 4

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$ non vide.

1. Pour $x \in E$, on appelle distance de x à A et on note $d(x, A)$:

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a);\ a \in A\} = \inf\{\|x - a\|;\ a \in A\}.$$

2. On appelle diamètre de A et on note $diam(A)$:

$$diam(A) = \sup\{d(x, y);\ x,\ y \in A\} = \sup\{\|x - y\|;\ x,\ y \in A\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

(si A est une partie non vide, non majorée de $\mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$).

Remarque 2

Si $x \in A$, $d(x, A) = 0$. Attention, la réciproque est fausse.
Prenons par exemple, $E = \mathbb{R}$, et $A =]0, 1]$.
$d(0, A) = \inf\{a,\ a \in]0, 1]\} = \inf]0, 1] = 0$ alors que $0 \notin A$.

3.1.3 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Proposition 4

Les applications définies par $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$

1. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$,
2. $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,
3. $\|x\|_\infty = \max_{k=1,..,n} |x_k|$

sont des normes sur $\mathbb{K}^n$, appelées normes ℓ^p avec respectivement $p = 1, 2, \infty$.
La norme $\|\cdot\|_2$ est dite associée au produit scalaire canonique dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Démonstration. La preuve sera faite en TD pour $\mathbb{R}^n$ et se généralise facilement à $\mathbb{C}^n$.
Pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$, c'est facile.
Pour montrer l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$, on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous.
Sur $\mathbb{C}^n$, pour $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$, on a, d'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, $\|x + y\|_2 \leq \|x' + y'\|_2$ où $x' = (|x_1|, ..., |x_n|)$, $y' = (|y_1|, ..., |y_n|)$ puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$. □

Proposition 5
(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Démonstration. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ le produit scalaire euclidien.
On considère le polynôme du 2nd degré P défini par $P(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle = \|x + ty\|_2^2 = \|y\|_2^2 t^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|x\|_2^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par construction, $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme le coefficient de t^2 est $\|y\|_2^2 \geq 0$, on déduit que son discriminant est négatif ou nul.
Donc $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \leq 0$, ce qui n'est autre que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si x et y sont linéairement dépendants alors $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a donc

$$|\langle x, y\rangle| = |\lambda| \, \|y\|_2^2 = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Réciproquement, si $|\langle x, y\rangle| = \|x\|_2 \, \|y\|_2$ alors le discriminant ci-dessus est nul. P admet alors une racine réelle (double) t_0, et pour ce t_0 on a $P(t) = \|x + t_0 y\|_2^2 = 0$. D'où $x + t_0 y = 0$, c'est-à-dire $x = -t_0 y$ et donc x et y sont linéairement dépendants. $\square$

Remarque 3
(hors programme) Soit p un réel tel que $p \geq 1$, on définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors $\|\cdot\|_p$ est également une norme sur $\mathbb{K}^n$.

3.1.4 Boules

Définition 5
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit

- la boule ouverte de centre a et de rayon r par $B(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| < r\}$,
- la boule fermé de centre a et de rayon r par $\overline{B}(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| \leq r\}$,
- la sphère de centre a et de rayon r par $S(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| = r\}$.

Exemple :

1. Soit $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, $B(a,r) =]a-r, a+r[$, $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$ et $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$
2. Soit $(\mathbb{C}, |\,.\,|)$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, la boule ouverte $B(a,r)$ (respectivement la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ n'est autre que le disque ouvert (respectivement fermé) centré en a et de rayon r. $S(a,r)$ n'est autre que le cercle de centre a et de rayon r.

Définition 6
Les boules de centre 0_E et de rayon 1 sont appelées les boules unités.

Exemples de boules unités dans $\mathbb{R}^2$:

