

# Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le second degré : équations et paraboles</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Probabilités</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>18</b>

# 1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions des équations.

**Exercice 1** 1. On résout l'équation  $x^2 + 2x = 0$  :

On factorise :

$$x(x+2) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{aligned}x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 &= 0 \\x + \cancel{2} - \cancel{2} &= 0 - 2 \\x &= -2\end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions :  $x = 0$  et  $x = -2$ . Autrement dit :

$$\mathcal{S} = \{0; -2\}.$$

2. On résout l'équation  $x^2 - 16 = 0$  :

On « isole »  $x^2$  :

$$\begin{aligned}x^2 - 16 &= 0 \\x^2 - \cancel{16} + \cancel{16} &= 0 + 16 \\x^2 &= 16\end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{16} = -4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{4; -4\}.$$

3. On résout l'équation  $(2x - 1)(x - 5) = 0$  :

$$\begin{aligned}2x - 1 &= 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0 \\2x - \cancel{1} + \cancel{1} &= 0 + 1 \quad \text{ou} \quad x - \cancel{5} + \cancel{5} = 0 + 5 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 5 \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}; 5 \right\}.$$

4. On résout l'équation  $x^2 + 7 = 0$  :

$$\begin{aligned}x^2 + 7 &= 0 \\x^2 + \cancel{7} - \cancel{7} &= 0 - 7 \\x^2 &= -7\end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre  $x$  ne peut avoir un carré égal à  $-7$ ).

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

(On rappelle que  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

**Exercice 2** Dans chaque cas, on note  $\Delta$  le discriminant.

1. On résout l'équation  $x^2 - 3x - 4 = 0$  :

- $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = -4$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = -1,$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{-1; 4\}.$$

2. On résout l'équation  $2x^2 - 12x = -18$  :

On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ ) en « transposant  $-18$  » :

$$2x^2 - 12x + 18 = -18 + 18$$
$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

- $a = 2$ ,  $b = -12$ ,  $c = 18$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$ .
- $\Delta = 0$ , donc il y a une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{3\}.$$

3. On résout l'équation  $x^2 - 4x + 5 = 0$  :

- $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = 5$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$ .
- $\Delta < 0$ , donc il n'y a pas de solution.

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

4. On résout l'équation  $x^2 + 2x - 4 = 0$  :

- $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2},$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2}.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{20}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \right\}.$$

**Remarque :** On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5},$$

on trouve

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\cancel{2}(-1 + \sqrt{5})}{\cancel{2}} = -1 + \sqrt{5}.$$

De même,  $x_1 = -1 - \sqrt{5}$ .

5. On résout l'équation  $x^2 = -6x$  :

À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le «  $-6x$  » dans le membre de gauche, qui devient «  $+6x$  ».

$$\begin{aligned}x^2 &= -6x \\x^2 + 6x &= 0.\end{aligned}$$

Ici, il y a deux méthodes possibles :

- soit on utilise le discriminant, avec  $a = 1$ ,  $b = 6$  et  $c = 0$  (puisque  $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$ ) ;
- soit on factorise.

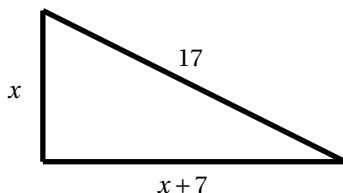
On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}x(x+6) &= 0 \\x = 0 \quad \text{ou} \quad x+6 &= 0 \\x &= -6.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{0; -6\}.$$

**Exercice 3** On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas  $x$ .



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe  $(x+7)^2$  avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 &= 289 \\2x^2 + 14x + 49 - 289 &= 0 \\2x^2 + 14x - 240 &= 0.\end{aligned}$$

- $a = 2$ ,  $b = 14$ ,  $c = -240$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1920 = 2116$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 - 46}{4} = -15, \\x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 + 46}{4} = 8.\end{aligned}$$

Or  $x$  désigne une longueur, donc la première solution ( $x_1$ ) est impossible. On a donc  $x = 8$ .

**Remarque :** Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

$$x = 8, \quad x+7 = 8+7 = 15 \quad \text{et} \quad 17.$$

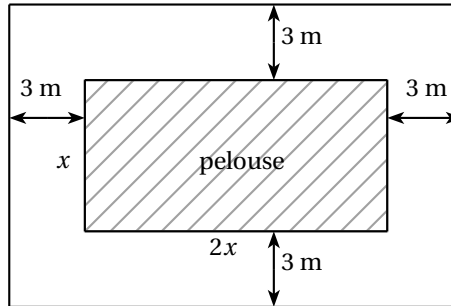
On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

---

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec  $\Delta$  dans le cas où  $b$  ou  $c$  valent 0.

**Exercice 4** 1. Voici un schéma du terrain en notant  $x$  la largeur de la pelouse (donc la longueur est  $2x$ ) :



2. La longueur du terrain (en m) est

$$2x + 3 + 3 = 2x + 6,$$

sa largeur est

$$x + 3 + 3 = x + 6.$$

Donc la surface du terrain (en  $\text{m}^2$ ) est

$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x + 6) \times (x + 6).$$

Or on sait que cette surface vaut  $360 \text{ m}^2$ , donc

$$(2x + 6) \times (x + 6) = 360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} (2x + 6) \times (x + 6) &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x \times x + 2x \times 6 + 6 \times x + 6 \times 6 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 6x + 36 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x + 36 - 360 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x - 324 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré.

