Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250\times6}{4}=\frac{1\,500}{4}=375$ g de farine, $\frac{500\times6}{4}=\frac{3\,000}{4}=750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6\times125=750$ g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai $\frac{750\times2}{1\,000}=\frac{1\,500}{1\,000}=1,5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes[1].

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra $\frac{60\times45}{20}=\frac{\cancel{20}\times3\times45}{\cancel{20}}=135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135=120+15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4\times30\div5=24$ pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7\times24}{6}=\frac{7\times4\times\cancel{6}}{\cancel{6}}=28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

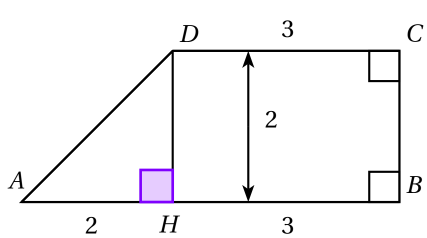
Stéphane nage $\frac{60\times0,5}{3}=\frac{30}{3}=10$ min, puis il court $\frac{60\times5}{15}=\frac{300}{15}=20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5+0,5=5,5$ km, en $10+20=30$ min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60\times5,5}{30}=\frac{\cancel{30}\times2\times5,5}{\cancel{30}}=11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

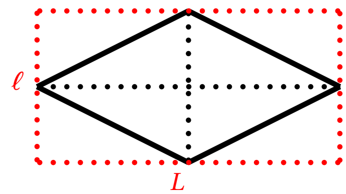
- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD, d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

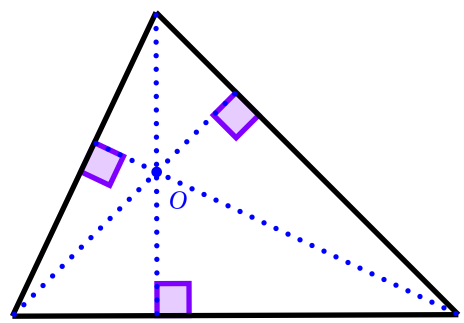
$$\mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(5+3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L, donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

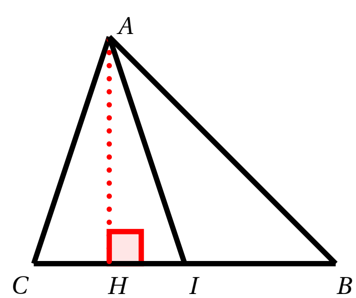


Exercice 5 **Rappels :**

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA, donc

$$\mathscr{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2} \qquad \mathscr{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I et le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7 La méthode la plus simple pour écrire la négation d'une affirmation est d'utiliser des « ne pas », comme vous avez appris à le faire à l'école primaire. Par exemple, la négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Tous les hommes ne sont pas mortels.

Dans le corrigé, on propose une autre méthode, plus efficace en général dans les situations rencontrées en cours de mathématiques.

1. La négation de

   Tous les hommes sont mortels.

   est

   Il existe un homme immortel.

2. La négation de

   Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

   est

   Tous les desserts sont sucrés à la cantine.

   Remarque : Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe » , et réciproquement; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

3. La négation de

   Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

   est

   Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

   Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

   est

   Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé ni en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni… ni… » est « ou ». Donc la négation de

   Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

   est

   Chloé aime les fraises ou les framboises.

Exercice 8 1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par 5}}_{\text{A}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il est multiple de 5}}_{\text{B}}.$$

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b) • L'implication contraposée est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de 5}}_{\text{non B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il ne se termine pas par 5}}_{\text{non A}}.$$

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

• L'implication réciproque est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de 5}}_{\text{B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il se termine par 5}}_{\text{A}}.$$

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par } 0}_{\text{A}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il est multiple de } 10}_{\text{B}}.$$

et sa réciproque

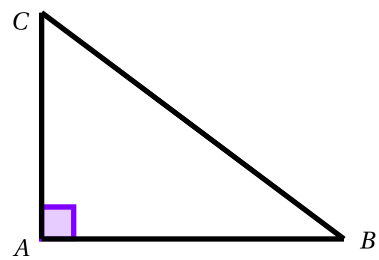
$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de } 10}_{\text{B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il se termine par } 0}_{\text{A}}.$$

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. **Théorème de Pythagore.**

$$\text{Si } ABC \text{ est rectangle en } A, \text{ alors } BC^2 = AB^2 + BC^2.$$



2. **Théorème contraposé de Pythagore.**

$$\text{Si } BC^2 \neq AB^2 + BC^2, \text{ alors } ABC \text{ n'est pas rectangle en } A.$$

3. **Théorème réciproque de Pythagore.**

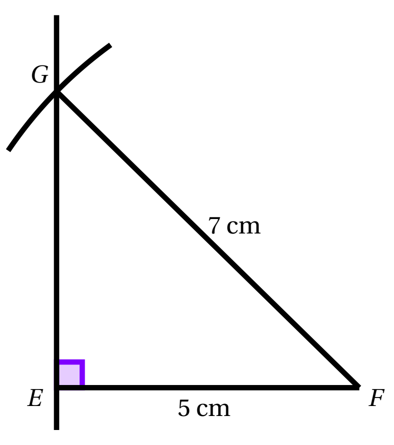
$$\text{Si } BC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ alors } ABC \text{ est rectangle en } A.$$

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E.
- Un arc de cercle de centre F, de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G.



D'après **le théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

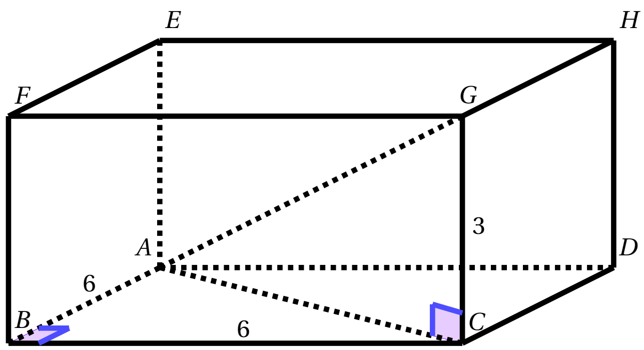
$$\begin{aligned} FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\ 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\ 49 &= 25 + EG^2 \\ 49 - 25 &= EG^2 \\ \sqrt{24} &= EG \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

⚠Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A.
   On calcule :
$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{array}\right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$
   D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$
$$AC^2 = 36 + 36$$
$$AC^2 = 72$$

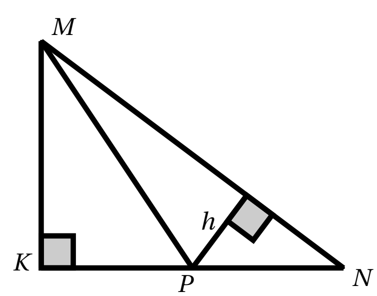
(Inutile de donner AC !)

Dans ACG rectangle en C,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$
$$AG^2 = 72 + 3^2$$
$$AG^2 = 72 + 9$$
$$AG^2 = 81$$
$$AG = \sqrt{81} = 9$$

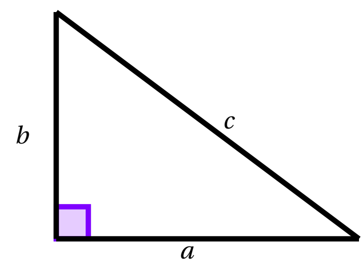
Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1{,}2$ cm.



1. $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1{,}2}{2} = 3 \text{ cm}^2$.
2. On a aussi $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN \times 3}{2}$, soit $\cancel{3} \times 2 = PN \times \cancel{3}$; et donc $PN = 2$ cm.
3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN, puis KP et MP.
   ⚠On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.
   - Pour KN, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN. On obtient $KN = 4$ cm.
   - $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
   - Enfin, pour calculer PM, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP. On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b, l'hypoténuse mesure c.



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

$$\text{Pour tous nombres positifs } a \text{ et } b, \sqrt{a^2+b^2} = a + b.$$

est FAUSSE! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

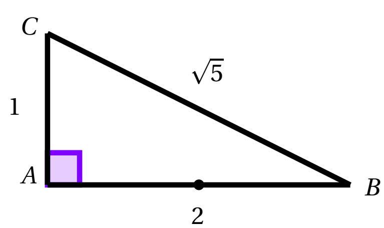
$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{est différent de} \qquad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2+b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a+b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

Exercice 14 1. L'égalité $1^2 + 2^2 = 5$ peut encore s'écrire

$$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2.$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore, un triangle de côtés $AB = 2$, $AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$ est rectangle en A.



2. On propose deux méthodes :

(a) **Méthode géométrique.** L'hypoténuse $[BC]$ du triangle construit dans la question 1 est strictement plus grande que le côté de l'angle droit $[AB]$, donc $2 < \sqrt{5}$.

Par ailleurs, la distance la plus courte de B à C est la ligne droite, donc le chemin qui part de B et passe par A avant d'arriver à C a une longueur strictement plus grande que celle du segment $[BC]$. Autrement dit, $\sqrt{5} < 2+1$; c'est-à-dire $\sqrt{5} < 3$.

Conclusion :

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

(b) **Méthode par le calcul.** On compare les carrés :

$$2^2 = 4, \qquad \sqrt{5}^2 = 5 \qquad \text{et} \qquad 3^2 = 9.$$

Or $4 < 5 < 9$, donc

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

3. On calcule en posant les multiplications :

$$
\begin{aligned}
2,0^2 &= 4\\
2,1^2 &= 4,41\\
2,2^2 &= 4,84\\
2,3^2 &= 5,29.
\end{aligned}
$$

Or $4,84 < 5 < 5,29$, donc
$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3.$$

Remarques :

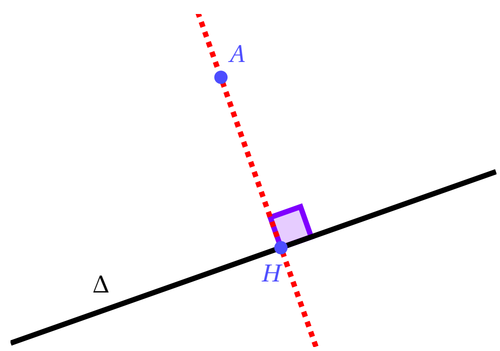
- L'écart entre 2,2 et 2,3 est bien égal à 0,1.
- On devait continuer les calculs jusqu'à dépasser 5 – donc on aurait pu avoir besoin de calculer $2,4^2$, $2,5^2$, etc. On était sûr cependant de ne pas dépasser 3,0.
- Rappel pour poser une multiplication avec un exemple :

$$
\begin{array}{r}
2.3\\
\times\quad 2.3\\
\hline
6\;9\\
4\;6\;\;\\
\hline
5.2\;9
\end{array}
$$

Rappelons que comme les facteurs 2,3 et 2,3 ont chacun 1 chiffre après la virgule, le résultat final en a $1+1=2$.

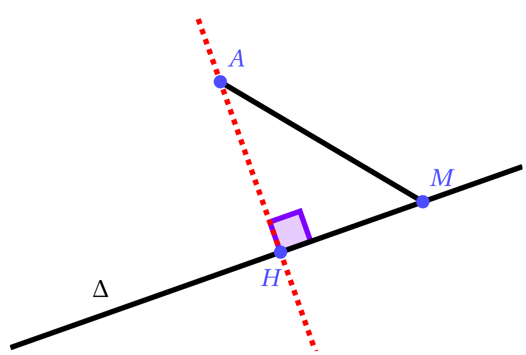
Exercice 15 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A. Elle coupe Δ en H.



