Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Rappels de calcul et de géométrie **2**

2 Nombres réels **13**

3 Géométrie repérée **17**

4 Études graphiques de fonctions **24**

5 Probabilités **34**

15 Fractions et manipulation de formules **39**

6 Équations de droites **42**

7 Pourcentages, taux d'évolution **55**

8 Opérations sur les vecteurs **60**

17 Calcul littéral **67**

9 Tableaux de signes **73**

10 Statistiques **82**

16 Trigonométrie **86**

11 Systèmes et équations de droites **91**

14 Fonctions de référence **97**

12 Arithmétique et racines carrées **104**

13 Inégalités **108**

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250\times 6}{4}=\frac{1\,500}{4}=375$ g de farine, $\frac{500\times 6}{4}=\frac{3\,000}{4}=750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6\times 125=750$ g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai $\frac{750\times 2}{1\,000}=\frac{1\,500}{1\,000}=1,5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes [1].

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra $\frac{60\times 45}{20}=\frac{\cancel{20}\times 3\times 45}{\cancel{20}}=135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135=120+15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4\times 30\div 5=24$ pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7\times 24}{6}=\frac{7\times 4\times\cancel{6}}{\cancel{6}}=28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

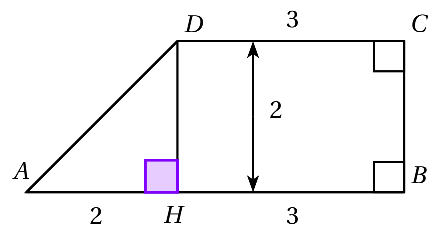
Stéphane nage $\frac{60\times 0,5}{3}=\frac{30}{3}=10$ min, puis il court $\frac{60\times 5}{15}=\frac{300}{15}=20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5+0,5=5,5$ km, en $10+20=30$ min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60\times 5,5}{30}=\frac{\cancel{30}\times 2\times 5,5}{\cancel{30}}=11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

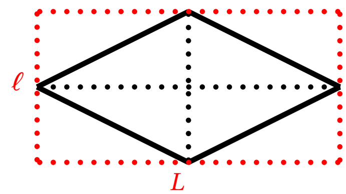
- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD, d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

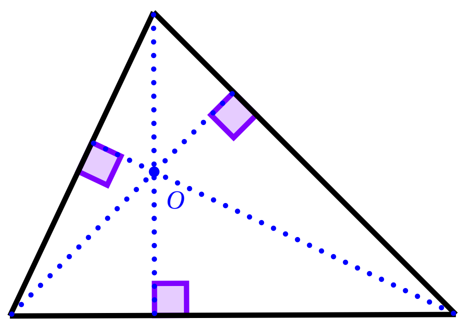
$$\mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(5+3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L, donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

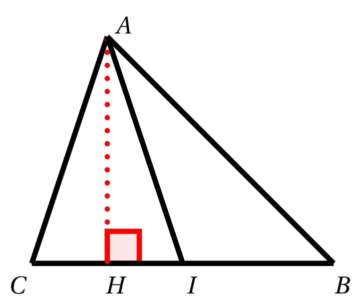


Exercice 5 **Rappels :**

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA, donc

$$\mathscr{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2} \qquad\qquad \mathscr{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I et le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7 1. La négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Il existe un homme immortel.

2. La négation de

Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

est

Tous les desserts sont sucrés à la cantine.

Remarque : Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe » , et réciproquement ; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

3. La négation de

Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

est

Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

est

Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni… ni… » est « ou ». Donc la négation de

Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

est

Chloé aime les fraises ou les framboises.

Exercice 8 1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par 5}}_{\text{A}}\text{, alors } \underbrace{\text{il est multiple de 5}}_{\text{B}}.$$

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b) • L'implication contraposée est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de 5}}_{\text{non B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il ne se termine pas par 5}}_{\text{non A}}.$$

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

• L'implication réciproque est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de 5}}_{\text{B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il se termine par 5}}_{\text{A}}.$$

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par 0}}_{\text{A}}\text{, alors } \underbrace{\text{il est multiple de 10}}_{\text{B}}.$$

et sa réciproque

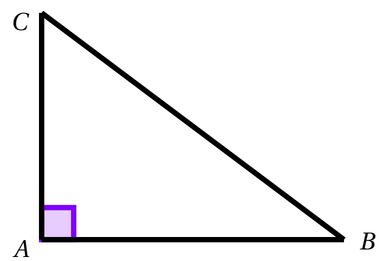
$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de 10}}_{\text{B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il se termine par 0}}_{\text{A}}.$$

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. **Théorème de Pythagore.**

   Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + BC^2$.



2. **Théorème contraposé de Pythagore.**

   Si $BC^2 \neq AB^2 + BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

3. **Théorème réciproque de Pythagore.**

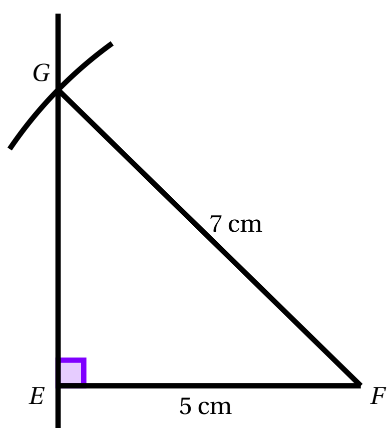
   Si $BC^2 = AB^2 + BC^2$, alors ABC est rectangle en A.

   Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

   ⚠En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E.
- Un arc de cercle de centre F, de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G.



D'après **le théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

$$\begin{aligned} FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\ 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\ 49 &= 25 + EG^2 \\ 49 - 25 &= EG^2 \\ \sqrt{24} &= EG \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

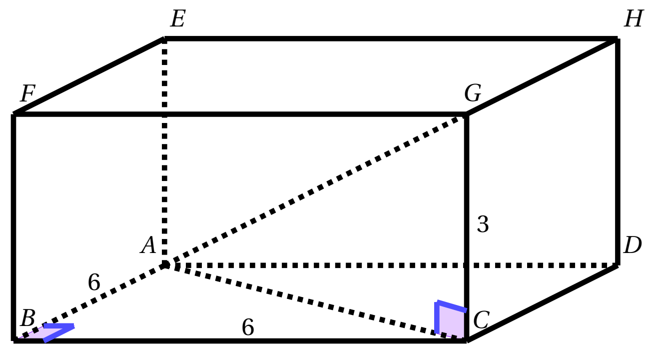
⚠Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A.
   On calcule :

$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{array}\right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

   D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$
$$AC^2 = 36 + 36$$
$$AC^2 = 72$$

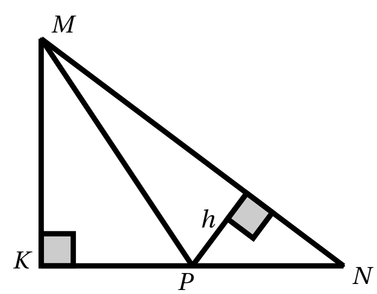
(Inutile de donner AC !)

Dans ACG rectangle en C,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$
$$AG^2 = 72 + 3^2$$
$$AG^2 = 72 + 9$$
$$AG^2 = 81$$
$$AG = \sqrt{81} = 9$$

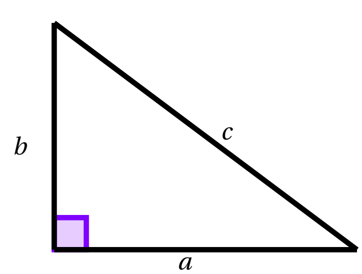
Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1,2$ cm.



1. $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3$ cm^2.
2. On a aussi $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN \times 3}{2}$, soit $\cancel{3} \times 2 = PN \times \cancel{3}$; et donc $PN = 2$ cm.
3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN, puis KP et MP.
   ⚠On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.
   - Pour KN, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN. On obtient $KN = 4$ cm.
   - $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
   - Enfin, pour calculer PM, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP. On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b, l'hypoténuse mesure c.



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

$$\text{Pour tous nombres positifs } a \text{ et } b,\ \sqrt{a^2+b^2} = a+b.$$

est FAUSSE! Voici deux justifications :

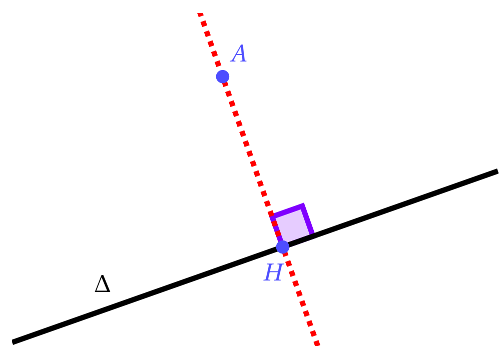
- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{est différent de} \qquad a+b = 4+3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2+b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a+b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

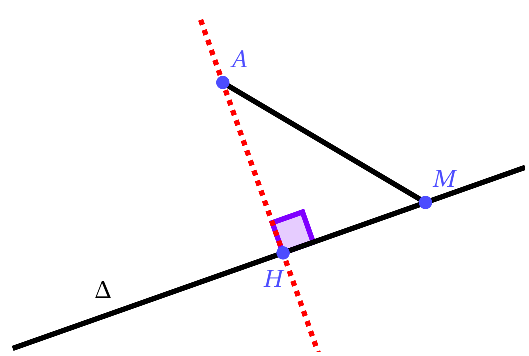
Exercice 14 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A. Elle coupe Δ en H.

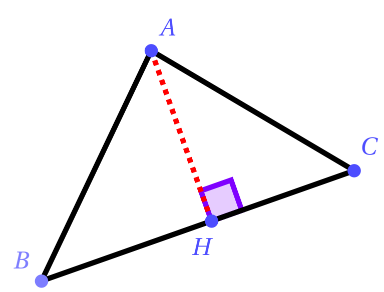


2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H, donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur[2] issue de A dans le triangle ABC.



2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur* ; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B \times h}{2}$ pour l'aire du triangle.

Exercice 15 On résout les équations :

$$\begin{aligned} x+7 &= 18 \\ x+\cancel{7}-\cancel{7} &= 18-7 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

La solution est $x = 11$

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 19 \\ 3x+\cancel{4}-\cancel{4} &= 19-4 \\ 3x &= 15 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{15}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La solution est $x = 5$.

$$\begin{aligned} 3,5x-9 &= 5 \\ 3,5x-\cancel{9}+\cancel{9} &= 5+9 \\ 3,5x &= 14 \\ \frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}} &= \frac{14}{3,5} \\ x &= \frac{14}{3,5} \end{aligned}$$

Or $\frac{14}{3,5} = \frac{14\times2}{3,5\times2} = \frac{28}{7} = 4$, donc la solution est $x = 4$.

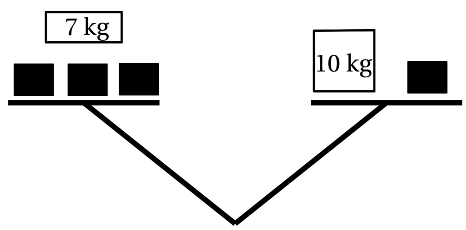
$$\begin{aligned} x+1 &= -2x-5 \\ x+1+2x &= \cancel{-2x}-5\cancel{+2x} \\ 3x+1 &= -5 \\ 3x+\cancel{1}-\cancel{1} &= -5-1 \\ 3x &= -6 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{-6}{3} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

La solution est $x = -2$.

$$\begin{aligned} -2x+4 &= 3x-6 \\ -2x+4-3x &= \cancel{3x}-6\cancel{-3x} \\ -5x+4 &= -6 \\ -5x+\cancel{4}-\cancel{4} &= -6-4 \\ -5x &= -10 \\ \frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} &= \frac{-10}{-5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solution est $x = 2$.

Exercice 16 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M+7 = 10+M.$$

On la résout :

$$\begin{aligned} 3M+7-M &= 10+\cancel{M}\cancel{-M} \\ 2M+7 &= 10 \\ 2M+\cancel{7}-\cancel{7} &= 10-7 \\ 2M &= 3 \\ \frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}} &= \frac{3}{2} \\ M &= 1,5 \end{aligned}$$

Conclusion : la solution est $M = 1,5$.

Exercice 17 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15000-x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15\times x+25\times(15000-x).$$

Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation

$$15x+25(15000-x) = 295000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned}
15x+25(15\,000-x) &= 295\,000\\
15x+25\times 15\,000+25\times(-x) &= 295\,000\\
15x+375\,000-25x &= 295\,000\\
-10x+375\,000 &= 295\,000\\
-10x+\cancel{375\,000}\cancel{-375\,000} &= 295\,000-375\,000\\
-10x &= -80\,000\\
\frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}} &= \frac{-80\,000}{-10}\\
x &= 8000.
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a $x = 8\,000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 18

$$\begin{aligned}
&A=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{2\times 2}{3\times 2}=\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5+4}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3\times\cancel{3}}{2\times\cancel{3}}=\frac{3}{2}\\
&B=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{1\times 2}{6\times 2}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{9-2}{12}=\frac{7}{12}\\
&C=2+\frac{1}{5}=\frac{2}{1}+\frac{1}{5}=\frac{2\times 5}{1\times 5}+\frac{1}{5}=\frac{10}{5}+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}\\
&D=\frac{3}{10}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times 5}{10\times 6}=\frac{15}{60}=\frac{\cancel{15}}{\cancel{15}\times 4}=\frac{1}{4}\\
&E=2\times\frac{5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{2\times 5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{10\times 3}{6\times 3}-\frac{4\times 2}{9\times 2}=\frac{30}{18}-\frac{8}{18}=\frac{30-8}{18}=\frac{22}{18}=\frac{11\times\cancel{2}}{9\times\cancel{2}}=\frac{11}{9}\\
&F=4-3\times\frac{5}{6}=\frac{4}{1}-\frac{3\times 5}{6}=\frac{4\times 6}{1\times 6}-\frac{15}{6}=\frac{24}{6}-\frac{15}{6}=\frac{24-15}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3\times\cancel{3}}{2\times\cancel{3}}=\frac{3}{2}\\
&G=\frac{6}{10}\times\frac{15}{8}=\frac{6\times 15}{10\times 8}=\frac{90}{80}=\frac{9\times\cancel{10}}{8\times\cancel{10}}=\frac{9}{8}\\
&H=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{3\times 3}=\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

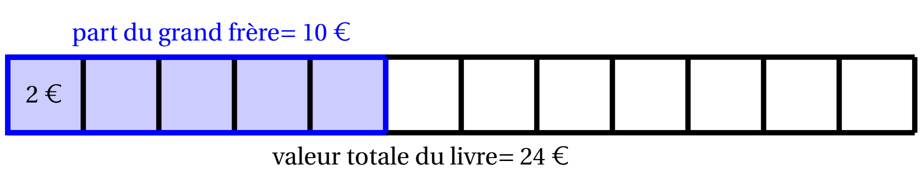
Exercice 19 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à

$$\frac{12}{5}\times 10=\frac{12\times 10}{5}=\frac{120}{5}=24\text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5\times 2 = 10$ € ; et la valeur totale du livre est $12\times 2 = 24$ €.



Exercice 20

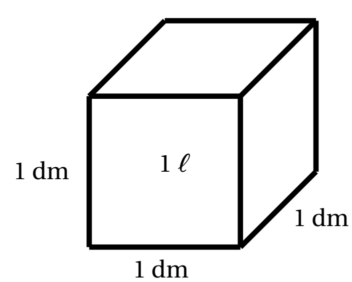
$$A=\frac{2^{15}\times 3^{6}}{2^{12}\times 3^{4}}=\frac{2^{15}}{2^{12}}\times\frac{3^{6}}{3^{4}}=2^{15-12}\times 3^{6-4}=2^{3}\times 3^{2}=8\times 9=72$$
$$B=\frac{5^{3}\times 5^{6}}{5^{7}}=\frac{5^{3+6}}{5^{7}}=\frac{5^{9}}{5^{7}}=5^{9-7}=5^{2}=25$$
$$C=\frac{2^{18}}{8\times 2^{12}}=\frac{2^{18}}{2^{3}\times 2^{12}}=\frac{2^{18}}{2^{3+12}}=\frac{2^{18}}{2^{15}}=2^{18-15}=2^{3}=8$$
$$D=\frac{6^{6}}{2^{5}\times 3^{4}}=\frac{(2\times 3)^{6}}{2^{5}\times 3^{4}}=\frac{2^{6}\times 3^{6}}{2^{5}\times 3^{4}}=\frac{2^{6}}{2^{5}}\times\frac{3^{6}}{3^{4}}=2^{6-5}\times 3^{6-4}=2^{1}\times 3^{2}=2\times 9=18$$
$$E=\frac{\left(10^{4}\right)^{3}}{10^{8}}=\frac{10^{4\times 3}}{10^{8}}=\frac{10^{12}}{10^{8}}=10^{12-8}=10^{4}=10\,000$$
$$F=\frac{4^{5}}{8^{3}}=\frac{(2^{2})^{5}}{(2^{3})^{3}}=\frac{2^{2\times 5}}{2^{3\times 3}}=\frac{2^{10}}{2^{9}}=2^{10-9}=2$$
$$G=\frac{10^{10}+10^{8}}{10^{7}}=\frac{10^{10}}{10^{7}}+\frac{10^{8}}{10^{7}}=10^{10-7}+10^{8-7}=10^{3}+10^{1}=1\,000+1=1\,001$$

Exercice 21 Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.
On rappelle avant cela que $10^{-3}=\dfrac{1}{10^{3}}=\dfrac{1}{1000}=\underbrace{0,00}_{3\text{ zéros}}1$, donc multiplier un nombre par 10^{-3} revient à décaler la virgule de 3 rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour 10^{-2}).

$$\begin{aligned}
A&=35,4\times 10^{-3} && =0,0354\\
B&=0,034 && =0,0340\\
C&=3,6\times 10^{-2}=0,036 && =0,0360\\
D&=\frac{355}{10^{4}}=\frac{355}{10\,000} && =0,0355\\
E&=\frac{7}{60}\times\frac{3}{10}=\frac{7\times 3}{60\times 10}=\frac{7\times \cancel{3}}{20\times\cancel{3}\times 10}=\frac{7}{200} && =0,0350
\end{aligned}$$

Conclusion : $B<E<A<D<C$.

Exercice 22 Avant de commencer, il est utile de se rappeler que 10 cm=1 dm ; et que 1 ℓ = 1 dm^3. Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure 1 dm sur 1 dm sur 1 dm, ou encore 10 cm sur 10 cm sur 10 cm (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



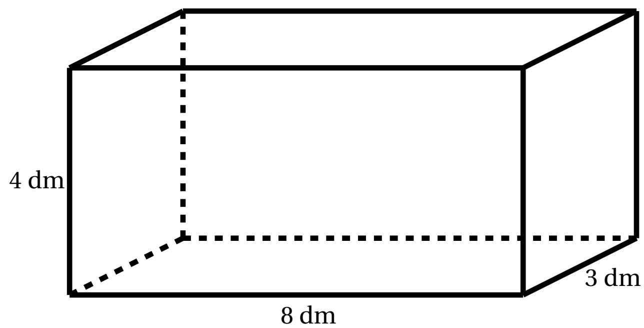
On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm, la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm. On dispose d'un robinet dont le débit est de 6 litres par minute.

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

   largeur = 8 dm, profondeur = 3 dm, hauteur = 4 dm,

   donc son volume est

   $$8\times 3\times 4=96\ \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de 6 ℓ/min, donc il faut $96 \div 6 = 16$ min pour remplir les 96 ℓ de l'aquarium.

Exercice 23 On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\times 100\times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801 \qquad \text{(IR n°2)}$$
$$103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2\times 100\times 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$71\times 69 = (70+1)(70-1) = 70^2 - 1^2 = 4\,900 - 1 = 4\,899 \qquad \text{(IR n°3)}$$
$$2,05^2 = (2+0,05)^2 = 2^2 + 2\times 2\times 0,05 + 0,05^2 = 4 + 0,2 + 0,0025 = 4,2025 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$4,3\times 3,7 = (4+0,3)(4-0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91 \qquad \text{(IR n°3)}$$

Remarque : Comment calculer $0,05^2$ de tête ? Comme $0,05^2 = 0,05\times 0,05$ et que 0,05 a deux chiffres après la virgule, $0,05^2$ en aura $2+2=4$. Il ne reste alors plus qu'à calculer $5^2 = 25$ pour pouvoir conclure : $0,05^2 = 0,0025$.
Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0,05\times 0,0006 = 0,000030,$$

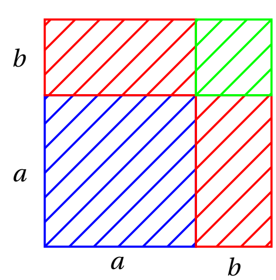
puisque $6\times 5 = 30$ et que le résultat doit avoir $2+4=6$ chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

Exercice 24 Le côté du grand carré mesure $a+b$, donc son aire est $(a+b)^2$.
D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté a, donc d'aire a^2 (hachuré en bleu), un carré de côté b, donc d'aire b^2 (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés a et b, donc d'aires $a\times b$ (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2\times a\times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exercice 25

1. Pour comparer les fractions $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$, on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4\times 6}{5\times 6} = \frac{24}{30} \quad , \quad b = \frac{5\times 5}{6\times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme $24 < 25$, on obtient $a < b$.

2. On compare à présent $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$. On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

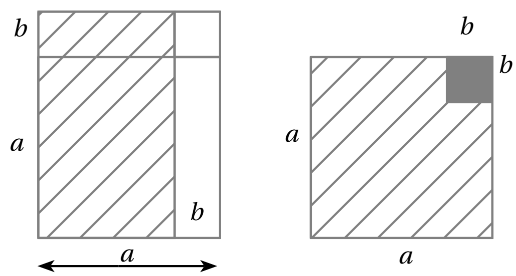
$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \quad , \quad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

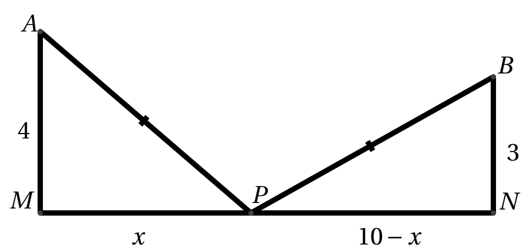
$$524 \times 526 = (525-1)(525+1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à $525 \times 525 = 525^2$, donc $c < d$.

Exercice 26 La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés $(a-b)$ et $(a+b)$, donc son aire est égale à $(a-b)(a+b)$.
Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté a duquel on a retiré un carré de côté b. Son aire est donc égale à $a^2 - b^2$.
L'identité remarquable n°3 nous dit que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



Exercice 27



On pose $MP = x$, on a donc $PN = MN - MP = 10 - x$.
D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles AMP et NBP :

$$\begin{aligned} AP^2 &= MP^2 + MA^2 \\ AP^2 &= x^2 + 4^2 \\ AP^2 &= x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BP^2 &= PN^2 + BN^2 \\ BP^2 &= (10-x)^2 + 3^2 \\ BP^2 &= 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \qquad \text{(on développe grâce à l'IR n°2)} \\ BP^2 &= 100 - 20x + x^2 + 9 \\ BP^2 &= x^2 - 20x + 109 \end{aligned}$$

On sait que $AP = BP$, donc $AP^2 = BP^2$; et d'après les deux calculs ci-dessus :

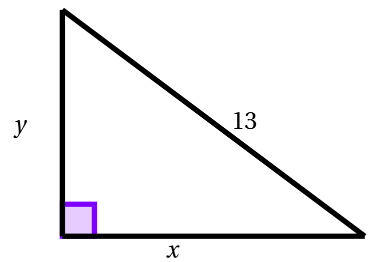
$$\cancel{x^2} + 16 = \cancel{x^2} - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$
\begin{aligned}
16 &= -20x + 109 \\
16 - 109 &= -20x + \cancel{109} \cancel{-109} \\
\frac{-93}{-20} &= \frac{\cancel{-20}x}{\cancel{-20}} \\
4,65 &= x
\end{aligned}
$$

Conclusion : $MP = 4,65$.

Exercice 28



1. D'après le théorème de Pythagore,
$$x^2 + y^2 = 13^2 = 169.$$
D'après l'IR n°1, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Or $x^2 + y^2 = 169$, et $\frac{x \times y}{2} = 30$, puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit $x \times y = 30 \times 2 = 60$, puis
$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 169 + 2 \times 60 = 169 + 120 = 289.$$
Finalement, comme $(x+y)^2 = 289$,
$$x + y = \sqrt{289} = 17.$$
2. On utilise cette fois l'IR n°2 :
$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 169 - 2 \times 60 = 169 - 120 = 49.$$
Or $x - y \geq 0$, puisque x est plus grand que y, donc
$$x - y = \sqrt{49} = 7.$$
⚠Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir $x - y = -7$!!!