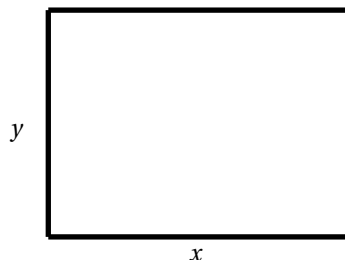
- $a = 2$ ,  $b = 18$ ,  $c = -324$ .
- $\Delta = 18^2 - 4 \times 2 \times (-324) = 2916$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 - \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 - 54}{4} = \frac{-72}{4} = -18, \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 + \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 + 54}{4} = \frac{36}{4} = 9. \end{aligned}$$

Or  $x$  désigne une longueur, donc  $x$  ne peut pas être négatif et seule la solution  $x_2 = 9$  est valable.

Conclusion :  $x = 9$ , donc la longueur du terrain (en m) est  $2 \times 9 + 3 + 3 = 24$ , sa largeur est  $9 + 3 + 3 = 15$ .

**Exercice 5** On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note  $x$  et  $y$  les dimensions du champ.



2. Les «  $\Leftrightarrow$  » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est

$$x + y = 27.$$

- L'aire est 180, donc

$$x \times y = 180.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x + y = 27 & L_1 \\ xy = 180 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie  $L_1$  par  $x$  :

$$(x + y) \times x = 27 \times x, \quad \text{soit} \quad x^2 + xy = 27x.$$

Or d'après  $L_2$ ,  $xy = 180$ , donc

$$x^2 + 180 = 27x, \quad \text{et ainsi} \quad x^2 - 27x + 180 = 0.$$

On aboutit à une équation du 2<sup>d</sup> degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) :  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 15$ .

On sait que  $x + y = 27$ , donc si  $x = 12$ , alors  $y = 27 - x = 27 - 12 = 15$  ; et si  $x = 15$ , alors  $y = 27 - x = 27 - 15 = 12$ .

Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

**Exercice 6** On note  $n$  le nombre d'amis initialement présents, et  $p$  le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc

$$n \times p = 2400. \quad (1)$$

- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas  $(n - 2)$  amis, et chacun paye alors  $(p + 40)$  €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit

$$(n - 2) \times (p + 40) = 2400.$$

En développant, cela donne encore

$$np + 40n - 2p - 80 = 2400. \quad (2)$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2400 dans les deux cas, on obtient l'égalité

$$np = np + 40n - 2p - 80,$$

soit

$$40n - 2p - 80 = 0.$$

Finalement, le couple  $(n, p)$  est solution du système

$$\begin{cases} n \times p = 2400 \\ 40n - 2p - 80 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient

$$n = 12, \quad p = 200.$$

Conclusion : comme  $12 - 10 = 2$ , ce sont 10 amis qui sont finalement partis.

**Exercice 7** 1.  $P_1 : y = x^2 - 6x + 5$ .

- $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 5$ .
- $a$  est  $\oplus$ , donc  $P_1$  est vers le haut.
- On note  $S$  le sommet de  $P_1$ . D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

On en déduit

$$y_S = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4.$$

On a donc  $S(3; -4)$ .

Venons-en au tracé de la parabole. On fait un tableau de valeurs sur  $[0; 6]$ , avec un pas de 1<sup>3</sup>. Pour cela, on utilise la calculatrice :

---


3. Nous choisissons un intervalle symétrique par rapport à l'abscisse du sommet, et qui ne soit ni trop court, ni trop long. On choisit un pas de 1 par facilité, mais le graphique serait bien sûr plus précis avec un pas plus petit.

### Calculatrices collège

- **MODE** ou **MENU**
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- $f(X)=X^2-6X+5$  **EXE**  
(si on demande  $g(X)=$ , ne rien rentrer)
- Début? 0 **EXE**
- Fin? 6 **EXE**
- Pas? 1 **EXE**

### NUMWORKS

x s'obtient avec les touches

- **alpha** **x**
- 
- Fonctions **EXE** puis choisir Fonctions **EXE**
- $f(x)=x^2-6x+5$  **EXE**
- choisir Tableau **EXE** puis Régler l'intervalle **EXE**
- X début 0 **EXE**
- X fin 6 **EXE**
- Pas 1 **EXE**
- choisir Valider

### TI graphiques

X s'obtient avec la touche

- $x, t, \theta, n$
- $f(x)$
- $Y_1 = X^2 - 6X + 5$  **EXE**
- 2nde **déf table**
- DébTable=0 **EXE**
- PasTable=1 **EXE**  
ou  $\Delta Tbl=1$  **EXE**
- 2nde **table**

### CASIO graphiques

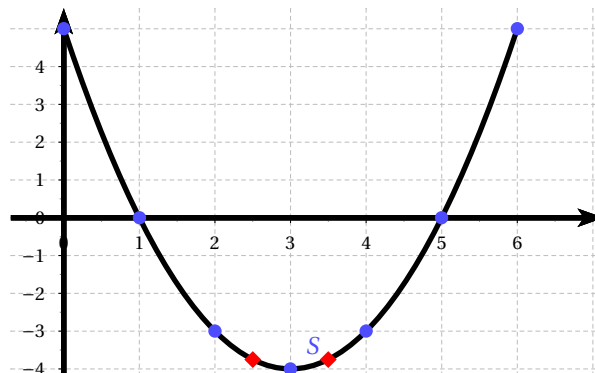
X s'obtient avec la touche

- **X,θ,T**
- **MENU** puis choisir TABLE **EXE**
- $Y_1 : X^2 - 6X + 5$  **EXE**
- **F5** (on choisit donc SET)
- Start : 0 **EXE**
- End : 6 **EXE**
- Step : 1 **EXE**
- **EXIT**
- **F6** (on choisit donc TABLE)