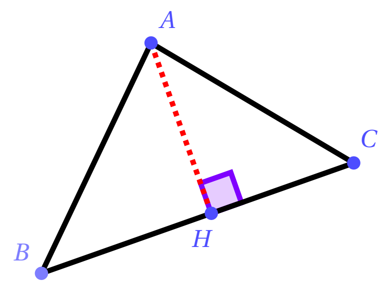
2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H, donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur[2] issue de A dans le triangle ABC.

2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur* ; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B\times h}{2}$ pour l'aire du triangle.



Exercice 16 On résout les équations :

$$\begin{aligned} x+7&=18\\ x+\cancel{7}-\cancel{7}&=18-7\\ x&=11 \end{aligned}$$

La solution est $x=11$

$$\begin{aligned} 3x+4&=19\\ 3x+\cancel{4}-\cancel{4}&=19-4\\ 3x&=15\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{15}{3}\\ x&=5 \end{aligned}$$

La solution est $x=5$.

$$\begin{aligned} 3{,}5x-9&=5\\ 3{,}5x-\cancel{9}+\cancel{9}&=5+9\\ 3{,}5x&=14\\ \frac{\cancel{3{,}5}x}{\cancel{3{,}5}}&=\frac{14}{3{,}5}\\ x&=\frac{14}{3{,}5} \end{aligned}$$

Or $\frac{14}{3{,}5}=\frac{14\times2}{3{,}5\times2}=\frac{28}{7}=4$, donc la solution est $x=4$.

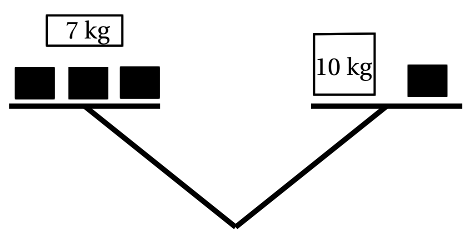
$$\begin{aligned} x+1&=-2x-5\\ x+1+2x&=\cancel{-2x}-5+\cancel{2x}\\ 3x+1&=-5\\ 3x+\cancel{1}-\cancel{1}&=-5-1\\ 3x&=-6\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{-6}{3}\\ x&=-2 \end{aligned}$$

La solution est $x=-2$.

$$\begin{aligned} -2x+4&=3x-6\\ -2x+4-3x&=\cancel{3x}-6-\cancel{3x}\\ -5x+4&=-6\\ -5x+\cancel{4}-\cancel{4}&=-6-4\\ -5x&=-10\\ \frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}}&=\frac{-10}{-5}\\ x&=2 \end{aligned}$$

La solution est $x=2$.

Exercice 17 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M+7=10+M.$$

On la résout :

$$\begin{aligned} 3M+7-M&=10+\cancel{M}-\cancel{M}\\ 2M+7&=10\\ 2M+\cancel{7}-\cancel{7}&=10-7\\ 2M&=3\\ \frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}}&=\frac{3}{2}\\ M&=1{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion : la solution est $M=1{,}5$.

Exercice 18 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15\,000 - x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15 \times x + 25 \times (15\,000 - x).$$

Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation

$$15x + 25(15\,000 - x) = 295\,000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned}
15x + 25(15\,000 - x) &= 295\,000\\
15x + 25 \times 15\,000 + 25 \times (-x) &= 295\,000\\
15x + 375\,000 - 25x &= 295\,000\\
-10x + 375\,000 &= 295\,000\\
-10x + \cancel{375\,000} \cancel{- 375\,000} &= 295\,000 - 375\,000\\
-10x &= -80\,000\\
\frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}} &= \frac{-80\,000}{-10}\\
x &= 8000.
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a $x = 8\,000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 19

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2}\\
B &= \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12}\\
C &= 2 + \frac{1}{5} = \frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}\\
D &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{10 \times 6} = \frac{15}{60} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{15} \times 4} = \frac{1}{4}\\
E &= 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{10 \times 3}{6 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{30}{18} - \frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11 \times \cancel{2}}{9 \times \cancel{2}} = \frac{11}{9}\\
F &= 4 - 3 \times \frac{5}{6} = \frac{4}{1} - \frac{3 \times 5}{6} = \frac{4 \times 6}{1 \times 6} - \frac{15}{6} = \frac{24}{6} - \frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2}\\
G &= \frac{6}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{6 \times 15}{10 \times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9 \times \cancel{10}}{8 \times \cancel{10}} = \frac{9}{8}\\
H &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

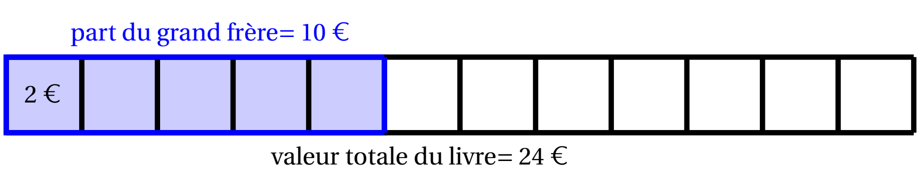
Exercice 20 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à

$$\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12 \times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24\text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5 \times 2 = 10$ € ; et la valeur totale du livre est $12 \times 2 = 24$ €.



Exercice 21

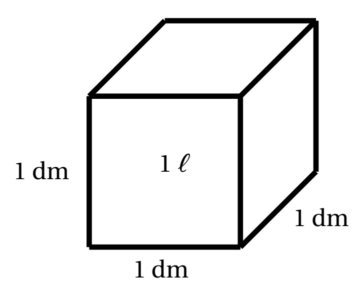
$$A = \frac{2^{15}\times 3^6}{2^{12}\times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}}\times\frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12}\times 3^{6-4} = 2^3\times 3^2 = 8\times 9 = 72$$
$$B = \frac{5^3\times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$
$$C = \frac{2^{18}}{8\times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3\times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$
$$D = \frac{6^6}{2^5\times 3^4} = \frac{(2\times 3)^6}{2^5\times 3^4} = \frac{2^6\times 3^6}{2^5\times 3^4} = \frac{2^6}{2^5}\times\frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5}\times 3^{6-4} = 2^1\times 3^2 = 2\times 9 = 18$$
$$E = \frac{\left(10^4\right)^3}{10^8} = \frac{10^{4\times 3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$
$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2\times 5}}{2^{3\times 3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$
$$G = \frac{10^{10}+10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7}+\frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7}+10^{8-7} = 10^3+10^1 = 1\,000+1 = 1\,001$$

Exercice 22 Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.
On rappelle avant cela que $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \underbrace{0,00}_{\text{3 zéros}}1$, donc multiplier un nombre par 10^{-3} revient à décaler la virgule de 3 rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour 10^{-2}).

$$A = 35,4\times 10^{-3} \qquad = 0,0354$$
$$B = 0,034 \qquad = 0,0340$$
$$C = 3,6\times 10^{-2} = 0,036 \qquad = 0,0360$$
$$D = \frac{355}{10^4} = \frac{355}{10\,000} \qquad = 0,0355$$
$$E = \frac{7}{60}\times\frac{3}{10} = \frac{7\times 3}{60\times 10} = \frac{7\times \cancel{3}}{20\times\cancel{3}\times 10} = \frac{7}{200} \qquad = 0,0350$$

Conclusion : $B < E < A < D < C$.

Exercice 23 Avant de commencer, il est utile de se rappeler que 10 cm=1 dm ; et que 1 ℓ = 1 dm^3. Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure 1 dm sur 1 dm sur 1 dm, ou encore 10 cm sur 10 cm sur 10 cm (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



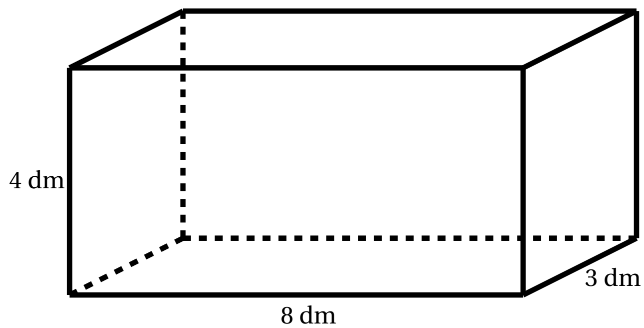
On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm, la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm. On dispose d'un robinet dont le débit est de 6 litres par minute.

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

   largeur = 8 dm, profondeur = 3 dm, hauteur = 4 dm,

   donc son volume est

   $$8\times 3\times 4 = 96\ \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de 6 ℓ/min, donc il faut $96 \div 6 = 16$ min pour remplir les 96 ℓ de l'aquarium.

Exercice 24 On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\times 100\times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801 \qquad \text{(IR n°2)}$$
$$103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2\times 100\times 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$71\times 69 = (70+1)(70-1) = 70^2 - 1^2 = 4\,900 - 1 = 4\,899 \qquad \text{(IR n°3)}$$
$$2,05^2 = (2+0,05)^2 = 2^2 + 2\times 2\times 0,05 + 0,05^2 = 4 + 0,2 + 0,0025 = 4,2025 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$4,3\times 3,7 = (4+0,3)(4-0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91 \qquad \text{(IR n°3)}$$

Remarque : Comment calculer $0,05^2$ de tête ? Comme $0,05^2 = 0,05\times 0,05$ et que 0,05 a deux chiffres après la virgule, $0,05^2$ en aura $2+2=4$. Il ne reste alors plus qu'à calculer $5^2 = 25$ pour pouvoir conclure : $0,05^2 = 0,0025$.
Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0,05\times 0,0006 = 0,000030,$$

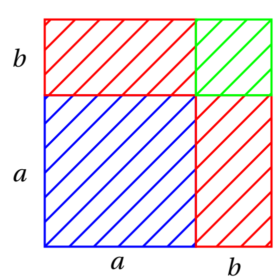
puisque $6\times 5 = 30$ et que le résultat doit avoir $2+4=6$ chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

Exercice 25 Le côté du grand carré mesure $a+b$, donc son aire est $(a+b)^2$.
D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté a, donc d'aire a^2 (hachuré en bleu), un carré de côté b, donc d'aire b^2 (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés a et b, donc d'aires $a\times b$ (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2\times a\times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exercice 26 1. Pour comparer les fractions $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$, on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4\times 6}{5\times 6} = \frac{24}{30} \qquad , \qquad b = \frac{5\times 5}{6\times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme $24 < 25$, on obtient $a < b$.

2. On compare à présent $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$. On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

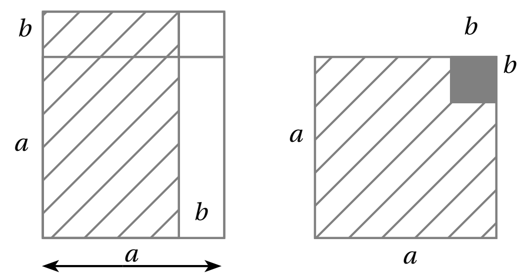
$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \qquad , \qquad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

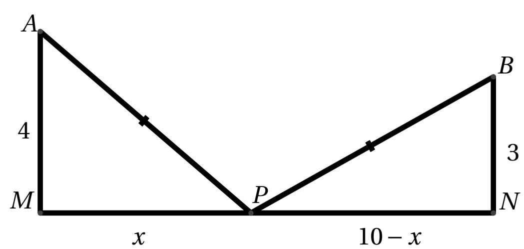
$$524 \times 526 = (525-1)(525+1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à $525 \times 525 = 525^2$, donc $c < d$.

