Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

# ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Вычислительная математика»

| | |
|---|---|
| Студент: | Новичкова Мария Алексеевна |
| Группа: | РК6-56Б |
| Тип задания: | лабораторная работа |
| Тема: | Численное дифференцирование и интегрирование |

| | | |
|---|---|---|
| Студент | ____________<br>подпись, дата | Новичкова М.А.<br>Фамилия, И.О. |
| Преподаватель | ____________<br>подпись, дата | ____________<br>Фамилия, И.О. |

Москва, 2022

# Содержание

# Численное дифференцирование и интегрирование

## Задание

Даны функция

$$g_1(x) = xe^x,$$

с узлом $x_0 = 2$ и функция

$$g_2(x) = x^2 sin(3x),$$

заданная на интервале $x \in [0; \pi]$.

Требуется(базовая часть):

1. Написать функцию diff2(x_0, h, f), которая возвращает значение первой производной функции f на основе центральной формулы численного диффуеренцирования 2-го порядка в точке $x_0$ для шага дифференцирования $h$.

2. Рассчитать производную $g_1'(x)$ в точке $x_0 = 2$ для множества значений $h \in [10^{-16}; 1]$ с помощью функции diff2. Постройте log-log графики зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования.

3. Написать функцию composite_simpson(a, b, n, f) численного интегрирования функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.

4. Рассчитать интеграл $\int_0^\pi g_2(x)dx$ с помощью составной формулы Симпсона для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования.

Требуется (продвинутая часть):

1. Вывести общую центральную формулу численного дифференцирования 4-го порядка вместе с остаточным членом, аппроксимирующую первую производную по 5 узлам:

$$f'(x_0) \approx Af(x_0 - 2h) + B(x_0 - h) + Cf(x_0) + Df(x_0 + h) + Ef(x_0 + 2h).$$

Продемонстрируйте, что формула действительно имеет 4-й порядок точности.

2. Написать функцию diff4(x_0, h, f), которая возвращает значение первой производной функции $f$ на основе центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка в точке x_0 для шага дифференцирования $h$.

3. Рассчитать производную $g_1'(x)$ в точке $x_0 = 2$ для множества значений $h \in [10^-16; 1]$ с помощью функции diff4. Добавьте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования к соответствующему графику для diff2. Для каждого случая (diff2 и diff4) ответьте на следующие вопросы: – Каким образом на log-log графике можно увидеть порядок формулы дифференцирования? Докажите это формульно и продемонстрируйте на графике по аналогии с лекциями.
– Совпадает ли порядок выведенной формулы дифференцирования на log-log графике с ее действительным порядком?

– Каков оптимальный шаг дифференцирования, при котором абсолютная по-грешность минимальна? С чем связано существование такого минимума? Обоснуйтесвой ответ, ссылаясь на данные log-log графика.
– Сравните оптимальный шаг дифференцирования и соответствующую минимально достижимую погрешность для формул 2-го и 4-го порядка. Как вы думаете,чем обоснована разница между ними?

4. Сравните порядок формулы, полученный с помощью графика для составнойформулы Симпсона, с аналитическим порядком точности составной формулы Симпсона. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минизимирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

5. С помощью теоремы о корнях многочленов Лежандра, доказанной в лекциях,вывести квадратуру Гаусса, имеющую степень точности 5. Сколько узлов необходимо для использования такой квадратуры?

6. Написать функцию gauss_quad5(f) численного интегрирования функции f спомощью квадратуры Гаусса пятой степени точности.

7. Доказать, что квадратура Гаусса имеет степень точности 5, с помощью следующего вычислительного эксперимента:
– постройте последовательность полиномов $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), P_5(x), P_6(x)$, имеющих степени соответственно 0,1,2,3,4,5 и 6, используя случайно сгенерированные значения коэффициентов полиномов;
– проинтегрируйте их на интервале $[0;2]$ аналитически и с помощью выведеннойквадратуры Гаусса;
– посчитайте абсолютную погрешность и сделайте вывод о степени точности вы-веденной квадратуры;
– все выкладки и посчитанные значения должны быть в отчете.

## Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: исследование формул вычислительного дифференцирования и интегрирования и анализ их вычислительной устойчивости.