On obtient le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Enfin on construit le graphique (j'ai un peu « écrasé » l'axe des ordonnées pour gagner de la place) :



**Remarque :** On peut avoir intérêt à ajouter des points près du sommet pour obtenir un tracé plus précis. C'est ce que l'on a fait ci-dessus avec les deux losanges rouges, correspondant au tableau de valeurs ci-dessous.

x	2,5	3,5
y	-3,75	-3,75

2.  $P_2 : y = -0,5x^2 - x + 4$ .

- $a = -0,5$ ,  $b = -1$ ,  $c = 4$ .
- $a$  est  $\ominus$ , donc  $P_2$  est vers le bas.
- On note  $S$  le sommet de  $P_2$ . D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times (-0,5)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

On en déduit

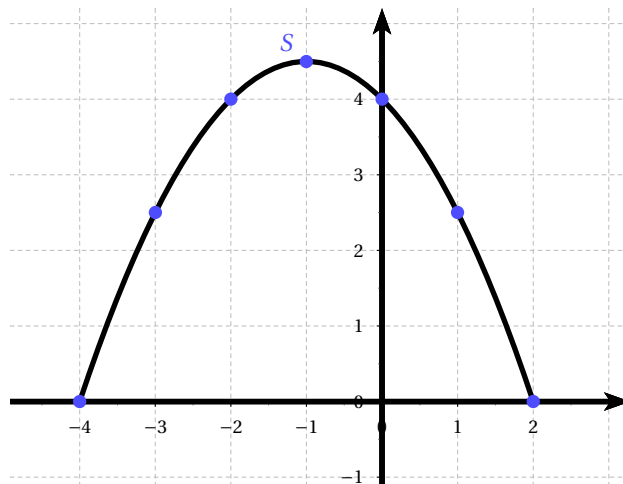
$$y_S = -0,5 \times (-1)^2 - (-1) + 4 = -0,5 + 1 + 4 = 4,5.$$

On a donc  $S(-1 ; 4,5)$ .

Tableau de valeurs :

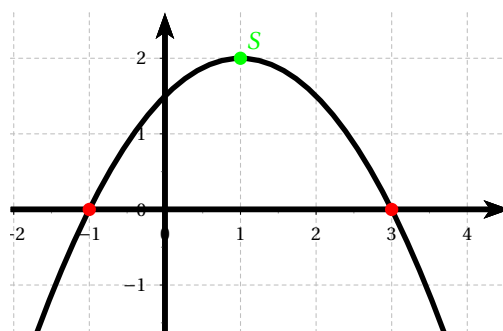
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

Tracé de la parabole :



**Exercice 8** 1. On trace la parabole  $P$  :

- qui coupe l'axe des abscisses en  $x_1 = -1$  et en  $x_2 = 3$ .
- dont le sommet est le point  $S(1;2)$ .

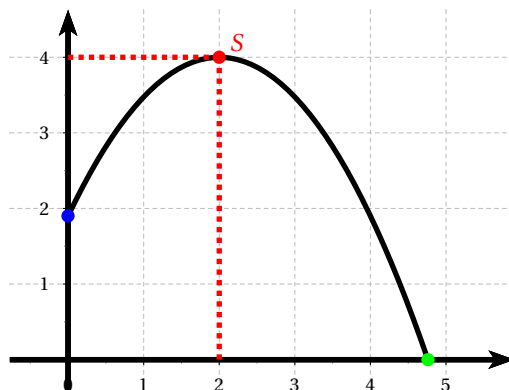


**Remarque :** Il est difficile de faire un tracé hyper précis avec si peu d'informations. L'élève intéressé peut essayer de prouver – en faisant un bel effort – que  $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$ . Auquel cas, il pourra faire un tableau de valeurs et obtenir une courbe presque aussi parfaite que celle dessinée ci-dessus avec l'ordinateur.

2. On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Comme  $P$  est vers le bas,  $a$  est du signe  $\ominus$ .
- Comme  $P$  coupe l'axe des abscisses en deux points, il y a deux racines et  $\Delta$  est du signe  $\oplus$ .

**Exercice 9** La trajectoire de la balle en fonction du temps est la parabole  $P : y = -0,525t^2 + 2,1t + 1,9$ , tracée ci-dessous :



1. Clément commence sa passe à la hauteur

$$h(0) = -0,525 \times 0 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9 \text{ mètres.}$$

Cela correspond au point bleu sur la figure.

2. La hauteur maximale de la balle est l'ordonnée du sommet  $S$  de la parabole, en rouge sur la figure.



- $a = -0,525$ ,  $b = 2,1$ ,  $c = 1,9$ .
- On calcule avec la formule :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2,1}{2 \times (-0,525)} = \frac{-2,1}{-1,05} = 2.$$

On en déduit

$$y_S = -0,525 \times 2^2 + 2,1 \times 2 + 1,9 = 4,$$

et donc la hauteur maximale de la balle est de 4 mètres.