On sait à présent que $x + y = 17$ et $x - y = 7$. On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit x :
$$
\begin{aligned}
(x+y) + (x-y) &= 17 + 7 \\
x + \cancel{y} + x - \cancel{y} &= 24 \\
\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{24}{2} \\
x &= 12
\end{aligned}
$$
Enfin, comme $x + y = 17$, on trouve $y = 17 - x = 17 - 12 = 5$.
Conclusion : $x = 12$, $y = 5$.

2 Nombres réels

Exercice 29

1. $-7 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification : $-7 = \dfrac{-7}{1}$, donc $-7 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).
2. $-7 \in \mathbb{N}$. **FAUX.**
Justification : -7 est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{Z}$. **FAUX.**
Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.
Remarque : Pour obtenir $\dfrac{13}{4} = 3,25$ sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ② Poser la division – ③ Remarquer que $\dfrac{13}{4} = \dfrac{12}{4} + \dfrac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$.

4. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{D}$. **VRAI.**
Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.

5. $5,824 \in \mathbb{D}$. **VRAI.**
Justification : $5,824$ a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal

6. $5,824 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification n°1 : $5,824$ est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$).
Justification n°2 : $5,824 = \dfrac{5\,824}{1\,000}$, donc $5,824 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

7. $\dfrac{10}{6} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & 1 & 0 & 6 \\ \cline{4-4}
- & & 6 & 1,6 \\ \cline{2-3}
 & 4 & 0 & \\
- & 3 & 6 & \\ \cline{2-3}
 & & 4 &
\end{array}
$$

Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{10}{6} = 1,666\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

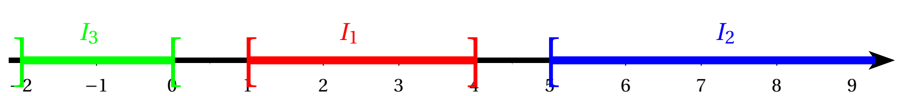
8. $\dfrac{17}{11} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 1 & 7 & & 1\ 1 \\ \cline{5-5}
- & 1 & 1 & & 1,5\ 4 \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 0 & \\
 & - & 5 & 5 & \\ \cline{3-4}
 & & 5 & 0 & \\
 & - & 4 & 4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 6 &
\end{array}
$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{17}{11} = 1,5454\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

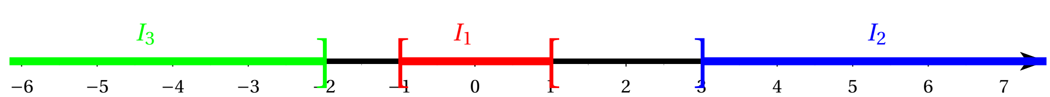
Exercice 30 1.

$I_1 = [1;4] \qquad I_2 = [5;+\infty[\qquad I_3 =]-2;0[$



2.

$I_1 = [-1;1[\qquad I_2 =]3;+\infty[\qquad I_3 =]-\infty;-2]$



Exercice 31 1. $5 \in [2;6[$

2. $-2 \notin]-2;1]$
3. $\pi \in]3;4[$ (on rappelle que $\pi \approx 3,14$)

Exercice 32 1. $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$

2. $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
3. $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
4. $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
5. $|7-4| = |3| = 3$
6. $|4-7| = |-3| = 3$
7. $|4-3| + |5-6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
8. $|5-11| + 2 \times |7-8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
9. $|8-5| \times |7-10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
10. $|15-6| - 4 \times |1-4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

Exercice 33 1. On résout l'équation $|x-2| = 3$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que

$$x - 2 = 3 \qquad \text{ou que} \qquad x - 2 = -3$$

Donc

$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 3 + 2 \qquad \text{ou} \qquad x - \cancel{2} + \cancel{2} = -3 + 2$$
$$x = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -1$$

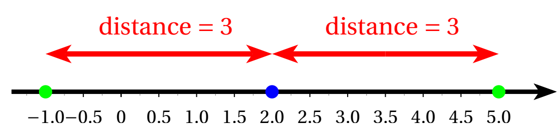
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que la distance entre x et 2 est égale à 3.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

2. On résout l'équation $|x-1| = 4$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 4 sont 4 et -4.
Donc dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que

$$x - 1 = 4 \qquad \text{ou que} \qquad x - 1 = -4$$

Donc

$$x - \cancel{1} + \cancel{1} = 4 + 1 \qquad \text{ou} \qquad x - \cancel{1} + \cancel{1} = -4 + 1$$
$$x = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -3$$

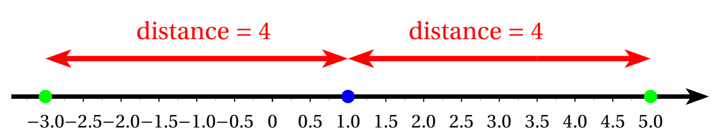
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que la distance entre x et 1 est égale à 4.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

3. On résout l'équation $|x+2| = 2$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 2 sont 2 et -2.
Donc dire que

$$|x+2| = 2$$

revient à dire que

$$x+2 = 2 \qquad \text{ou que} \qquad x+2 = -2$$

Donc

$$\begin{array}{lcl} x+\cancel{2}-\cancel{2} = 2-2 & \text{ou} & x+\cancel{2}-\cancel{2} = -2-2 \\ x = 0 & \text{ou} & x = -4 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

Méthode n°2 : avec la distance.

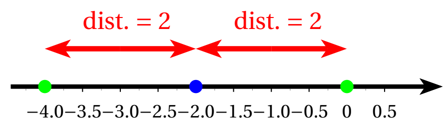
Il y a une vraie difficulté : l'égalité $|x+2| = 2$ se réécrit

$$|x-(-2)| = 2$$

(il faut absolument faire apparaître un « − » pour pouvoir interpréter en termes de distance). Donc dire que

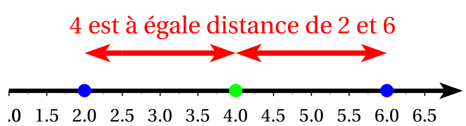
$$|x+2| = 2$$

revient à dire que la distance entre x et -2 est égale à 2.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

4. On résout l'équation $|x-2| = |x-6|$.
Conformément à l'indication, on travaille avec la distance : dire que $|x-2| = |x-6|$, c'est dire que la distance entre x et 2 est la même que la distance entre x et 6. Autrement dit, x est à égale distance de 2 et de 6. Il y a un seul nombre x qui convienne : le milieu de l'intervalle $[2;6]$, c'est-à-dire $x = 4$.



Conclusion : il y a une seule solution, $x = 4$.

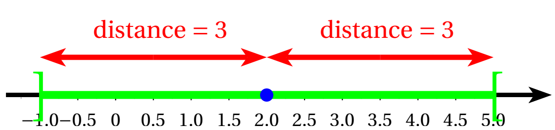
Exercice 34 Commençons par deux exemples :

- si $x = 3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$.
- si $x = -3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

On comprend que quand x est positif, on aura toujours $\sqrt{x^2} = x = |x|$; tandis que dans le cas où x est négatif, le signe − « disparaît » lorsqu'on élève au carré, ce qui donne finalement $\sqrt{x^2} = |x|$.
Autrement dit, quel que soit x (y compris si $x = 0$), on a l'égalité

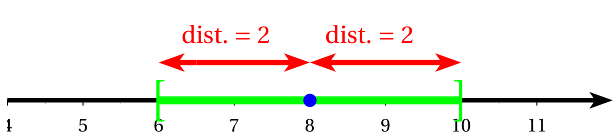
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 35 1. Dire que $|x-2| < 3$, c'est dire que la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 3. On voit que les x qui conviennent sont tous les nombres de l'intervalle $]-1;5[$ (extrémités exclues, puisque l'inégalité est stricte).



2. Les points de l'intervalle ci-dessous sont les nombres x dont la distance à 8 est inférieure ou égale à 2 (donc extrémités incluses) ; autrement dit, ce sont les nombres x tels que

$$|x-8| \leq 2.$$



Exercice 36 Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. On part de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on élève au carré et on multiplie par q^2 :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}^2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\
2 &= \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \\
2 &= \frac{p^2}{q^2} \\
2 \times q^2 &= \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \times \cancel{q^2} \\
2q^2 &= p^2
\end{aligned}$$

2. Commençons par un exemple : prenons un nombre qui « se termine par 4 » (donc le chiffre des unités est 4). Le carré de ce nombre va « se terminer par 6 », puisque $4^2 = 16$. Autrement dit, le chiffre des unités du carré est 6.
   Avec la même technique, on voit que si le chiffre des unités est 9, celui du carré est 1 (puisque $9^2 = 81$) ; etc. On remplit ainsi le tableau :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

3. Pour avoir le chiffre des unités de $2q^2$, il suffit de reprendre la deuxième ligne du tableau précédent et de multiplier par 2. Par exemple, si le chiffre des unités de q est 7, alors celui de q^2 est 9 ; et celui de $2q^2$ est 8 (puisque $2 \times 9 = 18$). On remplit ainsi le nouveau tableau :

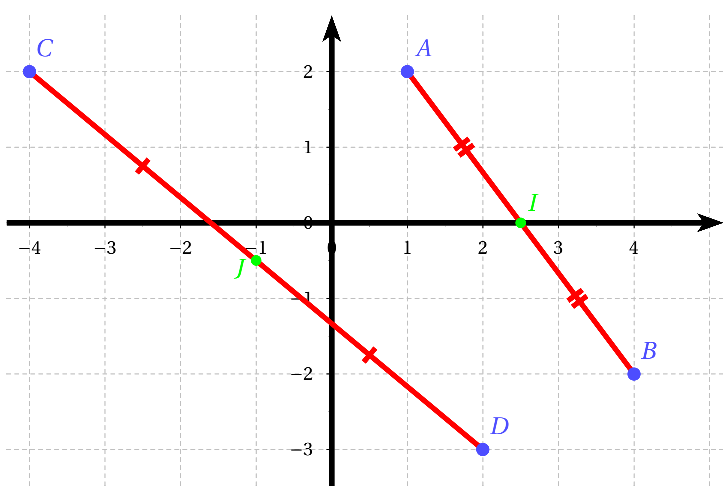
Chiffre des unités de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

4. D'après la question 1, $2q^2 = p^2$. Les nombres $2q^2$ et p^2 étant égaux, ils ont le même chiffre des unités. Or dans nos deux tableaux, le seul chiffre en commun des deuxièmes lignes est le 0 ; et on l'obtient lorsque le chiffre des unités de p est 0, et lorsque le chiffre des unités de q est 0 ou 5.
5. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : on peut donc l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. D'après la question précédente, p se termine par 0 et q se termine par 0 ou 5. Mais alors p et q sont tous deux multiples de 5, et donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite au départ.

   Conclusion : supposant que $\sqrt{2}$ était rationnel, on aboutit à une absurdité ; c'est donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3 Géométrie repérée

Exercice 37 1.



(a) On a $A(\underbrace{1}_{x_A} ; \underbrace{2}_{y_A})$ et $B(\underbrace{4}_{x_B} ; \underbrace{-2}_{y_B})$. On calcule les coordonnées de I :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) \qquad I\left(\frac{5}{2}; \frac{0}{2}\right) \qquad I\,(2,5;0)\,.$$

(b)

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

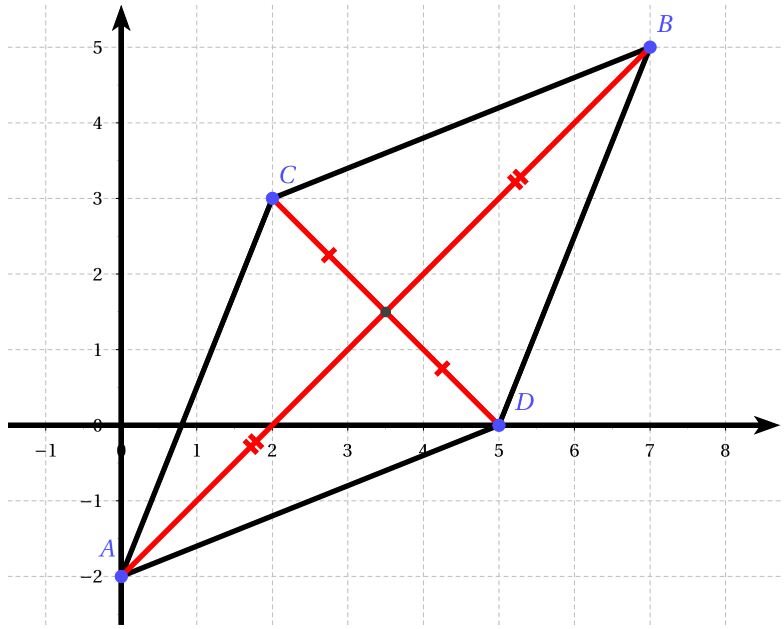
2. (a) On a $C(\underset{x_C}{-4}\,;\,\underset{y_C}{2})$ et $D(\underset{x_D}{2}\,;\,\underset{y_D}{-3})$. On calcule les coordonnées de J :

$$J\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)\qquad J\left(\frac{-4+2}{2};\frac{2+(-3)}{2}\right)\qquad J\left(\frac{-2}{2};\frac{-1}{2}\right)\qquad J(-1;-0,5).$$

(b)

$$CD=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{(2-(-4))^2+(-3-2)^2}=\sqrt{6^2+(-5)^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}.$$

Exercice 38 1.



2. On calcule les coordonnées de M :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)\qquad M\left(\frac{0+7}{2};\frac{-2+5}{2}\right)\qquad M\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)\qquad M(3,5;1,5).$$

Puis celles de M' :

$$M'\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)\qquad M'\left(\frac{2+5}{2};\frac{3+0}{2}\right)\qquad M'\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)\qquad M'(3,5;1,5).$$

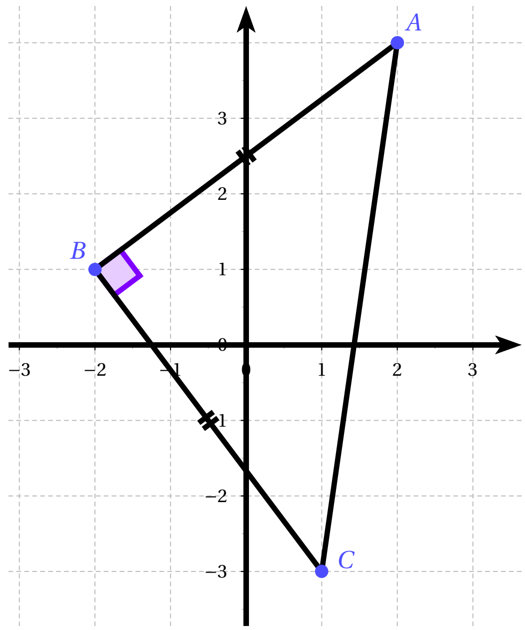
3. On constate dans la question précédente que $M=M'$, les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ du quadrilatère $ACBD$ se coupent donc en leur milieu. D'après une propriété du collège, cela entraîne que $ACBD$ est un parallélogramme, puis que ses côtés opposés sont de même longueur : $BD=AC$, $CB=AD$.
4. On calcule les longueurs AC et CB :
   - $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$
   - $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}.$

   On constate que $AC=CB$, donc d'après la question précédente :

$$BD=AC=CB=AD.$$

   Conclusion : le quadrilatère $ACBD$ a quatre côtés de même longueur, donc c'est un losange.

Exercice 39



On calcule la longueur des trois côtés :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$AB = BC$, donc ABC est isocèle en B. On utilise le théorème réciproque de Pythagore pour prouver qu'il est rectangle :

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Exercice 40 1. • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}.$

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AC^2 + BC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{10}^2 = 40 + 10 = 50 \end{array}\right\} AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en C.

2. D'après la formule du cours :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{6+1}{2}; \frac{0+5}{2}\right) \qquad I\,(3,5\,;\,2,5)\,.$$

3. Le triangle ABC étant rectangle en C, le milieu I de l'hypoténuse $[AB]$ est le centre de Γ (rappel de l'énoncé) ; et le rayon de Γ est

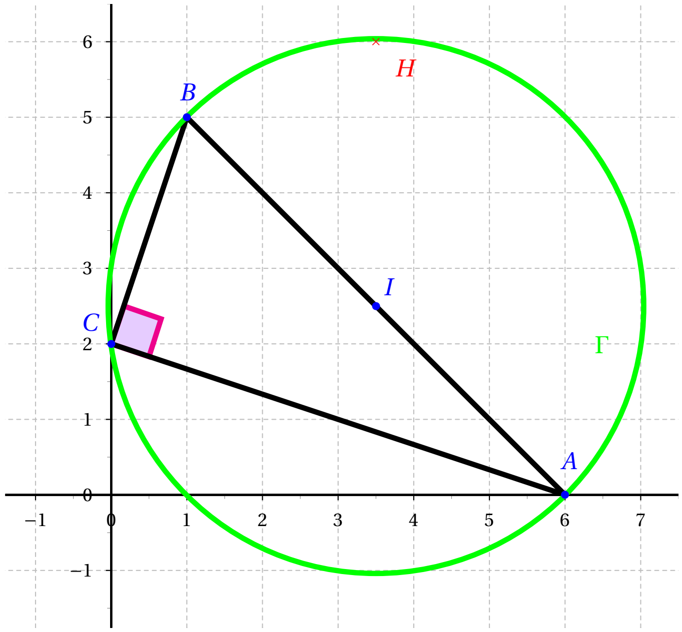
$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2} = \sqrt{(6-3,5)^2 + (0-2,5)^2} = \sqrt{2,5^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{6,25+6,25} = \sqrt{12,5}.$$

4. Savoir si $H(3,5\,;\,6)$ appartient à Γ revient à savoir si la longueur IH est égale à r ou non. On calcule cette longueur avec la formule du cours :

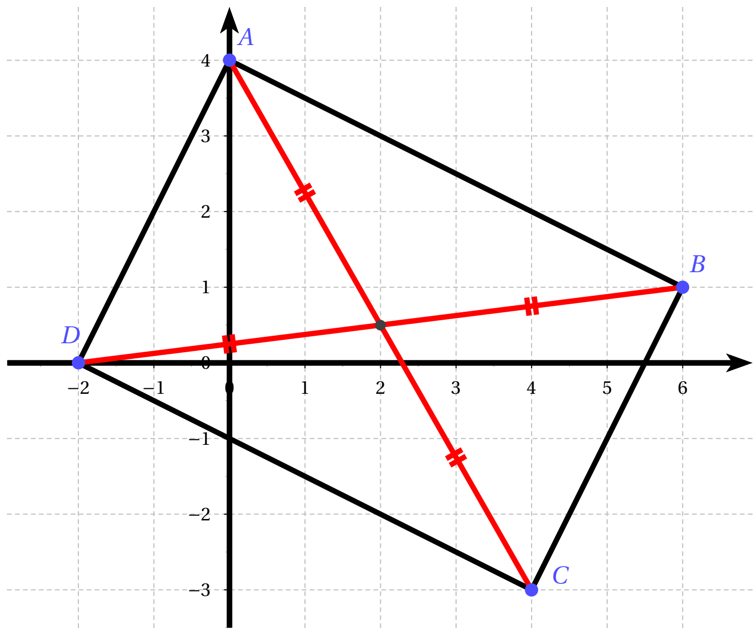
$$IH = \sqrt{(x_H - x_I)^2 + (y_H - y_I)^2} = \sqrt{(3,5-3,5)^2 + (6-2,5)^2} = \sqrt{0^2 + 3,5^2} = \sqrt{0+12,25} = \sqrt{12,25}.$$

Comme $\sqrt{12,25} \neq \sqrt{12,5}$, le point H n'appartient pas à Γ.

N.B. La figure est trompeuse, puisqu'on a l'impression que H est sur Γ. En réalité, si vous avez pris 1 cm comme unité graphique, le point H est à environ trois cheveux (au sens propre) du cercle.



Exercice 41



1. • Le milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2};\frac{y_A + y_C}{2}\right) \qquad \left(\frac{0+4}{2};\frac{4+(-3)}{2}\right) \qquad (2\ ;\ 0,5)\,.$$

• Le milieu du segment $[BD]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_D}{2};\frac{y_B + y_D}{2}\right) \qquad \left(\frac{6+(-2)}{2};\frac{1+0}{2}\right) \qquad (2\ ;\ 0,5)\,.$$

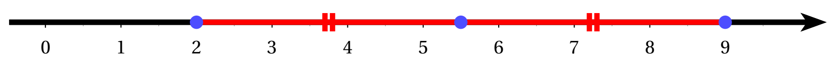
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme (propriété du collège).

⚠Si vous donnez un nom aux milieux des diagonales **avant de faire les calculs**, donnez-leur des noms différents : avant de faire les calculs, on n'a pas encore prouvé que les milieux étaient les mêmes.

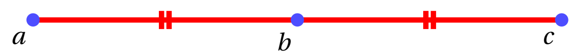
2. On calcule la longueur des diagonales :
   - $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$.
   - $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + \left(y_D - y_B\right)^2} = \sqrt{(-2-6)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont de même longueur, donc c'est un rectangle (propriété du collège).

Exercice 42 1. Le symétrique de 2 par rapport à 5,5 est 9.



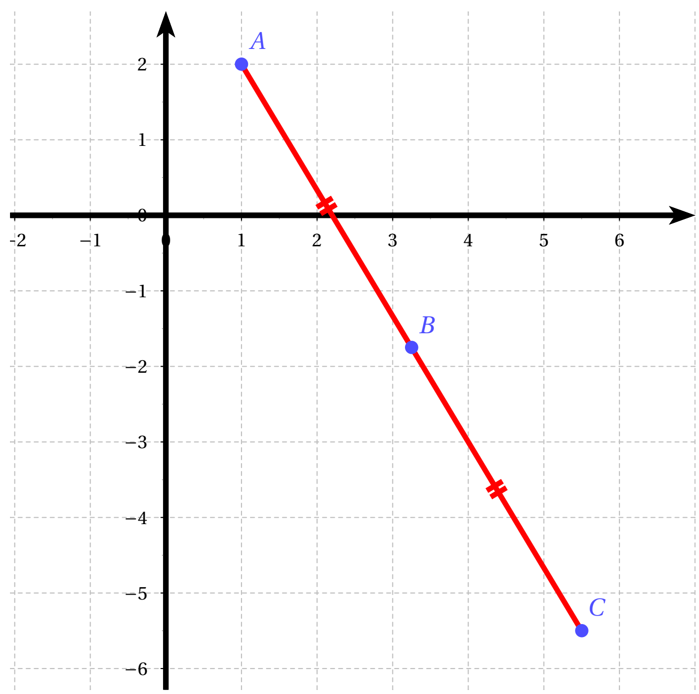
2. On généralise le travail de la question précédente : c est le symétrique de a par rapport à b lorsque b est le milieu du segment qui va de a à c.



Autrement dit $b = \frac{a+c}{2}$, ce qui donne $b\times 2 = \frac{a+c}{\cancel{2}}\times\cancel{2}$, soit $2b = a+c$; et donc

$$c = 2b - a.$$

3. On place C, symétrique du point A par rapport au point B.



Par définition d'une symétrie centrale, B est le milieu du segment $[AC]$, donc d'après la formule du cours pour le milieu d'un segment :

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad , \qquad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Autrement dit, en remplaçant avec les données de l'énoncé :

$$3,25 = \frac{1 + x_C}{2} \qquad , \qquad -1,75 = \frac{2 + y_C}{2}.$$

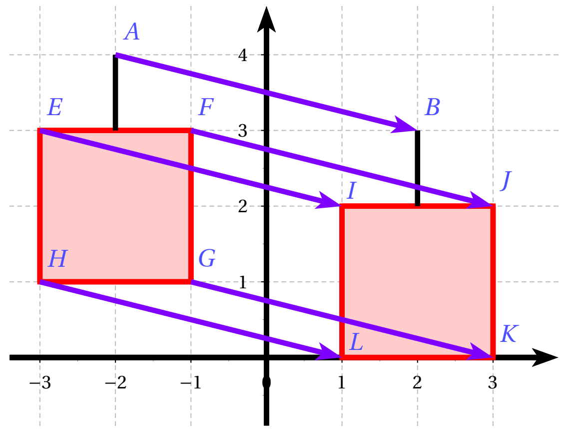
En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient

$$x_C = 2 \times 3,25 - 1 = 5,5 \qquad , \qquad y_C = 2 \times (-1,75) - 2 = -5,5.$$

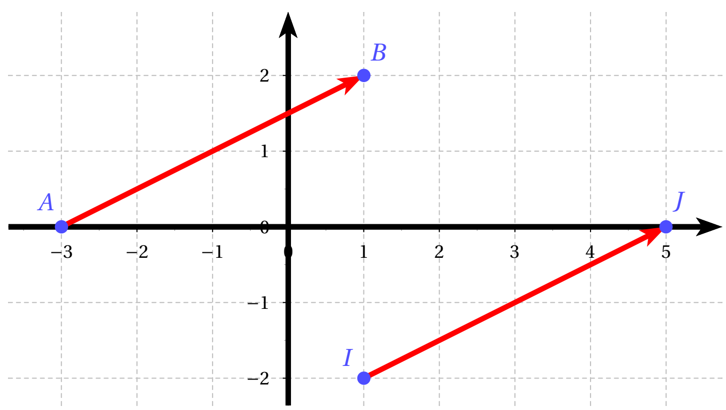
Conclusion : $C(5,5\ ;\ -5,5)$.