## 1 Базовая часть

### Разработка функции, вычисляющей значение первой производной

Функция diff2(x_0, h, f) была реализована на основе центральной формулы численного дифференцирования 2-го порядка в точке $x_0$ с шагом $h$ [1]:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \tag{1}$$

где $\xi \in (x_0 - h; x_0 + h)$.

Ниже приведен листинг 1, содержащий код функции diff2(x_0, h, f), которая возвращает значение первой производной функции f в точке x_0 для шага дифференцирования h.

Листинг 1. Функция вычисления значения первой производной с помощью центральной формулы численного дифференцирования второго порядка

```
def diff2(x_0, h, f):
  return (f(x_0+h)-f(x_0-h))/(2*h)
```

### Исследование зависимости абсолютной погрешности дифференцирования от шага дифференцирования

Абсолютная погрешность дифференцирования находится по формуле:

$$\Delta(f'(x_0)) = \left|f'(x_0) - \tilde{f}'(x_0)\right|.$$

Для вычисления погрешности дифференцирования функции $g_1(x)$ с помощью функции f в точке $x_0$ с шагом $h$ была реализована функция err_dif(x_0, h, f), код которой представлен в листинге 2.

Листинг 2. Функция вычисления погрешности дифференцирования

```
def err_dif(x_0, h, f):
  g1_d_real = np.exp(x_0) + x_0 * np.exp(x_0)
  g1_d = f(x_0, h, g1)
  return abs(g1_d - g1_d_real)
```

На рисунке 1 представлен график зависимости абсолютной погрешности дифференцирования функции $g_1(x) = xe^x$, в точке $x_0 = 2$ от шага дифференцирования $h$, который варьируется в промежутке от 1 до $10^{-16}$.

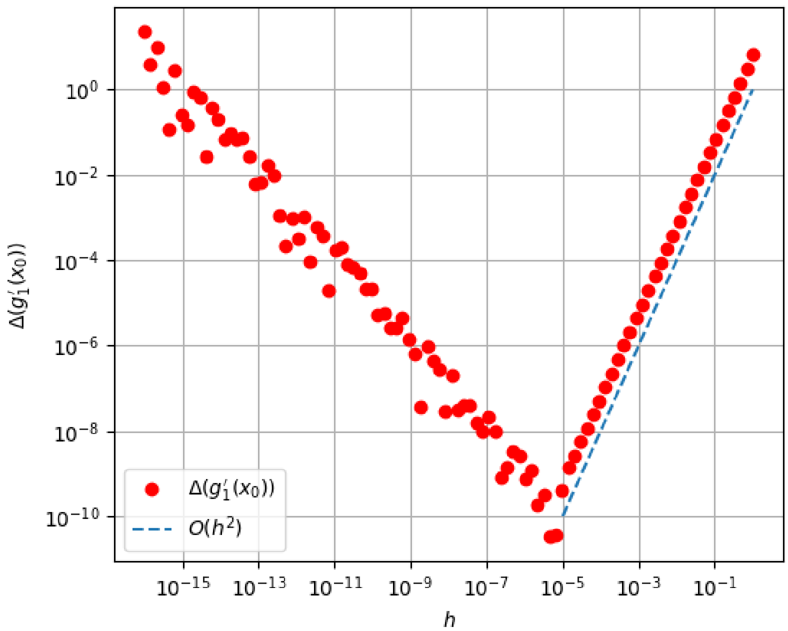


Рис. 1. Зависимость абсолютной погрешности дифференцирования функции $g_1(x)$ в точке $x_0$ с помощью центральной формулы 2-го порядка от шага дифференцирования $h$ (красные точки)

Рисунок демонстрирует, что при уменьшении шага погрешность дифференцирования убывает пропорционально $h^2$ до некоторого малого $h$, после чего начинает возрастать. Это свидетельствует о вычислительной неустойчивости дифференцирования.

### Разработка функции, вычисляющей значение интеграла с помощью составной формулы Симпсона

Функция composite_simpson(a, b, n, f) была реализована на основе составной формулы Симпсона [1]:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad (2)$$

где $n$ - четное число промежутков, $h = \frac{b-a}{n}$, $\xi \in (a;b)$, $x_i = a + (i+1)h$.

Ниже приведен листинг 3, содержащий код функции composite_simpson(a, b, n, f), которая возвращает значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$, вычисленного с помощью составной формулы Симпсона по $n$ узлам.