3. Pour déterminer le temps de vol de la balle, on cherche à quel moment elle retombe au sol (point vert sur la figure). On résout donc l'équation

$$-0,525t^2 + 2,1t + 1,9 = 0.$$

- $\Delta = 2,1^2 - 4 \times (-0,525) \times 1,9 = 8,4$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

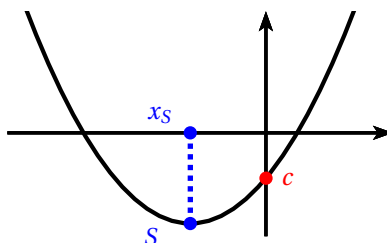
$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1 - \sqrt{8,4}}{2 \times (-0,525)} \approx 4,76,$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1 + \sqrt{8,4}}{2 \times (-0,525)} \approx -0,76.$$

La deuxième solution est impossible, car le temps cherché est positif.

Conclusion : la balle retombe au sol après 4,76 secondes environ.

**Exercice 10** On a tracé une parabole  $P : y = ax^2 + bx + c$ .



- $a > 0$ , car  $P$  est vers la haut.
  - Si  $x = 0$ , alors  $y = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$ , donc la  $P$  passe par le point de coordonnées  $(0; c)$  – autrement dit, elle coupe l'axe des ordonnées en  $c$ .  
Par lecture graphique, on obtient donc  $c < 0$ .
  - Il y a deux racines, car  $P$  coupe l'axe des abscisses deux fois. On a donc  $\Delta > 0$ .
2. D'après le cours,  $x_S = -\frac{b}{2a}$ , donc

$$\begin{aligned} x_S \times 2a &= -\frac{b}{2a} \times 2a \\ x_S \times 2a &= -b \\ -x_S \times 2a &= b. \end{aligned}$$

On sait que  $x_S < 0$  et  $a > 0$ , donc  $b = \underbrace{-x_S}_{\ominus} \times \underbrace{2a}_{\oplus}$  est du signe  $\oplus$  :  $b > 0$ .

**Exercice 11** Soit  $P : y = ax^2 + bx + c$  une parabole et  $S$  son sommet. On sait que  $x_S = -\frac{b}{2a}$ , donc

$$\begin{aligned} y_S &= a \times \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \cancel{a} \times \frac{b^2}{4\cancel{a}^2} - \frac{b^2 \times 2}{2a \times 2} + \frac{c \times 4a}{1 \times 4a} \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

**Exercice 12** 1. Le coût de fabrication des  $x$  objets est

$$C(x) = x^2 + 230x + 325.$$

Chaque objet est vendu 300 €, donc la recette issue de la vente des  $x$  objets est

$$R(x) = 300x.$$

On en déduit que le bénéfice est

$$B(x) = \text{Recette} - \text{Coût} = R(x) - C(x) = 300x - (x^2 + 230x + 325) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325.$$

2. Le bénéfice est une expression du second degré, avec  $a < 0$ . Il est donc représenté par une parabole orientée vers le bas. Maximiser le bénéfice revient donc à trouver le (l'abscisse du) sommet de cette parabole :

- $a = -1$ ,  $b = 70$ ,  $c = -325$ .
- $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2 \times (-1)} = \frac{-70}{-2} = 35$ .

Conclusion : le bénéfice est maximal lorsqu'on produit et vend 35 objets.

**Remarque :** Le bénéfice maximal est

$$-35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900 \text{ €}.$$

**Exercice 13** 1. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow x^3 = 2x \\ & \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \\ & \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 = 2 \\ & \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conclusion : il y a trois solutions :

$$\mathcal{S} = \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}.$$

2. (a) Pour démontrer l'égalité, on développe et on réduit le membre de droite : pour tout nombre  $x$ ,

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2+3x-4) &= x \times x^2 + x \times 3x + x \times (-4) + 1 \times x^2 + 1 \times 3x + 1 \times (-4) \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + x^2 + 3x - 4 \\ &= x^3 + 4x^2 - x - 4. \end{aligned}$$

Conclusion : on a bien

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x+1)(x^2+3x-4).$$

- (b) On utilise la factorisation de la question 2.(a) pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x^2+3x-4) = 0 \\ & \Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+3x-4 = 0 \end{aligned}$$

On résout chaque équation séparément :

$$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

L'autre équation est du second degré, on utilise le discriminant :

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

- $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = -4$ .
- $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$ .

- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-3 + 5}{2} = 1.$$

Conclusion : l'équation  $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$  a trois solutions :

$$\mathcal{S} = \{-1; -4; 1\}.$$

## 2 Probabilités

**Exercice 14** 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectif :

	Abonnés au soir	Pas abonnés au soir	Total
Abonnés au matin	50	20	70
Pas abonnés au matin	50	160	210
Total	100	180	280

2. (a)  $P(S) = \frac{100}{280} = \frac{5}{14}$  et  $P(\overline{M}) = \frac{210}{280} = \frac{3}{7}$ .

