Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Новичкова Мария Алексеевна
Группа:	РК6-56Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Интерполяция Лагранжа

Студент	_______________ подпись, дата	Новичкова М.А. Фамилия, И.О.
Преподаватель	_______________ подпись, дата	Соколов А.П. Фамилия, И.О.

Москва, 2022

Содержание

Интерполяция Лагранжа

1 Задание

Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \tag{1}$$

где $x \in [-1; 1]$.
Также дана рациональная функция, известная как аппроксимация Паде:

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k}, \tag{2}$$

где $x \in [-1; 1]$.

Требуется (базовая часть):

1. Разработать функцию l_i(i, x, x_nodes), которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes, в точке x.

2. Написать функцию L(x, x_nodes, y_nodes), которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x.

3. Для равномерно расположенных узлов вывести на экран одновременно графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для следующих количеств узлов: 5,8,11,14,17,20,23. В результате это должно быть 7 пар графиков. Опишите, что наблюдается при увеличении количества узлов.

4. Повторить предыдущий пункт для чебышевских узлов. В чем разница между интерполяцией Лагранжа функции $f(x)$ на основе равномерно расположенных узлов и чебышевских? Сделать выводы.

Требуется (продвинутая часть):

1. Сгенерировать 100 функции $f_{n,m}(x)$, где целые степени $n, m \in [7; 15]$ и вещественные коэффициенты $a_j, b_k \in [0; 1]$ генерируются случайным образом для каждой из функций.

2. Для нескольких из сгенерированных функций вывести на экран одновременно графики $f_{n,m}(x)$ и соответствующего интерполяционного полинома $L(x)$, построенного по N равномерно расположенным узлам, где N выбирается по собственному усмотрению, но должно быть не меньше 5. На том же графике выведите $L(x)$, построенного по N чебышевским узлам.

3. Для каждой из функций, сгенерированных в предыдущем пункте, найдите интерполяционные полиномы $L(x)$, построенные по $N \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ равномерно расположенным узлам и чебышевским узлам. Для каждого N рассчитайте расстояние между $f_{n,m}(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L_∞. Рассмотрите несколько графиков зависимости этого расстояния для равномерных и чебышевских узлов от N и сделайте по ним вывод. Добавьте в отчет один характерный график, который наглядно демонстрирует верность вашего вывода.

4. Объясните, что такое аппроксимация Паде и до какой степени предложенный метод генерации случайных функций $f_{n,m}(x)$ позволяет обобщить выводы предыдущего пункта на произвольные функции

2 Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: исследование влияния расположения узлов и их количества на интерполяцию Лагранжа.

3 Базовая часть

При выполнении лабораторной работы был использован язык программирования Python, с применением библиотек numpy, matplotlib и random.

Задание 1

Значение i-того базисного полинома Лагранжа, построенного по интерполяционным узлам $x_1, x_2, ..., x_n$, в точке x вычисляется по формуле $l_i(x) = \prod\limits_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. [1]

Вычисление этого значения было реализовано в функции l_i(i, x, x_nodes) с помощью цикла for. В цикле на каждой итерации для каждого интерполяционного узла при выполнении условия $i \neq j$ домножаем промежуточный результат на дробь $\frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.
На листинге 1 представлен код функции l_i(i, x, x_nodes), разработанной на языке Python.

Листинг 1. Функция вычисления значения базисного полинома Ладгранжа в точке x

```
def l_i(i, x, x_nodes):
result = 1
for j in range(len(x_nodes)):
if j != i:
result *= (x−x_nodes[j])/(x_nodes[i] − x_nodes[j])
return result
```

Задание 2

Значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах $x_1, x_2, ..., x_n$, в точке x вычисляется по формуле $L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x)$. [1]
Вычисление этого значения было реализовано в функции L(x, x_nodes, y_nodes) с помощью цикла for, в котором на каждой итерации для каждого интерполяционного узла к промежуточному результату прибавляется произведение значения функции в каждом узле на значение i-го базисного полинома в точке x. На листинге 2 представлен код функции L(x, x_nodes, y_nodes), разработанной на языке Python.

Листинг 2. Функция вычисления значения интерполяционного полинома Лагранжа в точке x

```python
def L(x, x_nodes, y_nodes):
result = 0
for i in range(len(x_nodes)):
result += y_nodes[i]*l_i(i, x, x_nodes)
return result
```

Задание 3

Построение графиков функции $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ и её интерполяционного полинома Лагранжа $L(x)$, заданного на равномерно расположенных узлах, для следующих количеств узлов: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 можно реализовать, используя функции l_i(i, x, x_nodes) и L(x, x_nodes, y_nodes), разработанные в заданиях 1 и 2. Вывод графиков осуществляется с помощью библиотеки matplotlib. Для построения графиков используется метод plt.plot(x, y). Для вывода графиков используется функция plt.show(). Равномерно распределенные узлы интерполяции задаются с помощью библиотеки numpy, а именно np.linspace(-1, 1, n), где n - количество узлов.
На рисунках 1 - 7 представлены построенные графики для количества узлов соответственно равного 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23.

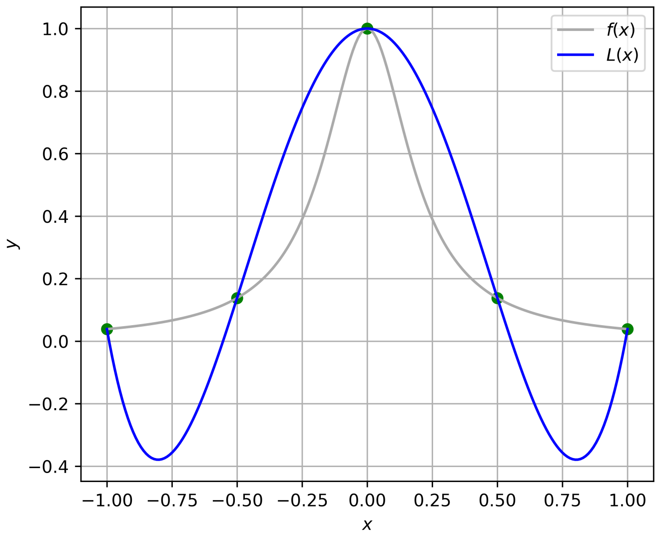

Рис. 1. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 5 равномерно распределенным узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