Листинг 3. Функция вычисления значения интеграла с помощью составной формулы Симпсона

```
def composite_simpson(a, b, n, f):
  x = np.linspace(a, b, n)
  h = (b-a)/(n-1)
  return h/3 *(f(x[0]) + 2*np.sum(f(x[2:-1:2])) + 4*np.sum(f(x[1::2])) + f(x[-1]))
```

### Исследование зависимости абсолютной погрешности интегрирования от шага интегрирования

Абсолютная погрешность интегрирования находится по формуле:

$$\Delta(I) = \left| I - \tilde{I} \right|,$$

где $I$ - точное значение интеграла, а $\tilde{I}$ - приближенное.

Для вычисления погрешности интегрирования функции $g_2(x) = x^2 sin(3x)$ с пределами интегрирования $a$ и $b$ с применением составной формулы Симпсона реализована функция err_int(a, b, n), код которой представлен в листинге 4.

Листинг 4. Функция вычисления погрешности интегрирования

```
def err_int(a, b, n):
  g2_int_real = (-b ** 2 * np.cos(3 * b) + a ** 2 * np.cos(3 * a))/3 + (2 * b * np.sin(3 * b) - 2 * a * np.sin(3*a))/9 + (2*np.cos(3 * b) - 2 * np.cos(3 * a))/ 27
  g2_int = composite_simpson(a, b, n, g2)
  return np.abs(g2_int_real - g2_int)
```

На рисунке 2 представлен график зависимости абсолютной погрешности вычисления интеграла $\int_0^\pi g_2(x)dx$ от шага интегрирования $h$ при количестве узлов $n$, изменяющемся от 3 до 9999.

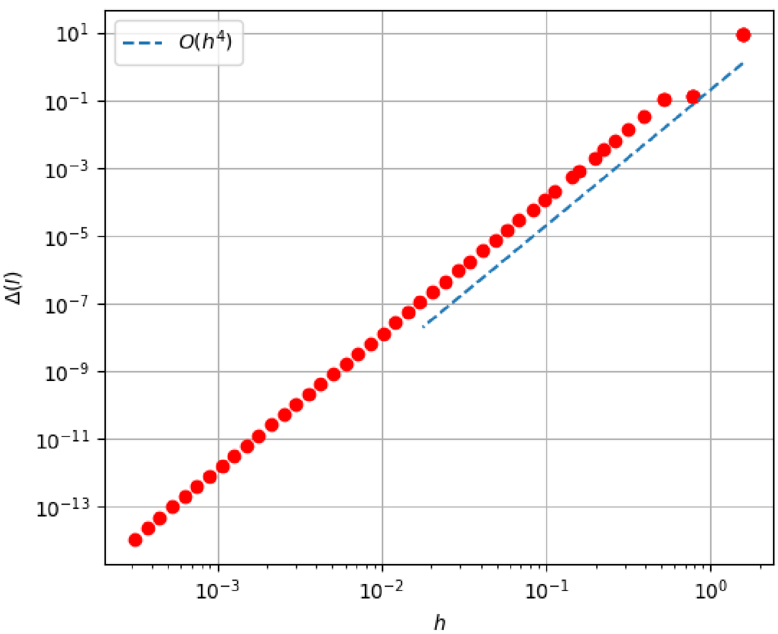


Рис. 2. Зависимость абсолютной погрешности вычисления интеграла $\int_0^{\pi} g_2(x)dx$ с помощью составной формулы Симпсона от шага интегрирования $h$ (красные точки)

Рисунок демонстрирует, что погрешность интегрирования убывает пропорционально $h^4$ и не возрастает, что свидетельствует о вычислительной устойчивости интегрирования.

## 2 Продвинутая часть

### Вывод центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка

Для вывода центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка вместе с остаточным членом, аппроксимирующей первую производную по 5 узлам, было использовано разложение функции в ряд Тейлора в точке $x_0$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \\ + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)^5. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее были вычислены значения ряда (3) в узлах $x_0 - 2h,\ x_0 - h,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h$ :

$$f(x_0-2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) - \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_1), \tag{4}$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(x_0) - \frac{1}{120}h^5 f^{(5)}(\xi_2), \tag{5}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{1}{120}h^5 f^{(5)}(\xi_3), \quad (6)$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_4), \quad (7)$$

