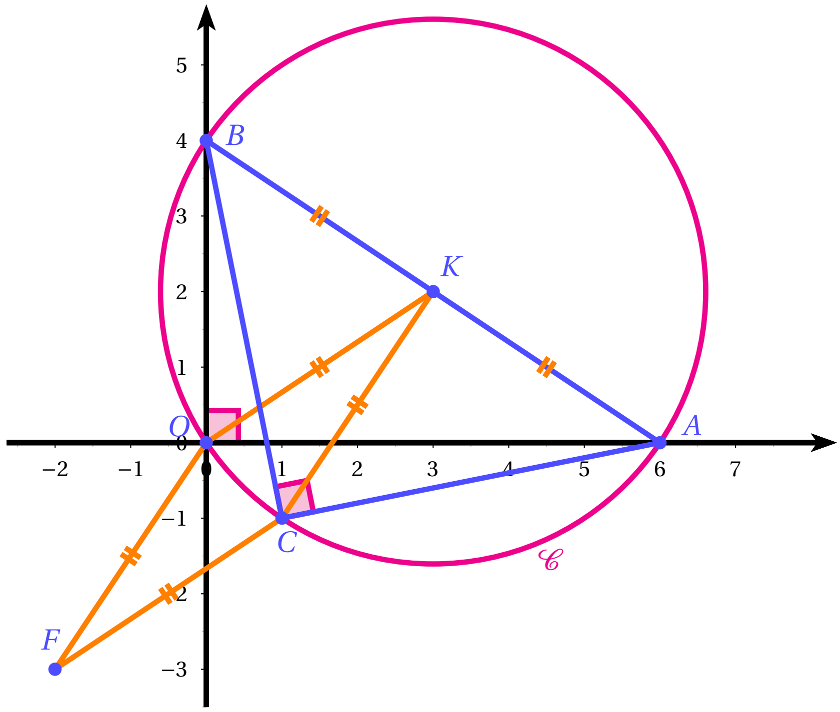
Corrigé du devoir surveillé n°3

1. On a effacé le quadrillage pour plus de lisibilité :



2. (a) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$.

   (b) On utilise le théorème réciproque de Pythagore :

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = \sqrt{52}^2 = 52 \\ AC^2 + BC^2 = \sqrt{26}^2 + \sqrt{26}^2 = 26 + 26 = 52 \end{array}\right\} AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

   D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en C.

   (c) D'après la question précédente, ABC est rectangle en C. Mais il est aussi isocèle en C, puisque $AC = BC = \sqrt{26}$, donc les angles à la base $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux. Et comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° :

$$\widehat{ABC} = \frac{180° - 90°}{2} = 45°.$$

3. (a) Le triangle ABC est rectangle en C. Or le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse, donc le milieu K de l'hypoténuse $[AB]$ est le centre de $\mathscr{C}$.

   On calcule ses coordonnées avec la formule du cours :

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad K\left(\frac{6+0}{2}; \frac{0+4}{2}\right) \qquad K\left(\frac{6}{2}; \frac{4}{2}\right) \qquad K(3;2).$$

(b) Comme K est le centre de $\mathscr{C}$, cercle circonscrit à ABC, on a $KC = KB$.

Mais OAB est également rectangle (en O) d'après l'énoncé, donc le point K est également le centre du cercle circonscrit à OAB. On en déduit $OK = KB$.

Rassemblant ce qui précède, on obtient $OK = KC$.

4. (a) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{OK}$:

$$\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} x_C - x_F \\ y_C - y_F \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} x_K - x_O \\ y_K - y_O \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{OK}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux :

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OK}.$$

(b) Comme $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OK}$, d'après une propriété du cours, $OKCF$ est un parallélogramme. Ses côtés opposés sont donc de même longueur : $OK = FC$ et $CK = FO$.

(c) On sait (qu°3.b) que $OK = CK$, donc d'après la question précédente

$$FC = OK = CK = FO.$$

Conclusion : le quadrilatère $OKCF$ a quatre côtés égaux, donc c'est un losange.