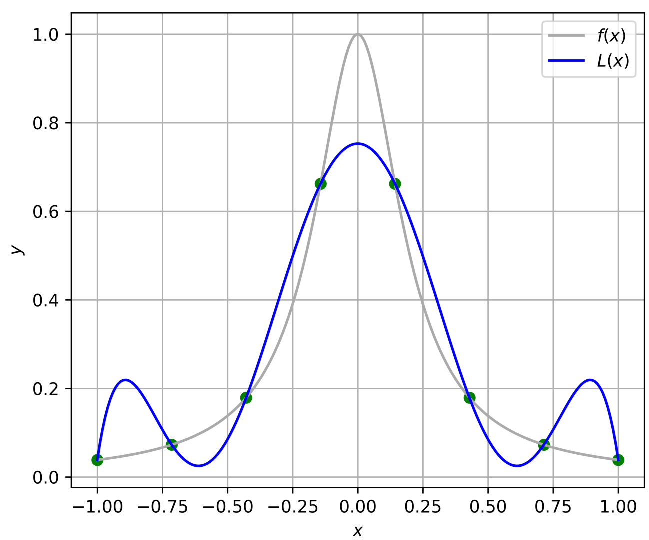

Рис. 2. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 8 равномерно распределенным узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

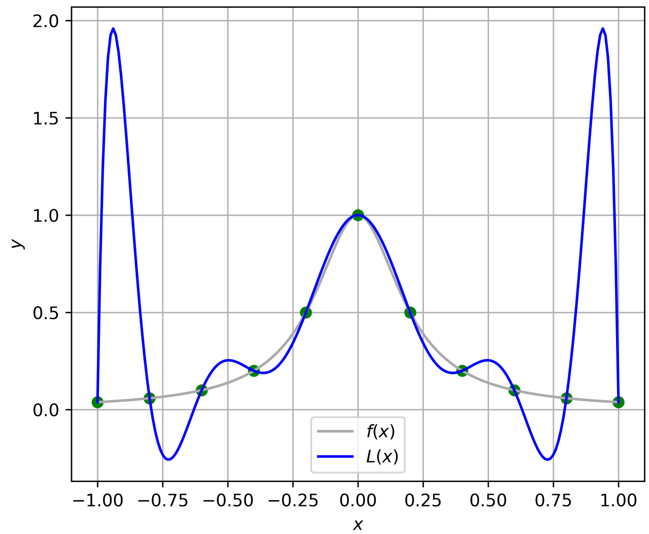

Рис. 3. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 11 равномерно распределенным узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

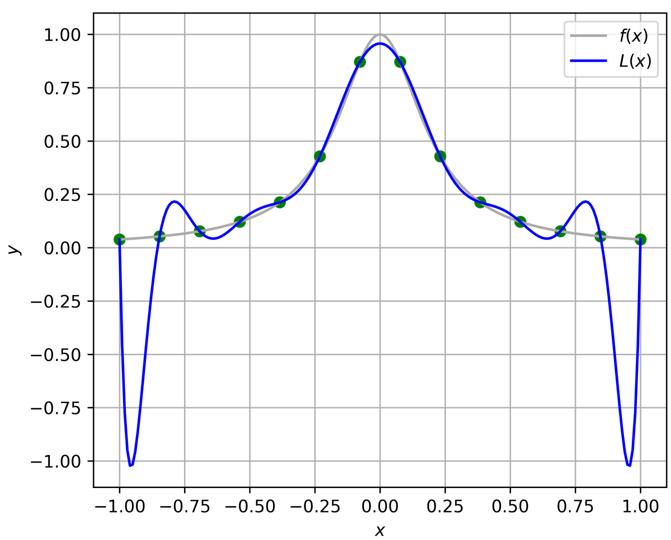

Рис. 4. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 14 равномерно распределенным узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

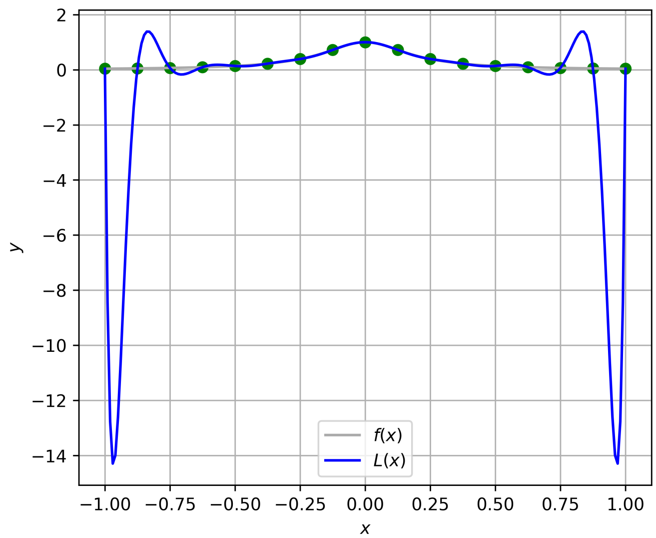

Рис. 5. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 17 равномерно распределенным узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

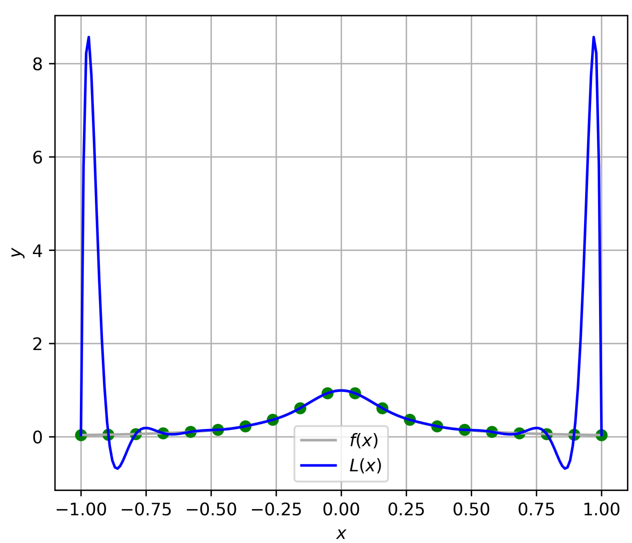

Рис. 6. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 20 равномерно распределенным узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