где $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4 \in [x_0 - 2h; x_0 + 2h]$.
Из выражения (7) было вычтено выражение (4):

$$f(x_0+2h) - f(x_0-2h) = 4hf'(x_0) + \frac{8}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{4}{15}h^5 (f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_4)). \quad (8)$$

Предположим, что $f(x) \in C^5[x_0 - 2h; x_0 + 2h]$. Тогда по теореме о промежуточном значении существует такое $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$, что

$$f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{2}\left[f^{(5)}(\xi_2) + f^{(5)}(\xi_3)\right].$$

Тогда выражение (8) принимает вид:

$$f(x_0+2h) - f(x_0-2h) = 4hf'(x_0) + \frac{8}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{8}{15}h^5 f^{(5)}(\xi). \quad (9)$$

Из выражения (6) было вычтено выражение (5):

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{120}h^5 (f^{(5)}(\xi_2) + f^{(5)}(\xi_3)). \quad (10)$$

Предположим, что $f(x) \in C^5[x_0 - 2h; x_0 + 2h]$. Тогда по теореме о промежуточном значении существует такое $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$, что

$$f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{2}\left[f^{(5)}(\xi_2) + f^{(5)}(\xi_3)\right].$$

Тогда выражение (10) принимает вид:

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{1}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{60}h^5 f^{(5)}(\xi). \quad (11)$$

Далее выражение (11) было домножено на 8 и вычтено из выражения (9):

$$f(x_0+2h) - 8f(x_0+h) + 8f(x_0-h) - f(x_0-2h) = -12hf'(x_0) + \frac{2}{5}h^5 f^{(5)}(\xi).$$

Тогда центральная формула численного дифференцирования по пяти узлам имеет вид:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{12h} + \frac{1}{30}h^4 f^{(5)}(\xi). \quad (12)$$

Остаточный член пропорционален $h^4$, следовательно формула имеет четвертый порядок точности.

### Разработка функции, вычисляющей значение первой производной

Функция diff4(x_0, h, f) была реализована на основе центральной формулы численного дифференцирования 4-го порядка, аппроксимирующей первую производную по пяти узлам, в точке $x_0$ с шагом $h$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h} + \frac{1}{30}h^4 f^{(5)}(\xi),$$

где $\xi \in (x_0 - 2h; x_0 + 2h)$.

Ниже приведен листинг 5, содержащий код функции diff4(x_0, h, f), которая возвращает значение первой производной функции f в точке x_0 для шага дифференцирования h.

Листинг 5. Функция вычисления значения первой производной с помощью центральной формулы численного дифференцирования четвертого порядка

```
def diff4(x_0, h, f):
    return (f(x_0-2*h)-8*f(x_0-h)+8*f(x_0+h)-f(x_0+2*h))/(12*h)
```

### Исследование зависимости абсолютной погрешности дифференцирования от шага дифференцирования

Для вычисления погрешности численного дифференцирования была использована функция err_dif(x_0, h, f), представленная в листинге 2. В качестве аргумента f ей передается функция diff4.

На рисунке 3 представлен график зависимости абсолютной погрешности дифференцирования функции $g_1(x) = xe^x$ в точке $x_0 = 2$ от шага дифференцирования $h$, который варьируется в промежутке от 1 до $10^{-16}$.

