Семинар №3. Задача №3

выполнила студентка группы РК6-56Б, Новичкова Мария

1 Задание

Требуется найти аппроксимацию значения интеграла

$$I = \int_0^b f(x)dx, \quad f(x) \in F = \left\{x^2e^{-x}; x^3e^{-x}; x^2e^{-2x}\right\}, \quad b \in B = \{1, 2, 3\}$$

с помощью формул трапеций и средних, сравнить её с точным значением и для каждой из формул найти верхнюю границу погрешности такой аппроксимации.
В расчетах использовать элементы с индексами: $id_F[f(x)], id_B[b]$.
Вариант по списку - 16, тогда

$$f(x) = x^3e^{-x}, \quad b = 2, \quad I = \int_0^2 x^3e^{-x}dx.$$

2 Решение

2.1 Формула средних

Выражение для формулы средних имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_1)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,$$

где $x_1 = \frac{a+b}{2}, \xi \in (a; b)$.

$$I = \int_0^2 x^3e^{-x}dx = f(1)(2-0) + \frac{f''(\xi)}{24}(2-0)^3 = 2e^{-1} + \frac{f''(\xi)}{3} \approx 2e^{-1} \approx 0,736.$$

2.2 Формула трапеций

Выражение для формулы трапеций имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^3}{12}f''(\xi),$$

где $x_1 = a, x_2 = b, h = b - a, \xi \in (a; b)$.

$$I = \int_0^2 x^3e^{-x}dx = \frac{2}{2}\left[f(0) + f(2)\right] - \frac{2^3}{12}f''(\xi) = 8e^{-2} - \frac{2}{3}f''(\xi) \approx 8e^{-2} \approx 1,083.$$

2.3 Вычисление точного значения интеграла

Возьмём неопределенный интеграл $\int x^3e^{-x}dx$ с помощью метода интегрирования по частям.
Полагая $u(x) = x^3, dv(x) = e^{-x}$, имеем $du(x) = 3x^2dx, v(x) = -e^{-x}$.
Тогда

$$\int x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x} - 3\int x^2e^{-x}dx.$$

Последний интеграл аналогично расскладывается с помощью метода интегрирования по частям. Полагая $u(x) = x^2, dv(x) = e^{-x}$, имеем $du(x) = 2xdx, v(x) = -e^{-x}$.
Тогда

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2\int xe^{-x}dx.$$

Последний интеграл аналогично расскладывается с помощью метода интегрирования по частям. Полагая $u(x) = x, dv(x) = e^{-x}$, имеем $du(x) = dx, v(x) = -e^{-x}$.
Тогда

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int e^{-x}dx. = -xe^{-x} + e^{-x} + C.$$

Итак,

$$\int x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x} - 3(-x^2e^{-x} - 2(-xe^{-x} + e^{-x} + C)) =$$

$$= -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + C = e^{-x}(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) + C.$$

Теперь вычислим значение определенного интеграла:

$$I = \int_0^2 x^3e^{-x}dx = e^{-2}(-2^3 - 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 - 6) = -38e^{-2} + 6 \approx 0,857.$$

2.4 Сравнение точного и приближенных значений

Точное значение интеграла равно $I = -38e^{-2} + 6$. Приближенное значение, полученное по формуле средних, равно $I \approx 2e^{-1}$. Тогда погрешность такого приближения равна

$$\delta = \left|-38e^{-2} + 6 - 2e^{-1}\right| \approx 0,1215.$$

Приближенное значение, полученное по формуле трапеций, равно $I \approx 8e^{-2}$. Тогда погрешность такого приближения равна

$$\delta = \left|-38e^{-2} + 6 - 8e^{-2}\right| = 46e^{-2} - 6 \approx 0,2254.$$

2.5 Оценка верхней границы погрешности приближения

Верхняя граница погрешности достигается при наибольшем значении остаточного члена, который в свою очередь зависит от $f''(\xi)$, где $\xi \in (0;2)$.

$$f''(x) = \left[x^3e^{-x}\right]'' = e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x).$$

Найдем такую точку ξ, в которой $f''(\xi)$ будет достигать наибольшего значения на интервале $(0;2)$.
$f^{(3)}(x) = e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$. Найдем точки пересечения третьей производной с осью абсцисс графическим способом.