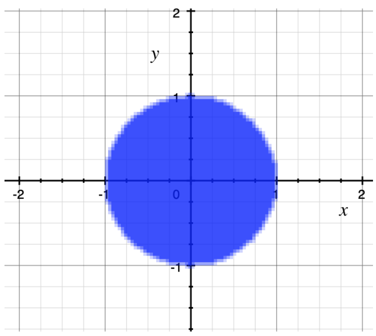

FIGURE 3.1 – Boule unité pour $\|\cdot\|_2$

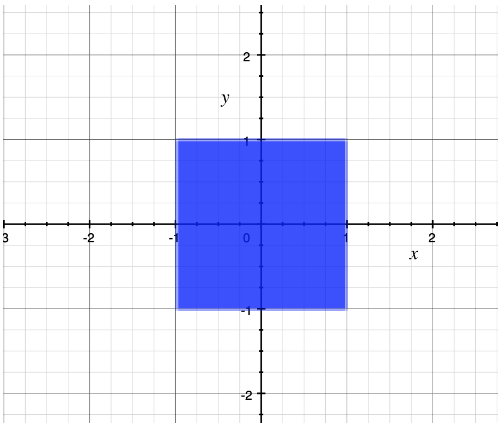

FIGURE 3.2 – Boule unité pour $\|\cdot\|_\infty$

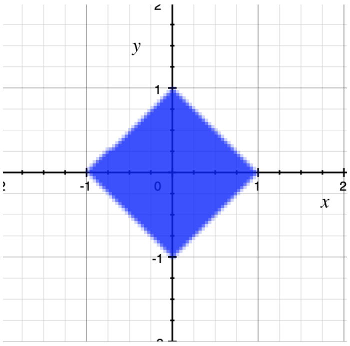

FIGURE 3.3 – Boule unité pour $\|\cdot\|_1$

On a $B_1(0_{\mathbb{R}^2},1) \subset B_2(0_{\mathbb{R}^2},1) \subset B_\infty(0_{\mathbb{R}^2},1)$.

Proposition 6

(Lien entre les boules ouvertes, fermées et sphères) Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. On a

i) $B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$

ii) $S(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$

iii) $B(a,r) \cap S(a,r) = \emptyset$

iv) $B(a,r) \cup S(a,r) = \overline{B}(a,r)$

Proposition 7

Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie convexe, c'est-à-dire que

$$\forall x,\, y \in B, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad (1-\theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère de rayon $r > 0$ n'est pas convexe.

Démonstration. Nous allons faire la preuve pour les boules ouvertes, la preuve pour les boules fermées est identique. Soit $a \in E$, $r > 0$ et considérons la boule ouverte $B(a, r)$. Soit $x, y \in B(a, r)$ et $\theta \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} \|(1-\theta)x + \theta y - a\| &= \|(1-\theta)(x-a) + \theta(y-a)\| \\ &\leq (1-\theta)\|x-a\| + \theta\|y-a\| \\ &< (1-\theta)r + \theta r \\ &= r. \end{aligned}$$

Par suite $\|(1-\theta)x + \theta y - a\| < r$ et donc $\quad (1-\theta)x + \theta y \in B, \ \forall \theta \in [0, 1]$.
Pour les sphères, montrons tout d'abord que $S(0_E, r)$ n'est pas convexe . Soit $x \in S(0, r)$. On a alors $-x \in S(0, r)$ mais $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}(-x) = 0_E \notin S(0_E, r)$.
Plus généralement pour $S(a, r)$, $a \in E$, on prend $x \in S(a, r)$. On a alors $-x + 2a \in S(a, r)$ mais $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}(-x + 2a) = a \notin S(a, r)$. $\square$

Exercice 1

Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $\forall a \in E$, $\forall r > 0$, $B(a, r) = a + B(0_E, r) = a + rB(0_E, 1)$.

Correction de l'exercice 1 : Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons tout d'abord que $B(a, r) = a + B(0_E, r)$. On a

$$\begin{aligned} x \in B(a, r) &\iff \|x - a\| < r \\ &\iff x - a \in B(0_E, r) \\ &\iff x \in a + B(0_E, r) \end{aligned}$$

D'où $B(a, r) = a + B(0_E, r)$.
Montrons maintenant que $B(0_E, r) = rB(0_E, 1)$.

$$\begin{aligned} x \in B(0_E, r) &\iff \|x\| < r \\ &\iff \|\frac{x}{r}\| = \frac{1}{r}\|x\| < 1 \\ &\iff \frac{x}{r} \in B(0_E, 1) \\ &\iff x \in rB(0_E, 1) \end{aligned}$$

D'où $B(0_E, r) = rB(0_E, 1)$.

3.1.5 Ensembles et fonctions bornés

Définition 7
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie $A \subset E$ est dite bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Ce qui revient à dire que A est incluse dans une boule fermée de centre 0_E.