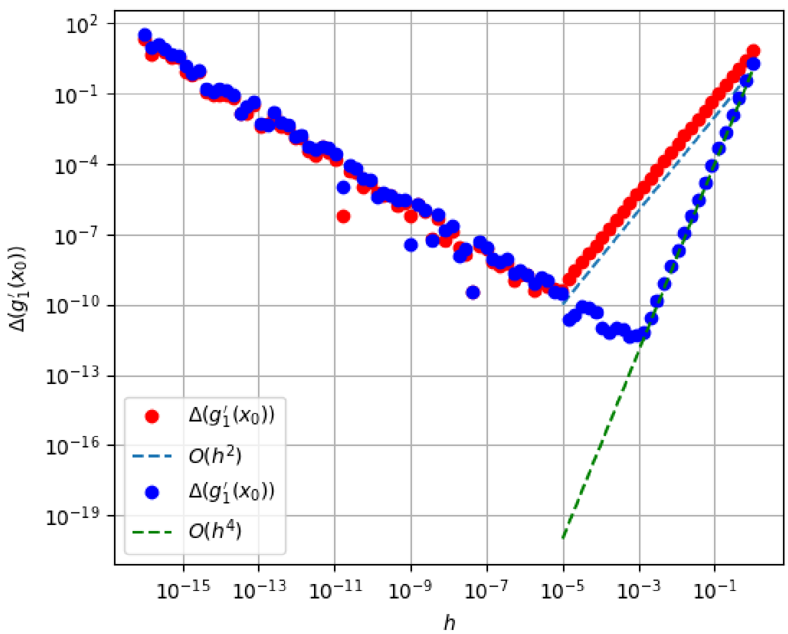


Рис. 3. Зависимость абсолютной погрешности дифференцирования функции $g_1(x)$ в точке $x_0$ с помощью центральной формулы 2-го (красные точки) и 4-го порядка (синие точки) от шага дифференцирования $h$

На графиках, построенных в логарифмической шкале, можно продемонстрировать порядок формулы дифференцирования, если построить на том же графике $O(h^n)$. Тогда, если график абсолютной погрешности при уменьшении шага дифференцирования убывает параллельно $O(h^n)$, то формула имеет порядок $n$.

На рисунке 3 продемонстрировано, что формула (1) имеет порядок точности 2, а формула (12) имеет 4-ый порядок точности, что соответствует остаточным членам этих формул.

Далее приведен вывод оптимального шага для формулы дифференцирования второго порядка (1).

Пусть погрешности при вычислении значений $f(x_0+h)$ и $f(x_0-h)$ равны $e(x_0+h)$ и $e(x_0-h)$ соответственно. Тогда

$$f(x_0-h) = \tilde{f}(x_0-h) + e(x_0-h),$$

$$f(x_0+h) = \tilde{f}(x_0+h) + e(x_0+h).$$

Погрешность дифференцирования рассчитывается следующим образом:

$$E = \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| = \left| \frac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi) \right|.$$

По правилу треугольника модуль суммы меньше или равен сумме модулей, следовательно можно оценить верхнюю границу погрешности:

$$E \leqslant \frac{|e(x_0+h)| + |e(x_0-h)|}{2h} + \frac{h^2}{6}|f^{(3)}(\xi)|.$$

Пусть вычислительная погрешность $e(x_i)$ ограничена $\varepsilon$ (например, машинным эпсилон) и $f^{(3)}(\xi)$ ограничена $M_3$. Тогда верным является следующее неравенство:

$$E \leqslant \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M_3.$$

Можно отметить, что при $h \to 0$ погрешность будет стремиться к бесконечности, что обуславливает вычислительную неустойчивость численного дифференцирования. Выражение справа имеет минимум в точке $\left(\frac{3\varepsilon}{M_3}\right)^{1/3}$. Тогда оптимальный шаг дифференцирования по формуле 2-го порядка:

$$h_{opt} = \left(\frac{3\varepsilon}{M_3}\right)^{1/3}. \tag{13}$$

Тогда минимально достижимая погрешность вычисляется по формуле:

$$E_{min} = \frac{\varepsilon}{h_{opt}} + \frac{h_{opt}^2}{6}M_3. \tag{14}$$

Далее приведен вывод оптимального шага для центральной формулы дифференцирования четвертого порядка (12).

Пусть погрешности при вычислении значений $f(x_0-2h)$, $f(x_0-h)$,$f(x_0+h)$ и $f(x_0+2h)$ равны $e(x_0-2h)$, $e(x_0-h)$, $e(x_0+h)$ и $e(x_0+2h)$ соответственно. Тогда

$$f(x_0-2h) = \tilde{f}(x_0-h) + e(x_0-2h),$$

$$f(x_0-h) = \tilde{f}(x_0-h) + e(x_0-h),$$
$$f(x_0+h) = \tilde{f}(x_0+h) + e(x_0+h),$$
$$f(x_0+2h) = \tilde{f}(x_0+2h) + e(x_0+2h).$$

Погрешность дифференцирования рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{12h} \right| = \\ &= \left| \frac{e(x_0-2h) - 8e(x_0-h) + 8e(x_0+h) - e(x_0+2h)}{12h} - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) \right|. \end{aligned}$$

По правилу треугольника модуль суммы меньше или равен сумме модулей, следовательно можно оценить верхнюю границу погрешности:

$$E \leqslant \frac{|e(x_0-2h)| + 8|e(x_0-h)| + 8|e(x_0+h)| + |e(x_0+2h)|}{12h} + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi).$$