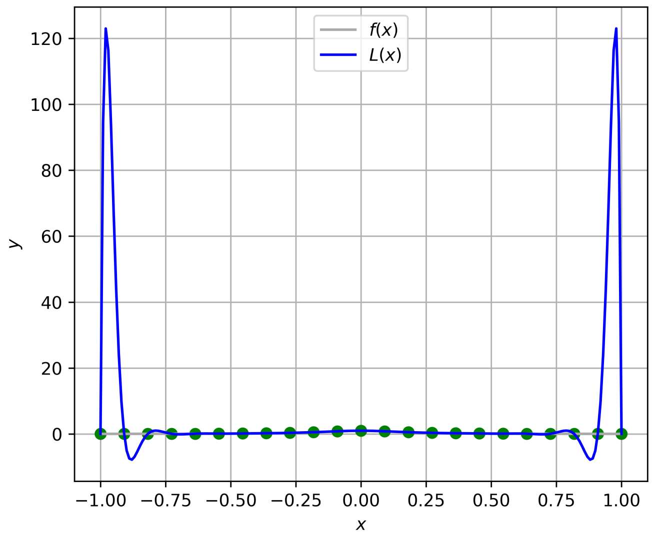

Рис. 7. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 23 равномерно распределенным узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

На графиках 1-7 можно заметить, что при увеличении степени полинома Лагранжа при интерполяции по равномерномерно распределенным узлам возникают осцилляции ближе к концам отрезка $[-1;1]$, на котором строится график. Этот эффект называется феноменом Рунге, - в численном анализе эффект нежелательных осцилляций, возникающий при интерполяции полиномами высоких степеней, когда погрешность интерполяции возрастает при увеличении количества интерполяционных узлов.

Задание 4

Построение графиков функции $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ и её интерполяционного полинома Лагранжа $L(x)$, заданного на чебышевских узлах, для следующих количеств узлов: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 можно реализовать, используя функции l_i(i, x, x_nodes) и L(x, x_nodes, y_nodes), разработанные в заданиях 1 и 2. Вывод и построение графиков реализуется аналогично реализации в задании 3.
Координаты чебышевских узлов вычисляются по следующей формуле.

$$\bar{x}_i = cos(\frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi)$$

Координаты чебышевских узлов можно вычислить с помощью библиотеки numpy: np.array([np.cos((2*i - 1)/(2*n)*np.pi) for i in range(1, n+1)]).
На рисунках 8 - 14 представлены построенные графики для количества узлов соответственно равного 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23.

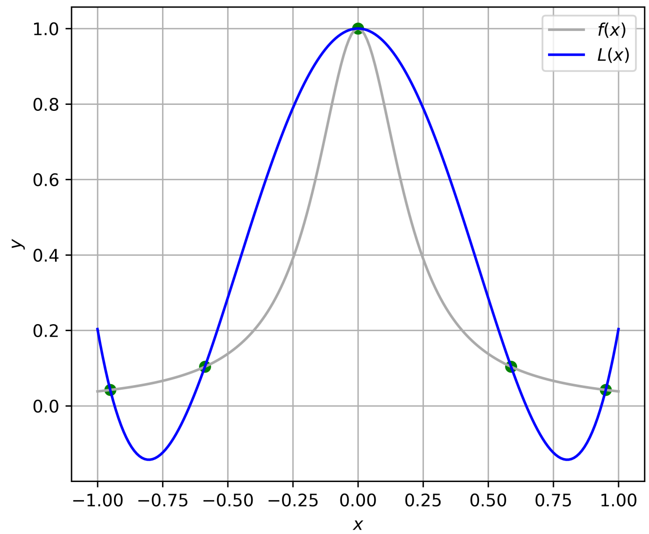

Рис. 8. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 5 чебышевским узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

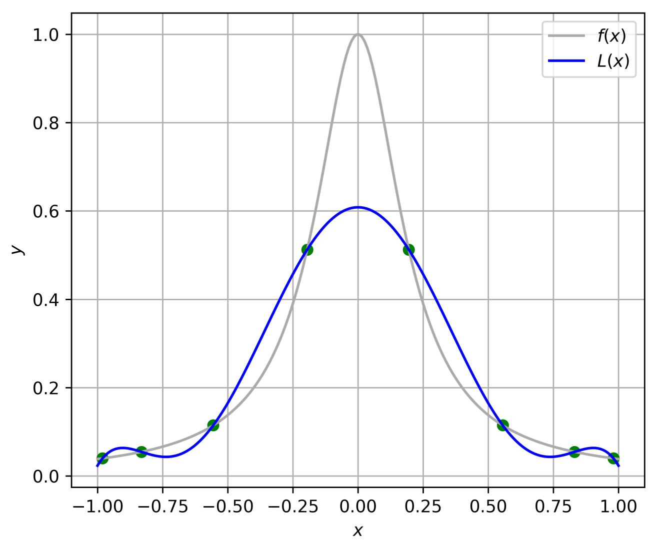

Рис. 9. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 8 чебышевским узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

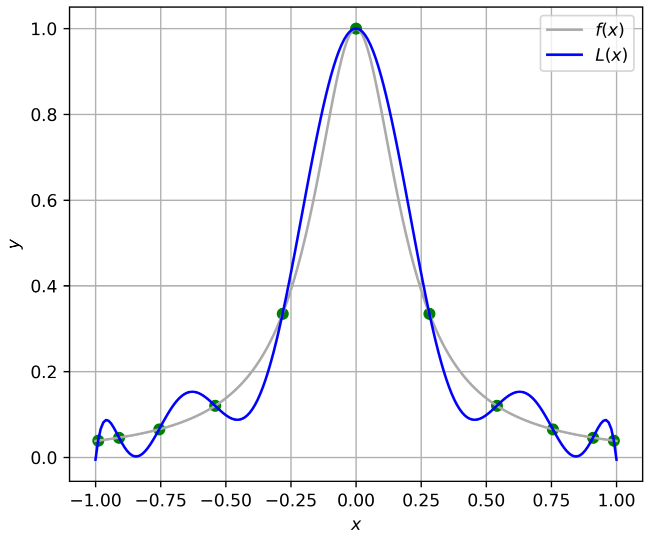

Рис. 10. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 11 чебышевским узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