Définition 8
Soit X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une fonction vectorielle $f : X \to E$ est bornée lorsque son image l'est, c'est-à-dire

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in X, \ \|f(x)\| \leq M.$$

Proposition 8
Soient $f, g : X \to E$ et λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Si f, g sont bornées, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Corollaire 1
L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$ des fonctions de X dans E.

3.1.6 Exemples d'espaces vectoriels normés

Proposition 9
(Norme sur un espace vectoriel de dimension finie) Tout espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

Démonstration. Soit $n = \dim E$.

a. Si $n = 0$, c'est évident, $E = \{0_E\}$. L'application

$$\begin{array}{cccc} N & : & E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & 0_E & \mapsto & 0 \end{array}$$

est une norme sur E.

b. Si $n \geq 1$, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On applique une des normes ℓ^p de $\mathbb{K}^n$ à ces coordonnées ($p = 1, 2, \infty$), i.e. on pose

$$N(x) = \|(x_1, ..., x_n)\|_p$$

et on vérifie facilement que c'est une norme.
En effet, soit $p \in \{1, 2, \infty\}$. Comme $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, on a

$$\forall x \in E, \quad 0 \leq N(x) = \|(x_1, ..., x_n)\|_p < +\infty$$

et

i) Séparation : $N(x) = 0 \iff \|(x_1, ..., x_n)\|_p = 0 \iff x_1 = ... = x_n = 0 \iff x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0_E$.

ii) Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a

$$N(\lambda x) = \|(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)\|_p = |\lambda| \, \|(x_1, ..., x_n)\|_p = |\lambda| \, N(x)$$

d'après l'homogénéité de $\|\cdot\|_p$ dans $\mathbb{K}^n$.

iii) Inégalité triangulaire : Pour tous $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$,

$$N(x+y) = \|(x_1+y_1, ..., x_n+y_n)\|_p \leq \|(x_1, ..., x_n)\|_p + \|(y_1, ..., y_n)\|_p = N(x)+N(y)$$

d'après l'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_p$ dans $\mathbb{K}^n$.

Par suite N est une norme sur E.

□

Exemple :
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (E_{ij})_{i,j=1,..,n}$ la base canonique, si on définit pour $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$, $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$, l'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
De même les applications $\|\cdot\|_1$ définie par $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ et $\|\cdot\|_2$ définie par $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ sont des normes sur E.

Proposition 10

(Produit d'espaces vectoriels normés) Soient (E_1, N_1),..., (E_p, N_p) des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Soit $E = E_1 \times ... \times E_p$ l'espace produit qui est lui même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1, ..., x_p) \in E$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{p} N_k^2(x_k)\right)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad \|x\|_\infty = \max_{k=1,...,p} N_k(x_k)$$

définissent des normes sur E.

Si on ne précise pas la norme sur E, on munit E de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. La preuve est facile à vérifier pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. On va la faire pour $\|\cdot\|_2$. $\|\cdot\|_2$ est bien un application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$: pour tout $x \in E$,

$$0 \leq \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{p} N_k^2(x_k)\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

i) Séparation :

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k^2(x_k)} = 0 \\
&\iff \sum_{k=1}^{p} N_k^2(x_k) = 0 \\
&\iff N_k^2(x_k) = 0 \quad \forall k = 1, ..., p \\
&\iff N_k(x_k) = 0 \quad \forall k = 1, ..., p \\
&\iff x_k = 0_{E_k} \ \forall k = 1, ..., p \\
&\iff x = (x_1, ..., x_p) = 0_E
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la 2ème équivalence le fait que $N_k^2(x_k) \geq 0$ pour tout $k = 1, ..., p$ et dans la 4ème équivalence le fait que N_k est une norme sur E_k pour tout $k = 1, ..., p$ et donc vérifie la séparation.

ii) Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, ..., x_p) \in E$. On a

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k^2(\lambda x_k)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |\lambda|^2 N_k^2(x_k)} = |\lambda| \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k^2(x_k)} = |\lambda| \ \|x\|_2$$

d'après l'homogénéité de N_k dans E_k.

iii) Inégalité triangulaire : Pour tous $x = (x_1, ..., x_p)$, $y = (y_1, ..., y_p)$,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{p} N_k^2(x_k + y_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} (N_k(x_k) + N_k(y_k))^2 \\
&= \sum_{k=1}^{p} \Big(N_k^2(x_k) + N_k^2(y_k) + 2N_k(x_k)N_k(y_k)\Big) \\
&= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\sum_{k=1}^{p} N_k(x_k)N_k(y_k) \\
&\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la 1ère inégalité l'inégalité triangulaire des N_k dans les E_k et dans la 2ème inégalité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^p$.