Exercice 43 Cet exercice d'introduction à la notion de vecteur appelle quelques commentaires :

1. La télécabine $EFGH$ glisse pour aboutir à la position $IJKL$. Ce déplacement est appelé « translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ».
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a été représenté en violet sur la figure, il est égal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{HL}$. On peut donc écrire
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{HL}.$$
3. Pour aller de A à B, on avance de 4 carreaux en abscisse et on descend de 1 carreau en ordonnée; on dit que $\overrightarrow{AB}$ a pour abscisse 4 et pour ordonnée -1. On note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.



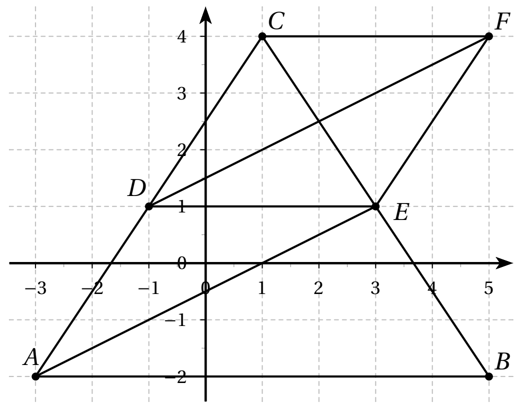
Exercice 44 1.



2. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\ 2-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$
3. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$:
$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}x_J - x_I\\ y_J - y_I\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}5-1\\ 0-(-2)\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 45 On considère les points $A(-3;-2)$, $B(5;-2)$, $C(1;4)$, $D(-1;1)$, $E(3;1)$, $F(5;4)$.

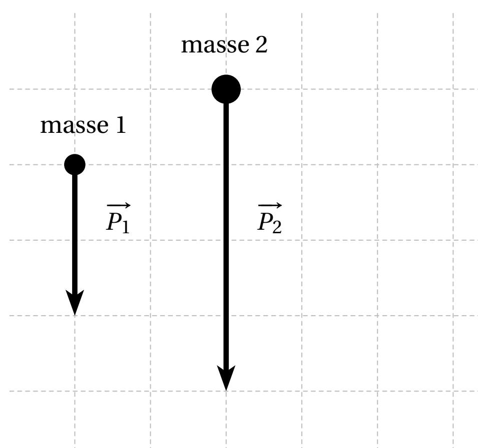


Il y a trop de possibilités pour que les justifie toutes. Je vais me contenter de donner un couple de vecteurs égaux, avec la justification; puis donner toutes les autres égalités possibles, mais sans les justifier :

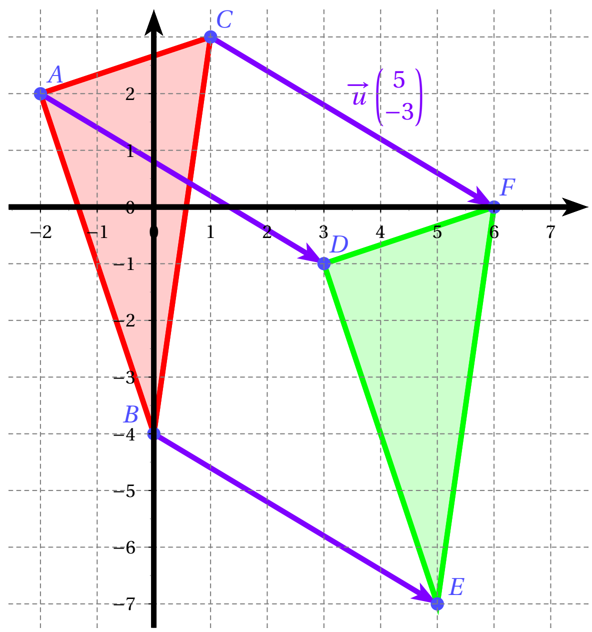
1. **Une égalité et sa justification.**
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$. En effet, ces vecteurs ont les mêmes coordonnées :
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. **Toutes les autres égalités.**
   $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ $\quad \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF}$ $\quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FD}$ $\quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB}$ $\quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BE}$

   ⚠Attention à l'ordre des lettres! Par exemple, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, mais $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{FE}$ (il y a un problème de sens : le vecteur $\overrightarrow{DC}$ « monte vers le haut et la droite »; tandis que $\overrightarrow{FE}$ « descend vers le bas et la gauche » – l'erreur se détecte aussi bien sûr en calculant les coordonnées).

Exercice 46 En physique, un vecteur représente une force, et la longueur (ou norme) du vecteur correspond à l'intensité de la force. L'égalité $\left\|\overrightarrow{P_2}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{P_1}\right\|$ signifie que la masse 2 a un poids deux fois plus important que celui de la masse 1.



Exercice 47 L'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ est le triangle DEF.



4 Études graphiques de fonctions

Exercice 48 Un voyageur de commerce (= un représentant) fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

Remarque : On peut penser que l'indemnité kilométrique sert à rembourser les frais de déplacement (par exemple si le représentant utilise sa propre voiture) ; et que la part fixe sert à payer les repas.

1. S'il fait 120 km dans la journée, le montant de la note de frais est de

$$30 + 120 \times 0,5 = 30 + 60 = 90 \text{ €}.$$

2. On note x le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et $f(x)$ le montant de la note de frais. On a alors

$$f(x) = 30 + x \times 0,5 = 0,5x + 30.$$

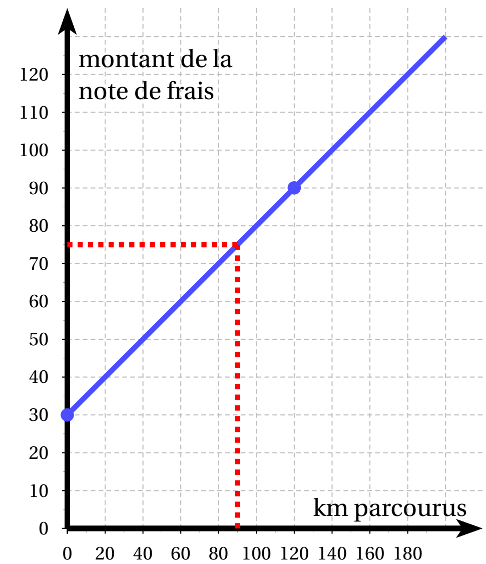
3. La fonction f est affine, puisque $f(x) = 0,5x+30$ (c'est bien une fonction de la forme $f(x) = ax+b$, avec $a = 0,5$ et $b = 30$). Sa courbe représentative est donc une droite, que l'on trace à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs ; par exemple :

x	0	120
$f(x)$	30	90

$$f(0) = 0,5 \times 0 + 30 = 30$$
$$f(120) = 0,5 \times 120 + 30 = 90$$

On place les points de coordonnées $(0;30)$ et $(120;90)$, puis on trace la droite – en réalité un segment, puisqu'on va de 0 à 200 en abscisses.

Remarque : On a choisi les valeurs 0 et 120, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs – l'avantage de 0, c'est que le calcul est facile ; et l'avantage de 120, c'est qu'on a déjà fait le calcul dans la question 1.



4. Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Pour déterminer le nombre de km parcourus dans la journée, il y a deux méthodes :
   - **Graphiquement.** On voit qu'il a parcouru 90 km (pointillés rouges) [3].
   - **Par le calcul.** On retire les frais fixes : $90-30 = 60$ € d'indemnité kilométrique. Puis, comme chaque km compte pour $0,5$ €, on divise : $45 \div 0,5 = 45 \times 2 = 90$ km. [4]

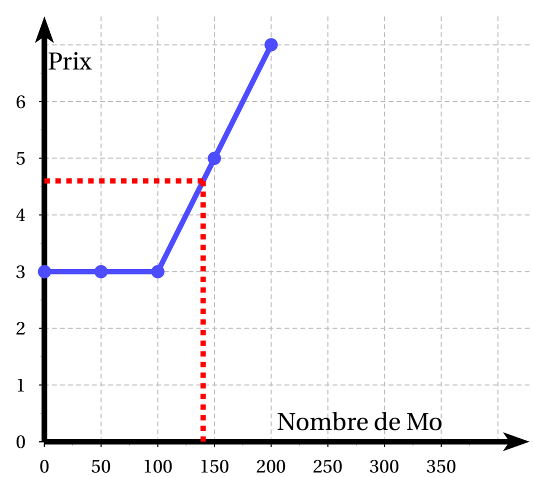
Exercice 49 1. • Lorsqu'on télécharge 50 Mo, on paye 3 €.
   - Lorsqu'on télécharge 150 Mo, les 100 premiers coûtent 3 € ; et les 50 suivants coûtent $50 \times 0,04 = 2$ €. On paye donc au total $3+2 = 5$ €.

2. On complète le tableau de valeurs :

Nombre de Mo	0	50	100	150	200
Prix à payer	3	3	3	5	7

   Remarque : jusqu'à 100 Mo, on paye 3 €. Ensuite, chaque nouvelle tranche de 50 Mo est facturée 2 €.

3. On construit la courbe qui donne le prix payé en fonction du nombre de Mo téléchargés. Elle est constante sur l'intervalle $[0;100]$, puis affine sur l'intervalle $[100;200]$. Il faut donc utiliser une règle pour effectuer le tracé [5].



4. Il y a deux méthodes :
   - **Graphiquement.** On voit qu'on a téléchargé 140 Mo (pointillés rouges).
   - **Par le calcul.** J'ai payé 4,60 €, donc $3+1,60$ €. J'ai donc téléchargé $1,60 \div 0,04 = 40$ Mo au-delà du 100ᵉ. Autrement dit, j'ai téléchargé 140 Mo.

3. La méthode graphique est simple, mais la réponse pourrait être imprécise.
4. On peut aussi résoudre l'équation $0,5x+30 = 75$.
5. On parle de fonction « affine par morceaux ».

Exercice 50 Les gares de Calais et de Boulogne-sur-Mer sont distantes de 30 km. Un train part à 12 h de Boulogne-sur-Mer en direction de Calais et roule à la vitesse de 40 km/h. Un train part de Calais à 12 h 15 et fait route en sens inverse à la vitesse de 60 km/h.

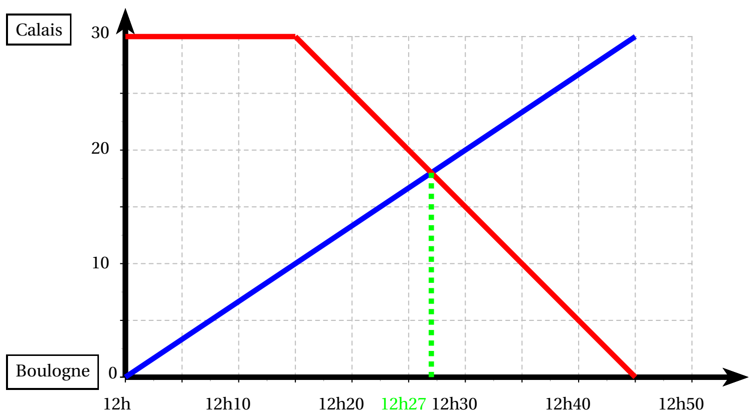
1. Le train qui part à 12 h de Boulogne-sur-Mer roule à la vitesse de 40 km/h, donc il parcourt 40 km en 60 min. Pour savoir quand il arrive à Calais, on complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	40	30

Le train mettra $\frac{60\times30}{40} = \frac{1800}{40} = 45$ min pour arriver à Calais, donc il y sera à 12 h 45.

Pour le train qui part de Calais, le calcul est plus facile : il roule à 60 km/h, donc parcourt 60 km en 60 min; et ainsi 30 km en 30 min. Comme il part à 12 h 15, il arrive à 12 h 45 lui aussi.

On peut ainsi représenter la marche des deux trains :



2. Nous allons déterminer l'heure de croisement des trains par le calcul. Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes.

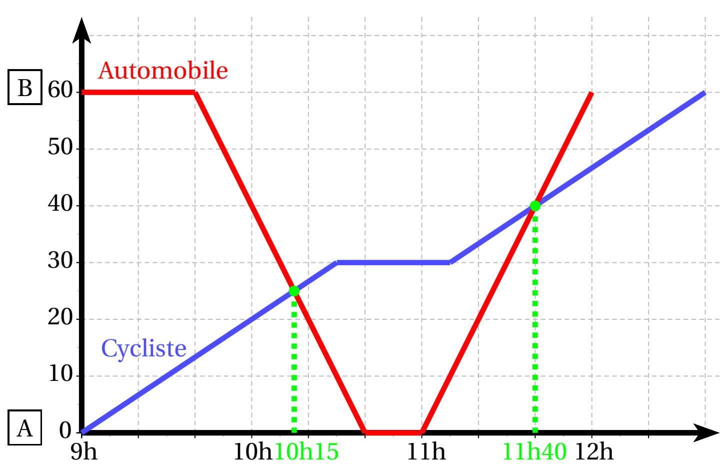
À 12h15, le train qui part de Boulogne-sur-Mer a parcouru 10 km (facile à vérifier), il est donc à 20 km de Calais. C'est l'heure à laquelle le deuxième train part. Comme l'un roule à 40 km/h et l'autre à 60 km/h, tout se passe comme si un seul train devait parcourir 20 km à la vitesse de $40+60 = 100$ km/h. On complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	100	20

$\frac{60\times20}{100} = \frac{1200}{100} = 12$, donc il faudrait 12 min à ce train pour parcourir 20 km. Ainsi, les deux trains se croiseront-ils à

$$12 \text{ h } 15 \text{ min} + 12 \text{ min} = 12 \text{ h } 27 \text{ min}.$$

Exercice 51 Je me contenterai du graphique, donc je ne ferai pas les calculs pour avoir les heures exactes des deux rencontres – elles s'obtiennent avec les mêmes techniques que dans l'exercice précédent.



Exercice 52 Le taux d'anticorps (en g/l) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en mois), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 12 mois, est donné par la formule suivante :

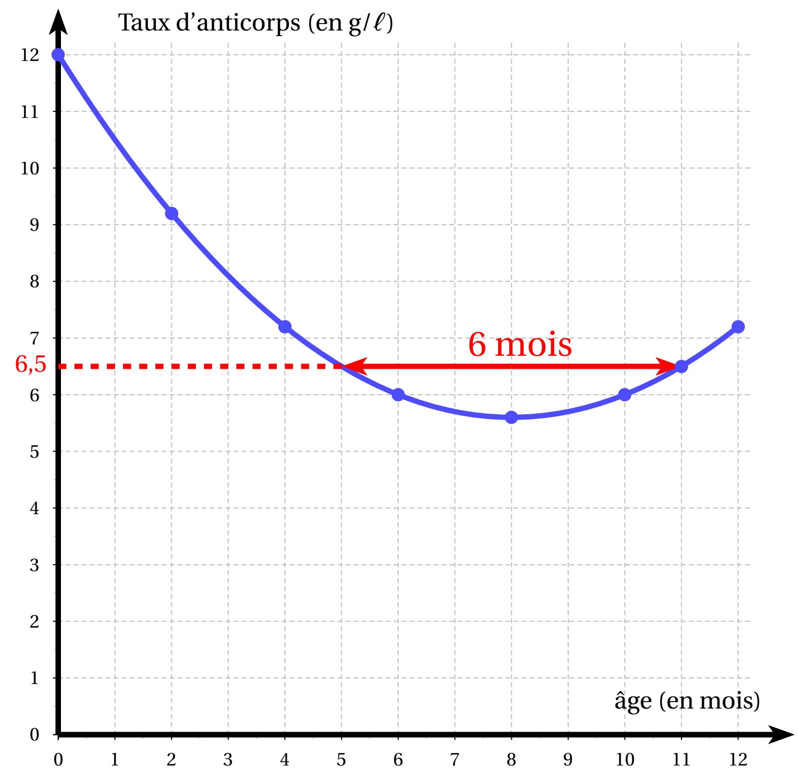
$$f(x) = 0,1x^2 - 1,6x + 12.$$

1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[0;12]$ avec un pas de 2 :

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	12	9,2	7,2	6	5,6	6	7,2

Détail de deux calculs :
- $f(0) = 0,1 \times 0^2 - 1,6 \times 0 + 12 = 12.$
- $f(12) = 0,1 \times 12^2 - 1,6 \times 12 + 12 = 7,2.$

2.



3. Le taux d'anticorps à la naissance est de 12 g/ℓ.
4. Tableau de variations :

x	0		8		12
$f(x)$	12	↘	5.6	↗	7.2

Le taux d'anticorps est minimal à l'âge de 8 mois.

5. D'après le graphique, le taux d'anticorps est inférieur à 6,5 g/ℓ pendant 6 mois (du 5ᵉ au 11ᵉ mois).

Exercice 53 On considère la fonction f définie sur $[-1;3]$ par

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

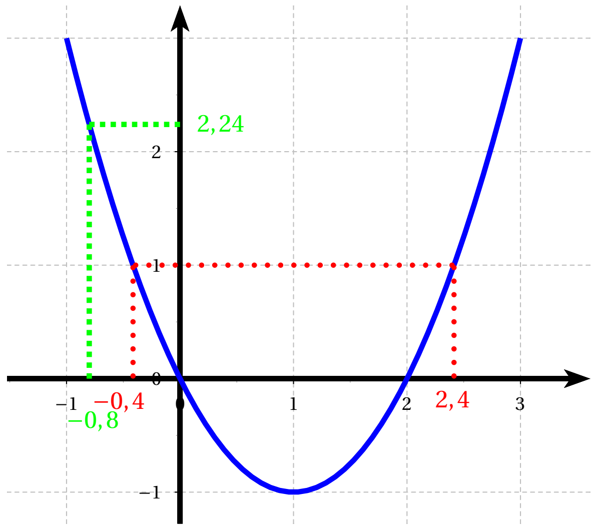
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[-1;3]$ avec un pas de 0,5 :

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	3	1,25	0	$-0,75$	-1	$-0,75$	0	1,25	3

Détail de deux calculs :

- $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$.
- $f(0,5) = 0,5^2 - 2 \times 0,5 = 0,25 - 1 = -0,75$.

2. Courbe représentative de f :



3. L'image de $-0,8$ par f est
$$f(-0,8) = (-0,8)^2 - 2 \times (-0,8) = 0,64 + 1,6 = 2,24.$$
On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat – si on a de bons yeux!

4. Les antécédents de 1 par f sont $-0,4$ et $2,4$ environ (voir pointillés rouges).

5. Les solutions l'inéquation $f(x) < 1$ sont tous les nombres dont l'image est strictement inférieure à -1. Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $]-0,4;2;4[$ environ.

6. Tableau de variations de f :

x	-1		1		3
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

7. Tableau de signe de f :

x	-1		0		2		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 54 On considère la fonction g définie sur $[1;4]$ par
$$g(x) = x - \frac{6}{x}.$$

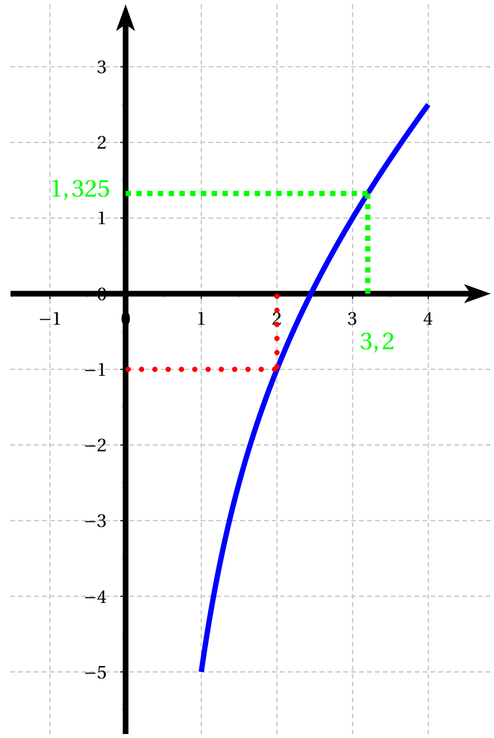
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[1;4]$ avec un pas de $0,5$:

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$g(x)$	-5	$-2,5$	-1	0,1	1	1,79	2,5

Détail de deux calculs :
- $g(2) = 2 - \frac{6}{2} = 2 - 3 = -1$.
- $g(1,5) = 1,5 - \frac{6}{1,5} = 1,5 - 4 = -2,5$.

Remarque : L'énoncé demande d'arrondir à 10^{-2} près par excès. Cela signifie qu'il faut donner deux chiffres après la virgule et arrondir par valeur supérieure le deuxième chiffre après la virgule. Par exemple $g(3,5) = 1,7857\cdots \approx 1,79$.

2. Courbe représentative de g :



3. L'image de 3,2 par g est
$$g(3,2) = 3,2 - \frac{6}{3,2} = 3,2 - 1,875 = 1,325.$$
On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat.

4. L'unique solution de l'équation $g(x) = -1$ (donc l'unique antécédent de -1 par g) est 2 (pointillés rouges).

5. Les solutions l'inéquation $g(x) \geq -1$ sont tous les nombres dont l'image est supérieure ou égale à -1. Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $[2;4]$.

6. Tableau de variations de g :

x	1		4
$g(x)$	-5	↗	2.5

7. Tableau de signe de g :

x	1		≈ 2.4		4
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 55 1. x est une longueur, donc $x \geq 0$. Par ailleurs, la longueur x ne peut pas dépasser 4 (car $AB = 4$).
Conclusion : on a l'encadrement
$$0 \leq x \leq 4.$$

2. • $AP = AD - DP = 4 - x$.

- L'aire du rectangle $AMNP$ est

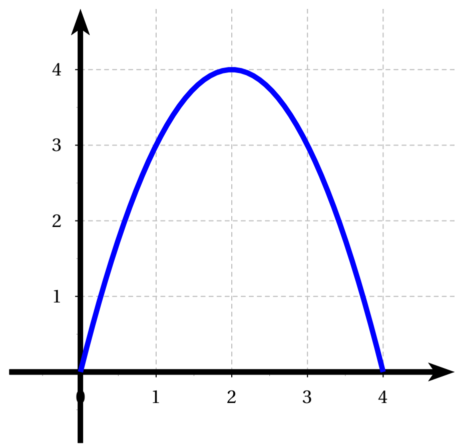
$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{AMNP} &= AM \times AP \\
&= x \times (4-x) && \text{(car } AP = 4-x\text{)} \\
&= x \times 4 + x \times (-x) && \text{(on développe)} \\
&= 4x - x^2.
\end{aligned}$$

3. La fonction f est définie pour $0 \leq x \leq 4$ par
$$f(x) = 4x - x^2.$$
Autrement dit, $f(x)$ donne l'aire du rectangle $AMNP$ pour une valeur donnée de x.

(a) Tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0

Courbe représentative :

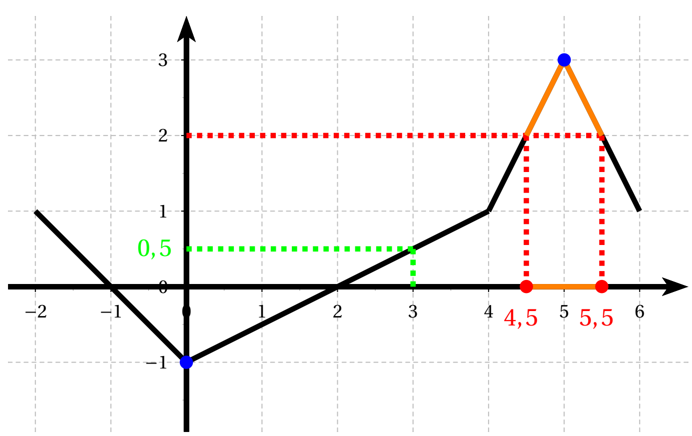


(b) Tableau de variations de f :

x	0		2		4
$f(x)$			4		
	0	↗		↘	0

(c) La fonction f atteint son maximum lorsque $x = 2$, donc l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale lorsque $x = 2$, c'est-à-dire quand M est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 56



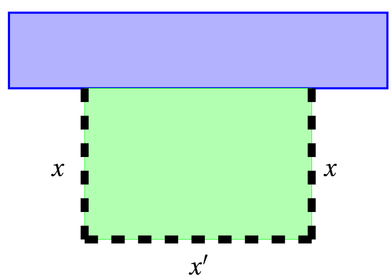
1. L'image de 3 par f est $0,5$ (pointillés verts).
2. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $4,5$ et $5,5$ (pointillés rouges).
3. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ sont tous les nombres de l'intervalle $[4,5\,;\,5,5]$: c'est sur cet intervalle que la courbe est au dessus de 2 (parties de la courbe et de l'axe des abscisses repassées en orange).
4. Tableau de variations de f :

x	-2		0		5		6
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

5. Le maximum de f est 3, son minimum est -1 (points bleus).
6. Tableau de signe de f :

x	-2		-1		2		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 57 On dispose d'une clôture de 100 mètres de long pour délimiter un terrain rectangulaire le long d'une rivière (la clôture est en pointillés — on ne met pas de clôture le long de la rivière). On note x et x' les longueurs des côtés du terrain.



