Семинар №1. Задача №2

выполнила студентка группы РК6-56Б, Новичкова Мария

1 Задание

Требуется:

1) построить интерполяционный многочлен, проходящий через узлы $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ с помощью метода неопределенных коэффициентов, тогда как (x_i, y_i) задать произвольно так, чтобы $x_1 < x_2 < x_3$;

2) построить интерполяционный многочлен, проходящий через те же узлы, как многочлен Лагранжа и сравнить его с многочленом, полученным в пункте 1.

2 Решение

Зададим интерполяционные узлы. Пусть $(x_1, y_1) = (5, 3), (x_2, y_2) = (10, 24)$, $(x_3, y_3) = (15, 17)$.

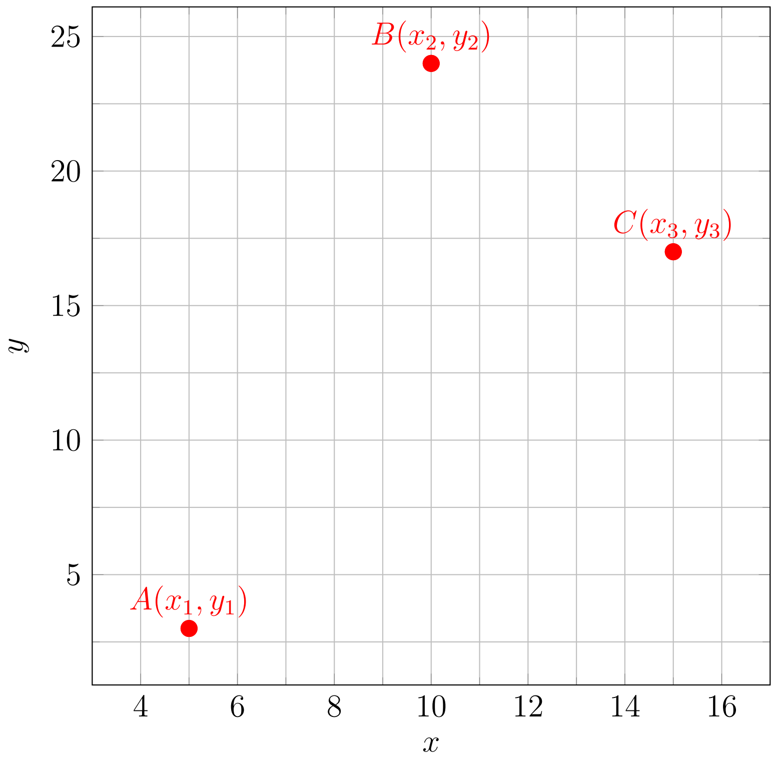

Рис.1. Узлы интерполяции

2.1 Метод неопределенных коэффициентов

Аппроксимирующая функция $\tilde{f}(x)$ представляется в виде линейной комбинации базисных функций $\phi_i(x)$.

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x),$$

где $c_i \in R$ и $n = 3$.
Базисными функциями будут являться многочлены $\phi_i(x) = x^{i-1}$.
Тогда метод неопределенных коэффициентов заключается в нахождении коэффициентов c_i путем решения следующей системы.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$$

Подставим координаты интерполяционных узлов в систему и найдем значения коэффициентов c_i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Решив систему методом Крамера, получили коэффициенты $c_1 = -46, c_2 = \frac{63}{5}, c_3 = -\frac{14}{25}$.
Тогда аппроксимирующая функция равна $\tilde{f}(x) = -\frac{14}{25}x^2 + \frac{63}{5}x - 46$.

2.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа по следующей формуле.

$$\tilde{f}_n(x_j) = L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

$$n = 3 \Rightarrow L_2(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)};$$

$$L_2(x) = 3\frac{(x-10)(x-15)}{(5-10)(5-15)} + 24\frac{(x-5)(x-15)}{(10-5)(10-15)} + 17\frac{(x-5)(x-10)}{(15-5)(15-10)} =$$

$$= \frac{-14x^2 + 315x - 1150}{25} = -\frac{14}{25}x^2 + \frac{63}{5}x - 46;$$

Интерполяционный многочлен, полученный вторым способом, соответствует многочлену, полученному с помощью метода неопределенных коэффициентов.