Exercice 27 La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés $(a-b)$ et $(a+b)$, donc son aire est égale à $(a-b)(a+b)$.
Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté a duquel on a retiré un carré de côté b. Son aire est donc égale à $a^2 - b^2$.
L'identité remarquable n°3 nous dit que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



Exercice 28



On pose $MP = x$, on a donc $PN = MN - MP = 10 - x$.
D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles AMP et NBP :

$$\begin{aligned} AP^2 &= MP^2 + MA^2 \\ AP^2 &= x^2 + 4^2 \\ AP^2 &= x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BP^2 &= PN^2 + BN^2 \\ BP^2 &= (10-x)^2 + 3^2 \\ BP^2 &= 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \qquad &\text{(on développe grâce à l'IR n°2)} \\ BP^2 &= 100 - 20x + x^2 + 9 \\ BP^2 &= x^2 - 20x + 109 \end{aligned}$$

On sait que $AP = BP$, donc $AP^2 = BP^2$; et d'après les deux calculs ci-dessus :

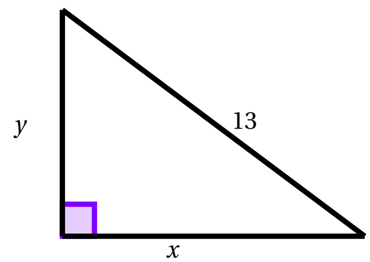
$$\cancel{x^2} + 16 = \cancel{x^2} - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned}
16 &= -20x+109\\
16{\color{red}-109} &= -20x+\cancel{109}\,{\color{red}\cancel{-109}}\\
\frac{-93}{\color{blue}-20} &= \frac{\cancel{-20}x}{\color{blue}\cancel{-20}}\\
4,65 &= x
\end{aligned}$$

Conclusion : $MP = 4,65$.

Exercice 29



1. D'après le théorème de Pythagore,
$$x^2+y^2 = 13^2 = 169.$$
D'après l'IR n°1, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$. Or $x^2+y^2 = 169$, et $\frac{x\times y}{2} = 30$, puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit $x\times y = 30\times 2 = 60$, puis
$$(x+y)^2 = {\color{blue}x^2+y^2}+2{\color{red}xy} = {\color{blue}169}+2\times{\color{red}60} = 169+120 = 289.$$
Finalement, comme $(x+y)^2 = 289$,
$$x+y = \sqrt{289} = 17.$$
2. On utilise cette fois l'IR n°2 :
$$(x-y)^2 = {\color{blue}x^2+y^2}-2{\color{red}xy} = {\color{blue}169}-2\times{\color{red}60} = 169-120 = 49.$$
Or $x-y \geq 0$, puisque x est plus grand que y, donc
$$x-y = \sqrt{49} = 7.$$
⚠Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir $x-y = -7$!!!

On sait à présent que $x+y = 17$ et $x-y = 7$. On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit x :
$$\begin{aligned}
(x+y)+(x-y) &= 17+7\\
x+\cancel{y}+x-\cancel{y} &= 24\\
\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{24}{2}\\
x &= 12
\end{aligned}$$
Enfin, comme $x+y = 17$, on trouve $y = 17-x = 17-12 = 5$.
Conclusion : $x = 12$, $y = 5$.

2 Nombres réels

Exercice 30

1. $-7 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification : $-7 = \dfrac{-7}{1}$, donc $-7 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).
2. $-7 \in \mathbb{N}$. **FAUX.**
Justification : -7 est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{Z}$. **FAUX.**
Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.
Remarque : Pour obtenir $\dfrac{13}{4} = 3,25$ sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ② Poser la division – ③ Remarquer que $\dfrac{13}{4} = \dfrac{12}{4} + \dfrac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$.
4. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{D}$. **VRAI.**
Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.
5. $5,824 \in \mathbb{D}$. **VRAI.**
Justification : $5,824$ a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal
6. $5,824 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification n°1 : $5,824$ est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$).
Justification n°2 : $5,824 = \dfrac{5\,824}{1\,000}$, donc $5,824 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).
7. $\dfrac{10}{6} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{rrr|l} & 1 & 0 & 6 \\ \hline - & \underline{6} & & 1,6 \\ & 4 & 0 & \\ - & \underline{3} & \underline{6} & \\ & & 4 & \end{array}$$

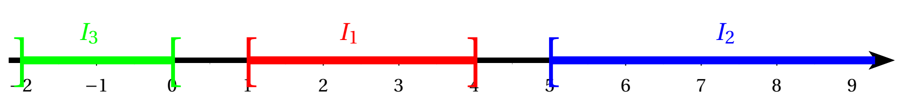
Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{10}{6} = 1,666\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.
8. $\dfrac{17}{11} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 7 & & 1\ 1 \\ \hline -\ \underline{1} & \underline{1} & & 1,5\ 4 \\ & 6 & 0 & \\ - & \underline{5} & \underline{5} & \\ & 5 & 0 & \\ - & \underline{4} & \underline{4} & \\ & & 6 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{17}{11} = 1,5454\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

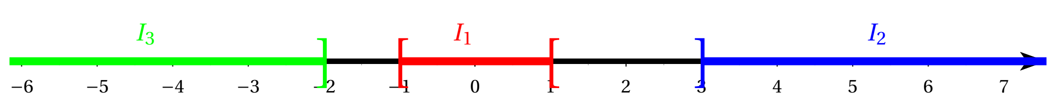
Exercice 31 1.

$I_1 = [1;4] \qquad I_2 = [5;+\infty[\qquad I_3 =]-2;0[$



2.

$I_1 = [-1;1[\qquad I_2 =]3;+\infty[\qquad I_3 =]-\infty;-2]$



Exercice 32

1. $5 \in [2;6[$
2. $-2 \notin]-2;1]$
3. $\pi \in]3;4[$ (on rappelle que $\pi \approx 3,14$)

Exercice 33

1. $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$
2. $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
3. $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
4. $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
5. $|7-4| = |3| = 3$
6. $|4-7| = |-3| = 3$
7. $|4-3| + |5-6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
8. $|5-11| + 2 \times |7-8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
9. $|8-5| \times |7-10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
10. $|15-6| - 4 \times |1-4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

Exercice 34

1. On résout l'équation $|x-2| = 3$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que

$$x-2 = 3 \qquad \text{ou que} \qquad x-2=-3$$

Donc

$$x-\cancel{2}+\cancel{2} = 3+2 \qquad \text{ou} \qquad x-\cancel{2}+\cancel{2} = -3+2$$
$$x = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -1$$

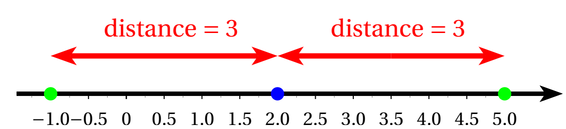
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que la distance entre x et 2 est égale à 3.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

2. On résout l'équation $|x-1| = 4$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 4 sont 4 et -4.
Donc dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que

$$x-1 = 4 \qquad \text{ou que} \qquad x-1=-4$$

Donc

$$x-\cancel{1}+\cancel{1} = 4+1 \qquad \text{ou} \qquad x-\cancel{1}+\cancel{1} = -4+1$$
$$x = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -3$$

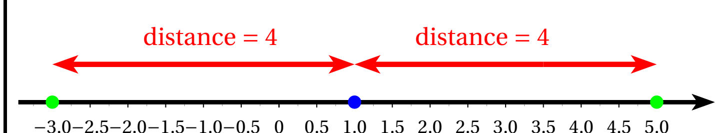
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que la distance entre x et 1 est égale à 4.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

3. On résout l'équation $|x+2| = 2$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 2 sont 2 et -2.
Donc dire que

$$|x+2| = 2$$

revient à dire que

$$x+2=2 \qquad \text{ou que} \qquad x+2=-2$$

Donc

$$\begin{array}{lll} x+\cancel{2}-\cancel{2}=2-2 & \text{ou} & x+\cancel{2}-\cancel{2}=-2-2 \\ x=0 & \text{ou} & x=-4 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=-4$.

Méthode n°2 : avec la distance.

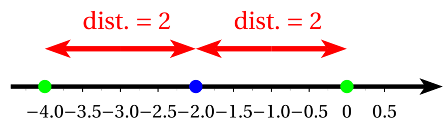
Il y a une vraie difficulté : l'égalité $|x+2| = 2$ se réécrit

$$|x-(-2)| = 2$$

(il faut absolument faire apparaître un « $-$ » pour pouvoir interpréter en termes de distance). Donc dire que

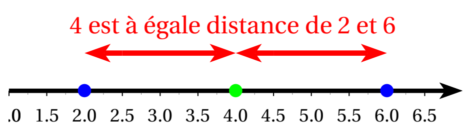
$$|x+2| = 2$$

revient à dire que la distance entre x et -2 est égale à 2.



On voit qu'il y a deux solutions : $x=0$ et $x=-4$.

4. On résout l'équation $|x-2| = |x-6|$.
Conformément à l'indication, on travaille avec la distance : dire que $|x-2| = |x-6|$, c'est dire que la distance entre x et 2 est la même que la distance entre x et 6. Autrement dit, x est à égale distance de 2 et de 6. Il y a un seul nombre x qui convienne : le milieu de l'intervalle $[2;6]$, c'est-à-dire $x=4$.



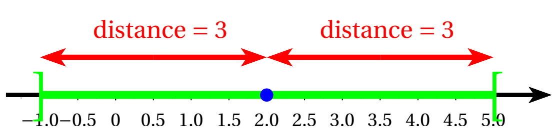
Conclusion : il y a une seule solution, $x=4$.

Exercice 35 Commençons par deux exemples :
- si $x=3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$.
- si $x=-3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

On comprend que quand x est positif, on aura toujours $\sqrt{x^2} = x = |x|$; tandis que dans le cas où x est négatif, le signe $-$ « disparaît » lorsqu'on élève au carré, ce qui donne finalement $\sqrt{x^2} = |x|$.
Autrement dit, quel que soit x (y compris si $x=0$), on a l'égalité

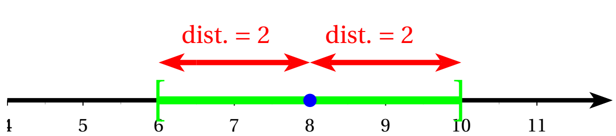
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 36 1. Dire que $|x-2| < 3$, c'est dire que la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 3. On voit que les x qui conviennent sont tous les nombres de l'intervalle $]-1;5[$ (extrémités exclues, puisque l'inégalité est stricte).