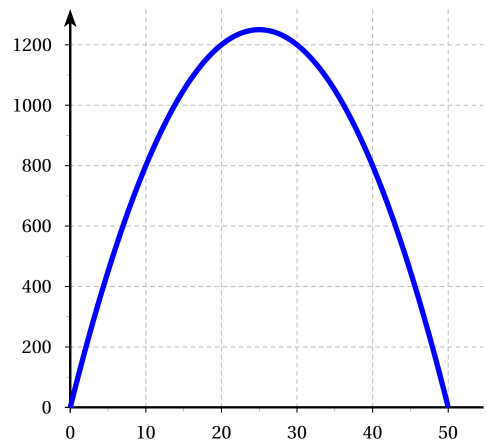
On voudrait délimiter le terrain le plus grand possible.

1. (a) x est une longueur, donc $x \geq 0$. Par ailleurs, la longueur x apparaît deux fois sur la figure, donc x ne peut pas dépasser 50 (car $2 \times 50 = 100$).
   Conclusion : on a l'encadrement
   $$0 \leq x \leq 50.$$
   (b) Le périmètre, 100 m, s'obtient en faisant le calcul
   $$x + x + x',$$
   donc
   $$2x + x' = 100\,;$$
   et donc
   $$x' = 100 - 2x.$$
   (c) L'aire du terrain est
   $$\begin{aligned} x \times x' &= x \times (100 - 2x) && \text{(car } x' = 100 - 2x\text{)} \\ &= x \times 100 + x \times (-2x) && \text{(on développe)} \\ &= 100x - 2x^2. \end{aligned}$$

2. On définit à présent la fonction f sur $[0;50]$ par
$$f(x) = 100x - 2x^2.$$
Autrement dit, $f(x)$ donne l'aire du terrain pour une valeur donnée de x.
   (a) Tableau de valeurs :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	0	450	800	1050	1200	1250	1200	1050	800	450	0

   (b) Courbe représentative :



   (c) f atteint son maximum lorsque $x = 25$, donc la surface du terrain est maximale lorsque $x = 25$. Dans ce cas, $x' = 100 - 2 \times 25 = 50$. Autrement dit, le terrain de surface maximale mesure 50 m sur 25 m.

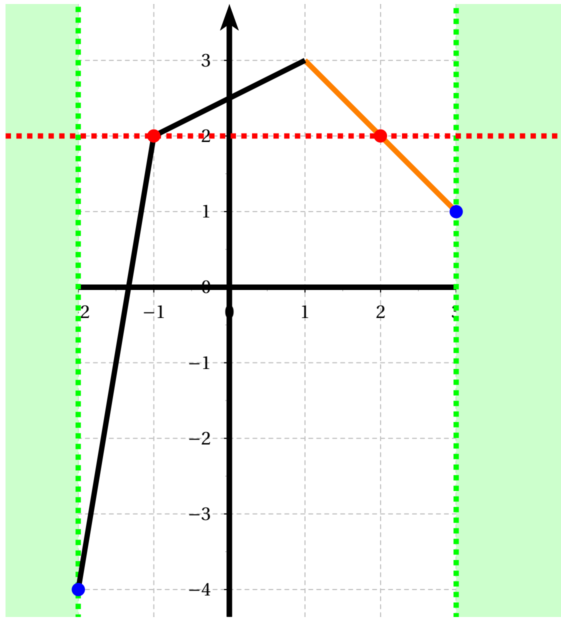
Exercice 58 On construit la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $[-2;3]$ et vérifiant les conditions suivantes :
- f est croissante sur l'intervalle $[-2;1]$;
- f est affine sur l'intervalle $[1;3]$;
- $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$;
- les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2.

Il y a plusieurs étapes :

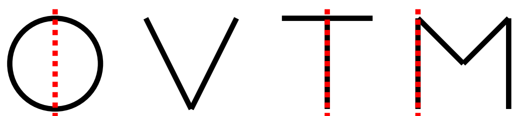
1. Pour commencer, on utilise l'ensemble de définition : on sait qu'il faut tracer la courbe sur l'intervalle $[-2;3]$ (zones vertes exclues).
2. Ensuite, on sait que $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$, donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(-2;-4)$ et $(3;1)$ (placés en bleu).
3. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2, donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(2;2)$ (placés en rouge). De plus, la courbe représentative ne coupe nulle part ailleurs la droite horizontale qui passe par l'ordonnée 2 (tracée également en rouge, en pointillés).
4. La fonction f est affine sur $[1;3]$, donc sa courbe représentative sur cet intervalle est un segment. On trace l'unique segment passant par les points déjà placés (en orange).
5. Enfin f est croissante sur l'intervalle $[-2;1]$, donc on trace une courbe « qui monte » sur cet intervalle (en noir). Il faut aussi bien sûr qu'elle passe par les points déjà placés.

   Remarque : Pour cette dernière étape, il y a plusieurs dessins possibles. Sur le graphique j'ai choisi de tracer deux segments par facilité (technique), mais vous pouvez faire une courbe à main levée qui ne soit pas droite.

La courbe finale est tracée en noir et en orange.



Exercice 59 Les courbes en forme de O, de T et de M ne sont pas les courbes représentatives de fonctions, puisqu'un nombre aurait plusieurs images (pointillés rouges).
En revanche, la lettre V n'a pas ce problème et représente bien la courbe d'une fonction (exemple : la courbe de la fonction définie par $f(x) = 2|x|$ pour $x \in [-1;1]$ est en forme de V).



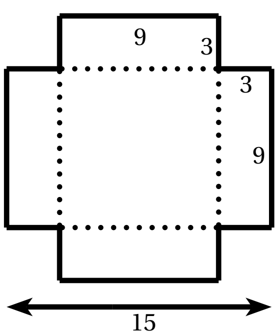
D'une manière générale, on reconnaît une fonction (et la courbe représentative d'une fonction) au fait que tout nombre réel a **au plus une** image (donc 0 ou 1 image).

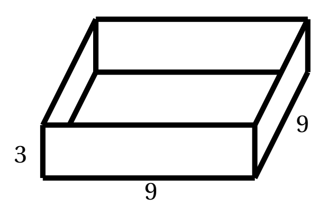
Exercice 60 Dans tout l'exercice, les longueurs sont exprimées en cm, les aires en cm² et les volumes en cm³.

1. (a) x est une longueur, donc $x \geq 0$. D'autre part, la longueur x apparaît deux fois, donc comme la plaque de métal a pour côté 15, x ne peut dépasser 7,5. Autrement dit :

$$x \text{ est compris entre } 0 \text{ et } 7,5.$$

   (b) Dans cette question, on prend $x = 3$. Il reste alors $15 - 2 \times 3 = 9$ cm pour le côté du carré central.



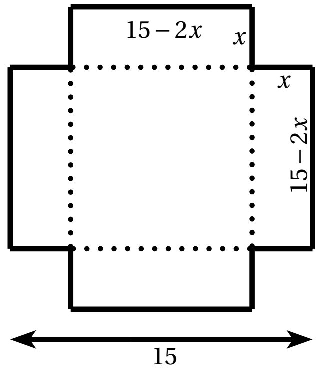


Le volume de la boîte est égal à

$$L \times \ell \times h = 9 \times 9 \times 3 = 243.$$

2. À partir de là, je regroupe la correction des sous-questions.

   Le carré du fond a pour côté $15 - x - x = 15 - 2x$, et la hauteur de la boîte est x.



Donc le volume de la boîte est

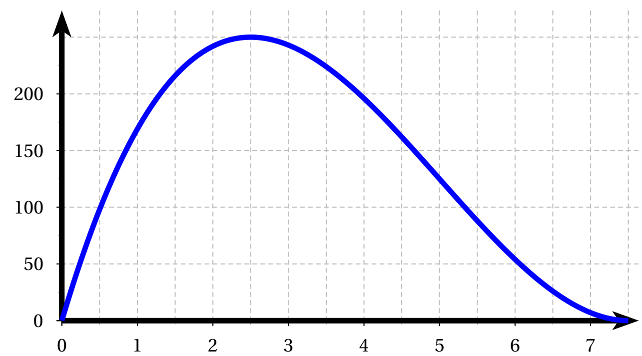
$$L \times \ell \times h = (15-2x) \times (15-2x) \times x.$$

On développe cette expression :

$$\begin{aligned} V(x) &= (15-2x) \times (15-2x) \times x \\ &= (15 \times 15 + 15 \times (-2x) + (-2x) \times 15 + (-2x) \times (-2x)) \times x \\ &= \left(225 - 30x - 30x + 4x^2\right) \times x \\ &= 225x - 30x^2 - 30x^2 + 4x^3 \\ &= 4x^3 - 60x^2 + 225x. \end{aligned}$$

On fait un tableau de valeurs pour V sur $[0;7,5]$ avec un pas de $0,5$, puis on construit sa courbe représentative.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
$V(x)$	0	98	169	216	242	250	243	224	196	162	125	88	54	26	7	0



Conclusion : d'après le graphique, le volume est maximal lorsque $x = 2,5$.

5 Probabilités

Exercice 61

1. Comme on ne remet pas le premier jeton avant de tirer le deuxième, il n'est pas possible d'obtenir un « double ». L'univers est donc

$$U = \{(1,2);(1,3);(2,1);(2,3);(3,1);(3,2)\}.$$

2. L'événement A : « un des jetons porte le n°1 » s'écrit sous forme ensembliste

$$A = \{(1,2);(1,3);(2,1);(3,1)\}$$

(on conserve tous les événements élémentaires où apparaît le chiffre 1).

Il y a 4 cas favorables à A, et 6 cas possibles dans l'univers, donc $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exercice 62 1. L'univers est

$$U = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Il comporte $4 \times 4 = 16$ éléments.

2. L'événement B : « au moins l'un des deux dés tombe sur 4 » s'écrit sous forme ensembliste

$$B = \{(1,4);(2,4);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}$$

(on conserve tous les événements élémentaires où apparaît au moins un 4).
Il y a 7 cas favorables à B.

3. D'après les questions précédentes, $P(B) = \frac{7}{16}$.

Exercice 63 1. L'univers est

$$U = \{RRR;RRB;RBR;RBB;BRR;BRB;BBR;BBB;VRR;VRB;VBR;VBB\}.$$

Il comporte $3 \times 2 \times 2 = 12$ éléments[6].

2. Le contraire de

A : « la tenue du footballeur comporte du bleu »

est

$\overline{A}$: « la tenue du footballeur **ne** comporte **pas** de bleu ».

Il s'écrit sous forme ensembliste

$$\overline{A} = \{RRR;VRR\}$$

– il n'y a que deux tenues qui n'ont pas de bleu !

On en déduit $P\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{12}$, puis

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = \frac{12}{12} - \frac{2}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 64 1. Il y a 6 choix possibles pour le vainqueur de la course, puis 5 pour le deuxième (puisqu'il est différent du vainqueur) ; et enfin 4 pour le troisième. Donc au total

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

podiums différents possibles.

2. Imaginons que les chevaux soient numérotés de 1 à 12 et que le classement de la course soit

1^er^ : Cheval n°7 2^e^ : Cheval n°4 3^e^ : Cheval n°10

Dans ce cas, le tiercé dans l'ordre est $(7,4,10)$; et les tiercés dans le désordre sont

$$(4,7,10)\ ;\ (4,10,7)\ ;(10,7,4)\ ;(10,4,7)\ ;(7,10,4).$$

Il y a 5 cas favorables à T, donc

$$P(T) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 65 1. On raisonne comme dans l'exercice précédent : il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

2. On va regarder l'événement contraire et répondre à la question : « Combien y a-t-il de podiums **ne** comportant **aucun** Américain ? »
Comme 5 des 8 participants ne sont pas Américains, le nombre de podiums sans aucun Américain est $5 \times 4 \times 3 = 60$.

On revient à la question initiale : il reste $336 - 60 = 276$ podiums avec au moins un Américain.

6. L'opération $3 \times 2 \times 2$ vient du fait qu'il y a trois couleurs de maillot, 2 couleurs de short et 2 couleurs de chaussettes. On pourrait représenter la situation avec un arbre pour être sûr de n'oublier aucune tenue.

Exercice 66 On regroupe la correction des deux questions. On utilise des symboles différents pour chacun des événements, mais un seul tableau suffit :

- ♡ A : « la somme des deux faces est égale à 5 » ;
- ♣ B : « exactement un des deux dés tombe sur 4 » ;
- ♢ C : « on tire deux numéros impairs ».

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4
1	♢		♢	♡♣
2			♡	♣
3	♢	♡	♢	♣
4	♡♣	♣	♣	

Il y a $4 \times 4 = 16$ cases dans le tableau. Il y a 4♡, 6♣ et 4♢ dans le tableau, donc

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \qquad P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 67 On place dans un tableau un symbole pour chaque événement :

- ♡ A : « la France joue » ;
- ♣ B : « le match oppose la France à l'Allemagne » ;
- ♠ C : « le match oppose deux pays du Benelux ».

	Fra	All	Ita	Bel	PB	Lux
Fra	■	♡♣	♡	♡	♡	♡
All	♡♣	■				
Ita	♡		■			
Bel	♡			■	♠	♠
PB	♡			♠	■	♠
Lux	♡			♠	♠	■

⚠Il faut exclure la diagonale, car une équipe ne peut jouer contre elle-même. Il n'y a donc que 30 cases.

D'après le tableau :

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

Les pays du Benelux sont la Belgique, les Pays-Bas (Nederland) et le Luxembourg, d'où les ♠ en bas à droite du tableau. On obtient $P(C) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Exercice 68 On place dans un tableau un symbole pour chaque événement :

- ♡ A : « les deux jetons choisis sont identiques » ;
- ♣ B : « exactement un des deux jetons représente un visage » ;

	☼	◐	♪	☺	☹
☼	♡			♣	♣
◐		♡		♣	♣
♪			♡	♣	♣
☺	♣	♣	♣	♡	
☹	♣	♣	♣		♡

On obtient :

$$P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \qquad P(B) = \frac{12}{25}.$$

Exercice 69 Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

On a colorié les cases de trois couleurs :

- en vert : le candidat connaît les deux questions ;
- en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
- en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

Hist / Géo	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

Conclusion : il y a $6 \times 5 = 30$ cases au total, 6 vertes et 15 oranges, donc :

- la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$;
- la probabilité que le candidat connaisse une seule des deux questions est $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Exercice 70 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectifs :

	VTT	~~VTT~~	Total
Escalade	3	7	10
~~Escalade~~	13	9	22
Total	16	16	32

Remarque : on sait qu'il y a autant d'élèves qui pratiquent le VTT que d'élèves qui ne le pratiquent pas, donc 16 élèves le pratiquent et 16 ne le pratiquent pas.

2. Par lecture du tableau : $P(A) = \frac{3}{32}$ et $P(B) = \frac{9}{32}$.

Le calcul du nombre de cas favorables à C est moins évident et peut être mené de plusieurs façons différentes. Par exemple :

- ajouter ceux qui font du VTT à ceux qui font de l'escalade, puis retrancher les élèves qui pratiquent les deux sports (sinon ils sont comptés deux fois) : $16 + 10 - 3 = 23$.
- ajouter ceux qui ne font que du VTT, ceux qui ne font que de l'escalade, et ceux qui pratiquent les deux sports : $13+7+3 = 23$.
- remarquer que C est le contraire de B et donc faire le calcul : $32 - 9 = 23$.
- etc.

Dans tous les cas on obtient $P(C) = \frac{23}{32}$.

Exercice 71 1. Pour compléter le tableau, on calcule :

- 5% de 10 000 valent 500 ;
- $10000 - 500 = 9500$;
- 4% de 9 500 valent 380 ;
- on complète le reste du tableau avec des additions/soustractions.

	Animaux sains	Animaux malades	Total
Test positif	380	500	880
Test négatif	9 120	0	9 120
Total	9 500	500	10 000

2. (a) $P(M) = \dfrac{500}{10000} = 0,05$ (c'est le 5 % déjà donné par l'énoncé).
$P(T) = \dfrac{880}{10000} = 0,088$.

(b) 500 des 880 animaux ayant un test positif sont malades, donc la probabilité qu'un animal ayant un test positif soit malade est $\frac{500}{880} \approx 57\%$.

(c) Tous les animaux malades ont un test positif, donc la probabilité qu'un animal malade ait un test positif est 1.

Exercice 72 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectifs :

	Abonnés au soir	Pas abonnés au soir	Total
Abonnés au matin	50	20	70
Pas abonnés au matin	50	160	210
Total	100	180	280

2. (a) $P(S) = \frac{100}{280}$ $\quad P\left(\overline{M}\right) = \frac{210}{280}$.

   (b) La probabilité que le pensionnaire soit abonné aux deux journaux est

$$P(S \cap M) = \frac{50}{280}.$$

   (c) On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. La probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* est $\frac{50}{70}$.

Exercice 73 1. Les nombres pairs sont 2, 4, 6, ..., 100. Il y en a 50, donc

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0,5.$$

Les multiples de 5 sont

$$5 = 5 \times 1,\ 10 = 5 \times 2,\ 15 = 5 \times 3,\ \cdots,\ 100 = 5 \times 20.$$

Il y en a 20, donc

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

2. L'événement $A \cap B$ s'écrit « le nombre est pair et multiple de 5 », ou de façon plus simple (et plus explicite) « le nombre est multiple de 10 ».
3. Les multiples de 10 sont 10, 20, 30, ..., 100. Il y en a 10, donc

$$P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

D'après une formule du cours :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6.$$

Exercice 74 1. L'événement $A \cup B$, s'écrit « au moins l'un des deux feux est vert ». Cet événement se produit à coup sûr, puisque les deux feux ne sont jamais tous les deux rouges en même temps (cf énoncé). On a donc

$$P(A \cup B) = 1.$$

2. L'événement « Pierre a les deux feux verts » s'écrit $A \cap B$, donc d'après une formule du cours, sa probabilité est :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,8 + 0,5 - 1 = 0,3.$$

Exercice 75 1. On suppose que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cup B) = 0,9$.

   (a) D'après une formule du cours,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,6 - 0,9 = 0,1.$$

   (b) D'un côté $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$; de l'autre $P(A \cap B) = 0,1$.
   Conclusion : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, donc A et B ne sont pas indépendants.

2. (a) L'événement $A \cap B$ s'écrit « la carte est un roi rouge ». Il y a deux rois rouges dans le jeu, donc

$$P(A \cap B) = \frac{2}{32} = 0,0625.$$

   (b) Il y a 16 cartes rouges dans le jeu, donc $P(A) = \frac{16}{32} = 0,5$.
   Il y a 4 rois dans le jeu, donc $P(B) = \frac{4}{32} = 0,125$.
   $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,125 = 0,0625 = P(A \cap B)$, donc A et B sont indépendants.

   Remarque : Le mot « indépendants » est conforme à l'idée intuitive que l'on s'en fait : deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur celle de l'autre. Dans l'exemple de la question 2, si vous savez que la carte est rouge, cela ne change pas la probabilité que ce soit un roi ; et réciproquement, si vous savez que c'est un roi, vous n'en tirez aucune information sur sa couleur.

3. Dans cette question, on suppose que $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,7$; et que les événements A et B sont indépendants.

   D'après une formule du cours et la propriété d'indépendance :

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) && \text{(on utilise l'indépendance)} \\
0,7 &= 0,4 + P(B) - 0,4 \times P(B) \\
0,7 &= 0,4 + x - 0,4x && \text{(on pose } x = P(B)\text{)} \\
0,7 &= 0,4 + 0,6x \\
0,7 - 0,4 &= \cancel{0,4} + 0,6x - \cancel{0,4} && \text{(on résout l'équation)} \\
\frac{0,3}{0,6} &= \frac{\cancel{0,6}x}{\cancel{0,6}} \\
0,5 &= x.
\end{aligned}$$

   Conclusion : $P(B) = 0,5$.

15 Fractions et manipulation de formules

Exercice 174

1. $A = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$
3. $C = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$
4. $D = \frac{4}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{4\times5}{15\times6} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$
5. $E = \frac{5}{6} \times 4 = \frac{5\times4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$
6. $F = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times3} = \frac{4}{9}$
7. $G = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{4\times3}{5\times2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$
8. $H = 3 \div \frac{15}{4} = 3 \times \frac{4}{15} = \frac{3\times4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
9. $I = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \times 3 = \left(\frac{3}{12} - \frac{2}{12}\right) \times 3 = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
10. $J = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2\times4}{3\times5} = \frac{5}{15} + \frac{8}{15} = \frac{13}{15}$
11. $K = \frac{35}{56} \times \frac{72}{45} = \frac{35\times72}{56\times45} = \frac{5\times7\times8\times9}{7\times8\times5\times9} = 1$ (tout se simplifie)
12. $L = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{2}{7}}{\frac{4}{3} \times \frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{28}{21} - \frac{6}{21}}{\frac{4\times2}{3\times7}} = \dfrac{\frac{22}{21}}{\frac{8}{21}} = \frac{22}{\cancel{21}} \times \frac{\cancel{21}}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$
13. $M = \dfrac{2 - \frac{10}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{7}} = \dfrac{\frac{2}{1} - \frac{10}{7}}{\frac{7}{21} + \frac{15}{21}} = \dfrac{\frac{14}{7} - \frac{10}{7}}{\frac{22}{21}} = \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{22}{21}} = \frac{4}{7} \times \frac{21}{22} = \frac{4\times3\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times22} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$
14. $N = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{1\times1\times3}{2\times2\times2} = \frac{3}{8}$
15. $O = \frac{5}{7} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{5\times2\times3\times7}{7\times9\times5\times4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
16. $P = \frac{2}{24} + \frac{5}{2} - \frac{50}{60} = \frac{1}{12} + \frac{5}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{12} + \frac{30}{12} - \frac{10}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$
17. $Q = \dfrac{\frac{5}{6} + \frac{9}{12}}{\frac{3}{4} + \frac{10}{12}} = \dfrac{\frac{10}{12} + \frac{9}{12}}{\frac{9}{12} + \frac{10}{12}} = \dfrac{\frac{19}{12}}{\frac{19}{12}} = 1$
18. $R = \frac{11}{6} \times \frac{14}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{11\times14\times3\times6\times5}{6\times3\times5\times7\times11} = \frac{14}{7} = 2$

Exercice 175 On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1\times60}{2\times60} + \frac{1\times30}{4\times30} + \frac{1\times20}{6\times20} + \frac{1\times15}{8\times15} + \frac{1\times12}{10\times12} + \frac{1\times10}{12\times10} \\
&= \frac{60}{120} + \frac{30}{120} + \frac{20}{120} + \frac{15}{120} + \frac{12}{120} + \frac{10}{120} \\
&= \frac{60+30+20+15+12+10}{120} = \frac{147}{20}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir $1 = \frac{120}{120}$, il y a $\frac{27}{120}$ « en trop », c'est-à-dire $\frac{15}{120} + \frac{12}{120}$. Il faut donc enlever les termes correspondants :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{60}{120} & + & \frac{30}{120} & + & \frac{20}{120} & + & \xcancel{\frac{15}{120}} & + & \xcancel{\frac{12}{120}} & + & \frac{10}{120} & = 1 \\
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{6} & + & \xcancel{\frac{1}{8}} & + & \xcancel{\frac{1}{10}} & + & \frac{1}{12} & = 1.
\end{array}$$

Exercice 176

1. On écrit comme somme de deux fractions égyptiennes :

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

2. On cherche l'entier n tel que

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Cette égalité se réécrit

$$\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{1\times 5}{3\times 5}+\frac{1}{n},$$

soit

$$\frac{6}{15}=\frac{5}{15}+\frac{1}{n}.$$

Il est clair que $n=15$ convient, et que c'est le seul nombre qui convienne.