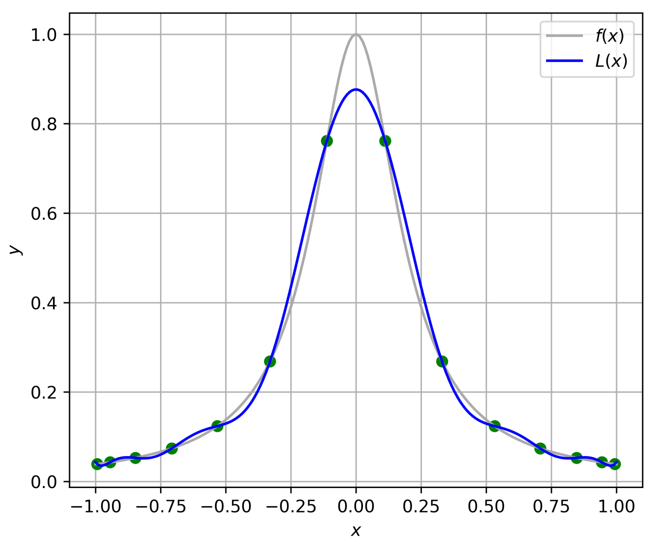

Рис. 11. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 14 чебышевским узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

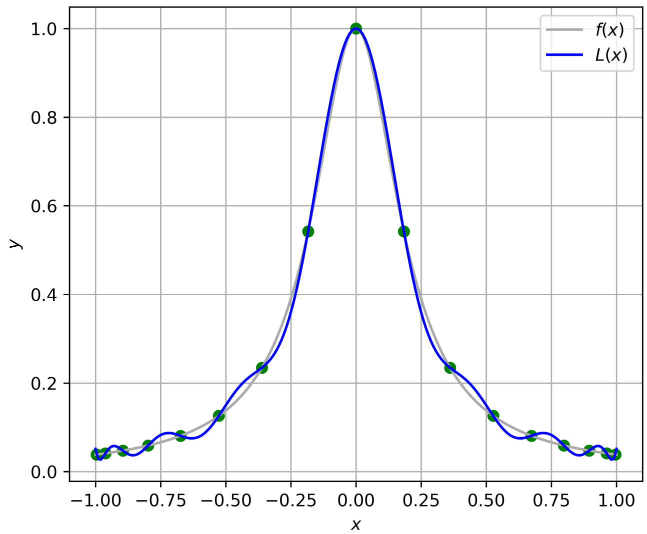

Рис. 12. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 17 чебышевским узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

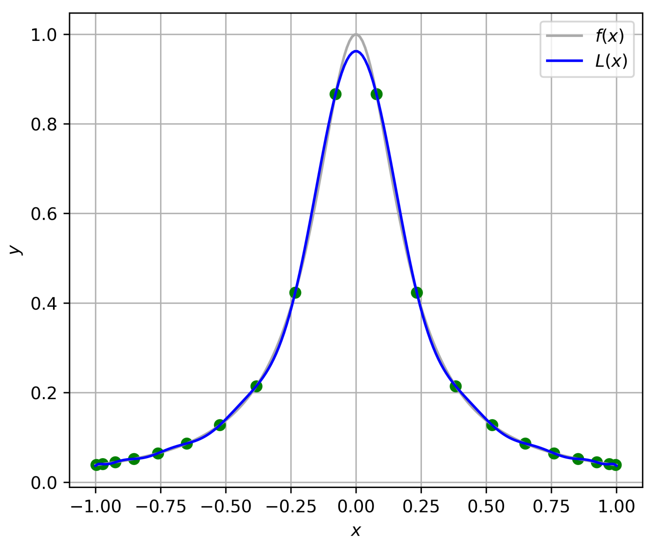

Рис. 13. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 20 чебышевским узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

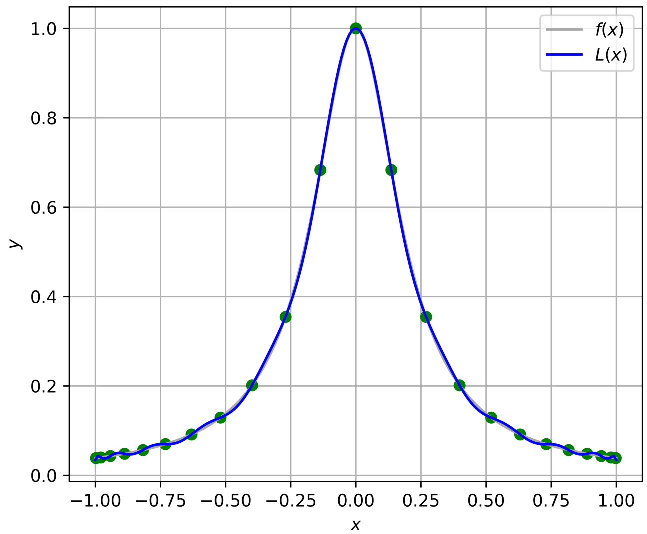

Рис. 14. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия) и, построенного по 23 чебышевским узлам (зеленные точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

На графиках 8-14 можно заметить, что при увеличении степени полинома Лагранжа при интерполяции по чебышевским узлам осцилляции ближе к концам отрезка $[-1; 1]$, на котором строится график, не увеличиваются.
Для наглядности на рисунках 15-16 изображены графики интерполянтов по равномерно распределенным узлам и по чебышевским узлам на одной координатной плоскости, совместно с графиком функции $f(x)$.

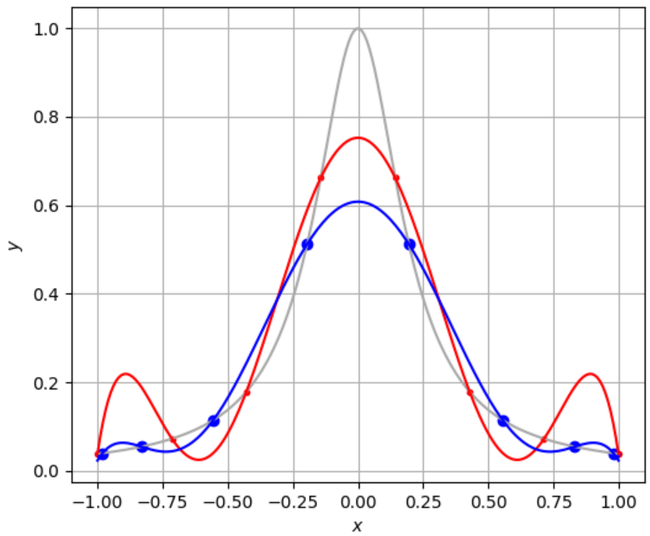

Рис. 15. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия), построенного по 8 чебышевским узлам (синие точки), полинома Лагранжа (синия линия) и, построенного по 8 равномерно распределенным узлам (красные точки), полинома Лагранжа (красная линия)