2. Les points de l'intervalle ci-dessous sont les nombres x dont la distance à 8 est inférieure ou égale à 2 (donc extrémités incluses) ; autrement dit, ce sont les nombres x tels que

$$|x-8| \leq 2.$$



Exercice 37 Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. On part de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on élève au carré et on multiplie par q^2 :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}^2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\
2 &= \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \\
2 &= \frac{p^2}{q^2} \\
2 \times q^2 &= \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \times \cancel{q^2} \\
2q^2 &= p^2
\end{aligned}$$

2. Commençons par un exemple : prenons un nombre qui « se termine par 4 » (donc le chiffre des unités est 4). Le carré de ce nombre va « se terminer par 6 », puisque $4^2 = 16$. Autrement dit, le chiffre des unités du carré est 6.
   Avec la même technique, on voit que si le chiffre des unités est 9, celui du carré est 1 (puisque $9^2 = 81$) ; etc. On remplit ainsi le tableau :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

3. Pour avoir le chiffre des unités de $2q^2$, il suffit de reprendre la deuxième ligne du tableau précédent et de multiplier par 2. Par exemple, si le chiffre des unités de q est 7, alors celui de q^2 est 9 ; et celui de $2q^2$ est 8 (puisque $2 \times 9 = 18$). On remplit ainsi le nouveau tableau :

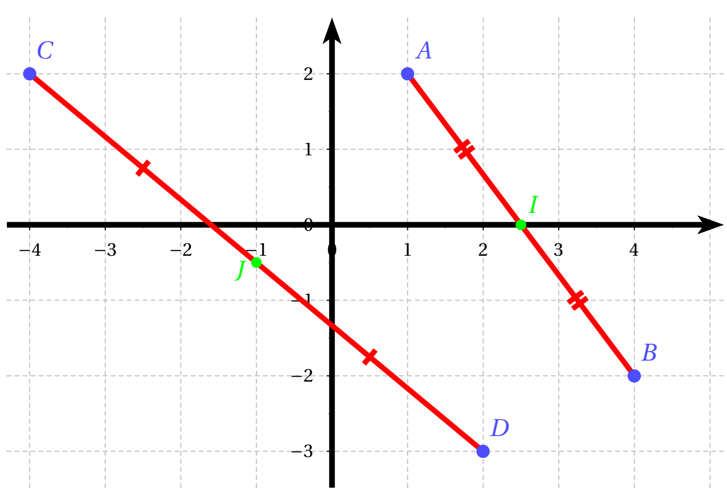
Chiffre des unités de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

4. D'après la question 1, $2q^2 = p^2$. Les nombres $2q^2$ et p^2 étant égaux, ils ont le même chiffre des unités. Or dans nos deux tableaux, le seul chiffre en commun des deuxièmes lignes est le 0 ; et on l'obtient lorsque le chiffre des unités de p est 0, et lorsque le chiffre des unités de q est 0 ou 5.
5. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : on peut donc l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. D'après la question précédente, p se termine par 0 et q se termine par 0 ou 5. Mais alors p et q sont tous deux multiples de 5, et donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite au départ.

   Conclusion : supposant que $\sqrt{2}$ était rationnel, on aboutit à une absurdité; c'est donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3 Géométrie repérée

Exercice 38 1.



(a) On a $A(\underset{x_A}{1}\ ;\ \underset{y_A}{2})$ et $B(\underset{x_B}{4}\ ;\ \underset{y_B}{-2})$. On calcule les coordonnées de I :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) \qquad I\left(\frac{5}{2}; \frac{0}{2}\right) \qquad I\,(2{,}5;0)\,.$$

(b)

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

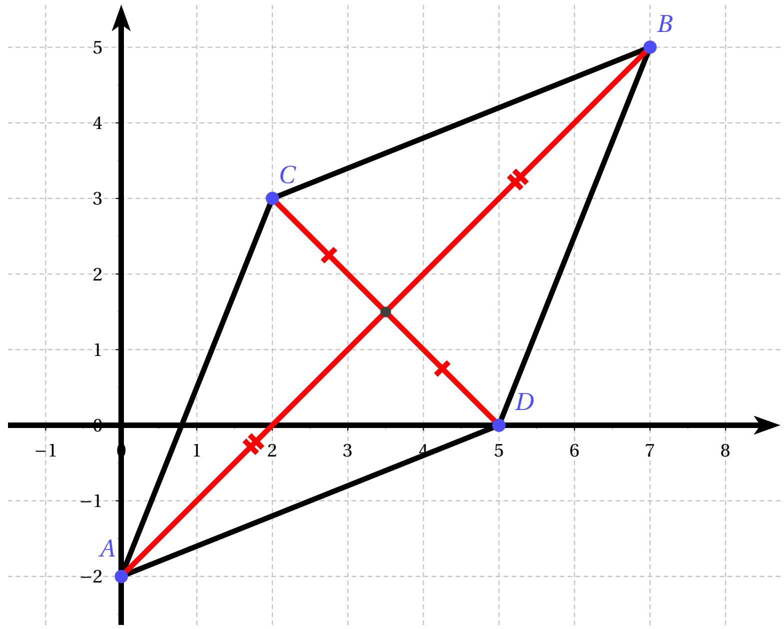
2. (a) On a $C(\underset{x_C}{-4}\,;\,\underset{y_C}{2})$ et $D(\underset{x_D}{2}\,;\,\underset{y_D}{-3})$. On calcule les coordonnées de J :

$$J\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)\qquad J\left(\frac{-4+2}{2};\frac{2+(-3)}{2}\right)\qquad J\left(\frac{-2}{2};\frac{-1}{2}\right)\qquad J\,(-1;-0,5)\,.$$

(b)

$$CD=\sqrt{(x_D-x_C)^2+\left(y_D-y_C\right)^2}=\sqrt{(2-(-4))^2+(-3-2)^2}=\sqrt{6^2+(-5)^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}.$$

Exercice 39 1.



2. On calcule les coordonnées de M :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)\qquad M\left(\frac{0+7}{2};\frac{-2+5}{2}\right)\qquad M\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)\qquad M\,(3,5;1,5)\,.$$

Puis celles de M' :

$$M'\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)\qquad M'\left(\frac{2+5}{2};\frac{3+0}{2}\right)\qquad M'\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)\qquad M'\,(3,5;1,5)\,.$$

3. On constate dans la question précédente que $M=M'$, les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ du quadrilatère $ACBD$ se coupent donc en leur milieu. D'après une propriété du collège, cela entraîne que $ACBD$ est un parallélogramme, puis que ses côtés opposés sont de même longueur : $BD=AC$, $CB=AD$.

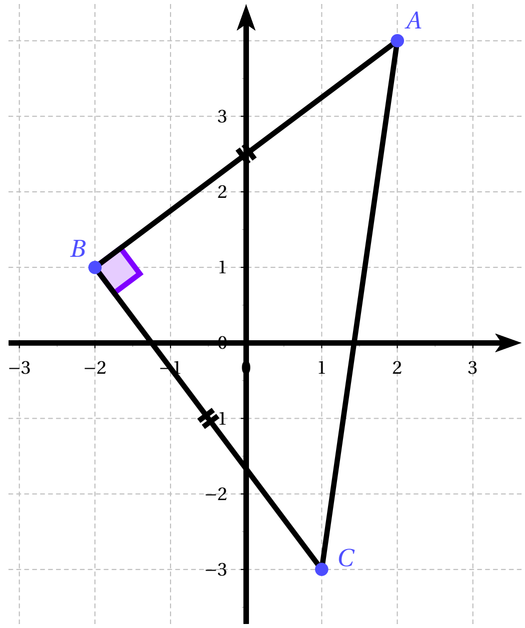
4. On calcule les longueurs AC et CB :
   - $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$
   - $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+\left(y_B-y_C\right)^2}=\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}.$

   On constate que $AC=CB$, donc d'après la question précédente :

$$BD=AC=CB=AD.$$

Conclusion : le quadrilatère $ACBD$ a quatre côtés de même longueur, donc c'est un losange.

Exercice 40



On calcule la longueur des trois côtés :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$AB = BC$, donc ABC est isocèle en B. On utilise le théorème réciproque de Pythagore pour prouver qu'il est rectangle :

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Exercice 41

1. - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}.$
   - $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$
   - $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

   On a donc :

   $$\left.\begin{array}{l} AB^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AC^2 + BC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{10}^2 = 40 + 10 = 50 \end{array}\right\} AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

   D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en C.
2. D'après la formule du cours :

   $$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{6+1}{2}; \frac{0+5}{2}\right) \qquad I\,(3{,}5\ ;\ 2{,}5)\,.$$

3. Le triangle ABC étant rectangle en C, le milieu I de l'hypoténuse $[AB]$ est le centre de Γ (rappel de l'énoncé) ; et le rayon de Γ est

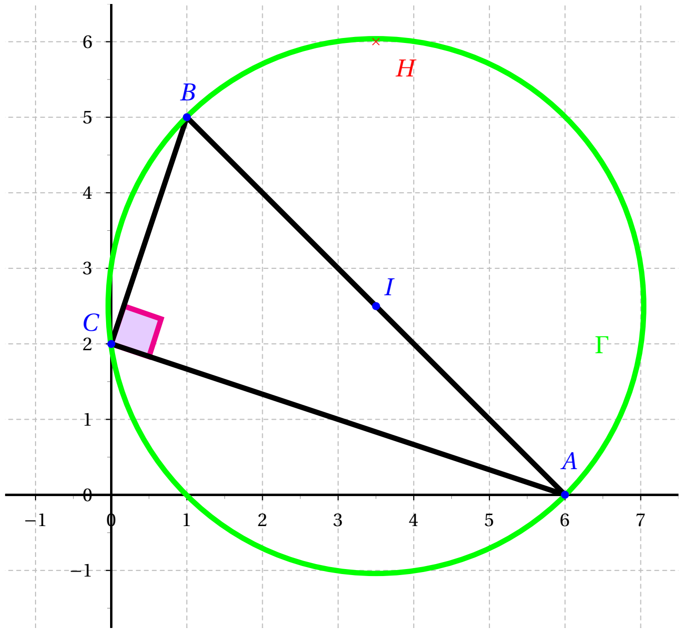
   $$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + \left(y_A - y_I\right)^2} = \sqrt{(6-3{,}5)^2 + (0-2{,}5)^2} = \sqrt{2{,}5^2 + (-2{,}5)^2} = \sqrt{6{,}25+6{,}25} = \sqrt{12{,}5}.$$

4. Savoir si $H(3{,}5\ ;\ 6)$ appartient à Γ revient à savoir si la longueur IH est égale à r ou non. On calcule cette longueur avec la formule du cours :

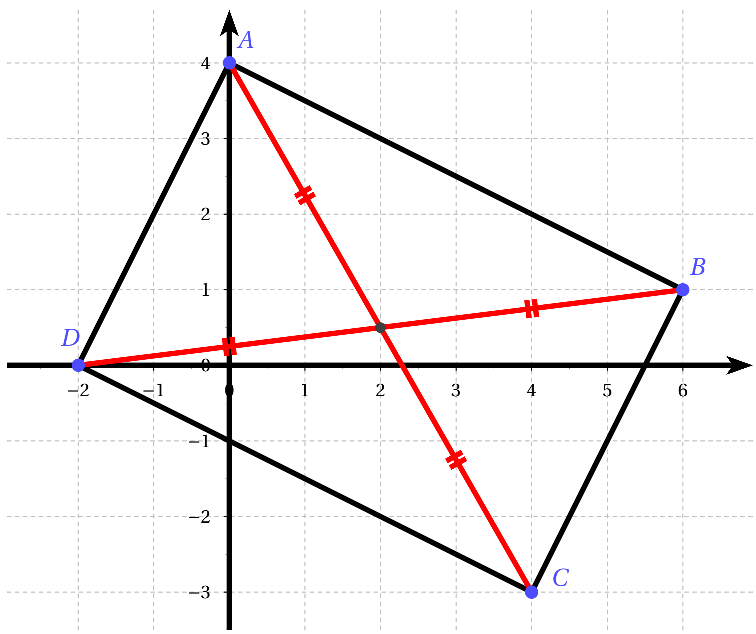
   $$IH = \sqrt{(x_H - x_I)^2 + (y_H - y_I)^2} = \sqrt{(3{,}5-3{,}5)^2 + (6-2{,}5)^2} = \sqrt{0^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{0+12{,}25} = \sqrt{12{,}25}.$$

   Comme $\sqrt{12{,}25} \neq \sqrt{12{,}5}$, le point H n'appartient pas à Γ.

   N.B. La figure est trompeuse, puisqu'on a l'impression que H est sur Γ. En réalité, si vous avez pris 1 cm comme unité graphique, le point H est à environ trois cheveux (au sens propre) du cercle.