- (b) • L'événement « le pensionnaire est abonné aux deux journaux » s'écrit  $S \cap M$ <sup>4</sup>. On a

$$P(S \cap M) = \frac{50}{280} = \frac{5}{28}.$$

- L'événement « le pensionnaire est abonné à au moins un journal » s'écrit  $S \cup M$ <sup>5</sup>. Il y a plusieurs façons de dénombrer les cas favorables à cet événement :

- ▶ ajouter les pensionnaires qui sont abonnés au *Soir* et ceux qui sont abonnés au *Matin*, puis retrancher ceux qui sont abonnés aux deux journaux (sinon ils sont comptés deux fois) :  $100 + 70 - 50 = 120$ .
- ▶ ajouter ceux qui ne sont abonnés qu'au *Soir*, ceux qui ne sont abonnés qu'au *Matin*, et ceux qui sont abonnés aux deux journaux :  $50 + 20 + 50 = 120$ .
- ▶ retrancher l'effectif de pensionnaires qui ne sont abonnés à aucun journal de l'effectif total :  $280 - 160 = 120$ .

Quelle que soit la méthode de calcul, on obtient :

$$P(S \cup M) = \frac{120}{280} = \frac{3}{7}.$$

- (c) On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. La probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* est<sup>6</sup>

$$P_M(S) = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}.$$

**Exercice 15** 1. Le candidat connaît 3 des questions d'histoire, donc  $P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  ; et il connaît 2 des 5 questions de géographie, donc  $P(G) = \frac{2}{5}$ .

2. Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

On a colorié les cases de trois couleurs :

- en vert : le candidat connaît les deux questions ;
- en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
- en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

4. On rappelle que  $\cap$  se lit « inter » et correspond au mot français « ET ».

5. On rappelle que  $\cup$  se lit « union » et correspond au mot français « OU ».

6. On utilise la notation des probabilités conditionnelles, qui sera vue dans le paragraphe 2 du cours.

Hist \ Géo	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

6 des 30 cases sont coloriées en vert, donc la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est

$$P(G \cap H) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

3.  $6 + 15 = 21$  des 30 cases sont coloriées en vert ou en orange, donc la probabilité que le candidat connaisse au moins l'une des deux questions est

$$P(G \cup H) = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}.$$

**Remarque :** On peut aussi obtenir 21 avec le calcul  $30 - 9$ , ou utiliser la formule du cours de 2<sup>de</sup> :

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

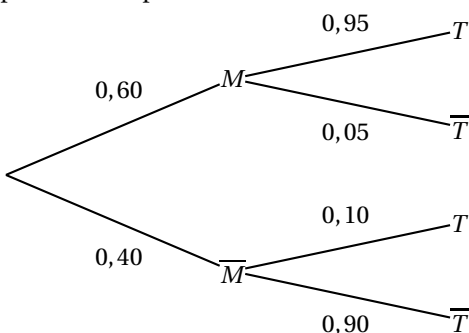
**Exercice 16** On utilise un tableau à double entrée. On place un symbole dans chacune des cases favorable à l'événement

$A$  : « les deux dés montrent la même couleur ».

Dé n°2 \ Dé n°1	■	■	■	■	□	□
■	★	★				
■	★	★				
■			★	★		
■			★	★		
□					★	★
□					★	★

Il y a 12 cases favorables à  $A$  sur 36, donc  $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

**Exercice 17** 1. On représente la situation par un arbre pondéré :

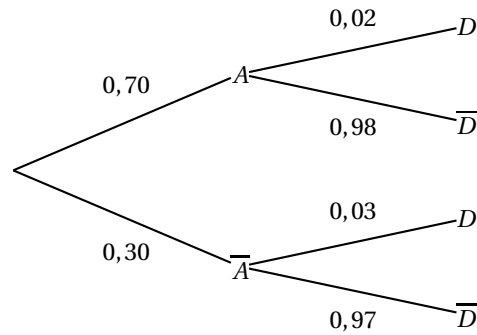


2. D'après l'arbre :

- $P(M \cap T) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$  ;
- D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\
 &= 0,60 \times 0,95 + 0,40 \times 0,10 = 0,61.
 \end{aligned}$$

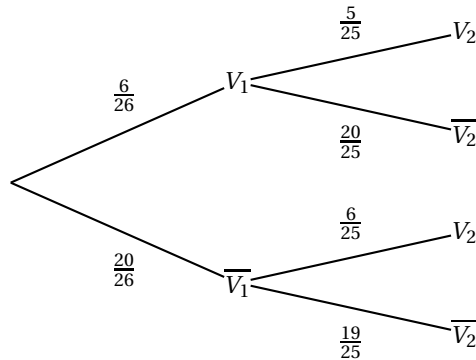
**Exercice 18** 1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la pièce ait un défaut est :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap D) \\ &= 0,70 \times 0,02 + 0,30 \times 0,03 = 0,023. \end{aligned}$$

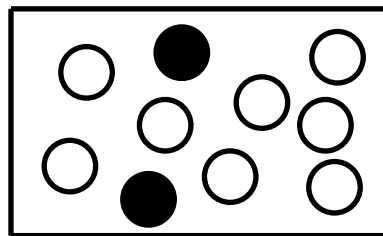
**Exercice 19** Rappelons pour commencer que 6 des 26 lettres de l'alphabet sont des voyelles : A – E – I – O – U – Y. Venons-en à l'arbre pondéré. Notons que si une première voyelle a été tirée, il reste 25 jetons dans le sac, parmi lesquels ne figurent plus que 5 voyelles. Cela explique le  $\frac{5}{25}$  ci-dessous; et avec un raisonnement similaire, on justifie tous les nombres sur les branches de droite.