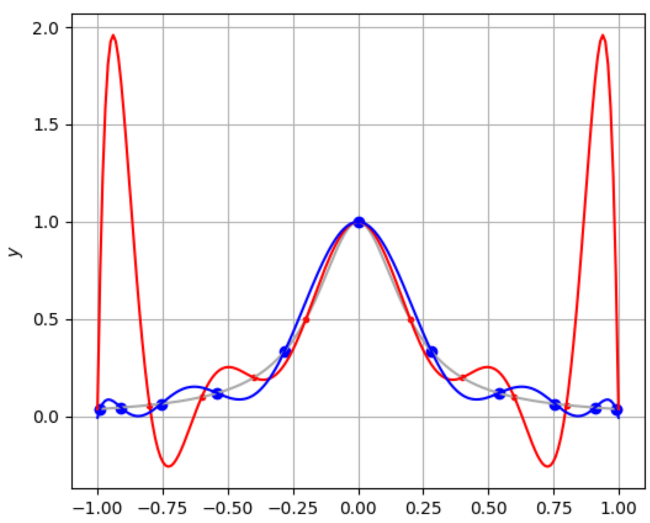

Рис. 16. Графики интерполируемой функции $f(x)$ (серая линия), построенного по 11 чебышевским узлам (синие точки), полинома Лагранжа (синия линия) и, построенного по 11 равномерно распределенным узлам (красные точки), полинома Лагранжа (красная линия)

Таким образом, задание в качестве узлов интерполяции корней многочлена Чебышева помогает снизить влияние эффекта Рунге при увеличении степени интерполяционного полинома.

4 Продвинутая часть

Задание 1

Для генерации случайных функций применяется рациональная функция $f_{n,m}(x)$, известная как аппроксимация Паде.

$$f_{n,m}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k},$$

где $x \in [-1;1]$, целые степени $n, m \in [7;15]$ и вещественные коэффициенты $a_j, b_k \in [0;1]$ Степени n, m и коэффициенты a_j, b_k генерируются случайным образом для каждой из 100 функций. Генерация случайных функций реализована в качестве функции generate_f(), которая формирует и возвращает анонимную функцию. Для генерации случайных параметров используется модуль random, а именно функция random.randint(a, b) для генерации целого числа в диапазоне $[a;b]$ и функция random.uniform(c, d) для генерации вещественного числа в диапазоне $[c;d]$.
На листинге 3 представлен код функции generate_f(), разработанной на языке Python.

Листинг 3. Функция генерации случайной функции

```python
def generate_f():
n = random.randint(7, 15)
m = random.randint(7, 15)
a = np.array([random.uniform(0,1) for i in range(m+1)])
b = np.array([random.uniform(0,1) for i in range(1, n+1)])
f = lambda x: sum([a[j]*x**j for j in range(m+1)])/(1 + sum([b[k]*x**(k+1) for k in
    range(0, n)]))
return f
```

Следует заметить что функция аппроксимации Паде при некоторых случайно сгенерированных коэффициентах может иметь разрыв на отрезке $[-1;1]$, поскольку знаменатель функции может устремляться к нулю в некоторой точке на отрезке $[-1;1]$. Пример функции, которая терпит разрыв на отрезке $[-1;1]$, представлен на рисунке 17. Такие функции не будут соответствовать условию непрерывности, которое необходимо для интерполирования полиномом, поэтому далее они расматриваться не будут.

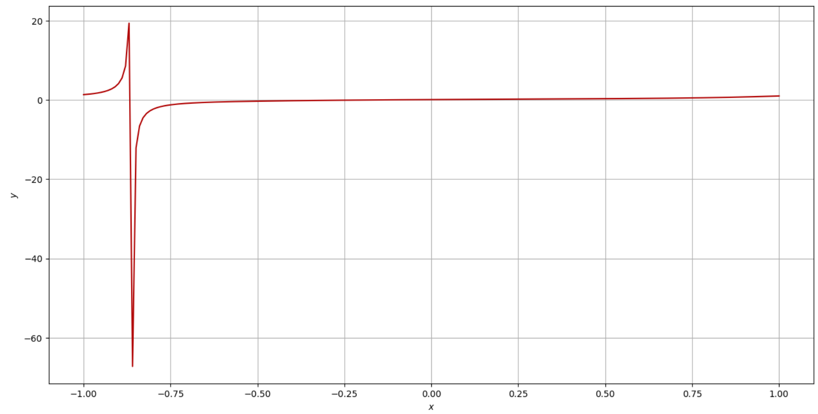

Рис. 17. График сгенерированной функции $f_{n,m}(x)$ (бордовая линия), которая терпит разрыв на отрезке $[-1; 1]$

Пример сгенерированной функции, которая удовлетворяет условию непрерывности, представлен на рисунке 18. Далее в работе будут рассматриваться непрерывные сгенерированные функции.

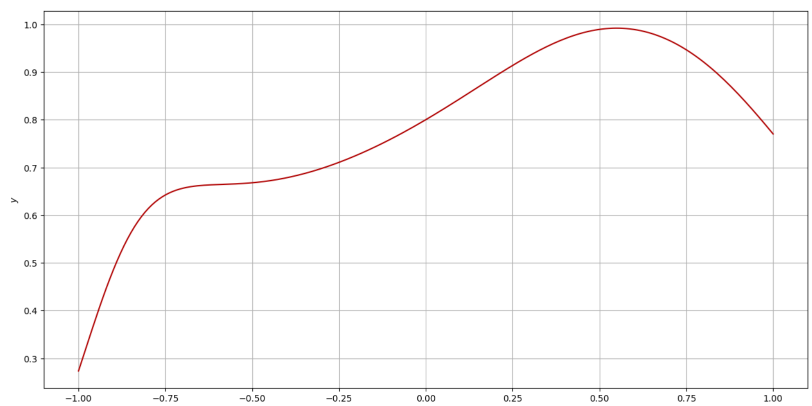

Рис. 18. График сгенерированной непрерывной функции $f_{n,m}(x)$ (бордовая линия)

Задание 2

На рисунках 19 - 21 представлены графики случайных сгенерированных функций, и их интерполяций полиномом Лагранжа по равномерно распределенным узлам и по чебышевским узлам.