Exercice 42



1. • Le milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \qquad \left(\frac{0+4}{2} ; \frac{4+(-3)}{2}\right) \qquad (2\ ;\ 0,5)\,.$$

   • Le milieu du segment $[BD]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_D}{2} ; \frac{y_B + y_D}{2}\right) \qquad \left(\frac{6+(-2)}{2} ; \frac{1+0}{2}\right) \qquad (2\ ;\ 0,5)\,.$$

   Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme (propriété du collège).

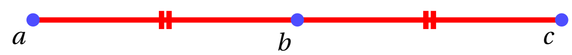
   ⚠Si vous donnez un nom aux milieux des diagonales **avant de faire les calculs**, donnez-leur des noms différents : avant de faire les calculs, on n'a pas encore prouvé que les milieux étaient les mêmes.

2. On calcule la longueur des diagonales :
   - $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}.$
   - $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + \left(y_D - y_B\right)^2} = \sqrt{(-2-6)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}.$

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont de même longueur, donc c'est un rectangle (propriété du collège).

Exercice 43 1. Le symétrique de 2 par rapport à 5,5 est 9.

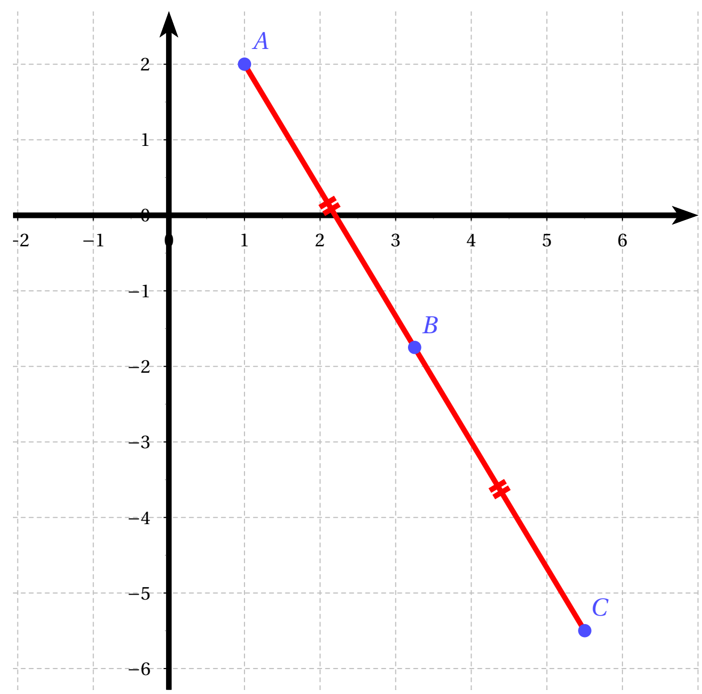
2. On généralise le travail de la question précédente : c est le symétrique de a par rapport à b lorsque b est le milieu du segment qui va de a à c.



Autrement dit $b = \frac{a+c}{2}$, ce qui donne $b\times 2 = \frac{a+c}{\cancel{2}}\times\cancel{2}$, soit $2b = a + c$; et donc

$$c = 2b - a.$$

3. On place C, symétrique du point A par rapport au point B.



Par définition d'une symétrie centrale, B est le milieu du segment $[AC]$, donc d'après la formule du cours pour le milieu d'un segment :

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \quad , \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Autrement dit, en remplaçant avec les données de l'énoncé :

$$3{,}25 = \frac{1 + x_C}{2} \quad , \quad -1{,}75 = \frac{2 + y_C}{2}.$$

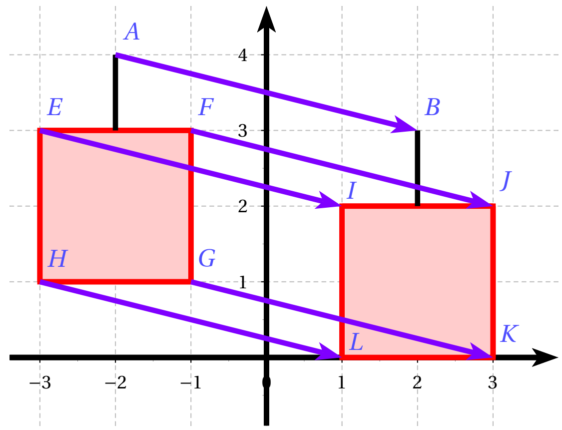
En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient

$$x_C = 2\times 3{,}25 - 1 = 5{,}5 \quad , \quad y_C = 2\times(-1{,}75) - 2 = -5{,}5.$$

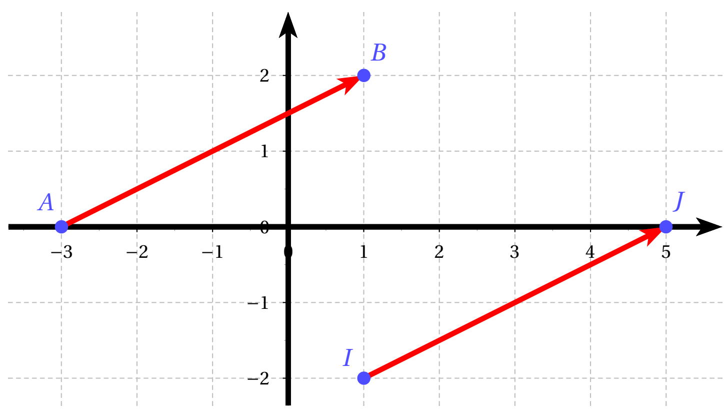
Conclusion : $C(5{,}5\ ;\ -5{,}5)$.

Exercice 44 Cet exercice d'introduction à la notion de vecteur appelle quelques commentaires :

1. La télécabine $EFGH$ glisse pour aboutir à la position $IJKL$. Ce déplacement est appelé « translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ».
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a été représenté en violet sur la figure, il est égal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{HL}$. On peut donc écrire
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{HL}.$$
3. Pour aller de A à B, on avance de 4 carreaux en abscisse et on descend de 1 carreau en ordonnée; on dit que $\overrightarrow{AB}$ a pour abscisse 4 et pour ordonnée -1. On note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.



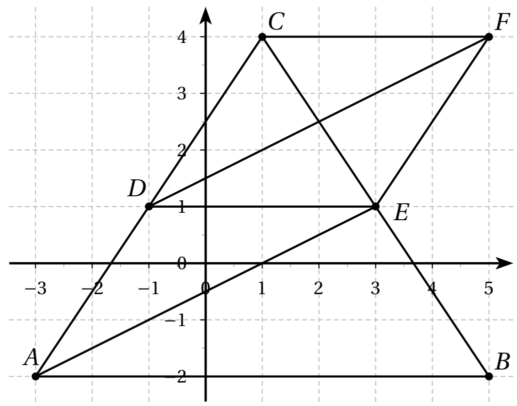
Exercice 45 1.



2. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\ 2-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$
3. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$:
$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}x_J - x_I\\ y_J - y_I\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}5-1\\ 0-(-2)\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 46 On considère les points $A(-3;-2)$, $B(5;-2)$, $C(1;4)$, $D(-1;1)$, $E(3;1)$, $F(5;4)$.

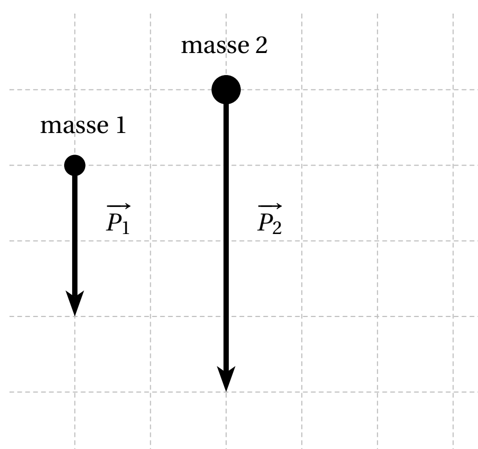


Il y a trop de possibilités pour que les justifie toutes. Je vais me contenter de donner un couple de vecteurs égaux, avec la justification; puis donner toutes les autres égalités possibles, mais sans les justifier :

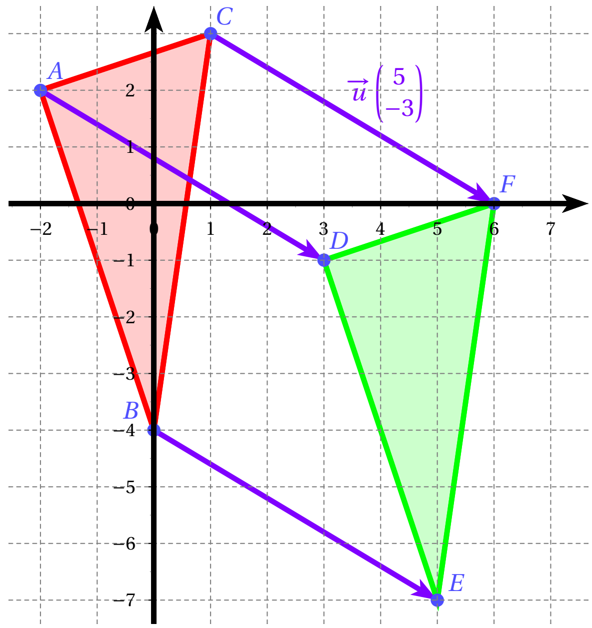
1. **Une égalité et sa justification.**
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$. En effet, ces vecteurs ont les mêmes coordonnées :
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. **Toutes les autres égalités.**
   $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ $\quad \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF}$ $\quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FD}$ $\quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB}$ $\quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BE}$

   ⚠Attention à l'ordre des lettres! Par exemple, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, mais $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{FE}$ (il y a un problème de sens : le vecteur $\overrightarrow{DC}$ « monte vers le haut et la droite »; tandis que $\overrightarrow{FE}$ « descend vers le bas et la gauche » – l'erreur se détecte aussi bien sûr en calculant les coordonnées).

Exercice 47 En physique, un vecteur représente une force, et la longueur (ou norme) du vecteur correspond à l'intensité de la force. L'égalité $\left\|\overrightarrow{P_2}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{P_1}\right\|$ signifie que la masse 2 a un poids deux fois plus important que celui de la masse 1.



Exercice 48 L'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le triangle DEF.



4 Études graphiques de fonctions

Exercice 49 Un voyageur de commerce (= un représentant) fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

Remarque : On peut penser que l'indemnité kilométrique sert à rembourser les frais de déplacement (par exemple si le représentant utilise sa propre voiture) ; et que la part fixe sert à payer les repas.

1. S'il fait 120 km dans la journée, le montant de la note de frais est de

$$30+120\times 0,5=30+60=90\text{ €}.$$

2. On note x le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et $f(x)$ le montant de la note de frais. On a alors

$$f(x)=30+x\times 0,5=0,5x+30.$$

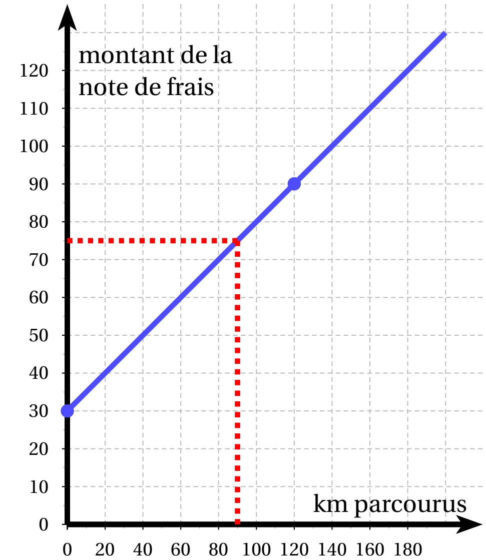
3. La fonction f est affine, puisque $f(x)=0,5x+30$ (c'est bien une fonction de la forme $f(x)=ax+b$, avec $a=0,5$ et $b=30$). Sa courbe représentative est donc une droite, que l'on trace à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs ; par exemple :

x	0	120
$f(x)$	30	90

$$f(0)=0,5\times 0+30=30$$
$$f(120)=0,5\times 120+30=90$$

On place les points de coordonnées $(0;30)$ et $(120;90)$, puis on trace la droite – en réalité un segment, puisqu'on va de 0 à 200 en abscisses.