Пусть вычислительная погрешность $e(x_i)$ ограничена $\varepsilon$ (например, машинным эпсилон) и $f^{(5)}(\xi)$ ограничена $M_5$. Тогда верным является следующее неравенство:

$$E \leqslant \frac{18\varepsilon}{12h} + \frac{h^4 M_5}{30}.$$

Можно отметить, что при $h \to 0$ погрешность будет стремиться к бесконечности, что обуславливает вычислительную неустойчивость численного дифференцирования. Выражение справа имеет минимум в точке $\left(\frac{45\varepsilon}{4M_5}\right)^{1/5}$. Тогда оптимальный шаг дифференцирования по центральной формуле 4-го порядка:

$$h_{opt} = \left(\frac{45\varepsilon}{4M_5}\right)^{1/5}. \tag{15}$$

Тогда минимально достижимая погрешность вычисляется по формуле:

$$E_{min} = \frac{18\varepsilon}{12h_{opt}} + \frac{h_{opt}^4 M_5}{30}. \tag{16}$$

Далее программно были посчитаны значения оптимальных шагов для формул численного дифференцирования 2-го и 4-го порядков по формулам (13) и (15) соответственно. Для расчета $\varepsilon$ была принята как машинное эпсилон, $M_5$ как значение пятой производной от функции $g_1(x)$ в точке $x_0$, $M_3$ как значение третьей производной от функции $g_1(x)$ в точке $x_0$. В листинге 6 приведен код для подсчета значений оптимального шага.

Листинг 6. Подсчет значений оптимального шага

```
M_3 = 5*np.exp(2)
M_5 = 7*np.exp(2)
h_opt2 = (3.*(np.finfo(np.float64).eps)/M_3)**(1./3)
h_opt4 = (45. * (np.finfo(np.float64).eps) / (4*M_5)) ** (1./5)
```

Тогда вычисленные значения оптимального шага:
для формулы дифференцирования 2-го порядка: $2.622210209782995 \cdot 10^{-6}$,
для формулы дифференцирования 4-го порядка: 0.0005454829101818735.

Также были вычислены значения минимально достижимой погрешности по формулам (14) и (16) для численного дифференцирования 2-го и 4-го порядков сответственно:
для формулы дифференцирования 2-го порядка: $1.2701762282250847 \cdot 10^{-10}$,
для формулы дифференцирования 4-го порядка: $2.5441287983132867 \cdot 10^{-13}$.

Эти значения соответствуют графикам, приведенным на рисунке 3. Можно заметить, что для формулы 2-го порядка значение оптимального шага меньше, чем для формулы 4-го порядка. Но минимально-достижимая погрешность для формулы 2-го порядка больше, чем для формулы 4-го порядка. Таким образом, формула 4-го порядка дает большую точность вычилений, при меньшем шаге дифференцирования.

### Анализ порядка точности составной формулы Симпсона

На рисунке 2 было продемонстрировано, что составная формула Симпсона имеет 4-ый порядок точности, что соответствует аналитическому порядку точности формулы (2).

Далее приведено формульное доказательство вычислительной устойчивости численного интегрирования с помощью составной формулы Симпсона [1]. Пусть при округлении значения $f(x_i)$ возникает вычислительная погрешность $e(x_i)$:

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + e(x_i), i = 1, \dots, n+1. \tag{17}$$

Тогда полная погрешность округления, накапливаемая составной формулой Симпсона (2), может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned} e(h) &= \frac{h}{3}\left[e_1 + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} e_{2i+1} + 4\sum_{i=1}^{n/2} e_{2i} + e_{n+1}\right] \\ &\leqslant \frac{h}{3}\left[|e_1| + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} |e_{2i+1}| + 4\sum_{i=1}^{n/2} |e_{2i}| + |e_{n+1}|\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть погрешность округления ограничена машинным эпсилон: $|e_i| \leqslant \epsilon, i = 1, \dots, n+1$. Тогда полная погрешность округления может быть оценена следующим образом:

$$e(h) \leqslant \frac{h\epsilon}{3}\left[1 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 4\frac{n}{2} + 1\right]; \tag{19}$$

$$\frac{h\epsilon}{3}\left[1 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 4\frac{n}{2} + 1\right] = nh\epsilon = (b-a)\epsilon. \tag{20}$$

Этот результат доказывает, что верхняя допустимая грань погрешности округления не зависит от $n$ и $h$. Из этого следует, что численное интегрирование с помощью составной формулы Симпсона вычислительно устойчиво, что также подтверждает рисунок 2.

