

Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Le second degré : équations et paraboles

2

1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note \mathcal{S} l'ensemble des solutions des équations.

Exercice 1 1. On résout l'équation $x^2 + 2x = 0$:

On factorise :

$$x(x+2) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{aligned}x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 &= 0 \\x + \cancel{2} - \cancel{2} &= 0 - 2 \\x &= -2\end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 0$ et $x = -2$. Autrement dit :

$$\mathcal{S} = \{0; -2\}.$$

2. On résout l'équation $x^2 - 16 = 0$:

On « isole » x^2 :

$$\begin{aligned}x^2 - 16 &= 0 \\x^2 - \cancel{16} + \cancel{16} &= 0 + 16 \\x^2 &= 16\end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{16} = -4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{4; -4\}.$$

3. On résout l'équation $(2x - 1)(x - 5) = 0$:

$$\begin{aligned}2x - 1 &= 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0 \\2x - \cancel{1} + \cancel{1} &= 0 + 1 \quad \text{ou} \quad x - \cancel{5} + \cancel{5} = 0 + 5 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 5 \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}; 5 \right\}.$$

4. On résout l'équation $x^2 + 7 = 0$:

$$\begin{aligned}x^2 + 7 &= 0 \\x^2 + \cancel{7} - \cancel{7} &= 0 - 7 \\x^2 &= -7\end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre x ne peut avoir un carré égal à -7).

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

(On rappelle que \emptyset désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

Exercice 2 Dans chaque cas, on note Δ le discriminant.

1. On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$:

- $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = -1,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{-1; 4\}.$$

2. On résout l'équation $2x^2 - 12x = -18$:

On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$) en « transposant -18 » :

$$2x^2 - 12x + 18 = -18 + 18$$

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

- $a = 2$, $b = -12$, $c = 18$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$.
- $\Delta = 0$, donc il y a une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{3\}.$$

3. On résout l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$:

- $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$.
- $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solution.

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

4. On résout l'équation $x^2 + 2x - 4 = 0$:

- $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2}.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{20}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \right\}.$$

Remarque : On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5},$$

on trouve

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\cancel{2}(-1 + \sqrt{5})}{\cancel{2}} = -1 + \sqrt{5}.$$

De même, $x_1 = -1 - \sqrt{5}$.

5. On résout l'équation $x^2 = -6x$:

À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le « $-6x$ » dans le membre de gauche, qui devient « $+6x$ ».

$$\begin{aligned}x^2 &= -6x \\x^2 + 6x &= 0.\end{aligned}$$

Ici, il y a deux méthodes possibles :

- soit on utilise le discriminant, avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 0$ (puisque $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$) ;
- soit on factorise.

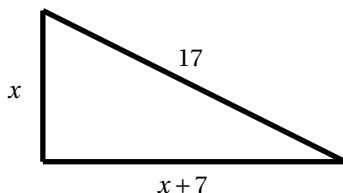
On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide¹ :

$$\begin{aligned}x(x+6) &= 0 \\x = 0 \quad \text{ou} \quad x+6 &= 0 \\x &= -6.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{0; -6\}.$$

Exercice 3 On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas x .



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe $(x+7)^2$ avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 &= 289 \\2x^2 + 14x + 49 - 289 &= 0 \\2x^2 + 14x - 240 &= 0.\end{aligned}$$

- $a = 2$, $b = 14$, $c = -240$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1920 = 2116$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 - 46}{4} = -15, \\x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 + 46}{4} = 8.\end{aligned}$$

Or x désigne une longueur, donc la première solution (x_1) est impossible. On a donc $x = 8$.

Remarque : Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

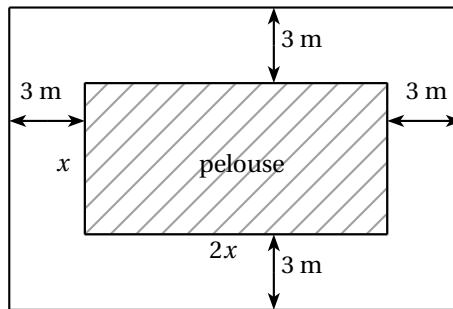
$$x = 8, \quad x+7 = 8+7 = 15 \quad \text{et} \quad 17.$$

On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec Δ dans le cas où b ou c valent 0.

Exercice 4 1. Voici un schéma du terrain en notant x la largeur de la pelouse (donc la longueur est $2x$) :



2. La longueur du terrain (en m) est

$$2x + 3 + 3 = 2x + 6,$$

sa largeur est

$$x + 3 + 3 = x + 6.$$

Donc la surface du terrain (en m^2) est

$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x + 6) \times (x + 6).$$

Or on sait que cette surface vaut 360 m^2 , donc

$$(2x + 6) \times (x + 6) = 360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente² :

$$\begin{aligned} (2x + 6) \times (x + 6) &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x \times x + 2x \times 6 + 6 \times x + 6 \times 6 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 6x + 36 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x + 36 - 360 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x - 324 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré.

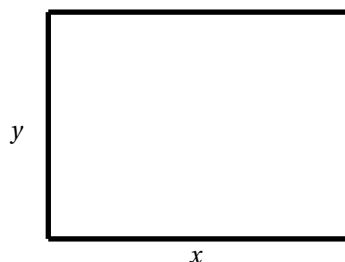
- $a = 2$, $b = 18$, $c = -324$.
- $\Delta = 18^2 - 4 \times 2 \times (-324) = 2916$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 - \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 - 54}{4} = \frac{-72}{4} = -18, \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 + \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 + 54}{4} = \frac{36}{4} = 9. \end{aligned}$$

Or x désigne une longueur, donc x ne peut pas être négatif et seule la solution $x_2 = 9$ est valable.

Conclusion : $x = 9$, donc la longueur du terrain (en m) est $2 \times 9 + 3 + 3 = 24$, sa largeur est $9 + 3 + 3 = 15$.

Exercice 5 On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note x et y les dimensions du champ.



2. Les « \Leftrightarrow » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est

$$x + y = 27.$$

- L'aire est 180, donc

$$x \times y = 180.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x + y = 27 & L_1 \\ xy = 180 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie L_1 par x :

$$(x + y) \times x = 27 \times x, \quad \text{soit} \quad x^2 + xy = 27x.$$

Or d'après L_2 , $xy = 180$, donc

$$x^2 + 180 = 27x, \quad \text{et ainsi} \quad x^2 - 27x + 180 = 0.$$

On aboutit à une équation du 2^d degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) : $x_1 = 12$, $x_2 = 15$.

On sait que $x + y = 27$, donc si $x = 12$, alors $y = 27 - x = 27 - 12 = 15$; et si $x = 15$, alors $y = 27 - x = 27 - 15 = 12$.

Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

Exercice 6 On note n le nombre d'amis initialement présents, et p le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc

$$n \times p = 2400. \quad (1)$$

- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas $(n - 2)$ amis, et chacun paye alors $(p + 40)$ €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit

$$(n - 2) \times (p + 40) = 2400.$$

En développant, cela donne encore

$$np + 40n - 2p - 80 = 2400. \quad (2)$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2400 dans les deux cas, on obtient l'égalité

$$\cancel{np} = \cancel{np} + 40n - 2p - 80,$$

soit

$$40n - 2p - 80 = 0.$$

Finalement, le couple (n, p) est solution du système

$$\begin{cases} n \times p = 2400 \\ 40n - 2p - 80 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient

$$n = 12, \quad p = 200.$$

Conclusion : comme $12 - 10 = 2$, ce sont 10 amis qui sont finalement partis.