Remarque : On a choisi les valeurs 0 et 120, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs – l'avantage de 0, c'est que le calcul est facile ; et l'avantage de 120, c'est qu'on a déjà fait le calcul dans la question 1.



4. Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Pour déterminer le nombre de km parcourus dans la journée, il y a deux méthodes :
   - **Graphiquement.** On voit qu'il a parcouru 90 km (pointillés rouges) [3].
   - **Par le calcul.** On retire les frais fixes : $90 - 30 = 60$ € d'indemnité kilométrique. Puis, comme chaque km compte pour $0,5$ €, on divise : $45 \div 0,5 = 45 \times 2 = 90$ km. [4]

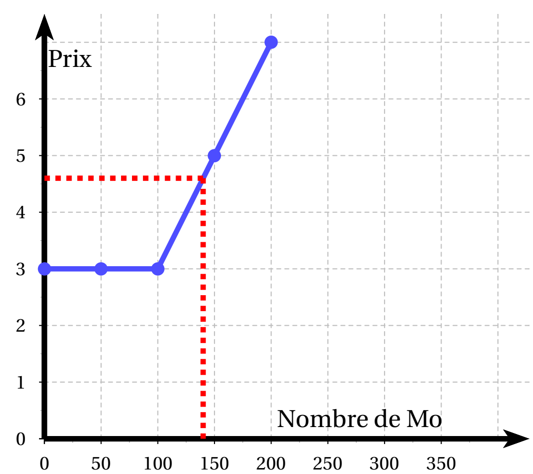
Exercice 50 1. • Lorsqu'on télécharge 50 Mo, on paye 3 €.
   - Lorsqu'on télécharge 150 Mo, les 100 premiers coûtent 3 € ; et les 50 suivants coûtent $50 \times 0,04 = 2$ €. On paye donc au total $3 + 2 = 5$ €.

2. On complète le tableau de valeurs :

Nombre de Mo	0	50	100	150	200
Prix à payer	3	3	3	5	7

Remarque : jusqu'à 100 Mo, on paye 3 €. Ensuite, chaque nouvelle tranche de 50 Mo est facturée 2 €.

3. On construit la courbe qui donne le prix payé en fonction du nombre de Mo téléchargés. Elle est constante sur l'intervalle $[0;100]$, puis affine sur l'intervalle $[100;200]$. Il faut donc utiliser une règle pour effectuer le tracé [5].



4. Il y a deux méthodes :
   - **Graphiquement.** On voit qu'on a téléchargé 140 Mo (pointillés rouges).
   - **Par le calcul.** J'ai payé 4,60 €, donc $3 + 1,60$ €. J'ai donc téléchargé $1,60 \div 0,04 = 40$ Mo au-delà du 100^{e}. Autrement dit, j'ai téléchargé 140 Mo.

3. La méthode graphique est simple, mais la réponse pourrait être imprécise.
4. On peut aussi résoudre l'équation $0,5x + 30 = 75$.
5. On parle de fonction « affine par morceaux ».

Exercice 51 Les gares de Calais et de Boulogne-sur-Mer sont distantes de 30 km. Un train part à 12 h de Boulogne-sur-Mer en direction de Calais et roule à la vitesse de 40 km/h. Un train part de Calais à 12 h 15 et fait route en sens inverse à la vitesse de 60 km/h.

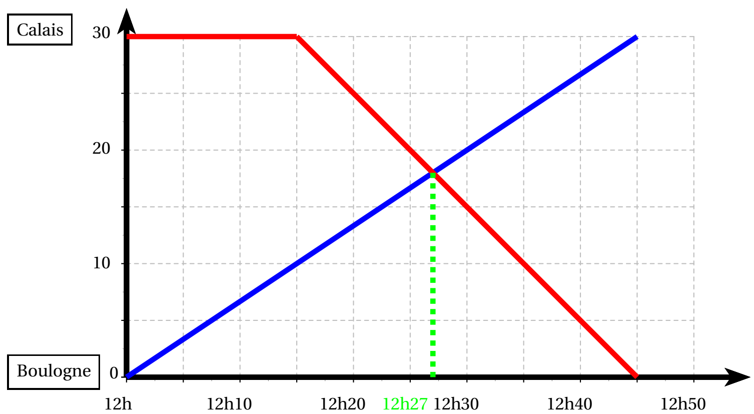
1. Le train qui part à 12 h de Boulogne-sur-Mer roule à la vitesse de 40 km/h, donc il parcourt 40 km en 60 min. Pour savoir quand il arrive à Calais, on complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	40	30

Le train mettra $\frac{60\times30}{40} = \frac{1800}{40} = 45$ min pour arriver à Calais, donc il y sera à 12 h 45.

Pour le train qui part de Calais, le calcul est plus facile : il roule à 60 km/h, donc parcourt 60 km en 60 min ; et ainsi 30 km en 30 min. Comme il part à 12 h 15, il arrive à 12 h 45 lui aussi.

On peut ainsi représenter la marche des deux trains :



2. Nous allons déterminer l'heure de croisement des trains par le calcul. Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes.

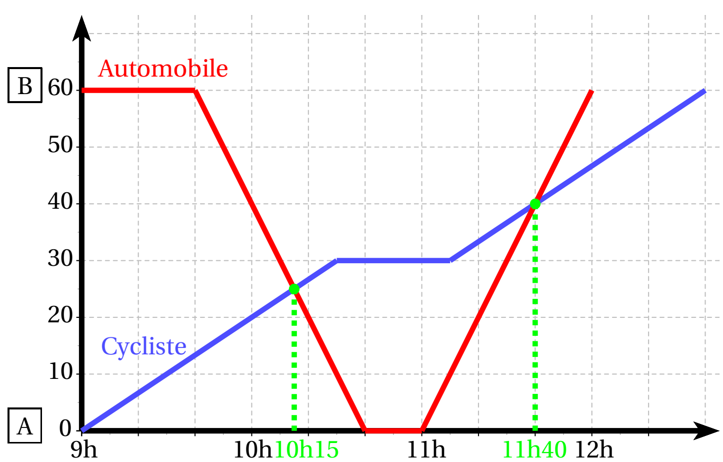
À 12h15, le train qui part de Boulogne-sur-Mer a parcouru 10 km (facile à vérifier), il est donc à 20 km de Calais. C'est l'heure à laquelle le deuxième train part. Comme l'un roule à 40 km/h et l'autre à 60 km/h, tout se passe comme si un seul train devait parcourir 20 km à la vitesse de $40+60 = 100$ km/h. On complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	100	20

$\frac{60\times20}{100} = \frac{1200}{100} = 12$, donc il faudrait 12 min à ce train pour parcourir 20 km. Ainsi, les deux trains se croiseront-ils à

$$12 \text{ h } 15 \text{ min} + 12 \text{ min} = 12 \text{ h } 27 \text{ min}.$$

Exercice 52 Je me contenterai du graphique, donc je ne ferai pas les calculs pour avoir les heures exactes des deux rencontres – elles s'obtiennent avec les mêmes techniques que dans l'exercice précédent.



Exercice 53 Le taux d'anticorps (en g/l) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en mois), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 12 mois, est donné par la formule suivante :

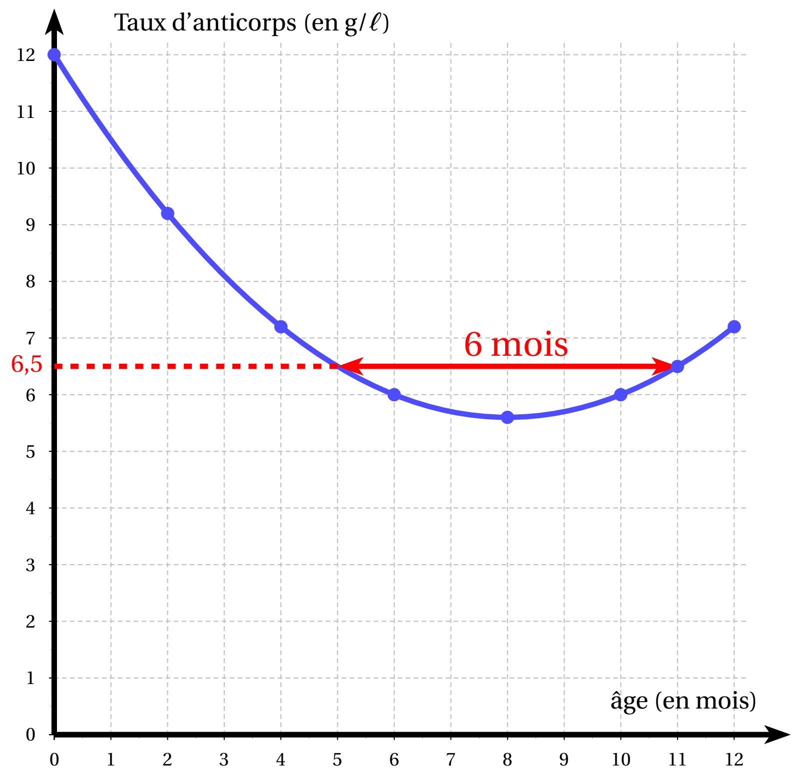
$$f(x) = 0,1x^2 - 1,6x + 12.$$

1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[0;12]$ avec un pas de 2 :

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	12	9,2	7,2	6	5,6	6	7,2

Détail de deux calculs :
- $f(0) = 0,1 \times 0^2 - 1,6 \times 0 + 12 = 12$.
- $f(12) = 0,1 \times 12^2 - 1,6 \times 12 + 12 = 7,2$.

2.



3. Le taux d'anticorps à la naissance est de 12 g/ℓ.
4. Tableau de variations :

x	0	8	12
$f(x)$	12 ↘	5.6	↗ 7.2

Le taux d'anticorps est minimal à l'âge de 8 mois.

5. D'après le graphique, le taux d'anticorps est inférieur à 6,5 g/ℓ pendant 6 mois (du 5^e au 11^e mois).

Exercice 54 On considère la fonction f définie sur $[-1;3]$ par

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

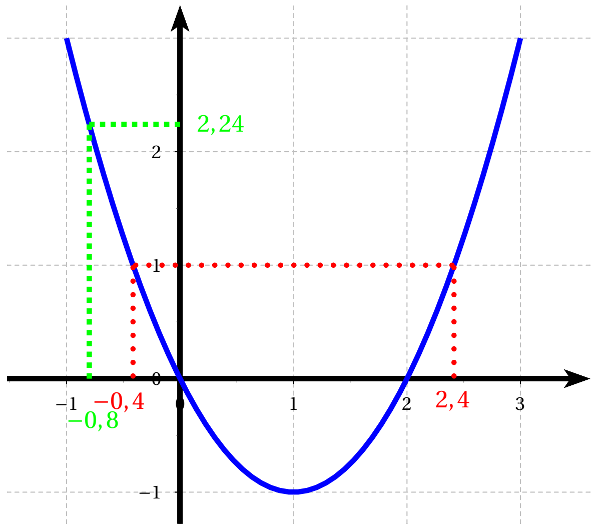
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[-1;3]$ avec un pas de 0,5 :

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	3	1,25	0	$-0,75$	-1	$-0,75$	0	1,25	3

Détail de deux calculs :

- $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$.
- $f(0,5) = 0,5^2 - 2 \times 0,5 = 0,25 - 1 = -0,75$.