L'événement  $A$  : « on tire une voyelle et une consonne (dans n'importe quel ordre) » est réalisé quand on prend l'un des deux chemins  $V_1 \cap \bar{V}_2$ , ou bien  $\bar{V}_1 \cap V_2$ , donc

$$P(A) = P(V_1 \cap \bar{V}_2) + P(\bar{V}_1 \cap V_2) = \frac{6}{26} \times \frac{20}{25} + \frac{20}{26} \times \frac{6}{25} = \frac{120}{650} + \frac{120}{650} = \frac{240}{650} = \frac{24}{65}.$$

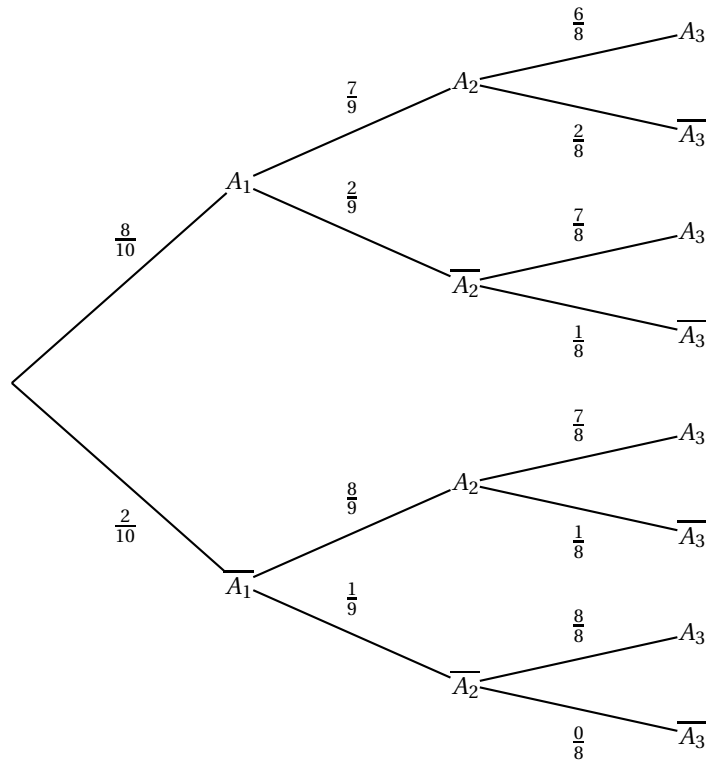
**Exercice 20** Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.



Pour  $i = 1, 2, 3$ , on considère l'événement

$A_i$  : « la  $i$ -ème boule tirée est blanche ».

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. Le contraire de

$B$  : « on a tiré au moins une boule noire »

est

$\overline{B}$  : « on n'a tiré que des boules blanches ».

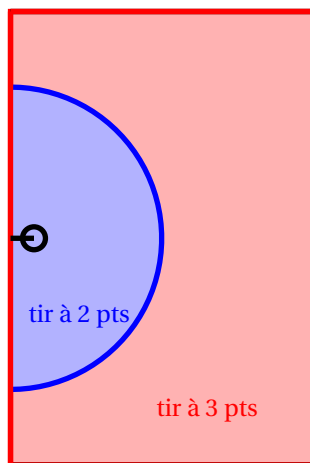
D'après l'arbre (chemin tout en haut)

$$P(\overline{B}) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15},$$

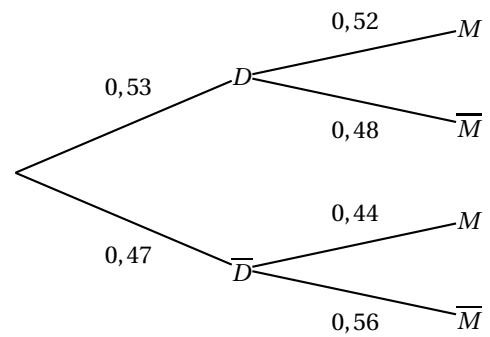
donc

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

**Exercice 21** 1. On rappelle les zones de tir à 2 et 3 points :



On représente la situation par un arbre pondéré :



**Remarque :**  $\overline{D}$  signifie « Stephen Curry tire à 3 points ».

2. La probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque est

$$P(D \cap M) = 0,53 \times 0,52 = 0,2756.$$

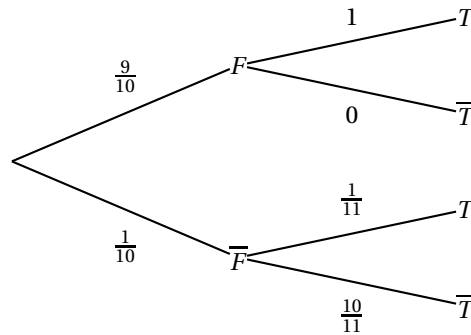
3. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que Stephen Curry marque est :

$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(D \cap M) + P(\overline{D} \cap M) \\
 &= 0,53 \times 0,52 + 0,47 \times 0,44 = 0,4824.
 \end{aligned}$$

4. Stephen Curry a marqué. La probabilité qu'il ait tiré à deux points est

$$P_M(D) = \frac{P(M \cap D)}{P(M)} = \frac{0,2756}{0,4824} \approx 0,57.$$

**Exercice 22** 1. On commence par faire un arbre pondéré. Comme un appareil en parfait état de fonctionnement est toujours accepté à l'issue du test, il y a un 1 et un 0 sur les branches en haut à droite.