Следовательно, оптимального шага для минимизации полной погрешности данной формулы не существует. Однако, при приближении значения полной погрешности к машинному эпсилон шаг перестает влиять на погрешность. Этот эффект представлен на рисунке 4, где интервал, в пределах которого изменялось количество узлов, был увеличен до отрезка $[3; 999900]$.

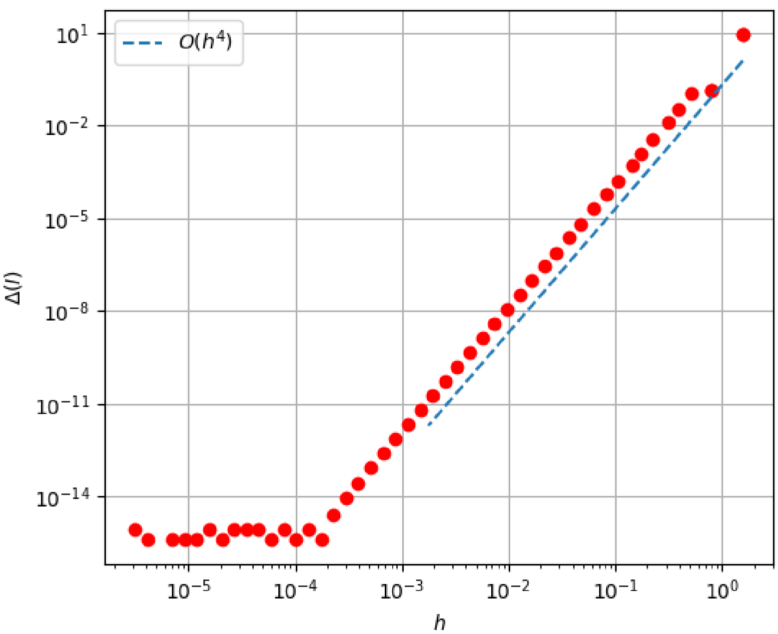


Рис. 4. Зависимость абсолютной погрешности вычисления интеграла $\int_0^\pi g_2(x)dx$ с помощью составной формулы Симпсона от шага интегрирования $h$ (красные точки)

### Вывод квадратуры Гаусса, имеющей степень точности 5

Согласно теореме Лежандра [1] верно равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P_m(x_i),$$

где $P_m(x)$ - полином степени $m < 2n$, $x_1, ..., x_n$ - корни полинома Лежандра $n$-ой степени $\phi_n(x)$, а коэффициенты $c_1, ..., c_n$ определены следующим образом:

$$c_i = \int\limits_{-1}^{1} l_i(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \prod_{j=1, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx.$$

Так как необходимо вывести квадратуру Гаусса степени точности 5, $m = 5$. Следовательно, $n = 3$, исходя из неравенства $m < 2n$. Тогда необходимо найти корни $x_1,\ x_2,\ x_3$ многочлена Лежандра 3-й степени $\phi_3(x)$.

$$\phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}};\quad x_2 = 0;\quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Коэффициенты $c_i$ находятся по формулам:

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1} l_1(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x - 0)\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}dx = \frac{5}{9},$$

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} l_2(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(x + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(0 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(0 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}dx = \frac{8}{9},$$

$$c_3 = \int\limits_{-1}^{1} l_3(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(x + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)(x - 0)}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{5}} - 0\right)}dx = \frac{5}{9}.$$

Тогда квадратура Гаусса пятой степени точности имеет вид:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \tag{21}$$

Для использования такой квадратуры необходимо три узла.

### Разработка функции, вычисляющей значение интеграла с помощью квадратуры Гаусса пятой степени точности

Функция gauss_quad5(f) была реализована на основе формулы (13) для квадратуры Гаусса степени точности 5. Функция возвращает значение интеграла от функции f, взятого на отрезке $[-1; 1]$. В листинге 7 представлен код этой функции.