D'où $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ pour tout $x, y \in E$.

Par suite, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $E = E_1 \times ... \times E_p$. □

Exemples de normes sur des espaces vectoriels de dimension infinie

Proposition 11

(Norme de la convergence uniforme) Soit X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$, on définit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$, f est bornée, il existe donc $M \geq 0$, tel que $\|f(x)\| \leq M$ pour tout $x \in X$. Par suite

$$0 \leq \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\| \leq M < +\infty$$

i) Séparation :

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\| = 0 &\Longleftrightarrow \forall x \in X,\ \|f(x)\| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in X,\ f(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f = 0_{B(X,E)} \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la 1ère équivalence, le fait que $\forall x \in X$, $0 \leq \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty$ et que $\sup\{0\} = 0$ et dans la 2ème le fait que $\| \,.\, \|$ est une norme sur E.

ii) Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{B}(X, E)$,

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|\lambda f(x)\| = \sup_{x\in X} |\lambda| \, \|f(x)\| = |\lambda| \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$

où on a utilisé l'homogénéité pour la norme $\|\cdot\|$ sur E et le fait que $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ si $\alpha \geq 0$ (ici $\alpha = |\lambda|$).

iii) Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in \mathcal{B}(X, E)$. On a pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|(f+g)(x)\| &= \|f(x) + g(x)\| \\ &\leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \\ &\leq \sup_{x\in X} \|f(x)\| + \sup_{x\in X} \|g(x)\| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$.
Par suite, $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} \|(f+g)(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \forall f,\, g \in \mathcal{B}(X, E)$.

D'où $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.

□

Proposition 12

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ de fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, a, $b\in\mathbb{R}$, $a<b$ (sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$). Les applications définies sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ par $\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$

1. $\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$,
2. $\|f\|_2=\left(\int_a^b|f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$,
3. $\|f\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$

sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Démonstration. A faire en exercice pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ (pour $\|\cdot\|_\infty$, même preuve que celle de Proposition 11).
La preuve pour $\|\cdot\|_2$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ sera faite en TD et utilise pour montrer l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous pour les intégrales des fonctions de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, la preuve de l'inégalité triangulaire se généralise du cas $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que $\|f+g\|_2\leq\|\,|f|+|g|\,\|_2$ puis en utlisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. □

Proposition 13

(Inégalité de Cauchy-Schwarz version intégrale sur un segment) On se place sur $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ($a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$) muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)dt$. On a alors pour tous $f,g\in E$,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|\leq\left(\int_a^b|f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b|g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soient $f,g\in E$. Considérons le polynôme du 2nd degré P défini par

$$P(\lambda)=\|f+\lambda g\|_2^2=\int_a^b|f(t)+\lambda g(t)|^2dt=\lambda^2\|g\|_2^2+2\lambda\int_a^b f(t)g(t)\,dt+\|f\|_2^2$$

pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.
Par construction, $P(\lambda)\geq 0$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Comme le coefficient de λ^2 est $\|f\|^2\geq 0$, on déduit que son discriminant est négatif ou nul.
Donc $\Delta=4\langle f,g\rangle^2-4\|f\|_2^2\|g\|_2^2\leq 0$ ce qui n'est autre que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|\leq\left(\int_a^b|f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b|g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Remarque 4
(hors programme) Soit p un réel tel que $p \geq 1$, on définit pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors $\|\cdot\|_p$ est également une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

3.2 Equivalence des normes

Définition 9
Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace vectoriel E sont dites équivalentes si

$$\exists\, C_1,\, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Proposition 14
L'équivalence de normes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Théorème 1
(Equivalence des normes en dimension finie : admis) Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont deux à deux équivalentes.

Remarque 5

1. Comme $\dim \mathbb{R}^n = n$ finie, on a alors, d'après Théorème 1, que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a
$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.
2. Soient (E_1, N_1),..., (E_p, N_p) des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times ... \times E_p$ l'espace vectoriel produit. Alors les trois normes définies sur E dans la Proposition 10, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes ($\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p}\|x\|_2 \leq p\|x\|_\infty$ pour tout $x = (x_1, ..., x_p) \in E$).
3. En dimension infinie, il existe des normes équivalentes, mais il y a aussi des normes non équivalentes. On le verra par exemple en TD pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $C([a,b],\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension infinie.

