Семинар №4. Задача №4

выполнила студентка группы РК6-56Б, Новичкова Мария

1 Задание

Требуется найти приближение заданной функции $f(x)$ квадратичным полиномом, используя взвешенный МНК и указанную систему ортогональных многочленов в качестве базисных функций для аппроксимирующей функции. Необходимо использовать многочлены Чебышева, вид функции известен :

$$f(x) = \ln x; \quad x \in [0.01; 3e].$$

2 Решение

Так как многочлены Чебышева заданы на отрезке $[-1; 1]$ введем замену переменных:

$$x = \frac{(b-a)t + a + b}{2} = \frac{0,01 + 3e + (3e - 0,01)t}{2},$$

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} = \frac{2x - 0,02 - 3e}{3e - 0,01},$$

где $t \in [-1; 1]$.
Тогда аппроксимируемая функция имеет вид:

$$f(t) = \ln\left(\frac{0,01 + 3e + (3e - 0,01)t}{2}\right).$$

Искомый квадратичный полином имеет вид: $P(t) = a_0 + a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t)$, где $\phi_i(t)$ - многочлены Чебышева, а именно $\phi_0(t) = 1, \phi_1(t) = t, \phi_2(t) = 2t^2 - 1$.
Используем взвешенный метод неопределенных квадратов, согласно которому оптимальные значения коэффициентов a_k находятся по формуле:

$$a_k = \frac{< f(x); \phi_k(x) >_\omega}{< \phi_k(x); \phi_k(x) >_\omega},$$

где $\phi_k(x)$ - многочлены Чебышева, а ω - весовая функция $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Таким образом коэффициенты a_k вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{\int\limits_{-1}^{1} f(t)\phi_0\omega(t)dt}{\int\limits_{-1}^{1} \phi_0^2\omega(t)dt} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} \ln\left(\frac{0,01+3e+(3e-0,01)t}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}{\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt},$$

$$a_1 = \frac{\int\limits_{-1}^{1} f(t)\phi_1\omega(t)dt}{\int\limits_{-1}^{1} \phi_1^2\omega(t)dt} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} \ln\left(\frac{0,01+3e+(3e-0,01)t}{2}\right)\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt}{\int\limits_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt},$$

$$a_2 = \frac{\int\limits_{-1}^{1} f(t)\phi_2\omega(t)dt}{\int\limits_{-1}^{1} \phi_2^2\omega(t)dt} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} \ln\left(\frac{0{,}01+3e+(3e-0{,}01)t}{2}\right)\frac{2t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt}{\int\limits_{-1}^{1} \frac{2t^2-1^2}{\sqrt{1-t^2}}dt},$$

Вычислив интегралы с помощью графического калькулятора Desmos, получим:

$$a_0 \approx 0,7812;$$

$$a_1 \approx 1,8647;$$

$$a_2 \approx -0,8692.$$

Тогда искомый многочлен:

$$P(t) = 0,7812 + 1,8647t - 0,8692(2t^2 - 1) = -1,7384t^2 + 1,8647t + 1,6504.$$

Перейдем от переменной t обратно к x:

$$P(x) = -1,7384 \cdot \left(\frac{2x - 0,02 - 3e}{3e - 0,01}\right)^2 + 1,8647 \cdot \frac{2x - 0,02 - 3e}{3e - 0,01} + 1,6504.$$

После упрощения получим:

$$P(x) \approx -0,10482x^2 + 0.886324x - 1,9274.$$

На рисунке 1 представлены графики данной функции и её приближения на заданном отрезке.

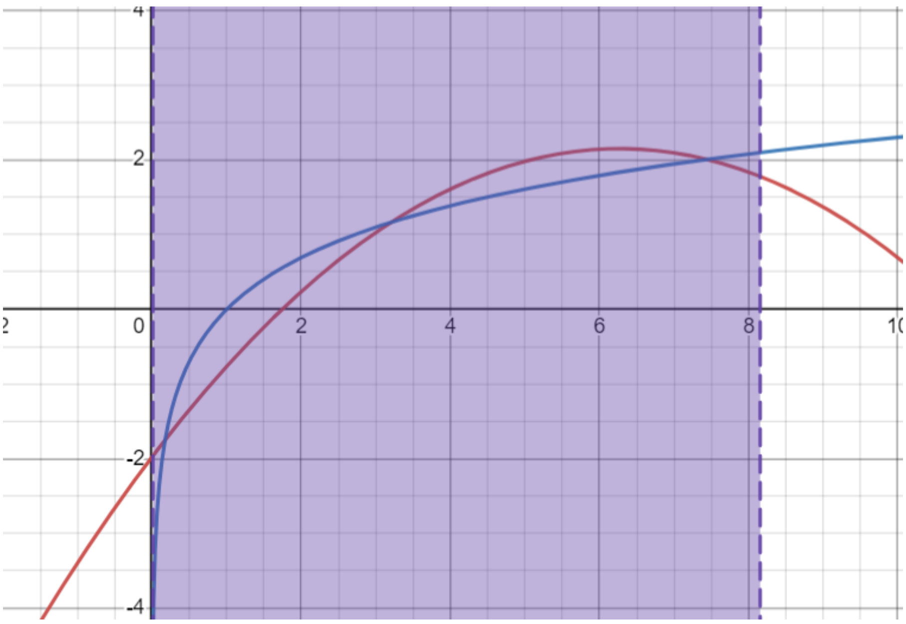

Рис. 1: Графики данной функции (синия линия) и аппроксимирующей функции(красная линия) на отрезке $[0.01; 3e]$ (фиолетовый фон)