3. (a) On a intérêt à « partir du membre de droite » : pour tout entier a supérieur à 1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)} &= \frac{a\times 1}{a\times(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)} && \text{(on réduit au même dénominateur)}\\ &= \frac{a}{a(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)}\\ &= \frac{\cancel{a+1}}{a(\cancel{a+1})} && \text{(on simplifie)}\\ &= \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

C'est bien l'égalité attendue.

(b) On utilise la question précédente avec $a=6$:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6(6+1)}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42} \qquad \text{(écriture de } \frac{1}{6} \text{ comme somme de deux fractions égyptiennes).}$$

Exercice 177 La moyenne harmonique de deux nombres strictement positifs a et b est le nombre h défini par :

$$h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

1. (a) La moyenne harmonique de 2 et 6 est

$$\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{\frac{4}{6}}=2\times\frac{6}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

(b) La moyenne harmonique de 4 et 16 est

$$\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{2}{\frac{4}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{2}{\frac{5}{16}}=2\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}=6,4.$$

2. Un cycliste monte une côte de 7 km à la vitesse moyenne de 14 km/h. Arrivé en haut, il fait demi-tour et redescend la côte à la vitesse moyenne de 35 km/h.

(a) On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en h et en km) :

temps (en h)	1	?
distance (en km)	14	7

temps (en h)	1	?
distance (en km)	35	7

Le cycliste met $\frac{1\times 7}{14}=\frac{\cancel{7}}{2\times\cancel{7}}=\frac{1}{2}=0,5$ h pour monter la côte, puis $\frac{1\times 7}{35}=\frac{\cancel{7}}{5\times\cancel{7}}=\frac{1}{5}=0,2$ h pour la descendre.

(b) Au total, le cycliste a parcouru $7+7=14$ km en $0,5+0,2=0,7$ h. On calcule sa vitesse moyenne :

temps (en h)	0,7	1
distance (en km)	14	?

La distance parcourue par le cycliste en 1 h est $\frac{1\times 14}{0,7}=\frac{140}{7}=20$ km, donc sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est de 20 km/h.

(c) Vérifions que la moyenne harmonique de 14 et 35 est égale à 20 :

$$\frac{2}{\frac{1}{14}+\frac{1}{35}}=\frac{2}{\frac{5}{70}+\frac{2}{70}}=\frac{2}{\frac{7}{70}}=\frac{2}{\frac{1}{10}}=2\times\frac{10}{1}=20.$$

3. On note d la longueur de la côte, v_1 la vitesse du cycliste en montée, v_2 sa vitesse en descente.

   Grâce à la formule $t = \frac{d}{v}$, on voit que :
   - le temps de montée est $t_1 = \frac{d}{v_1}$;
   - le temps de descente est $t_2 = \frac{d}{v_2}$.

   Donc au total, le cycliste a parcouru la distance $D = d + d = 2d$, en un temps $T = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$. Sa vitesse moyenne est donc

$$V = \frac{D}{T} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2\cancel{d}}{\cancel{d}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

   Il s'agit bien de la moyenne harmonique de v_1 et v_2.

   Remarque : Une erreur fréquente est de croire que si on monte à la vitesse v_1 et que l'on redescend à la vitesse v_2, alors la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est $\frac{v_1+v_2}{2}$. C'est la formule de la moyenne que vous utilisez habituellement (on l'appelle « moyenne arithmétique » de v_1 et v_2), mais elle n'est pas adaptée ici. C'est facile à comprendre intuitivement : comme on passe généralement plus de temps à monter, la vitesse en montée a plus d'importance que la vitesse en descente et la moyenne arithmétique (qui attribue une importance égale à v_1 et v_2) ne convient pas.

Exercice 178 L'idée consiste à « partir d'en bas à droite », puis à « remonter » dans la fraction. Par exemple, dans $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$, le premier calcul à effectuer est le $2 + \frac{1}{2}$ tout en bas à droite.

Par ailleurs, on fera bien attention d'écrire les barres de fractions sur toute la largeur nécessaire, sans oublier aucun terme de l'expression. Par exemple, pour commencer le premier calcul, il faut obligatoirement écrire la grosse expression $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$ en entier – sinon c'est faux !

Enfin, il est agréable de remarquer que $\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$: pour inverser une fraction, il suffit d'intervertir le numérateur et le dénominateur. La situation se présentera constamment dans les calculs ci-dessous.

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{10}{5}+\frac{2}{5}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{5}}} = 1 + \frac{1}{\frac{24}{12}+\frac{5}{12}} = 1 + \frac{1}{\frac{29}{12}} = \frac{29}{29} + \frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

Remarques :
- Il y a un lien entre le premier calcul et la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., dont chaque terme s'obtient en faisant la somme des deux précédents : $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, $8+5=13$, etc.
- On pourrait poursuivre la fraction jusqu'à l'infini : $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}$. Plus on avance, plus on se rapproche du nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.
- On pourrait aussi poursuivre la deuxième fraction jusqu'à l'infini : $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\cdots}}}}$. Dans ce cas, on se rapproche de $\sqrt{2} \approx 1,414$.
- Ces « fractions infinies » sont étudiées par les mathématiciens depuis longtemps ; leur nom officiel est « fractions continues ».

Exercice 179 1. Pour « isoler » d, on part de l'égalité $v = \frac{d}{t}$, dont on multiplie les deux membres par t :

$$v \times t = \frac{d}{\cancel{t}} \times \cancel{t}.$$

Les t se simplifient dans le membre de droite : on obtient $v \times t = d$.

Pour « isoler » t, on repart de l'égalité $v \times t = d$, dont on divise les deux membres par v :

$$\frac{\cancel{v} \times t}{\cancel{v}} = \frac{d}{v}.$$

Conclusion : $\boxed{d = v \times t}$ $\boxed{t = \frac{d}{v}}$

2. On part de l'égalité $U = RI$, dont on divise les deux membres par R :

$$\frac{U}{R} = \frac{\cancel{R} \times I}{\cancel{R}}.$$

Conclusion : $\boxed{I = \frac{U}{R}}$

3. $P = UI$ et $U = RI$ donc $P = \underbrace{U}_{=RI} I = RI \times I = RI^2$

Conclusion : $\boxed{P = RI^2}$

Remarque : Les formules des questions 2 et 3 sont des formules sur les circuits électriques. U désigne la tension (en volts), I l'intensité (en ampères), R la résistance (en ohms) et P la puissance (en watts).

4. On part de l'égalité $v = \sqrt{2gh}$, dont on élève les deux membres au carré :

$$v^2 = \sqrt{2gh}^2$$
$$v^2 = 2gh$$

Puis on divise par $2g$:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\cancel{2g}h}{\cancel{2g}}.$$

Conclusion : $\boxed{h = \frac{v^2}{2g}}$

Remarque : Dans ces formules, v désigne la vitesse (en m/s) et h la distance parcourue (en m) par un objet en chute libre, en supposant qu'il n'est soumis qu'à son propre poids (on suppose en particulier qu'il n'y a pas de frottement). La constante g désigne l'accélération de la pesanteur sur la terre, elle vaut environ $9,8$.
Exemple : lorsqu'une personne chute d'une hauteur de 5 m, sa vitesse à l'impact est $v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \times 9,8 \times 5} \approx 9,9$ m/s, soit environ 35,6 km/h.

5. On part de l'égalité $E = mc^2$, et l'on divise d'abord par m :

$$\frac{E}{m} = \frac{\cancel{m}c^2}{\cancel{m}}.$$

On obtient $c^2 = \frac{E}{m}$, d'où $\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{m}}}$

Remarque : La relation $E = mc^2$ est due à Einstein. Je laisse aux amateurs de physique le plaisir de se renseigner à son sujet.

6 Équations de droites

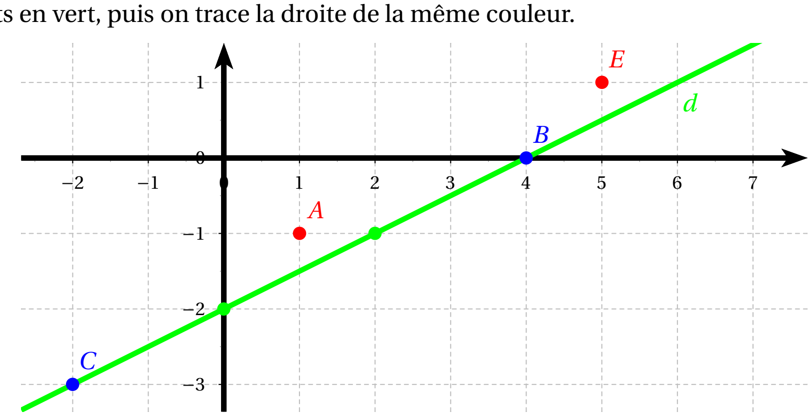
Exercice 76 1. On trace la droite $d : y = 0,5x - 2$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	-2	-1

$0,5 \times 0 - 2 = -2$

$0,5 \times 2 - 2 = -1$

On place les deux points en vert, puis on trace la droite de la même couleur.



2. D'après le cours, un point $M(x_M; y_M)$ appartient à d si, et seulement si, $y_M = 0{,}5 \times x_M - 2$. Par exemple, $B(\underset{x_B}{4}\,;\underset{y_B}{0})$ est sur d car $\underset{y_B}{0} = 0{,}5 \times \underset{x_B}{4} - 2$.
Faisons le calcul pour chacun des points proposés. On les place ensuite en bleu sur le graphique s'ils sont sur d, en rouge sinon.

Point $A(1;-1)$:	$-1 \neq 0{,}5 \times 1 - 2$	donc $A \notin d$
Point $B(4;0)$:	$0 = 0{,}5 \times 4 - 2$	donc $B \in d$
Point $C(-2;-3)$:	$-3 = 0{,}5 \times (-2) - 2$	donc $C \in d$
Point $E(5;1)$:	$1 \neq 0{,}5 \times 5 - 2$	donc $E \notin d$

3. Soit $\Delta : y = -x + 3$. Pour savoir si les points proposés sont sur Δ, on reprend la méthode de la question 2 :

Point $H(1;2)$:	$2 = -1 + 3$	donc $H \in \Delta$
Point $I(-2;6)$:	$6 \neq -(-2) + 3$	donc $I \notin \Delta$
Point $J(1000;-997)$:	$-997 = -1000 + 3$	donc $J \in \Delta$

Exercice 77 1. Soit $D : y = 2x + 1$.

(a)

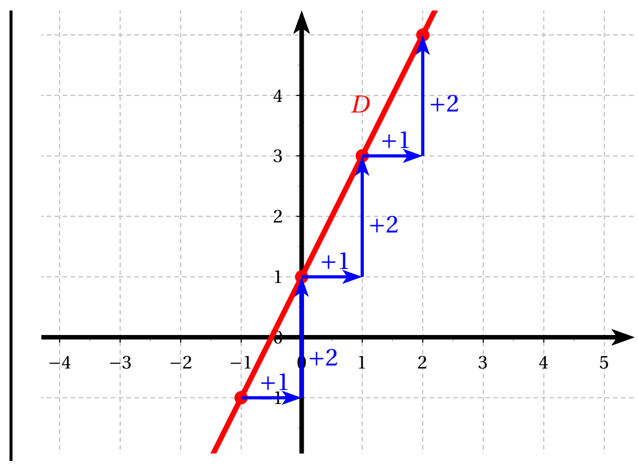
x	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5

$2 \times (-1) + 1 = -1$

$2 \times 0 + 1 = 1$

$2 \times 1 + 1 = 3$

$2 \times 2 + 1 = 5$



(b) Quand x augmente de 1, y augmente de 2.
En effet, dans le tableau précédent, les valeurs de x augmente de 1 en 1 ; tandis les valeurs de y augmentent de 2 en 2. On l'observe bien sur le graphique également.

Remarque : Cela vient du « 2 » de l'équation $y = 2x + 1$: si x augmente de 1, alors $2x$ augmente de 2. C'est la méthode que l'on utilisera pour vérifier graphiquement la valeur du coefficient directeur (cf les « +2 » sur le graphique) ; elle est généralisée dans la question suivante.

2. Soit Δ une droite non verticale quelconque, d'équation $y = ax + b$; et soient A et B deux points distincts de Δ.

(a) A est sur Δ, donc $y_A = a \times x_A + b$. De même, B est sur Δ, donc $y_B = a \times x_B + b$.

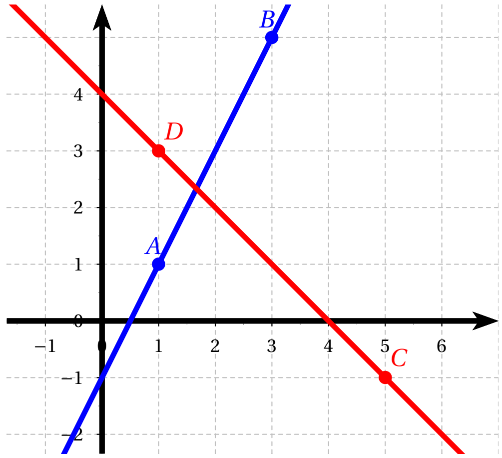
(b) On sait que $y_A = ax_A + b$ et que $y_B = ax_B + b$, donc

$$\begin{aligned} y_B - y_A &= (a \times x_B + b) - (a \times x_A + b) \\ &= a \times x_B + \cancel{b} - a \times x_A - \cancel{b} \\ &= a(x_B - x_A). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a\cancel{(x_B - x_A)}}{\cancel{x_B - x_A}} = a.$$

Exercice 78 1.



(a) $A(1;1)$, $B(3;5)$.

La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = 2x + b$.

La droite (AB) passe par $A(\underset{x}{1};\underset{y}{1})$, donc

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \times 1 + b \\ 1 &= 2 + b \\ 1 - 2 &= \cancel{2} + b - \cancel{2} \\ -1 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = 2x - 1$.

(b) $C(5;-1)$, $D(1;3)$.

La droite (CD) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3-(-1)}{1-5} = \frac{4}{-4} = -1.$$

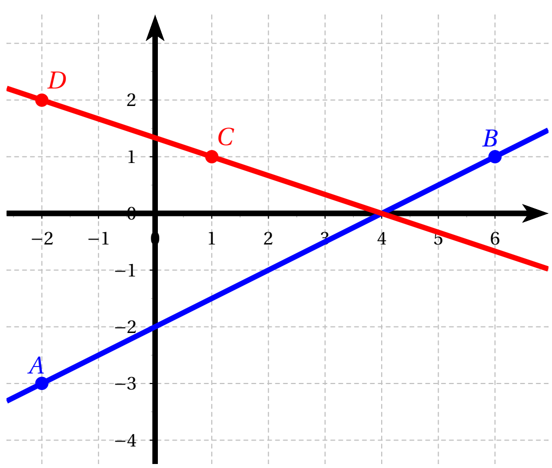
A ce stade, on sait que $(CD) : y = -1x + b$.

La droite (CD) passe par $C(\underset{x}{5};\underset{y}{-1})$, donc

$$\begin{aligned} -1 &= -1 \times 5 + b \\ -1 &= -5 + b \\ -1 + 5 &= \cancel{-5} + b + \cancel{5} \\ 4 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(CD) : y = -1x + 4$ – ou encore $(CD) : y = -x + 4$.

2.



(a) $A(-2;-3)$, $B(6;1)$.

La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-(-3)}{6-(-2)} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = 0,5x + b$.

La droite (AB) passe par $A(\underset{x}{-2};\underset{y}{-3})$, donc

$$\begin{aligned} -3 &= 0,5 \times (-2) + b \\ -3 &= -1 + b \\ -3 + 1 &= \cancel{-1} + b + \cancel{1} \\ -2 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = 0,5x - 2$.

(b) $C(1;1)$, $D(-2;2)$.

La droite (CD) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2-1}{-2-1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

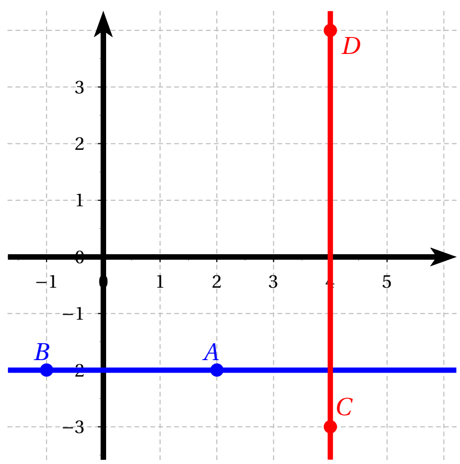
A ce stade, on sait que $(CD) : y = -\frac{1}{3}x + b$.

La droite (CD) passe par $C(\underset{x}{1};\underset{y}{1})$, donc

$$\begin{aligned}
1 &= -\frac{1}{3}\times 1 + b\\
1 &= -\frac{1}{3} + b\\
1+\frac{1}{3} &= \cancel{-\frac{1}{3}} + b + \cancel{\frac{1}{3}}\\
\frac{3}{3}+\frac{1}{3} &= b\\
\frac{4}{3} &= b
\end{aligned}$$

Conclusion : $(CD) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

3.



$A(2;-2)$, $B(-1;-2)$, $C(4;-3)$, $D(4;4)$.

La droite (AB) est horizontale, c'est l'ensemble des points d'ordonnée $y=-2$, donc son équation est $y=-2$.

$$(AB) : y = -2.$$

La droite (CD) est verticale, c'est l'ensemble des points d'abscisse $x=4$, donc son équation est $x=4$.

$$(CD) : x = 4.$$

Remarques : Dans le cas de droites horizontales ou verticales, on n'attend aucune justification de votre part, vous pouvez directement donner l'équation.

Exercice 79 1. On trace les droites $D_1 : y = x-4$ et $D_2 : y = -2x+3$ à partir de deux tableaux de valeurs :

Tracé de D_1.

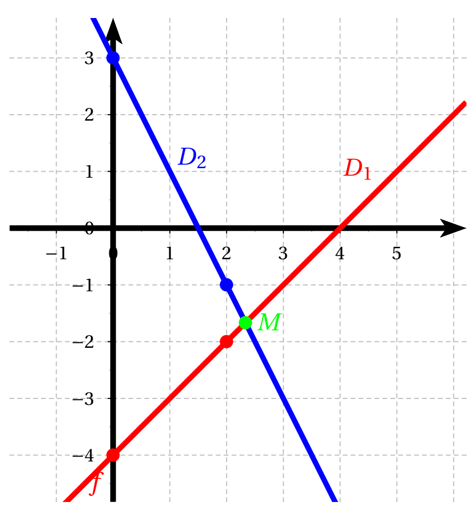
x	0	2
y	-4	-2

$$0-4=-4$$
$$2-4=-2$$

Tracé de D_2.

x	0	2
y	3	-1

$$-2\times 0+3=3$$
$$-2\times 2+3=-1$$



2. On note M le point d'intersection de $D_1 : y = x-4$ et $D_2 : y=-2x+3$. Pour déterminer ses coordonnées, on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
x-4 &= -2x+3\\
x-\cancel{4}+\cancel{4} &= -2x+3+4\\
x+2x &= \cancel{-2x}+7+\cancel{2x}\\
\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{7}{3}\\
x &= \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

On en déduit $y = x-4 = \frac{7}{3} - \frac{4}{1} = \frac{7}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{5}{3}$.
Conclusion : $M\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Exercice 80 1. On trace la droite $D : y = 2x+1$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	1	5

$$2\times 0+1 = 1$$
$$2\times 2+1 = 5$$

2. La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax+b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-2}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = -2x+b$.

La droite (AB) passe par $A(2;2)$, donc

$$\begin{aligned}
2 &= -2\times 2+b\\
2 &= -4+b\\
2+4 &= \cancel{-4}+b+\cancel{4}\\
6 &= b
\end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = -2x+6$.

3. On a $D : y = 2x+1$ et $(AB) : y = -2x+6$. Pour déterminer les coordonnées de M, on résout l'équation :

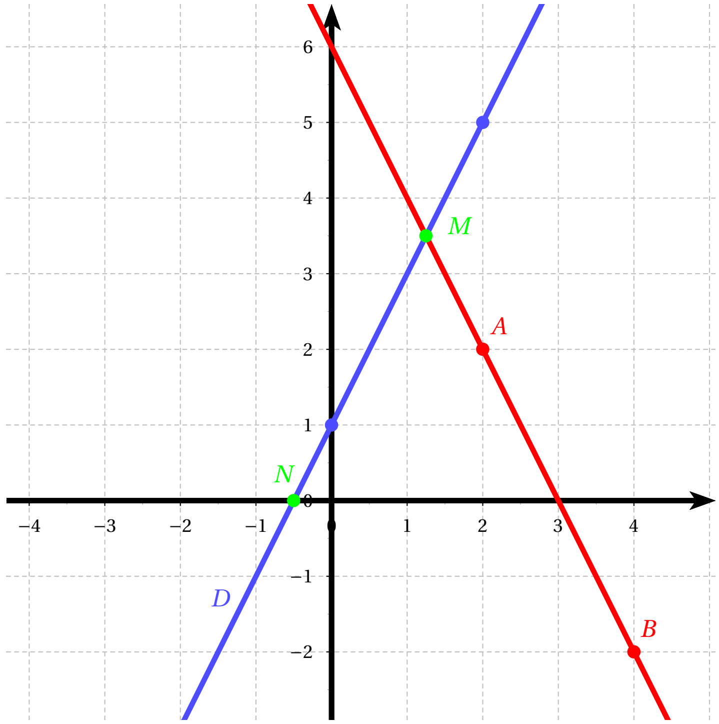
$$\begin{aligned}
2x+1 &= -2x+6\\
2x+\cancel{1}-\cancel{1} &= -2x+6-1\\
2x+2x &= \cancel{-2x}+5+\cancel{2x}\\
\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} &= \frac{5}{4}\\
x &= 1,25.
\end{aligned}$$

On en déduit $y = 2x+1 = 2\times 1,25+1 = 3,5$.
Conclusion : $M(1,25\ ;\ 3,5)$.

4. $D : y = 2x+1$ coupe l'axe des abscisses en N, donc l'ordonnée de N est 0.
Pour déterminer l'abscisse de N, on remplace donc y par 0 dans l'équation de D et on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
0 &= 2x+1\\
0-1 &= 2x+\cancel{1}-\cancel{1}\\
\frac{-1}{2} &= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\\
-0,5 &= x.
\end{aligned}$$

Conclusion : $N(-0,5\ ;\ 0)$.



Exercice 81 1. La figure est à la fin.

2. La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{1-(-2)} = \frac{2}{3}.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = \frac{2}{3}x + b$.

La droite (AB) passe par $A(-2;1)$, donc

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{3} \times (-2) + b \\ 1 &= -\frac{4}{3} + b \\ \frac{3}{3} + \frac{4}{3} &= \cancel{-\frac{4}{3}} + b + \cancel{\frac{4}{3}} \\ \frac{7}{3} &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

3. On trace la droite $\Delta : y = -2x + 3$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	3	-1

$$-2 \times 0 + 3 = 3$$
$$-2 \times 2 + 3 = -1$$

4. $(AB) : y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ coupe l'axe des abscisses en M, donc l'ordonnée de M est 0.
Pour déterminer l'abscisse de M, on remplace donc y par 0 dans l'équation de (AB) et on résout l'équation :

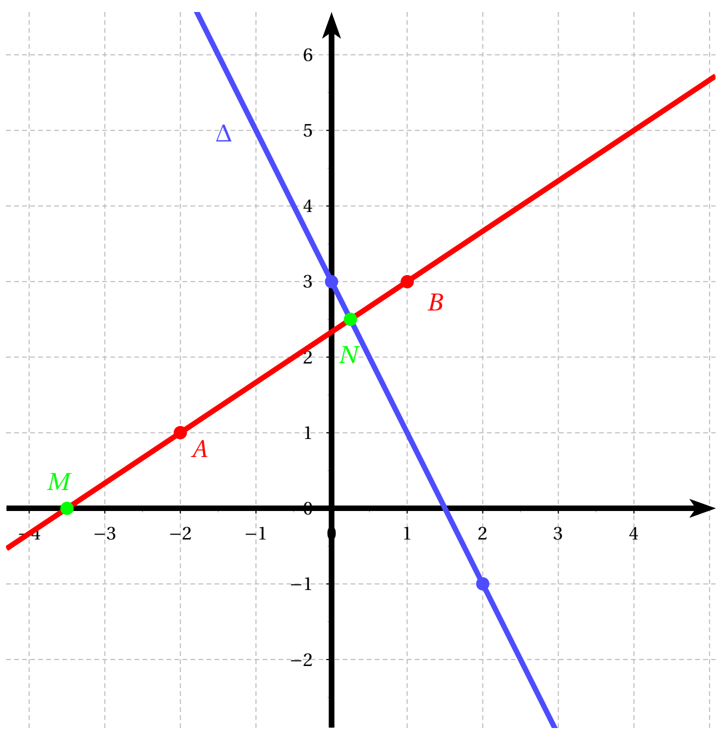
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \\
0 - \frac{7}{3} &= \frac{2}{3}x + \cancel{\frac{7}{3}} - \cancel{\frac{7}{3}} \\
\frac{-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} &= \frac{\cancel{\frac{2}{3}}x}{\cancel{\frac{2}{3}}} \\
-\frac{7}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} &= x \\
-3,5 &= x.
\end{aligned}$$

Conclusion : $M(-3,5\ ;\ 0)$.