Proposition 15
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E. Alors tout boule de centre $a \in E$ pour l'une des normes est incluse et contient des boules de même centre a (mais de rayons différents) pour l'autre norme.

Démonstration. On va faire la preuve pour les boules ouvertes, on fait pareil pour les boules fermées.
Comme les normes N_1 et N_2 équivalentes alors

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Soit $a \in E$ et $r > 0$. Considérons la boule $B_{N_1}(a, r)$. On va montrer que

$$B_{N_2}(a, C_1 r) \subset B_{N_1}(a, r) \subset B_{N_2}(a, C_2 r).$$

Soit $x \in B_{N_2}(a, C_1 r)$. On a alors

$$N_1(x - a) \leq \frac{1}{C_1} N_2(x - a) < \frac{1}{C_1} C_1 r = r$$

et donc $x \in B_{N_1}(a, r)$. D'où $B_{N_2}(a, C_1 r) \subset B_{N_1}(a, r)$.
Prenons maintenant $x \in B_{N_1}(a, r)$. On a alors

$$N_2(x - a) \leq C_2 N_1(x - a) < C_2 r$$

et donc $x \in B_{N_2}(a, C_2 r)$. D'où $B_{N_1}(a, r) \subset B_{N_2}(a, C_2 r)$.
Par suite

$$B_{N_2}(a, C_1 r) \subset B_{N_1}(a, r) \subset B_{N_2}(a, C_2 r).$$

□

Exemple :
Sur $\mathbb{R}^2$, on a $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_\infty$ ce qui nous donne $B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_2(0,\sqrt{2})$ et $\overline{B_2}(0,1) \subset \overline{B_\infty}(0,1) \subset \overline{B_2}(0,\sqrt{2})$.

3.3 Suites dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

3.3.1 Convergence

Définition 10

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que cette suite est convergente s'il existe $l \in E$ tel que $\|u_n - l\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - l\| \leq \epsilon,$$

ce qui aussi équivalent à dire

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - l\| < \epsilon.$$

On dit dans ce cas que $(u_n)_n$ converge vers l dans E et l est alors l'unique limite de la suite $(u_n)_n$. On note $l = \lim_n u_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$.
On dit que la suite est divergente dans le cas contraire.

Démonstration. Supposons qu'il existe $l_1, l_2 \in E$ tq $\|u_n - l_1\| \to 0$ et $\|u_n - l_2\| \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a alors

$$0 \leq \|l_1 - l_2\| \leq \|l_1 - u_n\| + \|u_n - l_2\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Par suite $\|l_1 - l_2\| = 0$ et donc $l_1 = l_2$. □

Remarque 6

$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l \iff u_n - l \underset{n\to+\infty}{\to} 0_E$.

Attention!

La convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est relative à la norme $\|\cdot\|$ et n'est pas en général satisfaite pour une autre norme. Si on travaille avec plusieurs normes sur E, on précisera la convergence de $(u_n)_n$ pour $\|\cdot\|$.

Exemple :
Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E converge vers $f \in E$ pour $\|\cdot\|_\infty$ si $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ce qui n'est autre que la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[a,b]$.

Proposition 16
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $l \in E$. On a alors la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|l\|$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après l'inégalité triangulaire inversée, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le |\,\|u_n\| - \|l\|\,| \le \|u_n - l\|.$$

Comme $\lim\limits_n \|u_n - l\| = 0$, on déduit que $\lim\limits_n |\,\|u_n\| - \|l\|\,| = 0$ et donc $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|l\|$. □

Proposition 17
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de E, alors $(u_n)_n$ est bornée.

Démonstration. On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de E. Il exsite donc $l \in E$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \ge N, \quad \|u_n - l\| \le \epsilon.$$

En particulier, pour $\epsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge N$, $\|u_n - l\| \le 1$ et donc pour tout $\forall n \ge N$, $\|u_n\| \le \|l\| + 1$ (d'après l'inégalité triangulaire).
Soit $M = \max(\|u_0\|, ..., \|u_{N-1}\|, \|l\| + 1)$. On a alors $\|u_n\| \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par suite la suite $(u_n)_n$ est bornée. □

On a les propriétés usuelles sur les limites .

