# Corrigé du devoir surveillé n°8

## Exercice 1

La fonction $f$ est définie par
$$f(x) = (\cos x - 1)\sin x.$$

1. • Pour tout réel $x$ :
$$f(-x) = (\cos(-x) - 1)\sin(-x) = (\cos x - 1)(-\sin x) = -(\cos x - 1)\sin x = -f(x),$$
donc $f$ est impaire.
   • Pour tout réel $x$ :
$$f(x+2\pi) = (\cos(x+2\pi) - 1)\sin(x+2\pi) = (\cos x - 1)\sin x = f(x),$$
donc $f$ est $2\pi$-périodique.

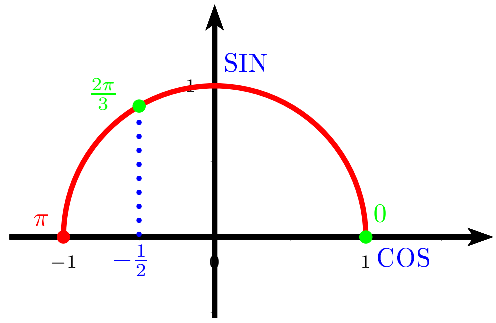
2. La fonction $f$ s'écrit comme un produit : $f = u \times v$, avec $u(x) = \cos x - 1$ et $v(x) = \sin x$.
Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0;\pi]$ et pour tout $x \in [0;\pi]$ :
$$\begin{array}{lcl} u(x) = \cos x - 1 & , & v(x) = \sin x, \\ u'(x) = -\sin x & , & v'(x) = \cos x. \end{array}$$
Donc en appliquant la formule pour la dérivée d'un produit, pour tout $x \in [0;\pi]$ :
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -\sin x \times \sin x + (\cos x - 1) \times \cos x \\ &= -\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x. \end{aligned}$$
Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$ et ainsi :
$$f'(x) = \left(\cos^2 x - 1\right) + \cos^2 x - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1.$$

3. On résout l'équation
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0. \tag{1}$$
dans $[0;\pi]$. On pose $X = \cos x$, l'équation se réécrit
$$2X^2 - X - 1.$$
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$, donc il y a deux racines :
$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \quad , \quad X_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Revenons à l'équation (1) : d'après ce qui précède, il y a deux possibilités :

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = 1.$$

D'après la figure à droite, il y a deux solutions : $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = 0$.




4. On construit le tableau de variations grâce à la question précédente :

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↗ | $0$ |

**Calculs pour avoir le signe de la dérivée :**

- $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - 1 = 2 \times 0^2 - 0 - 1 = -1 \qquad \ominus$.
- $f'(\pi) = 2\cos^2\pi - \cos\pi - 1 = 2\times(-1)^2 - (-1) - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \qquad \oplus$.

**Calculs pour la fonction :**

- $f(0) = (\cos 0 - 1)\sin 0 = (1-1)\times 0 = 0$.
- $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - 1\right)\sin\frac{2\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
- $f(\pi) = (\cos\pi - 1)\sin\pi = (-1-1)\times 0 = 0$.

# Exercice 2

Pour tout entier naturel $n$, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $I_0 = \int_0^\pi \underbrace{\mathrm{e}^{-0x}}_{=1}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$

2. (a) Pour tout $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

$$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

(car $x$ est « dans la partie haute » du cercle trigonométrique). Donc en multipliant par $\mathrm{e}^{-nx}$ (qui est positif) :

$$\begin{aligned} 0 \times \mathrm{e}^{-nx} &\leqslant \sin x \times \mathrm{e}^{-nx} \leqslant 1 \times \mathrm{e}^{-nx} \\ 0 &\leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin x \quad \leqslant \mathrm{e}^{-nx}. \end{aligned}$$

(b) On intègre les inégalités de la question précédente sur l'intervalle $[0;\pi]$ :

$$\int_0^\pi 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi \sin x \times \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}.$$

Or

$$\int_0^\pi 0\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(intégrale d'une fonction nulle),}$$

$$\int_0^\pi \sin x \times \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = I_n,$$

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^\pi = \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\right) - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\times 0}\right) = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} + \frac{1}{n} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

On a donc
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$ ; et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, d'après la double inégalité de la question précédente et le théorème des gendarmes :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

3. (a) Soit $n$ un entier naturel. On intègre par parties $I_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin x\mathrm{d}x$ : on pose
$$\begin{array}{lcl} u'(x) = \sin x & ; & v(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ u(x) = -\cos x & ; & v'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx}. \end{array}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\underbrace{-\cos x}_{u(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-nx}}_{v(x)}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \times \underbrace{\left(-n\mathrm{e}^{-nx}\right)}_{v'(x)}\mathrm{d}x = \left[-\cos x\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^\pi - n\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= \left(-\cos\pi\mathrm{e}^{-n\pi}\right) - \left(-\cos 0\mathrm{e}^{-n\times 0}\right) - nJ_n = -(-1)\mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n. \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n$ :
$$nJ_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - I_n.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} nJ_n = 1.$$