Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1

On écrit sous forme algébrique :

1. $(3-2\mathrm{i})(-1+\mathrm{i}) = -3+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2 = -3+5\mathrm{i}+2 = \boxed{-1+5\mathrm{i}}$
2. $(1+\mathrm{i})^2 = 1^2+2\times 1\times \mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 1+2\mathrm{i}-1 = \boxed{2\mathrm{i}}$
3. $\mathrm{i}^6 = \left(\mathrm{i}^2\right)^3 = (-1)^3 = \boxed{-1}$
4. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} = \dfrac{2+\mathrm{i}+1}{5} = \boxed{\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}}$

Exercice 2

À tout point M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$, on associe le point M' d'affixe

$$z' = (z-4)\left(\overline{z}+2\right).$$

1. On écrit sous forme algébrique :

   $z' = (z-4)\times\left(\overline{z}+2\right) = (x+\mathrm{i}y-4)\times(x-\mathrm{i}y+2) = x^2-\mathrm{i}\cancel{xy}+2x+\mathrm{i}\cancel{xy}-\mathrm{i}^2y^2+2\mathrm{i}y-4x+4\mathrm{i}y-8 = x^2-2x+y^2-8+6\mathrm{i}y.$

   Conclusion :

   $$\boxed{z' = \underbrace{(x^2-2x+y^2-8)}_{\text{partie réelle}}+\mathrm{i}\times\underbrace{(6y)}_{\text{part. imag.}}.}$$

2. La partie imaginaire de z' est $6y$, donc

   $$M'\in\Delta \iff \mathrm{Im}(z') = 0 \iff 6y = 0 \iff y = 0.$$

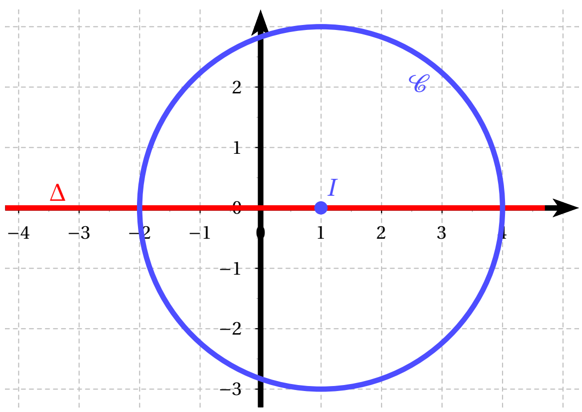
   Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est la droite d'équation } y = 0.}$

3. La partie réelle de z' est x^2-2x+y^2-8, donc

   $$M'\in\mathscr{C} \iff \mathrm{Re}(z') = 0 \iff x^2-2x+y^2-8 = 0 \iff (x-1)^2-1+y^2-8 = 0 \iff (x-1)^2+y^2 = 9.$$

   Conclusion : $\boxed{\mathscr{C} \text{ est le centre de centre } I(1;0) \text{ de rayon } \sqrt{9} = 3.}$

4.



Exercice 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^3 - z^2 + 2$.

1. $\boxed{-1 \text{ est une racine de } P,}$ car $P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$.
2. D'après la proposition 2 du cours, on peut factoriser par $z - (-1) = z + 1$. Pour obtenir le quotient, on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^3 - z^2 + 0z + 2 & z+1 \\ \cline{3-3}
- & z^3 + z^2 & z^2 - 2z + 2 \\ \cline{2-2}
 & -2z^2 + 0z + 2 & \\
- & -2z^2 - 2z & \\ \cline{2-2}
 & 2z + 2 & \\
- & 2z + 2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc

$$\boxed{z^3 - z^2 + 2 = (z+1)\left(z^2 - 2z + 2\right).}$$

3. L'équation $P(z) = 0$ se réécrit

$$(z+1)\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0,$$

donc

$$z + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad z^2 - 2z + 2 = 0.$$

- L'équation $z + 1 = 0$ a pour solution $z = -1$.
- On résout l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$:
  - Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$.
  - $\Delta < 0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2 - \mathrm{i}\sqrt{|-4|}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\mathrm{i}}{2} = 1 - \mathrm{i},$$
$$z_2 = \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}.$$

Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de l'équation } P(z) = 0 \text{ sont } -1,\ 1 - \mathrm{i} \text{ et } 1 + \mathrm{i}.}$