5. On a $(AB) : y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ et $\Delta : y = -2x + 3$. Pour déterminer les coordonnées de N, on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} &= -2x + 3 \\
\frac{2}{3}x + \cancel{\frac{7}{3}} - \cancel{\frac{7}{3}} &= -2x + \frac{9}{3} - \frac{7}{3} \\
\frac{2}{3}x + 2x &= \cancel{-2x} + \frac{2}{3} + \cancel{2x} \\
\frac{2}{3}x + \frac{6}{3}x &= \frac{2}{3} \\
\frac{\cancel{\frac{8}{3}}x}{\cancel{\frac{8}{3}}} &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}} \\
x &= \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{8} \\
x &= 0,25
\end{aligned}$$

On en déduit $y = -2x + 3 = -2 \times 0,25 + 3 = 2,5$.
Conclusion : $N(0,25\ ;\ 2,5)$.



Exercice 82 1. Pour tracer les droites Δ et D, on fait un tableau de valeurs avec deux valeurs (je ne donne pas de détail).

2. On a $\Delta : y = x - 3$ et D : $y = -2x + 1$. Pour déterminer les coordonnées de M, on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
x - 3 &= -2x + 1 \\
x - \cancel{3} + \cancel{3} &= -2x + 1 + 3 \\
x + 2x &= \cancel{-2x} + 4 + \cancel{2x} \\
\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{4}{3} \\
x &= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

On en déduit $y = x - 3 = \frac{4}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{5}{3}$.
Conclusion : $M\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

3. La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{3 - (-2)} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = 0,8x + b$.

La droite (AB) passe par $A(-2; 1)$, donc

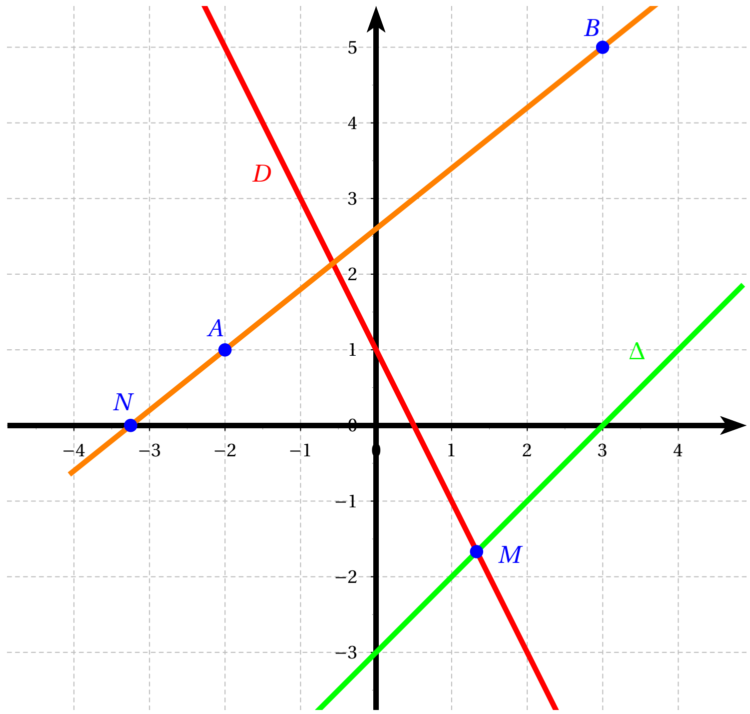
$$\begin{aligned}
1 &= 0,8 \times (-2) + b \\
1 &= -1,6 + b \\
1 + 1,6 &= \cancel{-1,6} + b + \cancel{1,6} \\
2,6 &= b
\end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = 0,8x + 2,6$.

4. $(AB) : y = 0,8x + 2,6$ coupe l'axe des abscisses en N, donc l'ordonnée de N est 0.
Pour déterminer l'abscisse de N, on remplace donc y par 0 dans l'équation de (AB) et on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
0 &= 0,8x + 2,6 \\
0 - 2,6 &= 0,8x + \cancel{2,6} - \cancel{2,6} \\
\frac{-2,6}{0,8} &= \frac{\cancel{0,8}x}{\cancel{0,8}} \\
-3,25 &= x.
\end{aligned}$$

Conclusion : $N(-3,25\ ;\ 0)$.



Exercice 83 1. (a) On trace la droite $d : y = 1,5x - 2,4$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	$-2,4$	$0,6$

$$1,5 \times 0 - 2,4 = -2,4$$
$$1,5 \times 2 - 2,4 = 0,6$$

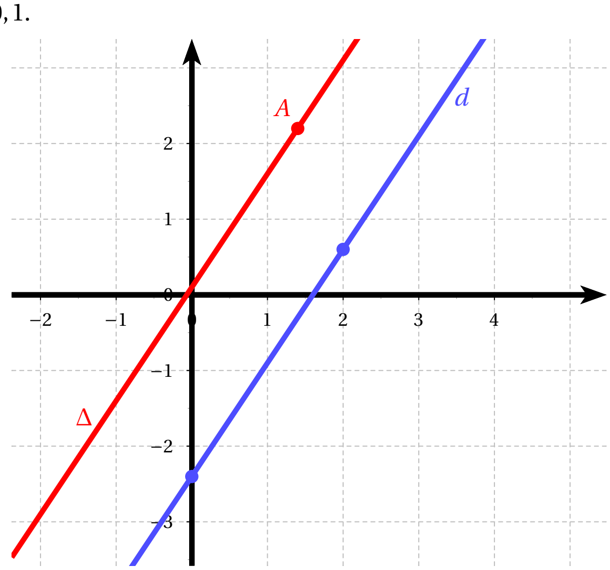
(b) La droite Δ est parallèle à d, donc elles ont le même coefficient directeur. Or le coefficient directeur de d est $1,5$ donc le coefficient directeur de Δ est $1,5$ également. On a donc

$$\Delta : y = 1,5x + b.$$

La droite Δ passe par $A(1,4\ ;\ 2,2)$, donc

$$\begin{aligned}
2,2 &= 1,5 \times 1,4 + b \\
2,2 &= 2,1 \\
2,2 - 2,1 &= \cancel{2,1} + b - \cancel{2,1} \\
0,1 &= b
\end{aligned}$$

Conclusion : $\Delta : y = 1,5x + 0,1$.



2. (a) On trace la droite $D : y = -1,5x - 1$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

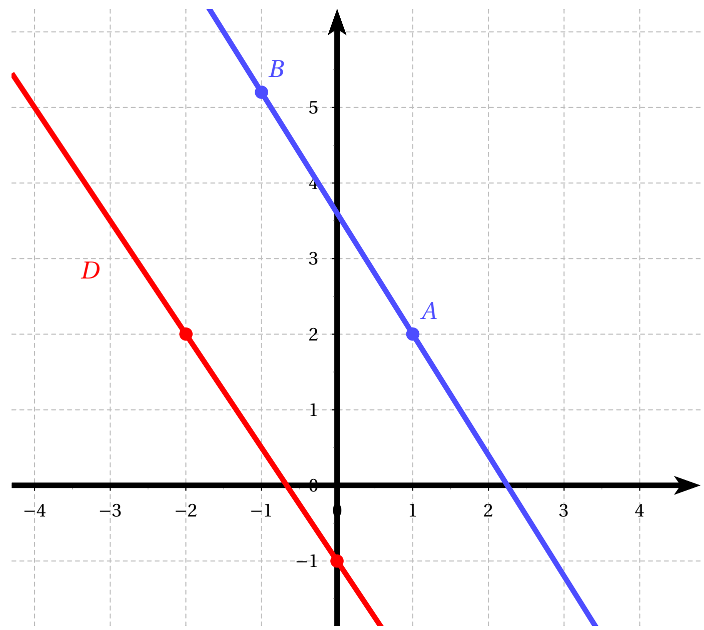
x	0	-2
y	-1	2

$$-1,5\times 0-1=-1$$
$$-1,5\times(-2)-1=2$$

(b) Le coefficient directeur de D est $-1,5$.
Le coefficient directeur de (AB) est

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5,2-2}{-1-1}=\frac{3,2}{-2}=-1,6.$$

Les droites D et (AB) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles ne sont pas parallèles.



Exercice 84 1. La droite (AB) a une équation de la forme $y=ax+b$. D'après le cours :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-(-2)}{5-1}=\frac{2}{4}=0,5.$$

A ce stade, on sait que $(AB): y=0,5x+b$.

La droite (AB) passe par $A(1;-2)$, donc

$$\begin{aligned}-2&=0,5\times 1+b\\ -2&=0,5+b\\ -2-0,5&=\cancel{0,5}+b-\cancel{0,5}\\ -2,5&=b\end{aligned}$$

Conclusion : $(AB): y=0,5x-2,5$.

2. On trace la droite $\Delta: y=-2x+5$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	5	1

$$-2\times 0+5=5$$
$$-2\times 2+5=1$$

3. On a $(AB): y=0,5x-2,5$ et $\Delta: y=-2x+5$. Pour déterminer les coordonnées de M, on résout l'équation :

$$\begin{aligned}0,5x-2,5&=-2x+5\\ 0,5x-\cancel{2,5}+\cancel{2,5}&=-2x+5+2,5\\ 0,5x+2x&=\cancel{-2x}+7,5+\cancel{2x}\\ \frac{\cancel{2,5}x}{\cancel{2,5}}&=\frac{7,5}{2,5}\\ x&=3.\end{aligned}$$

On en déduit $y = 0,5x - 2,5 = 0,5 \times 3 - 2,5 = 1,5 - 2,5 = -1$.
Conclusion : $M(3;-1)$.

4. d est parallèle à Δ, donc elles ont le même coefficient directeur (-2) ; on a donc $d : y = -2x + b$.

   Pour trouver b, on utilise le fait que d passe par $C(\underset{x}{-2};\underset{y}{3})$:

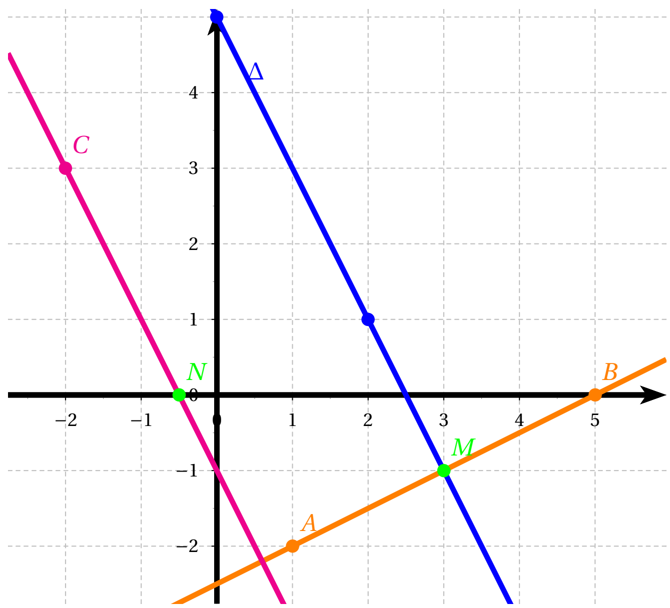
$$\begin{aligned} 3 &= -2 \times (-2) + b \\ 3 &= 4 + b \\ 3 - 4 &= \cancel{4} + b - \cancel{4} \\ -1 &= b \end{aligned}$$

   Conclusion : $d : y = -2x - 1$.

5. $d : y = -2x - 1$ coupe l'axe des abscisses en N, donc l'ordonnée de N est 0.
   Pour déterminer l'abscisse de N, on remplace donc y par 0 dans l'équation de d et on résout l'équation :

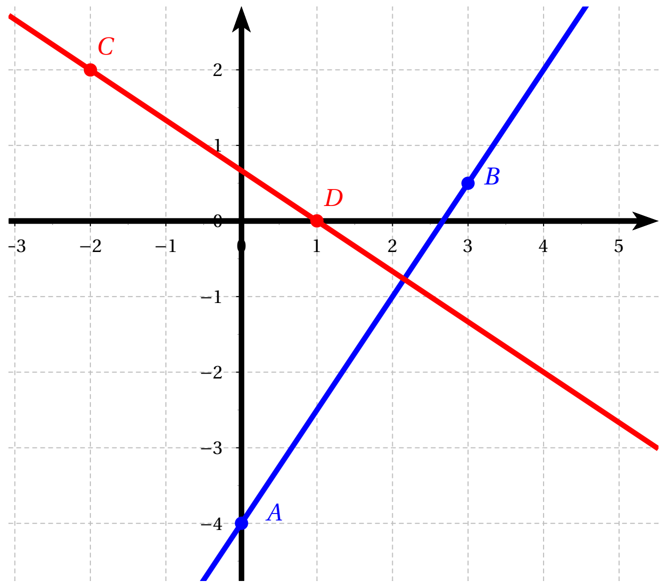
$$\begin{aligned} 0 &= -2x - 1 \\ 0 + 1 &= -2x - \cancel{1} + \cancel{1} \\ \frac{1}{-2} &= \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} \\ -0,5 &= x. \end{aligned}$$

   Conclusion : $N(-0,5\ ;\ 0)$.



Exercice 85 Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(0;-4)$, $B(3;0,5)$, $C(-2;2)$ et $D(1;0)$.



Le coefficient directeur de (AB) est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,5-(-4)}{3-0} = \frac{4,5}{3} = 1,5.$$

Le coefficient directeur de (CD) est

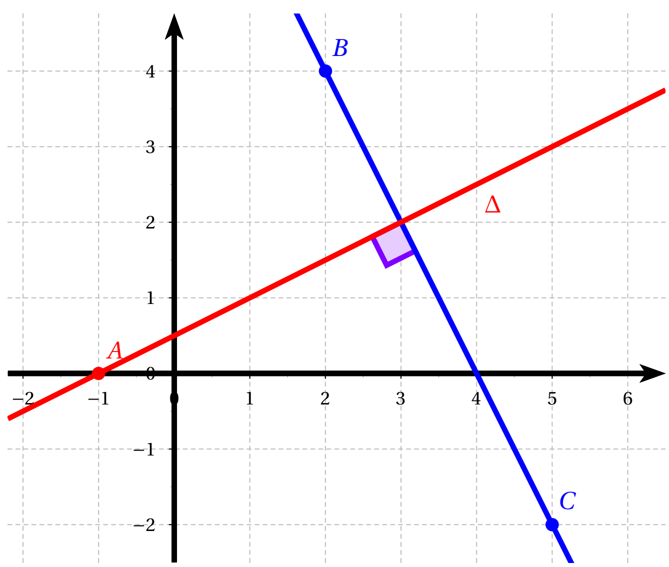
$$a' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0-2}{1-(-2)} = \frac{-2}{3}.$$

On calcule le produit :

$$a \times a' = 1,5 \times \frac{-2}{3} = -\frac{1,5\times 2}{3} = -\frac{3}{3} = -1.$$

D'après la propriété donnée avant l'énoncé, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

2. Soient $A(-1;0)$, $B(2;4)$, $C(5;-2)$; et Δ la perpendiculaire à (BC) passant par A.



Le coefficient directeur de (BC) est

$$a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2-4}{5-2} = \frac{-6}{3} = -2.$$

On note a' le coefficient directeur de Δ. Comme $(BC) \perp \Delta$, d'après la propriété donnée avant l'énoncé, $a \times a' = -1$, soit $(-2)\times a' = -1$. On a donc

$$\frac{\cancel{-2}a'}{\cancel{-2}} = \frac{-1}{-2} \qquad \text{et ainsi} \qquad a' = 0,5.$$

A ce stade, on sait que $\Delta : y = 0,5x + b$.

La droite Δ passe par $A(-1;0)$, donc

$$\begin{aligned} 0 &= 0,5\times(-1)+b \\ 0 &= -0,5+b \\ 0+0,5 &= \cancel{-0,5}+b+\cancel{0,5} \\ 0,5 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $\Delta : y = 0,5x+0,5$.

Exercice 86 Le tableau suivant donne la part (en pourcentage) des voitures diesel dans les ventes de voitures neuves, en France, entre 2012 et 2017.

Rang de l'année	0	1	2	3	4	5
% des voitures diesel	73	67	64	58	52	48

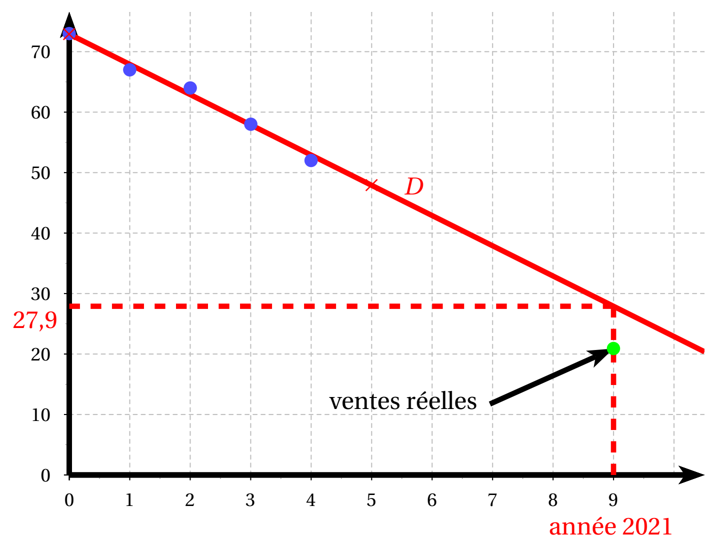
1. On place les points (en bleu) dans un repère comme s'il s'agissait de tracer la courbe représentative d'une fonction. On ne les relie pas.
2. Les points placés à la question précédente sont « presque alignés ». La calculatrice permet d'obtenir l'équation de la droite « la plus proche » de ces points, qu'on appelle droite d'ajustement (ou droite de régression).

   Avec une Calculatrice collège, la procédure est la suivante :
   - touche MENU – on choisit 2 :Statistiques puis 2 :y=ax+b
   - on entre les valeurs du tableau en colonne
   - touche OPTN – on choisit 4 :Calc régression – on lit les valeurs de a et b

   On obtient a $\approx -5,0$ et b $\approx 72,9$. La droite d'ajustement D a donc pour équation $y = -5x+72,9$.
3. On trace la droite $D : y = -5x+72,9$ (en rouge) à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	5
y	72,9	47,9

$$-5\times 0+72,9 = 72,9$$
$$-5\times 5+72,9 = 47,9$$



La droite est toute proche des points bleus. Elle « modélise » l'évolution de la part des voitures diesel à partir de 2012.

Si cet ajustement était fiable, en 2021 (année n°9), le pourcentage de diesels dans les ventes de voitures neuves devrait être approximativement égal à

$$-5\times 9+72,9 = 27,9$$

(voir pointillés rouges).

En réalité, les diesels ne représentaient plus que 20,9 % des ventes en 2021, ce qui montre que l'ajustement proposé dans l'énoncé n'est plus valable – c'est à partir de 2018 que les ventes commencent à « décrocher ».

Exercice 87 Au 18° siècle, l'étude des distances entre les planètes et le soleil a conduit les astronomes Titius et Bode à imaginer l'existence d'une planète encore inconnue, Cérès, entre Mars et Jupiter.
Le graphique ci-dessous donne les distances des planètes au soleil, en unités astronomiques (1 UA = distance terre-soleil).

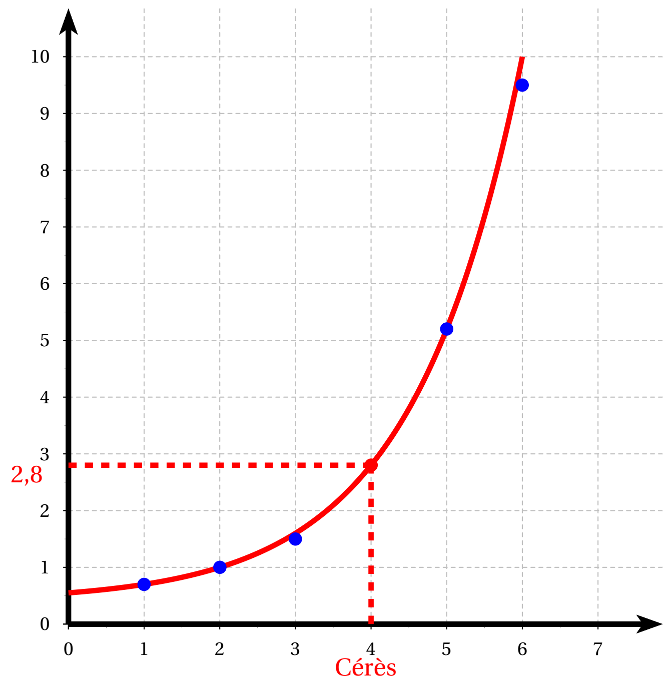
Nom	Vénus	Terre	Mars	Cérès	Jup.	Satur.
Rang	1	2	3	4	5	6
Distance	0,7	1	1,5	?	5,2	9,5

1. On construit le nuage de points associé à cette série comme dans l'exercice précédent. On laisse vide l'emplacement pour la planète n°4.
2. Pour tracer la courbe de la fonction, on fait un tableau de valeurs sur $[0;6]$ avec un pas de 1.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$0,7$	1	$1,6$	$2,8$	$5,2$	6	10

Détail de deux calculs :
- $f(0) = 0,4 + 0,15 \times 2^0 = 0,4 + 0,15 \times 1 = 0,4 + 0,15 = 0,55$ $\quad$ (⚠$2^0 = 1$).
- $f(3) = 0,4 + 0,15 \times 2^3 = 0,4 + 0,15 \times 8 = 0,4 + 1,2 = 1,6$.

On trace la courbe en rouge dans le repère ci-dessous.



3. Suivant l'ajustement par la fonction f, la planète n°4 Cérès devrait se trouver à 2,8 U.A. du soleil.

Remarque : Il existe bel et bien une planète naine Cérès, dans la ceinture d'astéroïde, entre Mars et Jupiter. Le modèle de l'énoncé a également participé à la découverte d'Uranus. Pourtant, on considère aujourd'hui que ce modèle n'est pas fiable et que son efficacité à détecter des planètes relève d'un « coup de chance » formidable (le terme savant est « sérendipité »). On renvoie le lecteur à l'article Wikipédia sur la loi de Titius-Bode pour plus de détails.

7 Pourcentages, taux d'évolution

Exercice 88 1. On complète un tableau de proportionnalité :

Élèves	30	?
Pourcentage	100	80

Il y a $30 \times 80 \div 100 = 24$ filles dans la classe.

2. On complète un tableau de proportionnalité :

Marins	1 760	1 046
Pourcentage	100	?

$1\,046 \times 100 \div 1\,760 \approx 59,43$, donc environ 59,43 % des marins sont tombés malades.

N.B. On fait le calcul et, seulement après, on écrit la réponse avec le symbole %. Rappelons à cette occasion la signification de 59,43 % :

$$59,43\ \% = \frac{59,43}{100} = 0,5943.$$

Donc dire que 59,43 % des marins sont tombés malades, c'est dire que la proportion de malades est $\dfrac{59,43}{100}$.

3. Le fait que la bouteille soit titrée à 12 % vol. signifie qu'elle contient 12 % d'alcool pur. On complète donc un tableau de proportionnalité :

Volume (en mL)	500	?
Pourcentage	100	12

La bouteille contient $500 \times 12 \div 100 = 60$ mL d'alcool pur.

4. On complète un tableau de proportionnalité :

Votes	16 161	8 892
Pourcentage	100	?

$8\,892 \times 100 \div 16\,161 \approx 55,02$, donc environ 55,02 % des électeurs ont voté pour E. Macron.

5. Sur 100 personnes de l'entreprise, il y a 56 hommes.
25 % d'entre eux fument, ce qui représente

$$25 \times 56 \div 100 = 14 \text{ personnes}$$

(on peut bien sûr faire un tableau de proportionnalité pour obtenir cette réponse).
Conclusion : les hommes fumeurs représentent 14 % du personnel de l'entreprise.

Exercice 89 1. $100\ \% + 12,5\ \% = 112,5\ \% = \dfrac{112,5}{100} = 1{,}125$, donc pour augmenter un nombre de 12,5 %, il faut le multiplier par 1,125. On complète donc le schéma :

$$\boxed{120} \xrightarrow{\times\ 1{,}125} \boxed{???}$$

inscrits décembre — inscrits janvier

??? $= 120 \times 1,125 = 135$, donc il y aura 135 inscrits en janvier.