Proposition 18
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E qui convergent respectivement vers l, $k \in E$. Alors pour tout λ, $\mu \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu k$.
En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes dans E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et l'application définie sur cet espace vectoriel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_n u_n$ est linéaire.

Démonstration. On a d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le \|\lambda u_n + \mu v_n - \lambda l - \mu k\| &\le \|\lambda u_n - \lambda l\| + \|\mu v_n - \mu k\| \\ &= |\lambda|\,\|u_n - l\| + |\mu|\,\|v_n - k\| \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

Par suite, $\|\lambda u_n + \mu v_n - \lambda l - \mu k\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\lambda u_n + \mu v_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda l + \mu k$ □

Proposition 19
Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique convergeant vers $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $l \in E$, alors $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl dans E.

Démonstration. On a, d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda_n u_n - \lambda l\| &= \|\lambda_n u_n - \lambda u_n + \lambda u_n - \lambda l\| \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| \|u_n\| + |\lambda|\,\|u_n - l\| \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda| + |\lambda|\,\|u_n - l\| \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $(u_n)_n$ converge et donc est bornée ($\exists M > 0$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Par suite, $\|\lambda_n u_n - \lambda l\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\lambda_n u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda l$. □

3.3.2 Invariance de la notion de convergence d'une suite pour des normes équivalentes

Proposition 20
Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes et celles-ci ont les mêmes limites pour les deux normes. En d'autres termes, si N et N' sont équivalentes, alors pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de E, on a l'équivalence :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l \text{ pour } N_1 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l \text{ pour } N_2$$

Démonstration. Comme les normes N_1 et N_2 équivalentes alors

$$\exists\, C_1, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_1 N_1(u_n - l) \leq N_2(u_n - l) \leq C_2 N_1(u_n - l).$$

Supposons donc que $(u_n)_n$ converge vers l dans E pour N_1 i.e. $\lim\limits_n N_1(u_n - l) = 0$. Comme $0 \leq N_2(u_n - l) \leq C_2 N_1(u_n - l)$, on a alors $\lim\limits_n N_2(u_n - l) = 0$ et donc $(u_n)_n$ converge vers l dans E pour N_2.
De même, réciproquement, supposons que $(u_n)_n$ converge vers l dans E pour N_2 i.e. $\lim\limits_n N_2(u_n - l) = 0$. Comme $0 \leq N_1(u_n - l) \leq \dfrac{1}{C_1} N_2(u_n - l)$, on a alors $\lim\limits_n N_1(u_n - l) = 0$ et donc $(u_n)_n$ converge vers l dans E pour N_1. □

Attention!
Si les normes ne sont pas équivalentes il se peut que la suite converge pour une des deux normes et diverge pour l'autre ou converge pour les deux normes mais vers des limites différentes.

Exemple :
On considère $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(t) = t^n$ pour tout $t \in [0,1]$.
On a $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $(f_n)_n$ converge vers 0_E pour $\|\cdot\|_1$.
D'autre part, $\|f_n\|_\infty = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ et donc $(f_n)_n$ ne converge pas vers 0_E pour $\|\cdot\|_\infty$.
On peut déduire donc que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

Proposition 21
Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites bornées.

Démonstration. Preuve facile, similaire à celle de Proposition 20. □

3.3.3 Convergence dans les espaces vectoriels de dimension finie

Définition 12
(Suites coordonnées dans un espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Soit $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$u(n) = \sum_{k=1}^{p} u_k(n)e_k = u_1(n)e_1 + ... + u_p(n)e_p.$$

Les suites scalaires $(u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $k = 1, ..., p$ sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base B.

Proposition 22
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. On a équivalence entre

i) la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E

ii) les suites coordonnées $(u_k(n))_n$, $k = 1, ..., p$ convergent dans $\mathbb{K}$.

De plus, dans ce cas on a

$$\lim_n u(n) = \left(\lim_n u_1(n)\right) e_1 + ... + \left(\lim_n u_p(n)\right) e_p.$$

Démonstration. E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut donc le munir d'une norme et rappelons que toutes les normes sont alors deux à deux équivalentes sur E. On va considérer la norme infinie : pour tout $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{k=1,..,p} |x_k|$.