Листинг 7. Функция вычисления значения интеграла с помощью квадратуры Гаусса 5-ой степени точности на отрезке от -1 до 1

```
def gauss_quad5(f):
  return (5/9)*f(-np.sqrt(3/5))+(8/9)*f(0)+(5/9)*f(np.sqrt(3/5))
```

### Доказательство, что степень точности квадратуры Гаусса равна 5

Последовательность полиномов $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), P_5(x), P_6(x)$, имеющих степени соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и случайные коэффициенты, была построена с использованием функции np.random.randn(). Так как необходимо проинтегрировать полиномы на отрезке $[0; 2]$, на основе функции gauss_quad5(f) (представлена в листинге 7) была разработана функция gauss_quad5_ab(f, a, b), которая вычисляет значения интеграла с помощью квадратуры Гаусса на отрезке $[a; b]$. Для этого была использована следующая замена:

$$x = \frac{(a + b) + (b - a)t}{2},$$

где $t \in [-1;1], x \in [a,b]$.

Код функции gauss_quad5_ab(f, a, b) представлен в листинге 8.

Листинг 8. Функция вычисления значения интеграла с помощью квадратуры Гаусса 5-ой степени точности на отрезке от a до b

```
def gauss_quad5_ab(f, a, b):
  x1 = (a+b)/2 + (b-a)*(-np.sqrt(3/5))/2
  x2 = (a+b)/2
  x3 = (a+b)/2 + (b-a)*(np.sqrt(3/5))/2
  return (5/9)*f(x1)+(8/9)*f(x2)+(5/9)*f(x3)
```

Формула интеграла от многочлена имеет вид:

$$\int_a^b P_m(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{m} c_i x^i dx = \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i b^{i+1}}{i+1} - \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i a^{i+1}}{i+1}, \tag{22}$$

где m - степень полинома, $c_i$ - коэфициент перед $i$-ым членом полинома, $a$ и $b$ - пределы интегрирования.

На основе формулы (14) была разработана функция int_exact(kofs, a, b, k) для вычисления значения многочлена аналитически. Она принимает на вход список коэффициентов полинома kofs, пределы интегрирования a и b и степень полинома k. В листинге 9 представлен код этой функции.

Листинг 9. Функция вычисления значения интеграла аналитически

```
def int_exact(kofs, a, b, k):
  integral = 0
  for i in range(k+1):
    integral += (kofs[i] * b ** (i + 1) / (i + 1))
    integral -= (kofs[i] * a ** (i + 1) / (i + 1))
  return integral
```

Далее приведена таблица 1, в которой представлены значения вычисленных аналитически и численно с помощью квадратуры Гаусса интегралов для полиномов и погрешность вычисления степеней от 0 до 6.

Таблица 1. Таблица вычисленных значений интегралов и погрешностей

| Степень | Аналитическое значение | Численное значение | Погрешность |
|---|---|---|---|
| 0 | -0.13108978921449552 | -0.13108978921449552 | 0.0 |
| 1 | 3.8300084692474408 | 3.830008469247441 | $4.440892098500626 \cdot 10^{-16}$ |
| 2 | -0.6957391638877075 | -0.6957391638877075 | 0.0 |
| 3 | 1.6914431318093095 | 1.6914431318093097 | $2.220446049250313 \cdot 10^{-16}$ |
| 4 | -18.44205037194982 | -18.44205037194982 | 0.0 |
| 5 | 13.564011781292159 | 13.564011781292159 | 0.0 |
| 6 | 18.747915181141344 | 18.711555888334306 | 0.0363592928070382 |

По данным в таблице можно заметить, что погрешность вычислений для полиномов степеней меньше 6 равна нулю или сопоставима с машинным эпсилон. В то время как погрешность для полинома 6-ой степени значительно возрастает. Это подтверждает, что квадратура Гаусса имеет степень точности 5.

## Заключение

1. В ходе лабораторной работы был сделан вывод о вычислительной неустойчивости численного дифференцирования по формулам 2-го и 4-го порядков. Были выведены формулы и рассчитаны значения для оптимального шага и минимальной вычислительной погрешности для этих формул.

2. Также было доказано формульно и продемонстрировано с помощью графиков, что численное интегрирование с помощью формулы Симпсона вычислительно устойчиво.

3. Была выведена квадратура Гаусса пятой степени точности. С помощью вычислительного эксперимента степень точности квадратуры была доказана.

### Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.

2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).


### Выходные данные


*Новичкова М.А.Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2022. — 19 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)*



Постановка: *доцент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин*

Решение и вёрстка: *студент группы РК6-56Б, Новичкова М.А.*


*2022, осенний семестр*