On en vient au calcul des probabilités demandé par l'énoncé :

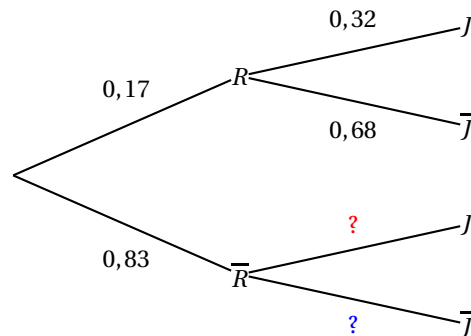
- $P(\overline{F} \cap T) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$  ;
- d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(F \cap T) + P(\overline{F} \cap T) = \frac{9}{10} \times 1 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{9}{10} + \frac{1}{110} = \frac{99}{110} + \frac{1}{110} = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}.$$

2. Sachant qu'un appareil a été accepté à l'issue du test, la probabilité qu'il ne fonctionne pas parfaitement est

$$P_T(\overline{F}) = \frac{P(\overline{F} \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{110}}{\frac{10}{11}} = \frac{1}{110} \times \frac{11}{10} = \frac{11}{1100} = \frac{1}{100}.$$

**Exercice 23** 1. On construit l'arbre et on le complète à partir des données de l'énoncé :



2.  $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544.$

3. L'énoncé donne  $P(J) = 0,11$ . On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(J) &= P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J) \\
 0,11 &= 0,0544 + P(\overline{R} \cap J) \\
 0,11 - 0,0544 &= P(\overline{R} \cap J) \\
 0,0556 &= P(\overline{R} \cap J)
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $P(\overline{R} \cap J) = 0,0556.$

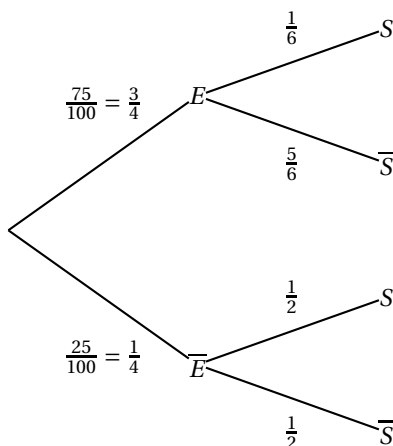
4. La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est égale à la probabilité qu'un utilisateur non régulier soit un jeune. Cette proportion vaut donc

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})} = \frac{0,0556}{0,83} \approx 0,0670.$$

C'est le point d'interrogation rouge de l'arbre pondéré du début.

**Exercice 24** Il faut prendre l'initiative de nommer des événements et de construire un arbre pondéré. On pose ainsi :

- $E$  : « le dé est équilibré »,
- $\overline{E}$  : « le dé est pipé »,
- $S$  : « on obtient 6 ».



La probabilité qu'il faut calculer est  $P_S(\overline{E})$ . On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_S(\overline{E}) = \frac{P(\overline{E} \cap S)}{P(S)}.$$

Or  $P(\overline{E} \cap S) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  et  $P(S) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$  (formule des probabilités totales), donc :

$$P_S(\overline{E}) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 25** Il faut calculer  $P_B(\overline{A_1})$ . On utilise la formule du cours :

$$P_B(\overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1} \cap B)}{P(B)}.$$

L'événement  $\overline{A_1} \cap B$  est égal à  $\overline{A_1}$ , puisque si la première boule tirée est noire, alors on en a au moins une noire. On a donc  $P(\overline{A_1} \cap B) = P(\overline{A_1}) = \frac{2}{10}$ , puis finalement <sup>7</sup> :

$$P_B(\overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{2}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}.$$

**Exercice 26** • Les nombres pairs sont 2, 4, 6, ..., 100. Il y en a 50, donc

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0,5.$$

7. On rappelle que  $P(B)$  a été calculé dans l'exercice 20.



- Les multiples de 5 sont

$$5 = 5 \times 1, 10 = 5 \times 2, 15 = 5 \times 3, \dots, 100 = 5 \times 20.$$

Il y en a 20, donc

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

- L'événement  $A \cap B$  s'écrit « le nombre est pair et multiple de 5 », ou de façon plus simple (et plus explicite) « le nombre est multiple de 10 ». Or les multiples de 10 sont 10, 20, 30, ..., 100, et comme il y en a 10,

$$P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

- On calcule le produit

$$P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,2 = 0,1.$$

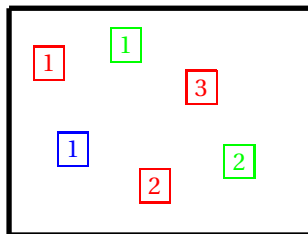
On constate que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,1,$$

donc  $A$  et  $B$  sont indépendants.

**Remarque :** La raison profonde de l'indépendance de  $A$  et  $B$  est que 100 est un multiple de 2 et de 5 d'une part, et que 2 et 5 sont premiers entre eux d'autre part.

### Exercice 27



- D'un côté  $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  et  $P(U) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , donc

$$P(R) \times P(U) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

D'un autre côté,  $R \cap U$  est réalisé quand on tire le jeton 1, donc

$$P(R \cap U) = \frac{1}{6}.$$

Conclusion :  $P(R \cap U) \neq P(R) \times P(U)$ , donc les événements  $R$  et  $U$  ne sont pas indépendants.