Montrons tout d'abord que $i) \Longrightarrow ii)$.
On suppose que la suite $(u(n))_n$ converge vers $l = \sum_{k=1}^{p} l_k e_k$ dans E i.e. $\lim_n \|u(n) - l\|_\infty = 0$.
Comme on a pour tout $k = 1, .., p$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_k(n) - l_k| \leq \max_{k=1,..,p} |u_k(n) - l_k| = \|u(n) - l\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

on déduit alors que $|u_k(n) - l_k| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ pour tout $k = 1, ..., p$ et donc la suite $(u_k(n))_n$ converge vers l_k dans $\mathbb{K}$ pour tout $k = 1, .., p$.

Montrons maintenant que $ii) \Longrightarrow i)$.
Supposons que pour tout $k = 1, ..., p$, la suite $(u_k(n))_n$ converge vers l_k dans $\mathbb{K}$ i.e. $|u_k(n) - l_k| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Montrons que la suite $(u(n))_n$ converge vers $l = \sum_{k=1}^{p} l_k e_k$ dans E. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|u(n) - l\|_\infty = \max_{k=1,..,p} |u_k(n) - l_k| \leq \sum_{k=1}^{p} |u_k(n) - l_k| \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Par suite, $\lim_n \|u(n) - l\|_\infty = 0$ et donc $(u(n))_n$ converge vers $l = \sum_{k=1}^{p} l_k e_k$ dans E. $\square$

Exemple :

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ (de dimension 2), la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ avec
$$\forall n \geq 1, \quad u_n = (e^{\frac{1}{n}}, n\ln(1+\frac{1}{2n})) = e^{\frac{1}{n}}e_1 + n\ln(1+\frac{1}{n})e_2$$
où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Comme $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $n\ln(1+\frac{1}{2n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$, on déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} (1, \frac{1}{2})$.
2. Soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. Comme $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $(z_n)_n$ converge dans $\mathbb{C} \Longleftrightarrow (\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ et on a
$$\lim_n z_n = \lim_n \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_n \mathrm{Im}(z_n).$$
3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (de dimension n^2 finie, toutes les normes sont deux à deux équivalentes), une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'élements de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{ij}(k))_{i,j=1,\ldots,n}$ converge vers $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si seulement si
$a_{ij}(k) \underset{k\to+\infty}{\to} a_{ij}$ dans $\mathbb{K}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

3.3.4 Convergence dans les espaces produits

Théorème 2

Soit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ un produit d'espaces vectoriels normés (E_k, N_k), $k = 1, \ldots, p$, muni d'une des trois normes définies précédemment $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ (deux à deux équivalentes).
Soit $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = (u_1(n), \ldots, u_p(n))$.
Les suites $(u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées de la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
On a alors equivalence entre

i) la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E (pour la norme produit).

ii) les suites coordonnées $(u_k(n))_n$, $k = 1, \ldots, p$ convergent dans E_k (pour N_k).

De plus, dans ce cas on a
$$\lim_n u(n) = \left(\lim_n u_1(n), \ldots, \lim_n u_p(n)\right).$$

Démonstration. On va considérer la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ parmi les trois normes deux à deux équivalentes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ (déjà vu).
Montrons tout d'abord que $i) \Longrightarrow ii)$.

La suite $(u(n))_n$ converge vers $l = (l_1, ..., l_p)$ pour $\| \cdot \|_\infty$, on a donc $\lim\limits_n \|u(n) - l\|_\infty = 0$.
Comme $\forall k = 1, ..., p$, $0 \leq N_k(u_k(n) - l_k) \leq \|u(n) - l\|_\infty$, on a alors $\lim\limits_n N_k(u_k(n) - l_k) = 0$ pour tout $k = 1, ..., p$, ce qui montre $ii)$.
Montrons maintenant que $ii) \Longrightarrow i)$. Supposons que chaque $(u_k(n))_n$ converge dans E_k vers l_k pour $k = 1, ..., p$. Posons $l = (l_1, ..., l_p) \in E$. On a alors

$$0 \leq \|u(n) - l\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{p} N_k(u_k(n) - l_k) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

Par suite, $\lim\limits_n \|u(n) - l\|_\infty = 0$ et donc $(u(n))_n$ converge vers l dans E pour $\| \cdot \|_\infty$. $\square$