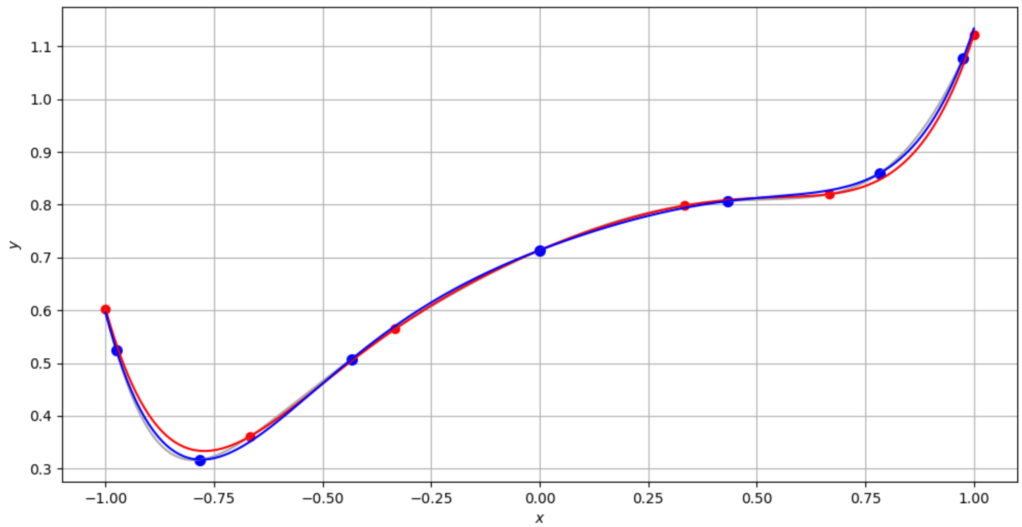

Рис. 19. Графики случайно сгенерированной функции $f_{n,m}(x)$ (серая линия), построенного по 7 чебышевским узлам (красные точки), полинома Лагранжа (красная линия) и, построенного по 7 равномерно распределенным узлам (синие точки), полинома Лагранжа (синяя линия)

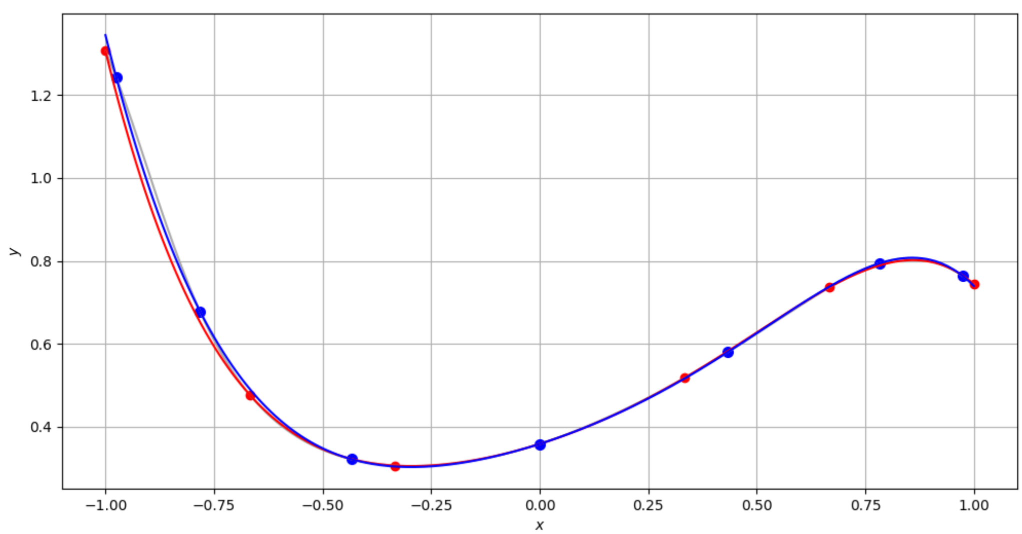

Рис. 20. Графики случайно сгенерированной функции $f_{n,m}(x)$ (серая линия), построенного по 7 чебышевским узлам (синие точки), полинома Лагранжа (синия линия) и, построенного по 7 равномерно распределенным узлам (красные точки), полинома Лагранжа (красная линия)

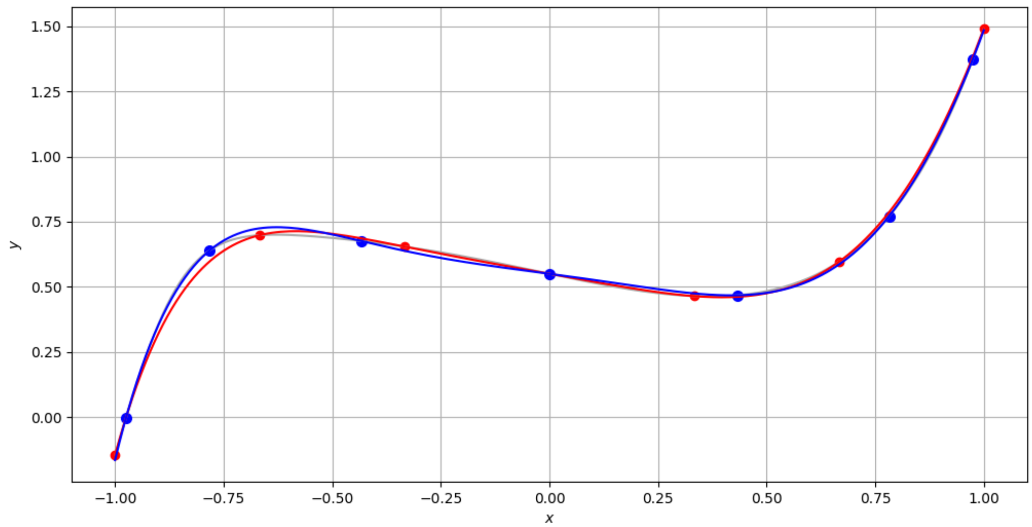

Рис. 21. Графики случайно сгенерированной функции $f_{n,m}(x)$ (серая линия), построенного по 7 чебышевским узлам (синие точки), полинома Лагранжа (синия линия) и, построенного по 7 равномерно распределенным узлам (красные точки), полинома Лагранжа (красная линия)

Задание 3

В качестве растояния между функцией и полиномом Лагранжа будем рассматривать равномерную норму, которую можно определить следующей формулой.

$$\|g(x)\|_\infty = \max_{x\in[a;b]} |L(x) - f(x)|$$

На рисунках 22-24 представлены графики зависимостей растояния между функцией $f_{n,m}(x)$ и интерполяционным полиномом Лагранжа от количества узлов, по которым задается полином, для функций изображенных соответственно на рисунках 19-21.