- D'un côté  $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  et  $P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ , donc

$$P(R) \times P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

D'un autre côté,  $R \cap D$  est réalisé quand on tire le jeton 2, donc

$$P(R \cap D) = \frac{1}{6}.$$

Conclusion :  $P(R \cap D) = P(R) \times P(D)$ , donc les événements  $R$  et  $U$  sont indépendants.

### Exercice 28 Les trois questions sont indépendantes.

1. D'après une formule du cours de 2<sup>de</sup>,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,6 - 0,9 = 0,1.$$

D'un côté  $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$ , de l'autre  $P(A \cap B) = 0,1$  ; donc  $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ .

Conclusion :  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.

2. D'après la formule du cours de 2<sup>de</sup> déjà utilisée dans la question 1 et la propriété d'indépendance :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \quad (\text{on utilise l'indépendance})$$

$$0,7 = 0,4 + P(B) - 0,4 \times P(B)$$

$$0,7 = 0,4 + x - 0,4x \quad (\text{on pose } x = P(B))$$

$$0,7 = 0,4 + 0,6x$$

$$0,7 - 0,4 = 0,6x \quad (\text{on résout l'équation})$$

$$\frac{0,3}{0,6} = \frac{0,6x}{0,6}$$

$$0,5 = x.$$

Conclusion :  $P(B) = 0,5$ .

3. Un événement  $A$  est indépendant de lui-même si, et seulement si

$$P(A \cap A) = P(A) \times P(A). \quad (3)$$

Or  $A \cap A = A$ , donc  $P(A \cap A) = P(A)$ , et l'égalité (3) ci-dessus se réécrit

$$P(A) = (P(A))^2.$$

On pose  $x = P(A)$ , on est ramené à résoudre l'équation  $x = x^2$  :

$$x = x^2 \iff x - x^2 = 0 \iff x(1 - x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Conclusion :  $A$  est indépendant de lui-même lorsque  $P(A) = 0$  ( $A$  est alors un événement impossible) ou lorsque  $P(A) = 1$  ( $A$  est alors un événement certain).

### 3 Suites numériques

**Exercice 29** 1.  $u_n = 0,5n - 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} u_0 &= 0,5 \times 0 - 3 \\ u_0 &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,5 \times 1 - 3 \\ u_1 &= -2,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 0,5 \times 2 - 3 \\ u_2 &= -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 0,5 \times 3 - 3 \\ u_3 &= -1,5. \end{aligned}$$

2.  $v_n = 1 - \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 - \frac{1}{1} \\ v_1 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 1 - \frac{1}{2} \\ v_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= 1 - \frac{1}{3} \\ v_3 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_4 &= 1 - \frac{1}{4} \\ v_4 &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3.  $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 10 - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Avec  $n = 0$  :

$$\begin{aligned} u_{0+1} &= 10 - u_0 \\ u_1 &= 10 - 2 \\ u_1 &= 8. \end{aligned}$$

Avec  $n = 1$  :

$$\begin{aligned} u_{1+1} &= 10 - u_1 \\ u_2 &= 10 - 8 \\ u_2 &= 2. \end{aligned}$$

Avec  $n = 2$  :

$$\begin{aligned} u_{2+1} &= 10 - u_2 \\ u_3 &= 10 - 2 \\ u_3 &= 8. \end{aligned}$$

Avec  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} u_{3+1} &= 10 - u_3 \\ u_4 &= 10 - 8 \\ u_4 &= 2. \end{aligned}$$

On obtient la suite périodique  $(2; 8; 2; 8; 2; \dots)$ .

4.  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 4u_n.$$

Avec  $n = 0$  :

$$u_{0+1} = 4u_0$$

$$u_1 = 4 \times 1$$

$$u_1 = 4.$$

Avec  $n = 1$  :

$$u_{1+1} = 4u_1$$

$$u_2 = 4 \times 4$$

$$u_2 = 16.$$

Avec  $n = 2$  :

$$u_{2+1} = 4u_2$$

$$u_3 = 4 \times 16$$

$$u_3 = 64.$$

Avec  $n = 3$  :

$$u_{3+1} = 4u_3$$

$$u_4 = 4 \times 64$$

$$u_4 = 256.$$

5.  $v_0 = 1$  et  $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Avec  $n = 0$  :

$$v_{0+1} = \frac{v_0}{v_0 + 2}$$

$$v_1 = \frac{1}{1 + 2}$$

$$v_1 = \frac{1}{3}.$$

Avec  $n = 1$  :

$$v_{1+1} = \frac{v_1}{v_1 + 2}$$

$$v_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 2}$$

$$v_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{6}{3}}$$

$$v_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}$$

$$v_2 = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{7}$$

$$v_2 = \frac{1}{7}.$$

Avec  $n = 2$  :

$$v_{2+1} = \frac{v_2}{v_2 + 2}$$

$$v_3 = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7} + 2}$$

$$v_3 = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7} + \frac{14}{7}}$$

$$v_3 = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{15}{7}}$$

$$v_3 = \frac{1}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{15}$$

$$v_3 = \frac{1}{15}.$$

Avec  $n = 3$  :

$$v_{3+1} = \frac{v_3}{v_3 + 2}$$

$$v_4 = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + 2}$$

$$v_4 = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + \frac{30}{15}}$$

$$v_4 = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{31}{15}}$$

$$v_4 = \frac{1}{\cancel{15}} \times \frac{\cancel{15}}{31}$$

$$v_4 = \frac{1}{31}.$$