2. Pour connaître le pourcentage d'augmentation, on complète le schéma :

$$\boxed{5\,812} \xrightarrow{\times\ ???} \boxed{6\,065}$$

logements 2007 — logements 2015

??? $= 6\,065 \div 5\,812 \approx 1,0435$.
Or $1,0435 = \dfrac{104,35}{100} = 104,35\ \% = 100\ \% + 4,35\ \%$, donc le nombre de logements a augmenté de 4,35 % environ. Autrement dit, le taux d'évolution du nombre de logements est $+4,35$ %.

N.B. Vous n'êtes pas obligés d'écrire le calcul final : vous pouvez passer directement de « 1,0435 » à la réponse « augmentation de 4,35 % ». Notez également qu'il faut prendre 4 chiffres après la virgule pour avoir une réponse finale arrondie à 0,01 % près.

3. On rappelle que la TVA (taxe sur la valeur ajoutée) est une taxe sur les produits dont le montant revient à l'État.
Dire qu'« il y a 20 % de TVA » signifie qu'un commerçant qui veut gagner 100 € avec la vente d'un article doit le mettre en vente à 120 € (il ajoute 20 % de la valeur, donc il multiplie par 1,20).
Sur l'article vendu 120 € en magasin, le commerçant gardera 100 € et devra donner 20 € à L'État.
Le prix TTC (toutes taxes comprises) est de 120 €, le prix HT (hors taxe) est de 100 € et le montant de la TVA est de 20 €.

Pour avoir le prix TTC dans notre exemple, il faut compléter le schéma :

$$\boxed{80} \xrightarrow{\times\ 1{,}20} \boxed{???}$$

prix HT — prix TTC

$??? = 80 \times 1,20 = 96$, donc le montant TTC est de 96 €.

Remarque : Le montant de la TVA est $96 - 80 = 16$ €.
Il ne faut pas confondre ce montant (16 €) et le taux de TVA (ici 20 %). Il y a une ambiguïté lorsqu'on parle de « TVA » sans préciser s'il s'agit d'un montant ou d'un taux.

Exercice 90 1. $100\ \% - 15\ \% = 85\ \% = \dfrac{85}{100} = 0,85$, donc pour diminuer un nombre de 15 %, il faut le multiplier par $0,85$. On complète donc le schéma :

$$\boxed{12\,000} \xrightarrow{\times\ 0{,}85} \boxed{???}$$

prix de départ — prix après remise

$??? = 12\,000 \times 0,85 = 10\,200$, donc le prix après remise est de 10 200 €.

2. Pour connaître le pourcentage de baisse, on complète le schéma :

$$\boxed{240} \xrightarrow{\times\ ???} \boxed{228}$$

émissions année 0 — émissions année 1

$??? = 228 \div 240 = 0,95$.
Or $0,95 = \frac{95}{100} = 95\ \%$, donc les émissions ont baissé de 5 %. Autrement dit, le taux d'évolution est -5 %.

⚠Ne pas oublier le « $-$ » dans -5 %.

3. $100\ \% - 25\ \% = 75\ \% = \frac{75}{100} = 0,75$, donc la baisse de 25 % équivaut à une multiplication par 0,75 et on peut utiliser le schéma :

$$\boxed{???} \xrightarrow{\times 0{,}75} \boxed{63}$$

prix initial — prix après remise

$??? = 63 \div 0,75 = 84$, donc le prix initial était de 84 €.

Exercice 91 Pour obtenir le prix TTC, on augmente le prix HT de 10 % ; autrement dit, on le multiplie par 1,10. On peut ainsi compléter le schéma :

$$\boxed{???} \xrightarrow{\times\ 1{,}10} \boxed{4{,}95}$$

prix HT — prix TTC

Conclusion : $??? = 4,95 \div 1,10 = 4,50$, donc le prix HT est de 4,50 € ; et le montant de la TVA (la somme qui revient à l'État) est

$$\text{montant TVA} = \text{montant TTC} - \text{montant HT} = 4,95 - 4,50 = 0,45 \text{ €}.$$

N.B. Il est totalement faux de prendre 10 % de 4,95 pour obtenir le montant de la TVA. Il faut d'abord se ramener au prix HT, puis prendre 10 % de ce prix HT.

Exercice 92 Le tableau ci-dessous traduit l'évolution du SMIC horaire brut en euro entre 2011 et 2014. Il indique également les taux d'évolution annuels.

Année	2011	2012	2013	2014
SMIC hor. brut	9	9,31	9,43	
Taux d'évolution				+1,06%

Pour compléter la première case à gauche, on complète le schéma :

$$\boxed{9} \xrightarrow{\times\ ???} \boxed{9{,}31}$$

SMIC 2011 SMIC 2012

??? $= 9{,}31 \div 9 \approx 1{,}0344 = 103{,}44$ %, ce qui traduit une augmentation de $3{,}44$ % environ.
Avec la même méthode, on complète la deuxième case. Enfin, pour la case en haut à droite, sachant que 100 % $+ 1{,}06$ % $= 101{,}06$ % $= 1{,}0106$, on utilise le schéma :

$$\boxed{9{,}43} \xrightarrow{\times\ 1{,}0106} \boxed{???}$$

SMIC 2013 SMIC 2014

On obtient finalement le tableau :

Année	2011	2012	2013	2014
SMIC hor. brut	9	9,31	9,43	9,53
Taux d'évolution		+3,44 %	+1,29 %	+1,06%

Exercice 93 En 2016, un article est affiché en magasin à 70 €. Il y a une hausse de 60 % des prix entre 2016 et 2017, puis une baisse de 10 % entre 2017 et 2018.

1. 100 % $+ 60$ % $= 160$ % $= 1{,}60$ et 100 % $- 10$ % $= 90$ % $= 0{,}90$, d'où le schéma :

$$\boxed{70} \xrightarrow{\times 1{,}60} \boxed{112} \xrightarrow{\times 0{,}90} \boxed{100{,}8}$$

prix 2016 prix 2017 prix 2018

N.B. On obtient les prix 2017 et 2018 en faisant les calculs :

$$70 \times 1{,}60 = 112,$$
$$112 \times 0{,}90 = 100{,}8.$$

2. Pour calculer le taux d'évolution global entre 2016 et 2018, on complète le schéma :

$$\boxed{70} \xrightarrow{\times\ ???} \boxed{100{,}8}$$

prix 2016 prix 2018

$100{,}8 \div 70 = 1{,}44 = 144$ %, donc le taux d'évolution des prix entre 2016 et 2018 est $+44$ %

N.B. On peut obtenir la réponse plus rapidement en faisant le calcul $1{,}60 \times 0{,}90 = 1{,}44$.

Exercice 94 1. Partons de la valeur 100 et faisons le schéma habituel, sachant qu'une hausse de 16 % revient à faire une multiplication par 1,16 :

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 1{,}16} \boxed{116} \xrightarrow{\times ???} \boxed{100}$$

Valeur initiale Après la hausse Retour à la valeur initiale

Pour déterminer le deuxième taux d'évolution, on calcule :

??? $= 100 \div 116 \approx 0{,}8621 = 86{,}21$ %.

Or 100 % $- 86{,}21$ % $= 13{,}79$ %, donc la hausse de 16 % est compensée par une baisse de 13,79 % environ.

2. On fait encore le même schéma, sachant que 100 % $- 36$ % $= 64$ % $= 0{,}64$:

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 0{,}64} \boxed{64} \xrightarrow{\times ???} \boxed{100}$$

Valeur initiale — Après la baisse — Retour à la valeur initiale

??? $= 100 \div 64 = 1{,}5625 = 156{,}25$ %, donc la baisse de 36 % est compensée par une hausse de 56,25 %.

3. • On cherche le taux réciproque de +60 %.
   100 % + 60 % = 160 % = 1,60, d'où le schéma :

   $$\boxed{100} \xrightarrow{\times 1{,}60} \boxed{160} \xrightarrow{\times ???} \boxed{100}$$

   Valeur initiale — Après la hausse — Retour à la valeur initiale

   ??? $= 100 \div 160 = 0{,}625 = 62{,}5$ %, et comme 100 % − 62,5 % = 37,5 %, le taux réciproque de +60 % est −37,5 %.

   • On cherche le taux réciproque de −15 %.

   100 % − 15 % = 85 % = 0,85, d'où le schéma :

   $$\boxed{100} \xrightarrow{\times 0{,}85} \boxed{85} \xrightarrow{\times ???} \boxed{100}$$

   Valeur initiale — Après la baisse — Retour à la valeur initiale

   ??? $= 100 \div 85 \approx 1{,}1765 = 117{,}65$ %, donc le taux réciproque de −15 % est +17,65 % environ.

   • On cherche le taux réciproque de −50 %.
   100 % − 50 % = 50 % = 0,50, d'où le schéma :

   $$\boxed{100} \xrightarrow{\times 0{,}50} \boxed{50} \xrightarrow{\times ???} \boxed{100}$$

   Valeur initiale — Après la baisse — Retour à la valeur initiale

   ??? $= 100 \div 50 = 2 = 200$ %. Or 200 % = 100 % + 100 %, donc le taux réciproque de −50 % est +100 %.
   Remarque : Augmenter un nombre de 100 % revient à le multiplier par 2.

Exercice 95 1. On part de la valeur 100 et on augmente 10 fois de suite de 5 % ; autrement dit, on multiplie 10 fois de suite par 1,05.

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 1{,}05} \boxed{105} \xrightarrow{\times 1{,}05} \boxed{110{,}25} \xrightarrow{\times 1{,}05} \boxed{\cdots}$$

Valeur initiale — Après la 1re hausse — Après la 2e hausse — ⋯

Le résultat après 10 hausses successives de 5 % est

$$100 \times \underbrace{1{,}05 \times 1{,}05 \times \cdots \times 1{,}05}_{\text{10 fois}} = 100 \times 1{,}05^{10} \approx 162{,}89.$$

Conclusion : dix augmentations successives de 5 % font une augmentation de 62,89 %.

2. Pour résoudre le problème, on part de la valeur 100 et on fait le schéma habituel, sachant qu'on multiplie deux fois de suite par un même nombre x inconnu (puisqu'on a deux fois le même pourcentage d'augmentation) :

   $$\boxed{100} \xrightarrow{\times x} \boxed{???} \xrightarrow{\times x} \boxed{144}$$

   Valeur initiale — Après la 1re hausse — Après la 2e hausse

   Deux multiplications par x font une multiplication par 1,44, donc

   $$x \times x = 1{,}44 \qquad x^2 = 1{,}44 \qquad x = \sqrt{1{,}44} = 1{,}20.$$

   Conclusion : à chaque étape on a multiplié par 1,20, donc on a augmenté de 20 %. Autrement dit, $t = 20$.

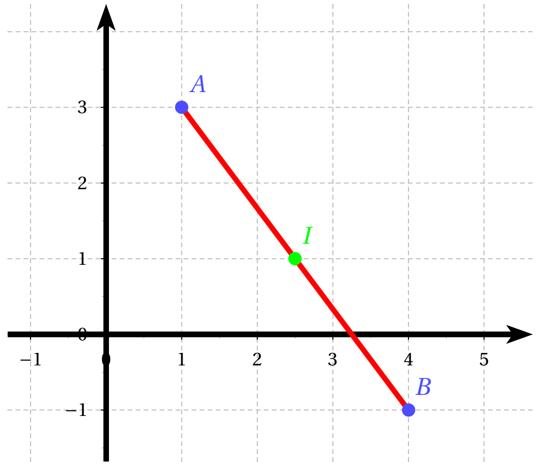
3. La technique est la même que dans la question précédente :

   $$\sqrt{1{,}26} \approx 1{,}1225,$$

   donc le taux d'évolution à chaque étape est 12,25 % environ. Autrement dit, $t = 12{,}25$.

8 Opérations sur les vecteurs

Exercice 96 1. On a $A(\underset{x_A}{1}\ ;\ \underset{y_A}{3})$ et $B(\underset{x_B}{4}\ ;\ \underset{y_B}{-1})$.



- On calcule les coordonnées de I :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1+4}{2};\frac{3+(-1)}{2}\right) \qquad I\left(\frac{5}{2};\frac{2}{2}\right) \qquad I\,(2,5;1)\,.$$

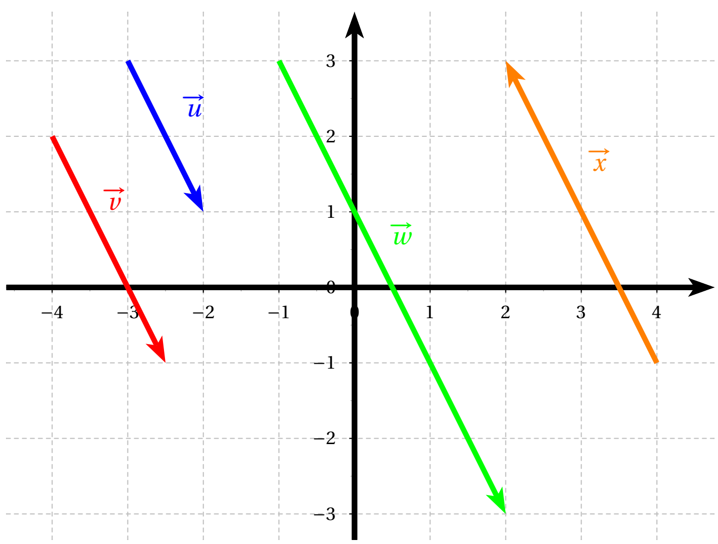
- On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\-1-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}.$$

- On calcule la longueur du segment $[AB]$:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

2. On représente sur la même figure les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1,5\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{x}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

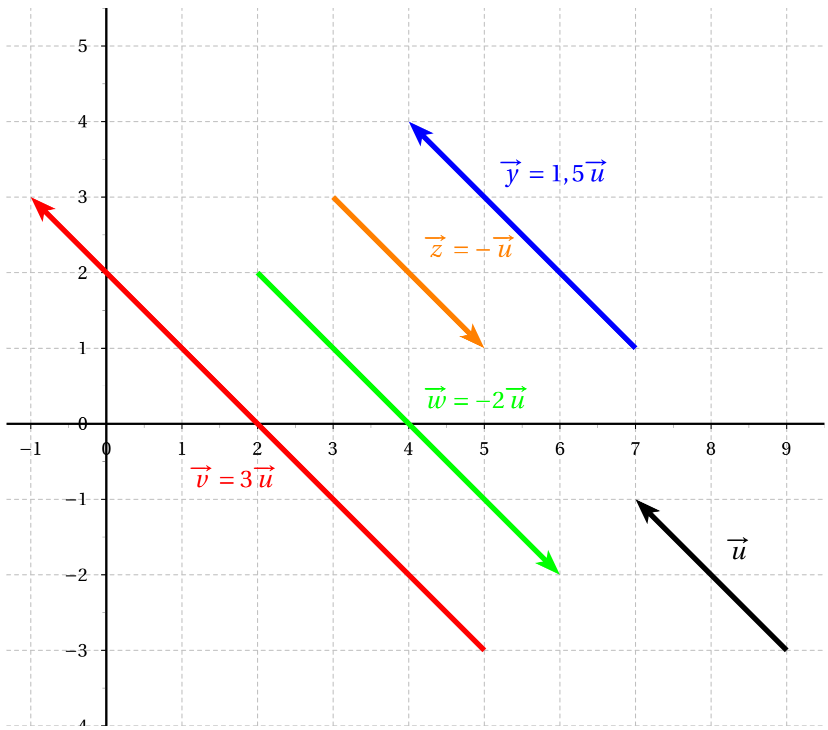


On rappelle que chacun des vecteurs peut être représenté **où l'on veut** : vous choisissez librement la position du début de la flèche ! Une fois ce début placé, cependant, il n'y a plus le choix pour tracer le vecteur (par exemple, pour $\overrightarrow{u}$, il faut avancer de 1 carreau en abscisse et descendre de 2 carreaux en ordonnée, puisque $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$).

Remarque : En anticipant sur la suite du cours, on remarque que $\overrightarrow{v}=1,5\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{w}=3\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{x}=-2\overrightarrow{u}$.

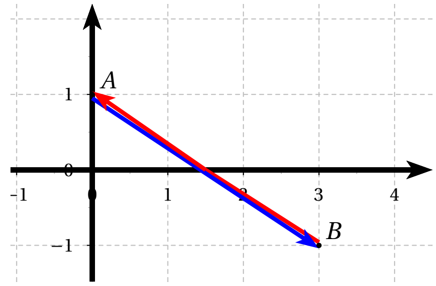
Exercice 97 L'énoncé nous donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.

- $\vec{v} = 3\vec{u}$, donc
$$\vec{v}\begin{pmatrix}3\times(-2)\\3\times 2\end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}.$$
- $\vec{w} = -2\vec{u}$, donc
$$\vec{w}\begin{pmatrix}-2\times(-2)\\-2\times 2\end{pmatrix} \qquad \vec{w}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}.$$
- $\vec{y} = 1{,}5\vec{u}$, donc
$$\vec{y}\begin{pmatrix}1{,}5\times(-2)\\1{,}5\times 2\end{pmatrix} \qquad \vec{y}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}.$$
- $\vec{z} = -\vec{u} = -1\vec{u}$, donc
$$\vec{z}\begin{pmatrix}-1\times(-2)\\-1\times 2\end{pmatrix} \qquad \vec{z}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}.$$



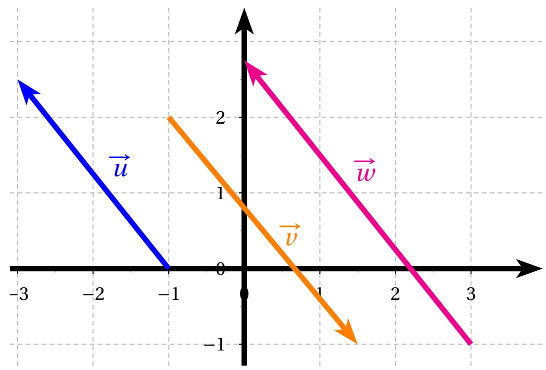
Exercice 98 Soient $A(0;1)$ et $B(3;-1)$.

1. On a
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-0\\-1-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},$$
donc
$$-\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\times 3\\-1\times(-2)\end{pmatrix} \qquad -\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}.$$
2. D'un autre côté,
$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0-3\\1-(-1)\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}.$$
Les vecteurs $-\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.



Remarque : L'égalité de la question 2 est un fait général (elle est vraie quels que soient les points A et B). Elle exprime le fait que, sur la figure ci-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

Exercice 99 1. On représente $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\2,5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2,5\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-3\\3,75\end{pmatrix}$.



2. • Pour savoir si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on calcule leur déterminant :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\2,5\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2,5\\-3\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

donc

$$\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = xy' - x'y = -2\times(-3) - 2,5\times 2,5 = 6 - 6,25 = -0,25.$$

Conclusion : $\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

• Pour savoir si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires, on calcule leur déterminant :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\2,5\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-3\\3,75\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

donc

$$\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right) = xy' - x'y = -2\times 3,75 - (-3)\times 2,5 = -7,5 + 7,5 = 0.$$

Conclusion : $\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right) = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires.

Exercice 100 1. On calcule le déterminant de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pour savoir si O, A, B sont alignés ou non :

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3-0\\2-0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}4,5-0\\3-0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}4,5\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

donc

$$\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = xy' - x'y = 3\times 3 - 4,5\times 2 = 9 - 9 = 0.$$

Leur déterminant est nul, donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires. Par conséquent O, A, B sont alignés.

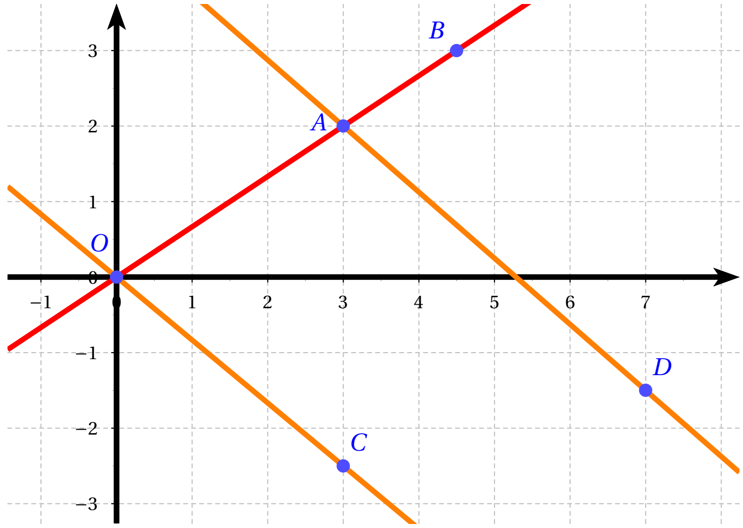
2. On calcule le déterminant de $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AD}$ pour savoir si (OC) et (AD) sont parallèles ou non :

$$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}3-0\\-2,5-0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}3\\-2,5\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7-3\\-1,5-2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-3,5\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

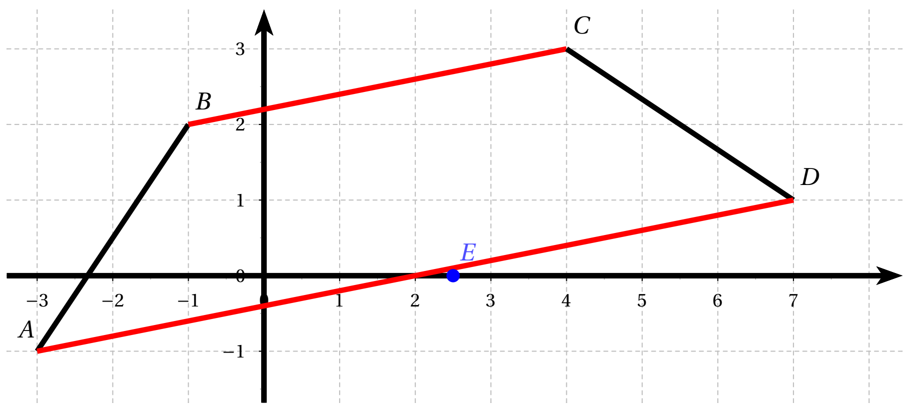
donc

$$\det\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AD}\right) = xy' - x'y = 3\times(-3,5) - 4\times(-2,5) = -10,5 + 10 = -0,5.$$

Leur déterminant est non nul, donc $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent (OC) n'est pas parallèle à (AD).



Exercice 101 1.



2. On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère possédant deux côtés parallèles – et c'est tout ! On utilise la colinéarité pour prouver que (BC) et (AD) sont parallèles :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-(-1)\\3-2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7-(-3)\\1-(-1)\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

donc

$$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right) = xy'-x'y = 5\times 2-10\times 1 = 10-10 = 0.$$

Leur déterminant est nul, donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires. Par conséquent (BC) est parallèle à (AD), et $ABCD$ est bien un trapèze.

3. Savoir si E appartient à (AD) revient à savoir si A, E, D sont alignés ou non. On utilise la colinéarité :

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2{,}5-(-3)\\0-(-1)\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}5{,}5\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix} \text{ (déjà calculé dans la qu°2)}$$

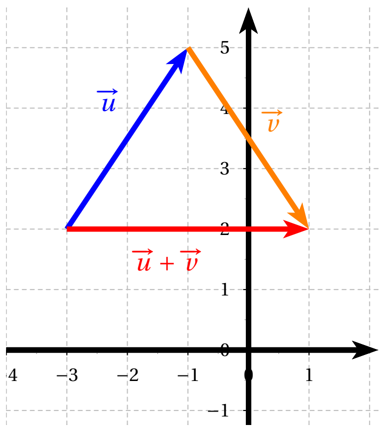
donc

$$\det\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right) = xy'-x'y = 5{,}5\times 2-10\times 1 = 11-10 = 1.$$

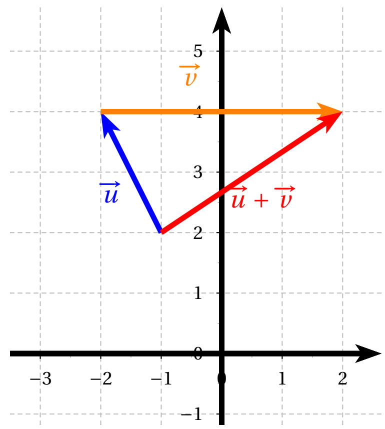
Leur déterminant est non nul, donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, A, E, D ne sont pas alignés, et E n'appartient pas à (AD).

Exercice 102 Pour construire la somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, on choisit un point au hasard, puis on trace les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ à la suite l'un de l'autre.