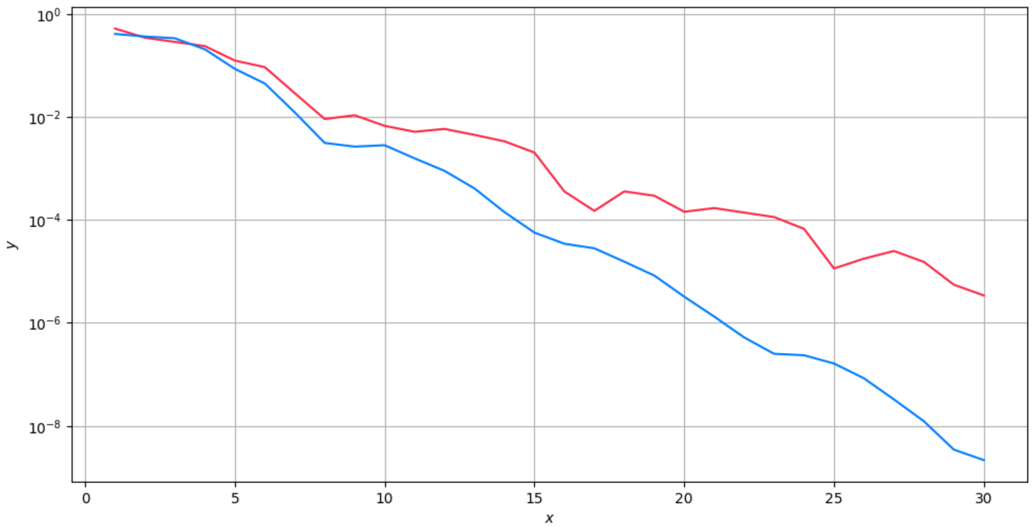

Рис. 22. Графики зависимостей растояния между функцией $f_{n,m}(x)$, представленной на рисунке 19, и полиномом Лагранжа от количества узлов, по которым задается полином, для равномерного распределения узлов (красная линия) и для чебышевских узлов (голубая линия)

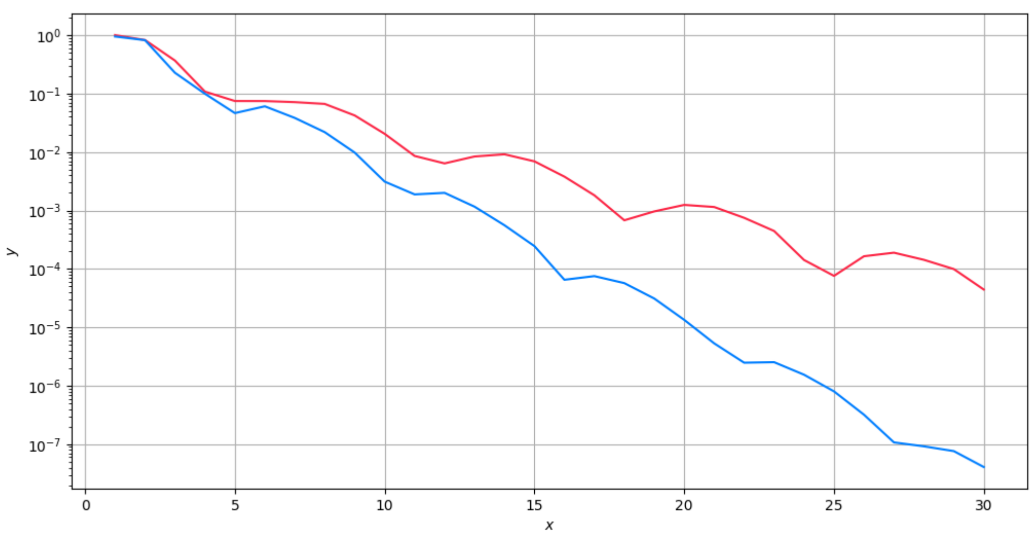

Рис. 23. Графики зависимостей растояния между функцией $f_{n,m}(x)$, представленной на рисунке 20, и полиномом Лагранжа от количества узлов, по которым задается полином, для равномерного распределения узлов (красная линия) и для чебышевских узлов (голубая линия)

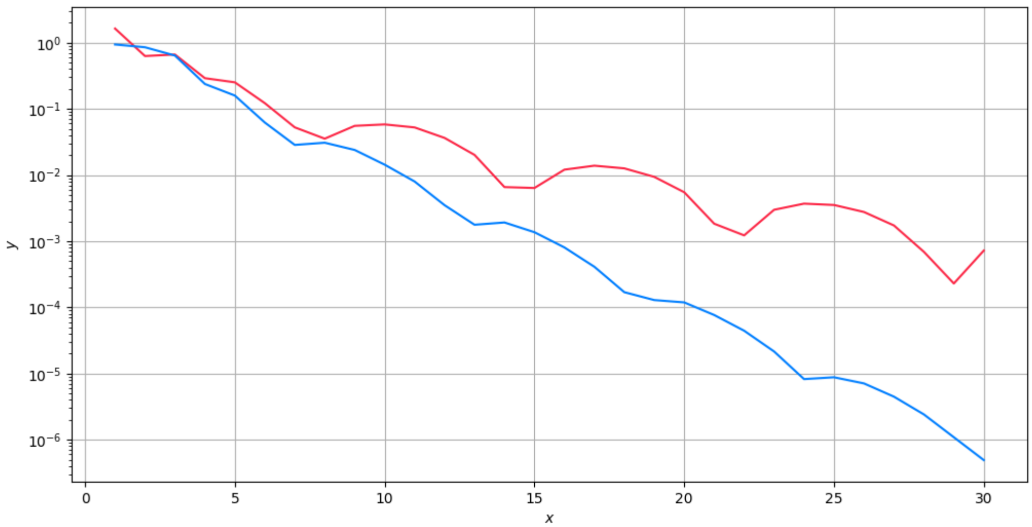

Рис. 24. Графики зависимостей растояния между функцией $f_{n,m}(x)$, представленной на рисунке 21, и полиномом Лагранжа от количества узлов, по которым задается полином, для равномерного распределения узлов (красная линия) и для чебышевских узлов (голубая линия)

Можно заметить, что при выборе в качестве узлов интерполяции корней многочлена Чебышева, расстояние между функцией и полиномом Лагранжа меньше чем расстояние, при выборе равномерно распределенных узлов. Также зависимость расстояния между сгенерированной функцией и интерполянтом ближе к логарифмической зависимости при задании полинома по чебышевским узлам.

Для наглядности увеличим множество рассматриваемых количеств узлов в два раза, тогда $N \in \{1, 2, 3 \ldots, 60\}$ и приведем графики исследованной функции на рисунке 25 и зависимостейна рисунке 26.