2. Courbe représentative de f :



3. L'image de $-0,8$ par f est
$$f(-0,8) = (-0,8)^2 - 2 \times (-0,8) = 0,64 + 1,6 = 2,24.$$
On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat – si on a de bons yeux !
4. Les antécédents de 1 par f sont $-0,4$ et $2,4$ environ (voir pointillés rouges).
5. Les solutions l'inéquation $f(x) < 1$ sont tous les nombres dont l'image est strictement inférieure à -1. Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $]-0,4;2;4[$ environ.
6. Tableau de variations de f :

x	-1		1		3
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

7. Tableau de signe de f :

x	-1		0		2		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 55 On considère la fonction g définie sur $[1;4]$ par
$$g(x) = x - \frac{6}{x}.$$

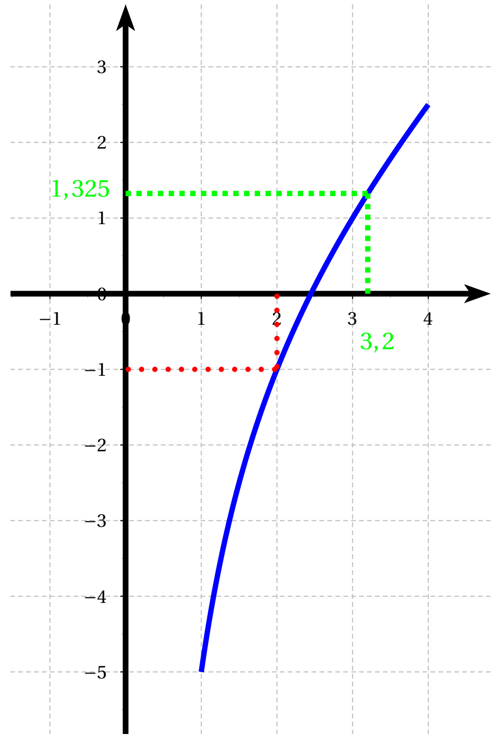
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[1;4]$ avec un pas de $0,5$:

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$g(x)$	-5	$-2,5$	-1	0,1	1	1,79	2,5

Détail de deux calculs :
- $g(2) = 2 - \frac{6}{2} = 2 - 3 = -1$.
- $g(1,5) = 1,5 - \frac{6}{1,5} = 1,5 - 4 = -2,5$.

Remarque : L'énoncé demande d'arrondir à 10^{-2} près par excès. Cela signifie qu'il faut donner deux chiffres après la virgule et arrondir par valeur supérieure le deuxième chiffre après la virgule. Par exemple $g(3,5) = 1,7857\cdots \approx 1,79$.

2. Courbe représentative de g :



3. L'image de $3,2$ par g est

$$g(3,2) = 3,2 - \frac{6}{3,2} = 3,2 - 1,875 = 1,325.$$

   On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat.
4. L'unique solution de l'équation $g(x) = -1$ (donc l'unique antécédent de -1 par g) est 2 (pointillés rouges).
5. Les solutions l'inéquation $g(x) \geq -1$ sont tous les nombres dont l'image est supérieure ou égale à -1. Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $[2;4]$.
6. Tableau de variations de g :

x	1		4
$g(x)$	-5	$\nearrow$	2.5

7. Tableau de signe de g :

x	1		≈ 2.4		4
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 56 1. x est une longueur, donc $x \geq 0$. Par ailleurs, la longueur x ne peut pas dépasser 4 (car $AB = 4$).
   Conclusion : on a l'encadrement

$$0 \leq x \leq 4.$$

2. • $AP = AD - DP = 4 - x$.

- L'aire du rectangle $AMNP$ est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{AMNP} &= AM \times AP \\
&= x \times (4 - x) && \text{(car } AP = 4 - x\text{)} \\
&= x \times 4 + x \times (-x) && \text{(on développe)} \\
&= 4x - x^2.
\end{aligned}$$

3. La fonction f est définie pour $0 \leq x \leq 4$ par

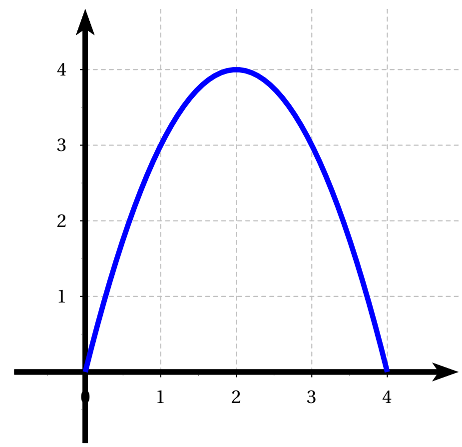
$$f(x) = 4x - x^2.$$

Autrement dit, $f(x)$ donne l'aire du rectangle $AMNP$ pour une valeur donnée de x.

(a) Tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0

Courbe représentative :

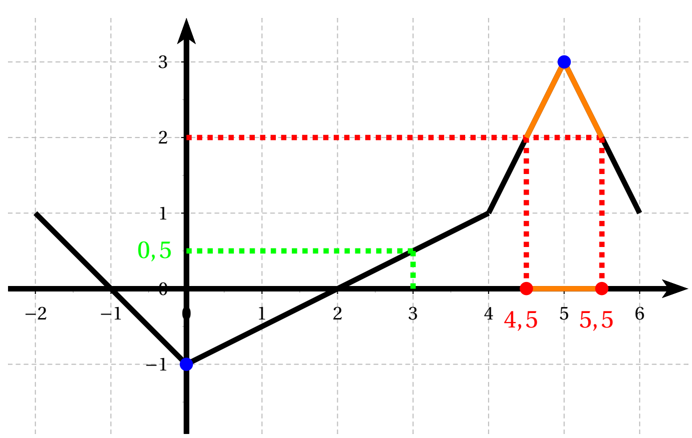


(b) Tableau de variations de f :

x	0		2		4
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

(c) La fonction f atteint son maximum lorsque $x = 2$, donc l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale lorsque $x = 2$, c'est-à-dire quand M est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 57



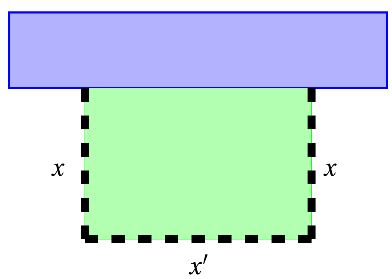
1. L'image de 3 par f est $0,5$ (pointillés verts).
2. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $4,5$ et $5,5$ (pointillés rouges).
3. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ sont tous les nombres de l'intervalle $[4,5\ ;\ 5,5]$: c'est sur cet intervalle que la courbe est au dessus de 2 (parties de la courbe et de l'axe des abscisses repassées en orange).
4. Tableau de variations de f :

x	-2		0		5		6
$f(x)$	1	↘	-1	↗	3	↘	1

5. Le maximum de f est 3, son minimum est -1 (points bleus).
6. Tableau de signe de f :

x	-2		-1		2		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 58 On dispose d'une clôture de 100 mètres de long pour délimiter un terrain rectangulaire le long d'une rivière (la clôture est en pointillés — on ne met pas de clôture le long de la rivière). On note x et x' les longueurs des côtés du terrain.



On voudrait délimiter le terrain le plus grand possible.

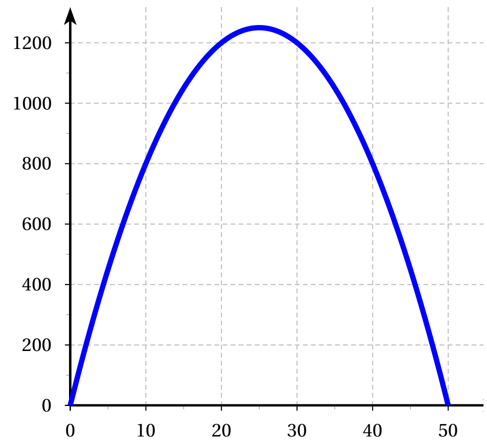
1. (a) x est une longueur, donc $x \geq 0$. Par ailleurs, la longueur x apparaît deux fois sur la figure, donc x ne peut pas dépasser 50 (car $2 \times 50 = 100$).
   Conclusion : on a l'encadrement
   $$0 \leq x \leq 50.$$
   (b) Le périmètre, 100 m, s'obtient en faisant le calcul
   $$x + x + x',$$
   donc
   $$2x + x' = 100\ ;$$
   et donc
   $$x' = 100 - 2x.$$
   (c) L'aire du terrain est
   $$\begin{aligned} x \times x' &= x \times (100 - 2x) && \text{(car } x' = 100 - 2x\text{)} \\ &= x \times 100 + x \times (-2x) && \text{(on développe)} \\ &= 100x - 2x^2. \end{aligned}$$

2. On définit à présent la fonction f sur $[0;50]$ par
$$f(x) = 100x - 2x^2.$$
Autrement dit, $f(x)$ donne l'aire du terrain pour une valeur donnée de x.

(a) Tableau de valeurs :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	0	450	800	1050	1200	1250	1200	1050	800	450	0

(b) Courbe représentative :



(c) f atteint son maximum lorsque $x = 25$, donc la surface du terrain est maximale lorsque $x = 25$. Dans ce cas, $x' = 100 - 2 \times 25 = 50$. Autrement dit, le terrain de surface maximale mesure 50 m sur 25 m.

Exercice 59 On construit la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $[-2;3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

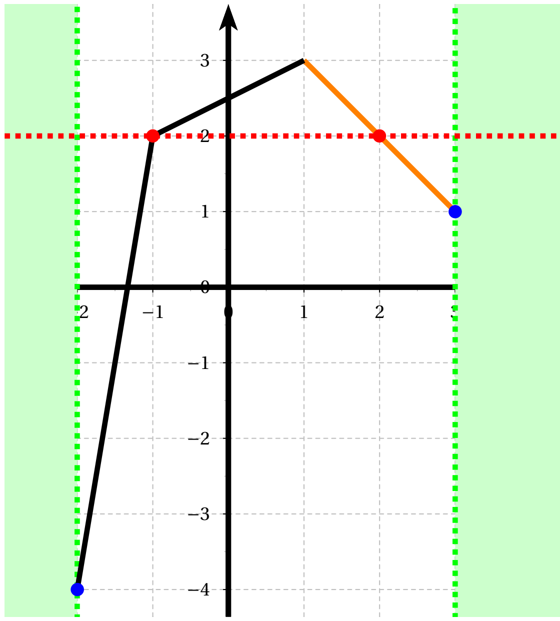
- f est croissante sur l'intervalle $[-2;1]$;
- f est affine sur l'intervalle $[1;3]$;
- $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$;
- les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2.

Il y a plusieurs étapes :

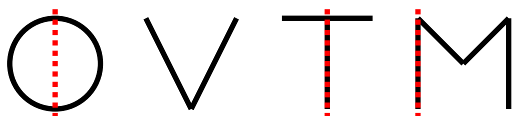
1. Pour commencer, on utilise l'ensemble de définition : on sait qu'il faut tracer la courbe sur l'intervalle $[-2;3]$ (zones vertes exclues).
2. Ensuite, on sait que $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$, donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(-2;-4)$ et $(3;1)$ (placés en bleu).
3. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2, donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(2;2)$ (placés en rouge). De plus, la courbe représentative ne coupe nulle part ailleurs la droite horizontale qui passe par l'ordonnée 2 (tracée également en rouge, en pointillés).
4. La fonction f est affine sur $[1;3]$, donc sa courbe représentative sur cet intervalle est un segment. On trace l'unique segment passant par les points déjà placés (en orange).
5. Enfin f est croissante sur l'intervalle $[-2;1]$, donc on trace une courbe « qui monte » sur cet intervalle (en noir). Il faut aussi bien sûr qu'elle passe par les points déjà placés.