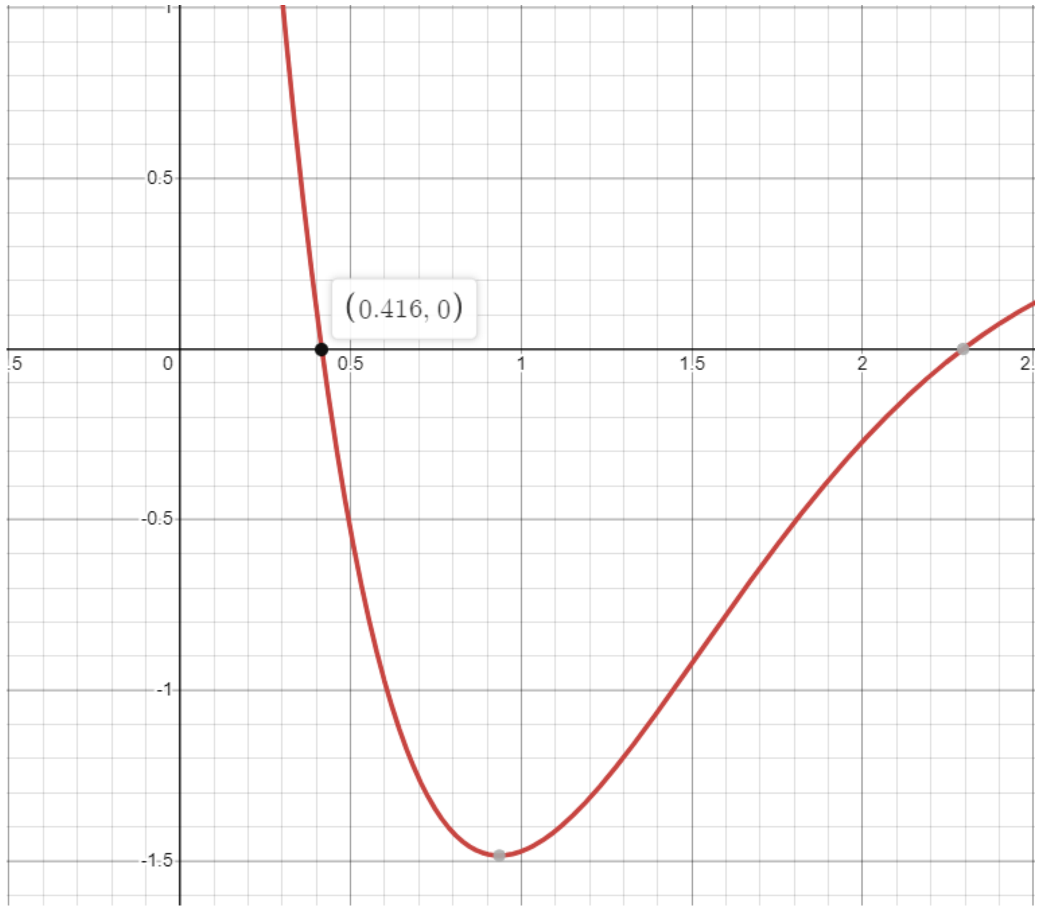

Рис. 1: График функции $f(x) = e^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$, на котором отмечена точка пересечения с осью абсцисс на интервале $(0; 2)$, полученный в Desmos.

Таким образом, получили $\xi \approx 0,416$. Тогда $f''(\xi) = e^{-\xi}(\xi^3 - 6\xi^2 + 6\xi) \approx 2,319$. Итак, верхняя граница погрешности для аппроксимации с помощью формулы средних равна

$$\frac{f''(\xi)}{3} \approx \frac{2,319}{3} \approx 0,773.$$

Верхняя граница погрешности для аппроксимации с помощью формулы трапеций равна

$$\frac{2}{3}f''(\xi) \approx \frac{2 \cdot 2,319}{3} \approx 1.546.$$