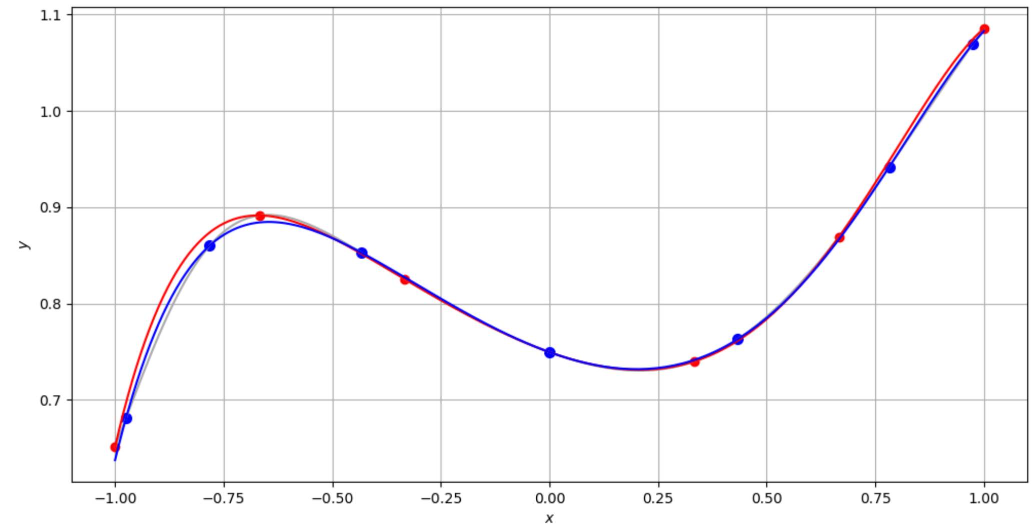

Рис. 25. Графики случайно сгенерированной функции $f_{n,m}(x)$ (серая линия), построенного по 7 чебышевским узлам (синие точки), полинома Лагранжа (синия линия) и, построенного по 7 равномерно распределенным узлам (красные точки), полинома Лагранжа (красная линия)

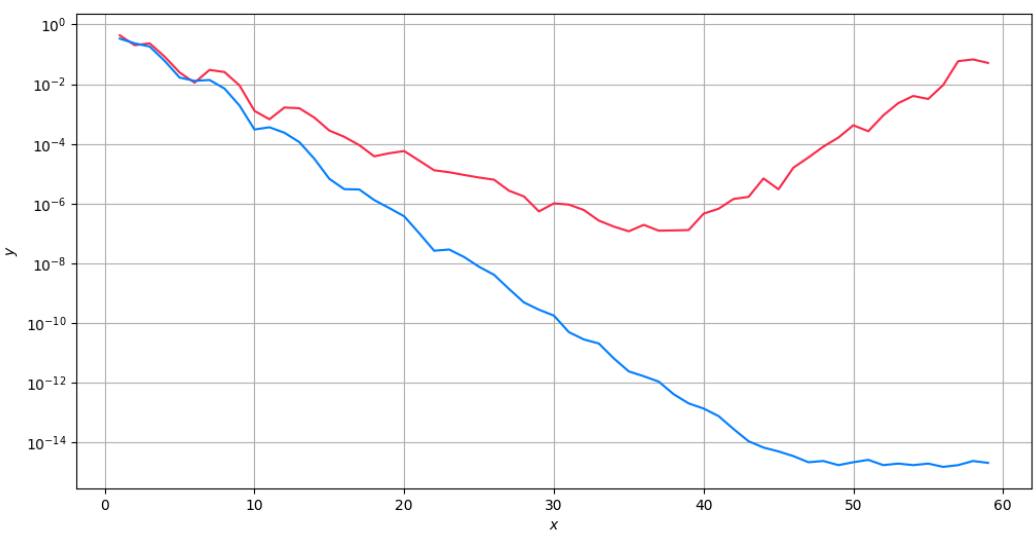

Рис. 26. Графики зависимостей растояния между функцией $f_{n,m}(x)$, представленной на рисунке 25, и полиномом Лагранжа от количества узлов, по которым задается полином, для равномерного распределения узлов (красная линия) и для чебышевских узлов (голубая линия)

На основании графика зависимостей можно заметить, что при выборе в качестве узлов интерполяции равномерно распределенных узлов для больших N при увеличении количества узлов расстояние между аппроксимируемой функцией и интерполянтом начинает возрастать. При построении полинома по чебышевским узлам такого эффекта не наблюдается.

Задание 4

Аппроксимация Паде - метод рационального приближения функции, который представляет функцию в виде отношения двух полиномов.

$$f(x)_{L,M} = \frac{a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + ... + a_L * x^L}{b_0 + b_1 * x + b_2 * x^2 + ... + b_M * x^M}$$

Согласно этому методу приближения, степенные ряды аппроксиманта согласуются со степенными рядами функции, которую он аппроксимирует. Поскольку метод аппроксимации Паде является достаточно точным методом приближения функций в рациональную функцию, можно обобщить выводы сделанные для сгенерированных непрерывных функций на произвольные непрерывные функции.

5 Заключение

1. Были разработанны функции l_i(i, x, x_nodes) и L(x, x_nodes, y_nodes), для вычисления значения базисного полинома Лагранжа и значения интерполянта Лагранжа в точке x соответственно.

2. Было исследовано влияние выбора узлов интерполяции на появление выраженных осцилляций ближе к границам отрезка интерполирования при увеличении количества узлов. Был сделан вывод: выбор чебышевских узлов в качестве узлов интерполяции позволяет минимизировать такие осцилляции.

3. Была реализована генерация случайных функций с помощью аппроксимации Паде (2) в виде функции на языке Python. Были сгенерированны 100 случайных функций, для нескольких из которых были построенны полиномы Лагранжа по чебышевским узлам и по равномерно распределенным узлам.

4. Была построена зависимость расстояния между сгенерированной функцией и полиномом Лагранжа от количества узлов интерполяции. На её основе были сделаны следующие выводы. Выбор в качестве узлов интерполляции корней многочлена Чебышева позволяет сократить погрешность интерполяции и исключить ворастание погрешности при увеличении количества узлов интерполяции.

5. Выводы сделанные в предыдущих пунктах были обобщены на произвольные непрерывные функции.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.

2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Новичкова М.А.Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2022. — 23 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)

2022, осенний семестр