   Remarque : Pour cette dernière étape, il y a plusieurs dessins possibles. Sur le graphique j'ai choisi de tracer deux segments par facilité (technique), mais vous pouvez faire une courbe à main levée qui ne soit pas droite.

La courbe finale est tracée en noir et en orange.



Exercice 60 Les courbes en forme de O, de T et de M ne sont pas les courbes représentatives de fonctions, puisqu'un nombre aurait plusieurs images (pointillés rouges).
En revanche, la lettre V n'a pas ce problème et représente bien la courbe d'une fonction (exemple : la courbe de la fonction définie par $f(x) = 2|x|$ pour $x \in [-1;1]$ est en forme de V).



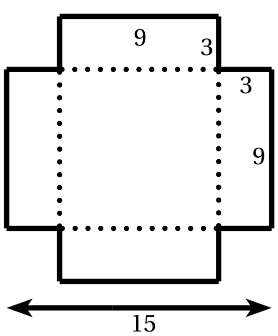
D'une manière générale, on reconnaît une fonction (et la courbe représentative d'une fonction) au fait que tout nombre réel a **au plus une** image (donc 0 ou 1 image).

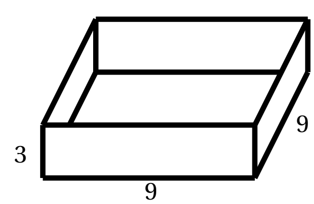
Exercice 61 Dans tout l'exercice, les longueurs sont exprimées en cm, les aires en cm² et les volumes en cm³.

1. (a) x est une longueur, donc $x \geq 0$. D'autre part, la longueur x apparaît deux fois, donc comme la plaque de métal a pour côté 15, x ne peut dépasser 7,5. Autrement dit :

$$x \text{ est compris entre } 0 \text{ et } 7,5.$$

   (b) Dans cette question, on prend $x = 3$. Il reste alors $15 - 2 \times 3 = 9$ cm pour le côté du carré central.



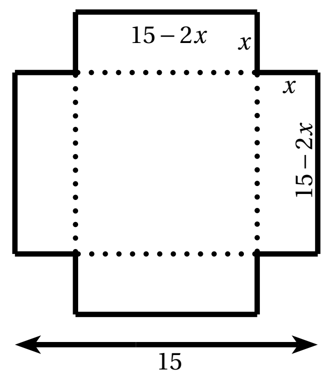


Le volume de la boîte est égal à

$$L \times \ell \times h = 9 \times 9 \times 3 = 243.$$

2. À partir de là, je regroupe la correction des sous-questions.

   Le carré du fond a pour côté $15 - x - x = 15 - 2x$, et la hauteur de la boîte est x.



Donc le volume de la boîte est

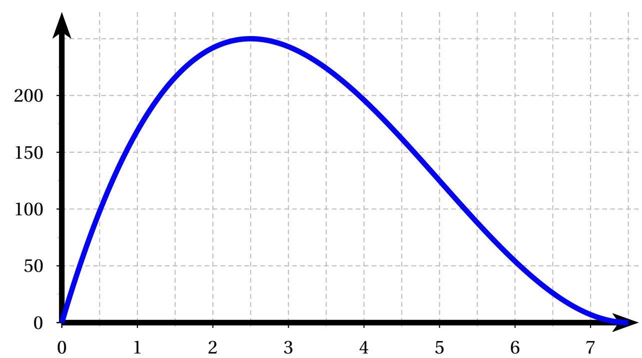
$$L \times \ell \times h = (15-2x)\times(15-2x)\times x.$$

On développe cette expression :

$$\begin{aligned} V(x) &= (15-2x)\times(15-2x)\times x \\ &= (15\times 15+15\times(-2x)+(-2x)\times 15+(-2x)\times(-2x))\times x \\ &= \left(225-30x-30x+4x^2\right)\times x \\ &= 225x-30x^2-30x^2+4x^3 \\ &= 4x^3-60x^2+225x. \end{aligned}$$

On fait un tableau de valeurs pour V sur $[0;7,5]$ avec un pas de $0,5$, puis on construit sa courbe représentative.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
$V(x)$	0	98	169	216	242	250	243	224	196	162	125	88	54	26	7	0



Conclusion : d'après le graphique, le volume est maximal lorsque $x = 2,5$.

5 Probabilités

Exercice 62 1. Comme on ne remet pas le premier jeton avant de tirer le deuxième, il n'est pas possible d'obtenir un « double ». L'univers est donc

$$U = \{(1,2);(1,3);(2,1);(2,3);(3,1);(3,2)\}\ .$$

2. L'événement A : « un des jetons porte le n°1 » s'écrit sous forme ensembliste

$$A = \{(1,2);(1,3);(2,1);(3,1)\}$$

(on conserve tous les événements élémentaires où apparaît le chiffre 1).

Il y a 4 cas favorables à A, et 6 cas possibles dans l'univers, donc $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exercice 63 1. L'univers est

$$U = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Il comporte $4 \times 4 = 16$ éléments.

2. L'événement B : « au moins l'un des deux dés tombe sur 4 » s'écrit sous forme ensembliste

$$B = \{(1,4);(2,4);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}$$

(on conserve tous les événements élémentaires où apparaît au moins un 4).
Il y a 7 cas favorables à B.

3. D'après les questions précédentes, $P(B) = \frac{7}{16}$.

Exercice 64 1. L'univers est

$$U = \{\text{RRR};\text{RRB};\text{RBR};\text{RBB};\text{BRR};\text{BRB};\text{BBR};\text{BBB};\text{VRR};\text{VRB};\text{VBR};\text{VBB}\}.$$

Il comporte $3 \times 2 \times 2 = 12$ éléments[6].

2. Le contraire de

A : « la tenue du footballeur comporte du bleu »

est

$\overline{A}$: « la tenue du footballeur **ne** comporte **pas** de bleu ».

Il s'écrit sous forme ensembliste

$$\overline{A} = \{\text{RRR};\text{VRR}\}$$

– il n'y a que deux tenues qui n'ont pas de bleu!

On en déduit $P\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{12}$, puis

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = \frac{12}{12} - \frac{2}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 65 1. Il y a 6 choix possibles pour le vainqueur de la course, puis 5 pour le deuxième (puisqu'il est différent du vainqueur) ; et enfin 4 pour le troisième. Donc au total

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

podiums différents possibles.

2. Imaginons que les chevaux soient numérotés de 1 à 12 et que le classement de la course soit

1$^{\text{er}}$: Cheval n°7 2$^{\text{e}}$: Cheval n°4 3$^{\text{e}}$: Cheval n°10

Dans ce cas, le tiercé dans l'ordre est $(7,4,10)$; et les tiercés dans le désordre sont

$$(4,7,10) \ ; \ (4,10,7) \ ; (10,7,4) \ ; (10,4,7) \ ; (7,10,4).$$

Il y a 5 cas favorables à T, donc

$$P(T) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 66 1. On raisonne comme dans l'exercice précédent : il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

2. On va regarder l'événement contraire et répondre à la question : « Combien y a-t-il de podiums **ne** comportant **aucun** Américain ? »
Comme 5 des 8 participants ne sont pas Américains, le nombre de podiums sans aucun Américain est $5 \times 4 \times 3 = 60$.

On revient à la question initiale : il reste $336 - 60 = 276$ podiums avec au moins un Américain.

6. L'opération $3 \times 2 \times 2$ vient du fait qu'il y a trois couleurs de maillot, 2 couleurs de short et 2 couleurs de chaussettes. On pourrait représenter la situation avec un arbre pour être sûr de n'oublier aucune tenue.

Exercice 67 On regroupe la correction des deux questions. On utilise des symboles différents pour chacun des événements, mais un seul tableau suffit :

- ♡ A : « la somme des deux faces est égale à 5 » ;
- ♣ B : « exactement un des deux dés tombe sur 4 » ;
- ♢ C : « on tire deux numéros impairs ».

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4
1	♢		♢	♡♣
2			♡	♣
3	♢	♡	♢	♣
4	♡♣	♣	♣	

Il y a $4 \times 4 = 16$ cases dans le tableau. Il y a 4♡, 6♣ et 4♢ dans le tableau, donc

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \qquad P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 68 On place dans un tableau un symbole pour chaque événement :

- ♡ A : « la France joue » ;
- ♣ B : « le match oppose la France à l'Allemagne » ;
- ♠ C : « le match oppose deux pays du Benelux ».

	Fra	All	Ita	Bel	PB	Lux
Fra	■	♡♣	♡	♡	♡	♡
All	♡♣	■				
Ita	♡		■			
Bel	♡			■	♠	♠
PB	♡			♠	■	♠
Lux	♡			♠	♠	■

⚠ Il faut exclure la diagonale, car une équipe ne peut jouer contre elle-même. Il n'y a donc que 30 cases.

D'après le tableau :

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

Les pays du Benelux sont la Belgique, les Pays-Bas (Nederland) et le Luxembourg, d'où les ♠ en bas à droite du tableau. On obtient $P(C) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Exercice 69 On place dans un tableau un symbole pour chaque événement :

- ♡ A : « les deux jetons choisis sont identiques » ;
- ♣ B : « exactement un des deux jetons représente un visage » ;

	☼	◐	♪	☺	☹
☼	♡			♣	♣
◐		♡		♣	♣
♪			♡	♣	♣
☺	♣	♣	♣	♡	
☹	♣	♣	♣		♡

On obtient :

$$P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \qquad P(B) = \frac{12}{25}.$$

Exercice 70 Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

On a colorié les cases de trois couleurs :

- en vert : le candidat connaît les deux questions ;
- en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
- en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

Géo \ Hist	1	2	3	4	5	6
1	vert	vert	vert	orange	orange	orange
2	vert	vert	vert	orange	orange	orange
3	orange	orange	orange	magenta	magenta	magenta
4	orange	orange	orange	magenta	magenta	magenta
5	orange	orange	orange	magenta	magenta	magenta

Conclusion : il y a $6 \times 5 = 30$ cases au total, 6 vertes et 15 oranges, donc :

- la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$;
- la probabilité que le candidat connaisse une seule des deux questions est $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Exercice 71

1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectifs :

	VTT	~~VTT~~	Total
Escalade	3	7	10
~~Escalade~~	13	9	22
Total	16	16	32

Remarque : on sait qu'il y a autant d'élèves qui pratiquent le VTT que d'élèves qui ne le pratiquent pas, donc 16 élèves le pratiquent et 16 ne le pratiquent pas.

2. Par lecture du tableau : $P(A) = \frac{3}{32}$ et $P(B) = \frac{9}{32}$.

Le calcul du nombre de cas favorables à C est moins évident et peut être mené de plusieurs façons différentes. Par exemple :

- ajouter ceux qui font du VTT à ceux qui font de l'escalade, puis retrancher les élèves qui pratiquent les deux sports (sinon ils sont comptés deux fois) : $16 + 10 - 3 = 23$.
- ajouter ceux qui ne font que du VTT, ceux qui ne font que de l'escalade, et ceux qui pratiquent les deux sports : $13+7+3 = 23$.
- remarquer que C est le contraire de B et donc faire le calcul : $32 - 9 = 23$.
- etc.

Dans tous les cas on obtient $P(C) = \frac{23}{32}$.