

Семинар №5. Задача №1

выполнила студентка группы РК6-56Б, Новичкова Мария

1 Задание

Задание для варианта № 16.

Требуется найти численное решение задачи Коши с помощью метода Эйлера, используя шаг $h = 0.5$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1 + 0.5t}{1 + 3y}, \quad y(1) = 2, \quad t \in [1, 2].$$

Дополнительно требуется найти точное решение соответствующей задачи Коши, продемонстрировать графики численного и точного решений на одной координатной плоскости, а также представить абсолютные погрешности вычислений на каждом рассматриваемом шаге.

2 Решение

Дискретизируем координату t с учетом шага h . Получаем сетку $t_i = a + ih = 1 + 0.5i$. Тогда $t_0 = 1$, $t_1 = 1.5$, $t_2 = 2$.

Согласно методу Эйлера:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i),$$

где мы ожидаем, что $w_i \approx y(t_i)$.

Тогда:

$$w_0 = y(1) = 2,$$

$$w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0) = 2 + 0.5 \frac{1.5}{14} = 2 \frac{3}{28} \approx 2.10714,$$

$$w_2 = w_1 + hf(t_1, w_1) = 2 \frac{3}{28} + 0.5 \frac{1 + 0.75}{1 + 3 \cdot 2 \frac{3}{28}} = 2 \frac{1301}{5740} \approx 2.11952.$$

Таким образом:

$$y(t_1) = w_1 = 2 \frac{3}{28} \approx 2.10714,$$

$$y(t_2) = w_2 = 2 \frac{49}{410} \approx 2.11952.$$

Найдем аналитическое решение ОДУ.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1 + 0.5y}{1 + 3y}$$

$$(1 + 3y)dy = (1 + 0.5t)dt$$

$$\int (1 + 3y)dy = \int (1 + 0.5t)dt$$

$$y + \frac{3}{2}y^2 = t + \frac{1}{4}t^2 + C$$

С учетом начального условия $y(1) = 2$ получаем:

$$y + \frac{3}{2}y^2 = t + \frac{1}{4}t^2 + 6.75, \quad y > 0.$$

Тогда:

$$y(t_1) = y(1.5) \approx 2.11332,$$

$$y(t_2) = y(2) \approx 2.23787.$$

Построим график аналитического и численного решения ОДУ.

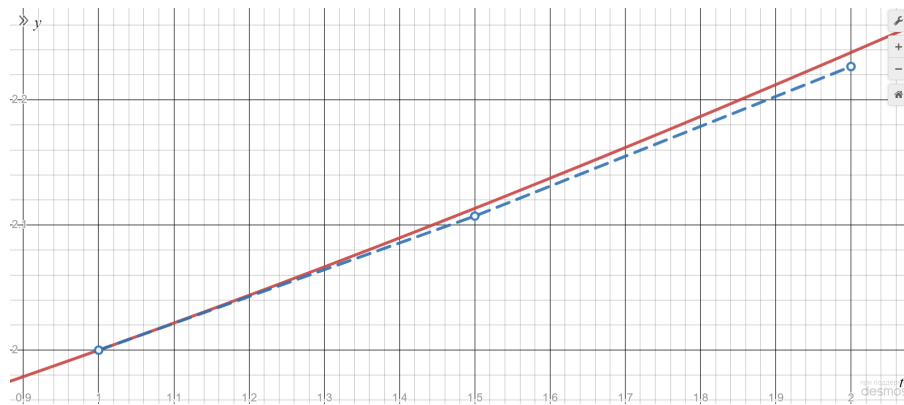


Рис. 1: Графики аналитически найденной функции y (красная линия) и численного решения (синие точки), построенные в графическом калькуляторе Desmos.

Абсолютные погрешности вычислений на каждом шаге:

$$\Delta_1 = |y(t_1) - w_1| \approx |2.11332 - 2.10714| \approx 0.00618,$$

$$\Delta_2 = |y(t_2) - w_2| \approx |2.23787 - 2.11952| \approx 0.11835.$$