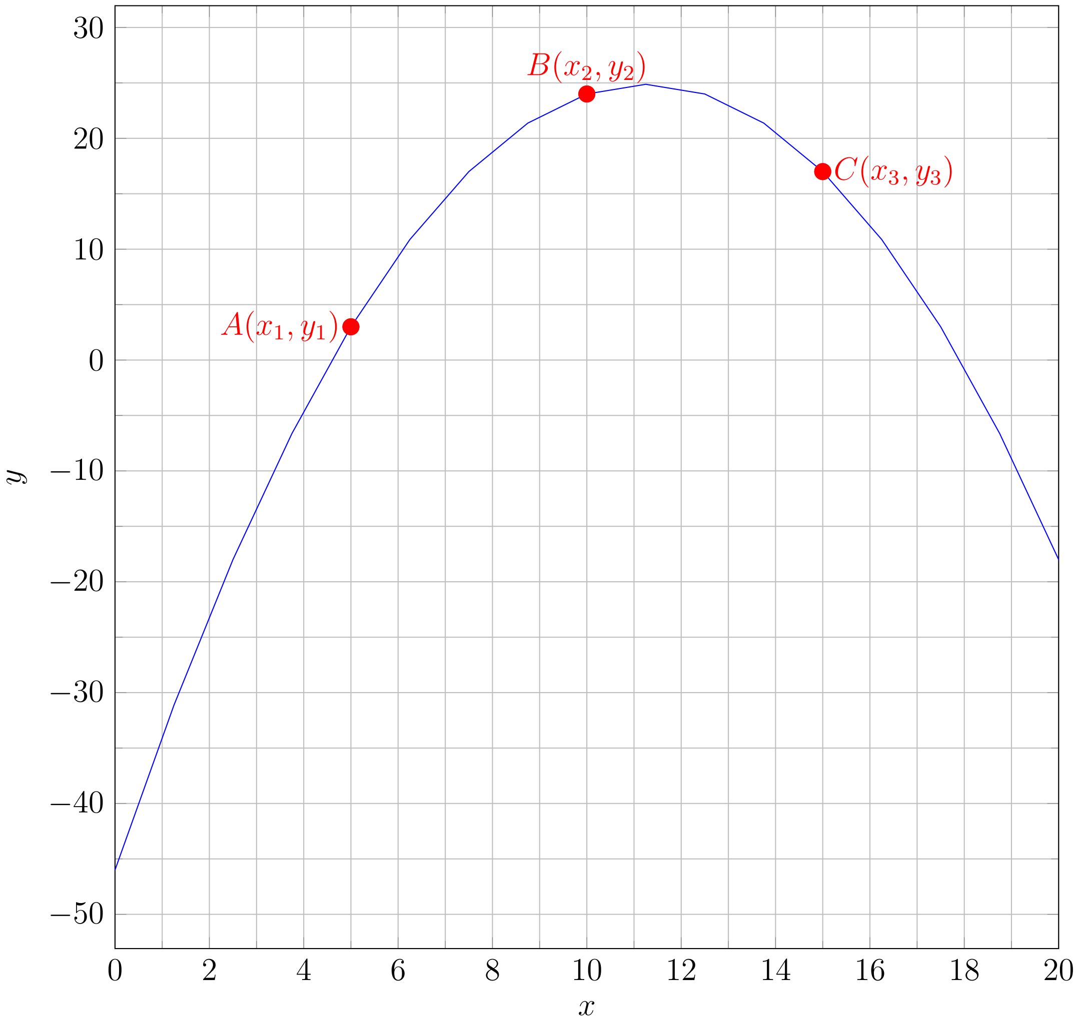

Рис.2. Аппроксимирующая функция