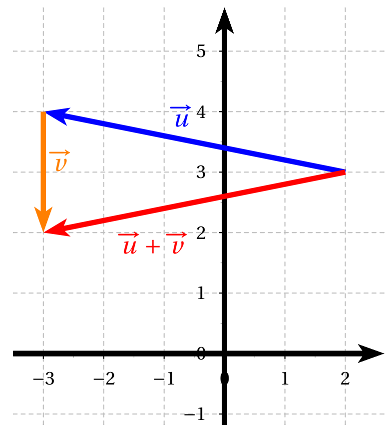
1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.



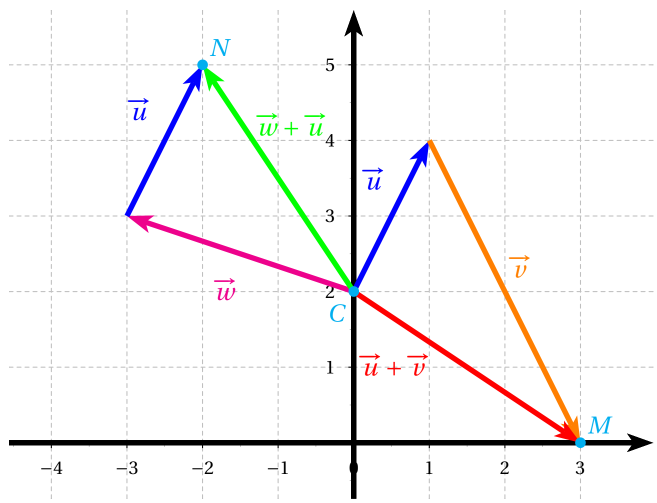
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.



3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

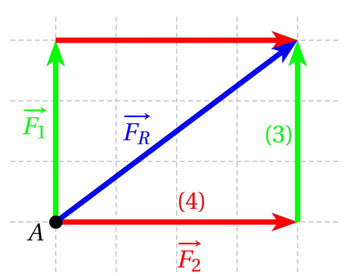


Exercice 103



Exercice 104 La force résultante, représentée par le vecteur $\overrightarrow{F_R}$, s'obtient en ajoutant les vecteurs $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$. Son intensité correspond à la longueur du vecteur $\overrightarrow{F_R}$, que l'on calcule aisément grâce au théorème de Pythagore : on obtient

$$\left\|\overrightarrow{F_R}\right\| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ N}.$$



Remarque : La situation de deux vecteurs qui ne sont pas à angle droit est plus délicate. Elle peut être résolue grâce au produit scalaire (étudié en première).

Exercice 105 On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}$, donc par définition de la somme de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_B-x_A+x_C-x_B\\y_B-y_A+y_C-y_B\end{pmatrix},$$

soit après simplification

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}.$$

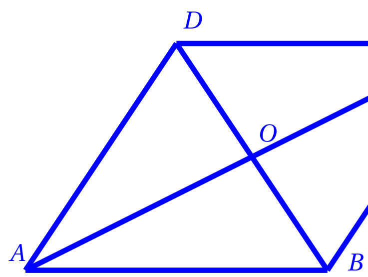
On obtient les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$.

Conclusion : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

C'est la relation de Chasles.

Exercice 106 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.



1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}$ (relation de Chasles)
2. $$\begin{aligned} \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AA} && \text{(relation de Chasles)} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} && \text{(on peut intervertir l'ordre)} \\ &= \overrightarrow{AD} && \text{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$
4. $ABCD$ est un parallélogramme, donc d'après un théorème du cours (1re leçon sur les vecteurs) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. On a donc :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO} &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO} && \text{(théorème susmentionné)} \\ &= \overrightarrow{DO} && \text{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$
5. $ABCD$ est un parallélogramme, donc d'après le théorème du cours déjà utilisé $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. On a donc :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA} && \text{(le théorème déjà utilisé)} \\ &= \overrightarrow{CA} && \text{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$

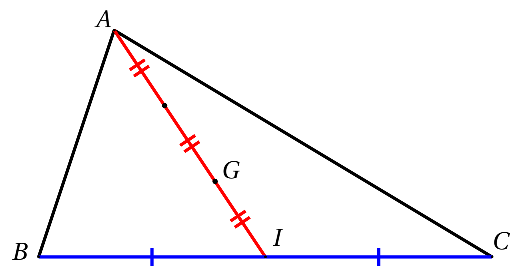
Exercice 107 ABC est un triangle, I est le milieu du segment $[BC]$. On renvoie à l'exercice suivant pour la figure.

1. D'après la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}, \qquad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}.$$
2. I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BI}$. On a donc, grâce à la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{II}=\vec{0}.$$

3. D'après les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)\\ &= 2\overrightarrow{AI}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{=\overrightarrow{0}}\\ &= 2\overrightarrow{AI}.\end{aligned}$$

Exercice 108 1. On place le point G aux deux tiers du segment $[AI]$ en partant de A.



2. On utilise l'exercice précédent et l'hypothèse $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$:

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AG} &= 3\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} && \text{(par hypothèse)}\\ &= 2\overrightarrow{AI} && (\text{ car } 3\cdot\frac{2}{3}=2)\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} && \text{(d'après l'exercice précédent).}\end{aligned}$$

3. On utilise la relation de Chasles et la question 2 :

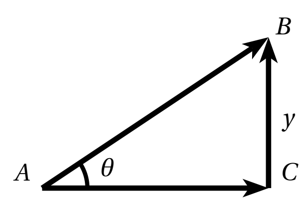
$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+{\color{red}\overrightarrow{GB}}+{\color{green}\overrightarrow{GC}} &= \overrightarrow{GA}+{\color{red}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}}+{\color{green}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}} && \text{(relation de Chasles)}\\ &= 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} && \text{(on regroupe les } \overrightarrow{GA})\\ &= 3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AG} && \text{(car d'après la question 2 : } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG})\\ &= 3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG}\right)\\ &= 3\left(\overrightarrow{GG}\right) && \text{(relation de Chasles)}\\ &= 3\left(\overrightarrow{0}\right)\\ &= \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$

Conclusion : on a bien

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$$

Remarque : Le point G est sur la médiane (AI). Comme A, B, C jouent des rôles symétriques dans l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, on pourrait intervertir leurs rôles (par exemple inverser A et C.) Le point G est donc aussi sur les deux autres médianes du triangle ABC ; et c'est donc le centre de gravité du triangle.

Exercice 109



Dans le triangle rectangle ABC :

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{x}{AB}.$$

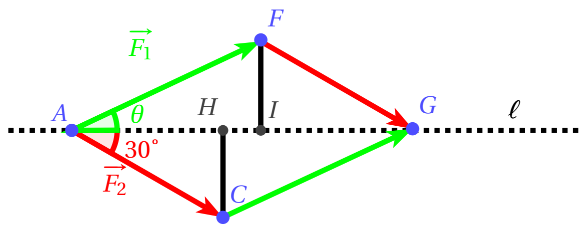
Donc

$$\cos\theta \times AB = \frac{x}{\cancel{AB}} \times \cancel{AB}$$
$$\cos\theta \times AB = x.$$

On obtient de même :

$$y = \sin\theta \times AB.$$

Exercice 110 On représente les forces du gros et du petit remorqueurs par des vecteurs $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ comme sur la figure ci-dessous.



1. Le remorqueur le plus puissant (en haut) génère une force de 20 000 N sur son câble, le plus petit (en bas) une force de 16 000 N. Donc dans la figure ci-dessus on peut prendre :

$$AF = 20000 \qquad , \qquad AC = 16000.$$

Soient I et H les points de la droite ℓ tels que (FI) et (HC) soient perpendiculaires à ℓ. D'après l'exercice précédent :

$$FI = \sin\theta \times AF = \sin\theta \times 20000,$$
$$HC = \sin 30^\circ \times AC = \sin 30^\circ \times 16000 = 0,5 \times 16000 = 8000.$$

Comme le navire suit la ligne droite ℓ, quand on ajoute les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, on reste sur la ligne ℓ. Il s'ensuit que les ordonnées de chacun des deux vecteurs se compensent, c'est-à-dire que $FI = HC$. On a donc, d'après les deux égalités ci-dessus :

$$\sin\theta \times 20000 = 8000.$$

2. D'après la question précédente :

$$\frac{\sin\theta \times \cancel{20000}}{\cancel{20000}} = \frac{8000}{20000}$$
$$\sin\theta = 0,4$$
$$\theta \approx 24^\circ \text{ (avec la calculatrice).}$$

17 Calcul littéral

Exercice 189 x, y sont des nombres réels.

1.

$$2(x+3)+3(x-5) = 2\times x + 2\times 3 + 3\times x + 3\times(-5)$$
$$= 2x+6+3x-15$$
$$= 5x-9$$

2.

$$x(x+8) = x\times x + x\times 8$$
$$= x^2+8x$$

3.

$$(4x+5)(2x+6) = 4x\times 2x + 4x\times 6 + 5\times 2x + 5\times 6$$
$$= 8x^2+24x+10x+30$$
$$= 8x^2+34x+30$$

4.

$$x(2x-3) = x\times 2x + x\times(-3)$$
$$= 2x^2-3x$$

5.

$$\begin{aligned}(12y-5)-2(5y+3) &= 12y-5-\left(2\times 5y+2\times 3\right)\\ &= 12y-5-\left(10y+6\right)\\ &= 12y-5-10y-6\\ &= 2y-11\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(2x+4)(4x-2) &= 2x\times 4x+2x\times(-2)+4\times 4x+4\times(-2)\\ &= 8x^2-4x+16x-8\\ &= 8x^2+12x-8\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}3(2y+3)+2(y-1) &= 3\times 2y+3\times 3+2\times y+2\times(-1)\\ &= 6y+9+2y-2\\ &= 8y+7\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}3(a+b)-3(a-b) &= 3\times a+3\times b-(3\times a+3\times(-b))\\ &= 3a+3b-(3a-3b)\\ &= \cancel{3a}+3b-\cancel{3a}+3b\\ &= 6b\end{aligned}$$

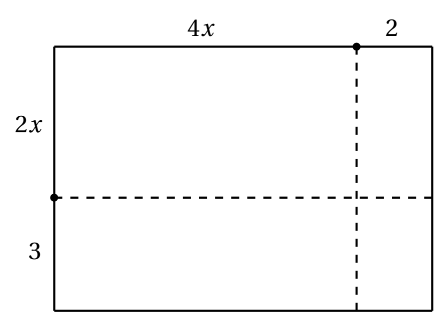
9.

$$\begin{aligned}(x-4)(2x+1) &= x\times 2x+x\times 1+(-4)\times 2x+(-4)\times 1\\ &= 2x^2+x-8x-4\\ &= 2x^2-7x-4\end{aligned}$$

Remarque : Pour développer un « − » devant une parenthèse, on change tous les signes dans la parenthèse. Par exemple :

$$15-(10-6)=15-10+6=11.$$

Exercice 190



- Le périmètre du rectangle est

$$\begin{aligned}2\,(\ell+L) &= 2\,(4x+2+2x+3)\\ &= 2\,(6x+5)\\ &= 2\times 6x+2\times 5\\ &= 12x+10\end{aligned}$$

- L'aire du rectangle est

$$\begin{aligned}\ell\times L &= (4x+2)\,(2x+3)\\ &= 4x\times 2x+4x\times 3+2\times 2x+2\times 3\\ &= 8x^2+12x+4x+6\\ &= 8x^2+16x+6\end{aligned}$$

Exercice 191 On rappelle les trois identités remarquables :

Pour tous nombres a et b :

- **IR1.** $(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2$
- **IR2.** $(a-b)^2=a^2-2\times a\times b+b^2$
- **IR3.** $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Venons-en aux développements de l'exercice. Pour tout nombre réel x :

- $$\begin{aligned}(x-4)^2 &= x^2 - 2\times x\times 4 + 4^2\\ &= x^2-8x+16\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x\times 1 + 1^2\\ &= 4x^2+4x+1\end{aligned}$$

  Remarque : $(2x)^2 = 2x\times 2x = 4x^2$.
- $$\begin{aligned}(x+5)(x-5) &= x^2-5^2\\ &= x^2-25\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) &= x^2-\sqrt{2}^2\\ &= x^2-2\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}x^2-(x+3)(x-3) &= x^2-\left(x^2-3^2\right)\\ &= x^2-\left(x^2-9\right)\\ &= \cancel{x^2}-\cancel{x^2}+9\\ &= 9\end{aligned}$$

Exercice 192 Pour démontrer l'égalité de deux expressions littérales (avec des lettres), on développe et on réduit chaque membre. Dans les exemples de l'énoncé, les membres de droite sont déjà développés et réduits ; on se contente donc de développer les membres de gauche.

- Pour tout nombre réel x :

  $$\begin{aligned}(x-3)^2-4 &= \left(x^2-2\times x\times 3+3^2\right)-4\\ &= x^2-6x+9-4\\ &= x^2-6x+5\end{aligned}$$

  Cela prouve l'égalité de l'énoncé.
- Pour tout nombre réel x :

  $$\begin{aligned}(x+1)^2-(x-1)^2 &= \left(x^2+2\times x\times 1+1^2\right)-\left(x^2-2\times x\times 1+1^2\right)\\ &= \left(x^2+2x+1\right)-\left(x^2-2x+1\right)\\ &= \cancel{x^2}+2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}+2x-\cancel{1}\\ &= 4x\end{aligned}$$

  Cela prouve l'égalité de l'énoncé.

Exercice 193 1. L'astuce consiste à remarquer que $(a+b)^3 = (a+b)^2\times(a+b)$, puis à utiliser la 1re identité remarquable pour développer la parenthèse.

Pour tous nombres a, b :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2\times(a+b)\\ &= \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)\\ &= a^2\times a+a^2\times b+2ab\times a+2ab\times b+b^2\times a+b^2\times b\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

2. De même :

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)^2\times(a-b)\\ &= \left(a^2-2ab+b^2\right)(a-b)\\ &= a^2\times a+a^2\times(-b)+(-2ab)\times a+(-2ab)\times(-b)+b^2\times a+b^2\times(-b)\\ &= \color{red}{a^3}-\color{blue}{a^2b}-\color{blue}{2a^2b}+\color{green}{2ab^2}+\color{green}{ab^2}-b^3\\ &= \color{red}{a^3}-\color{blue}{3a^2b}+\color{green}{3ab^2}-b^3.\end{aligned}$$

Exercice 194 Dans cet exercice, on résout des équations du 2nd degré, c'est-à-dire avec des x^2. On s'intéresse pour l'instant à deux types d'équations[7] :

Équations du type $ax^2+bx=0$.

On met x en facteur :

$$x(ax+b)=0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul. La ligne précédente est donc équivalente à

$$x=0 \qquad \text{ou} \qquad ax+b=0.$$

On se ramène donc à deux équations du 1er degré, que l'on résout.

Équations du type $x^2=c$.

On distingue trois cas :

- Si $c>0$, il y a deux solutions :

$$x=\sqrt{c} \qquad \text{ou} \qquad x=-\sqrt{c}.$$

- Si $c<0$, il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc il n'existe aucun nombre x tel que $x^2=c$).
- Si $c=0$, il y a une seule solution :

$$x=0.$$

Il est aussi parfois nécessaire de « transposer » certains termes pour pouvoir résoudre.

Dans chaque cas, on notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

1.

$$\begin{aligned}x^2-8x&=0\\ x(x-8)&=0\\ x=0 \quad \text{ou} \quad x-8&=0\\ x=0 \quad \text{ou} \quad x&=8\\ \mathscr{S}&=\{0;8\}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}5x^2&=3x\\ 5x^2-3x&=0\\ x(5x-3)&=0\\ x=0 \quad \text{ou} \quad 5x-3&=0\\ x=0 \quad \text{ou} \quad 5x&=3\\ x=0 \quad \text{ou} \quad x&=\frac{3}{5}=0,6\\ \mathscr{S}&=\{0\ ;\ 0,6\}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}x^2-16&=0\\ x^2&=16\\ x=\sqrt{16} \quad \text{ou} \quad x&=-\sqrt{16}\\ x=4 \quad \text{ou} \quad x&=-4\\ \mathscr{S}&=\{4;-4\}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}x^2&=10\\ x=\sqrt{10} \quad \text{ou} \quad x&=-\sqrt{10}\\ \mathscr{S}&=\left\{\sqrt{10};-\sqrt{10}\right\}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}x^2+7&=0\\ x^2&=-7\\ &\text{impossible, car un carré est positif}\\ \mathscr{S}&=\varnothing\end{aligned}$$

Remarque : $\varnothing$ est l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément. C'est un concept un peu abstrait, mais pas davantage que le nombre 0 – d'ailleurs 0 est le nombre d'éléments de $\varnothing$.

6.

$$\begin{aligned}2x^2+x&=0\\ 2x^2+\color{red}{1}x&=0\\ x(2x+\color{red}{1})&=0\\ x=0 \quad \text{ou} \quad 2x+1&=0\\ x=0 \quad \text{ou} \quad 2x&=-1\\ x=0 \quad \text{ou} \quad x&=\frac{-1}{2}=-0,5\\ \mathscr{S}&=\{0\ ;\ -0,5\}\end{aligned}$$

7. Un 3e et dernier type sera étudié dans le dernier exercice de la feuille.

7.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9 &= 0 \\ 4x^2 &= 9 \\ x^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

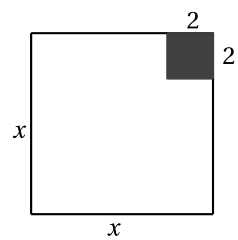
$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$$\mathscr{S} = \{1,5\ ;\ -1,5\}$$

Exercice 195



La zone blanche est un grand carré de côté x dont on a retiré un petit carré de côté 2. Son aire est donc égale à

$$x^2 - 2^2 = x^2 - 4.$$

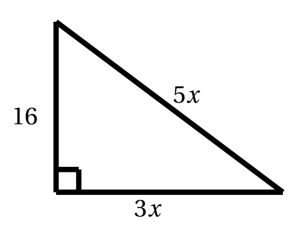
Cette aire vaut 20, donc $x^2 - 4 = 20$. On résout cette équation :

$$\begin{aligned} x^2 &= 20 + 4 \\ x^2 &= 24 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{24} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{24}$$

La 2^e^ solution est à exclure, car x est une longueur. Conclusion : $x = \sqrt{24}$.

Exercice 196



D'après le théorème de Pythagore,

$$(5x)^2 = (3x)^2 + 16^2.$$

On résout cette équation :

$$\begin{aligned}
25x^2 &= 9x^2 + 256 \\
25x^2 - 9x^2 &= 256 \\
16x^2 &= 256 \\
x^2 &= \frac{256}{16} \\
x^2 &= 16
\end{aligned}$$

$$x = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{ou} \qquad x = -\sqrt{16} = -4$$

La 2^e^ solution est à exclure, car $3x$ est une longueur, donc x est positif. Conclusion : $x = 4$.

Exercice 197 1. (a) Pour tout nombre x :

$$(x+1)^2 - 4 = \left(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2\right) - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3.$$

(b) On résout l'équation

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

D'après la question 1.(a), cette équation se réécrit $(x+1)^2 - 4 = 0$, soit $(x+1)^2 = 4$.
On résout :

$$\begin{array}{rcl}
 & (x+1)^2 = 4 & \\
x+1 = \sqrt{4} & \text{ou} & x+1 = -\sqrt{4} \\
x+1 = 2 & \text{ou} & x+1 = -2 \\
x = 2-1 & \text{ou} & x = -2-1 \\
x = 1 & \text{ou} & x = -3 \\
 & \mathscr{S} = \{1; -3\} &
\end{array}$$

2. (a) Pour tout nombre x :

$$(x-4)^2 - 25 = \left(x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2\right) - 25 = x^2 - 8x + 16 - 25 = x^2 - 8x - 9.$$

(b) On résout l'équation

$$x^2 = 8x + 9.$$

D'abord on transpose

$$x^2 - 8x - 9 = 0.$$

D'après la question 2.(a), cette équation se réécrit $(x-4)^2 - 25 = 0$, soit $(x-4)^2 = 25$.
On résout :

$$\begin{array}{rcl}
 & (x-4)^2 = 25 & \\
x-4 = \sqrt{25} & \text{ou} & x-4 = -\sqrt{25} \\
x-4 = 5 & \text{ou} & x-4 = -5 \\
x = 5+4 & \text{ou} & x = -5+4 \\
x = 9 & \text{ou} & x = -1 \\
 & \mathscr{S} = \{9; -1\} &
\end{array}$$

3. (a) Pour tout nombre x :

$$(x+2)^2 - 5 = \left(x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2\right) - 5 = x^2 + 4x + 4 - 5 = x^2 + 4x - 1.$$

(b) On résout l'équation

$$x^2 + 4x - 1 = 0.$$

D'après la question 2.(a), cette équation se réécrit $(x+2)^2 - 5 = 0$, soit $(x+2)^2 = 5$.
On résout :

$$(x+2)^2 = 5$$
$$x+2 = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x+2 = -\sqrt{5}$$
$$x = \sqrt{5}-2 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{5}-2$$
$$\mathscr{S} = \left\{\sqrt{5}-2; -\sqrt{5}-2\right\}$$

9 Tableaux de signes

Exercice 111 1. On trace les droites $D : y = 2x-3$ et $\Delta : y = -2x+5$ à partir de deux tableaux de valeurs :

Tracé de D.

x	0	2
y	-3	1

$2\times 0-3 = -3$

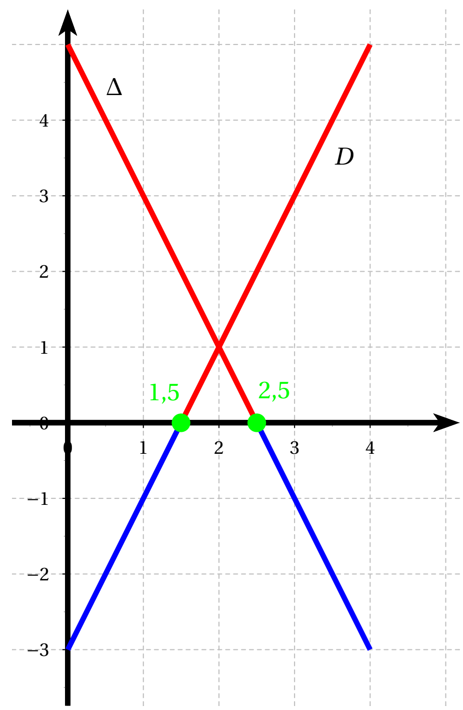
$2\times 2-3 = 1$

Tracé de Δ.

x	0	2
y	5	1

$-2\times 0+5 = 5$

$-2\times 2+5 = 1$



2. On utilise le graphique pour construire les tableaux de signes. Pour rappel :
   - On a repassé en rouge la partie des droites située au-dessus de l'axe des abscisses. Ce sont les zones où les expressions ($2x-3$ ou bien $-2x+5$) sont positives.
   - On a repassé en bleu la partie des droites située en-dessous de l'axe des abscisses. Ce sont les zones où les expressions ($2x-3$ ou bien $-2x+5$) sont négatives.
   - Les points verts ($1,5$ et $2,5$) sont les points où les expressions ($2x-3$ ou bien $-2x+5$) sont nulles.

   On résume ces informations dans les tableaux de signes :

x	$-\infty$		1.5		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2.5		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	0	$-$	

3. Reprenons les exemples précédents et remarquons que :
   - Pour obtenir les points verts, il suffit de savoir où les droites coupent l'axe des abscisses. Il suffit donc de résoudre les équations[8] :

$$\begin{aligned} 2x-3&=0\\ 2x-\cancel{3}+\cancel{3}&=0+3\\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}&=\frac{3}{2}\\ x&=1,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x+5&=0\\ -2x+\cancel{5}-\cancel{5}&=0-5\\ \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}&=\frac{-5}{-2}\\ x&=2,5 \end{aligned}$$

   - La droite d'équation $y=2x-3$ « monte », puisque son coefficient directeur (2) est positif. L'expression $2x-3$ est donc d'abord négative, puis positive.
   - La droite d'équation $y=-2x+5$ « descend », puisque son coefficient directeur (-2) est négatif. L'expression $-2x+5$ est donc d'abord positive, puis négative.

   La situation se généralise : suivant que $a>0$ ou $a<0$, on a des tableaux de signes de la forme :

   $\boxed{\text{Cas } a>0}$

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

   $\boxed{\text{Cas } a<0}$

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

   Pour avoir la valeur en pointillés, il suffit de résoudre l'équation $ax+b=0$.[9]

Exercice 112

1. On résout l'équation :

$$4x-3=0 \qquad 4x-\cancel{3}+\cancel{3}=0+3 \qquad \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\frac{4}{3} \qquad x=\frac{4}{3}$$

   $a=4 \Rightarrow +$ à droite :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4x-3$		$-$	0	$+$	

2. On résout l'équation :

$$-3x+6=0 \qquad -3x+\cancel{6}-\cancel{6}=0-6 \qquad \frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}=\frac{-6}{-3} \qquad x=2$$

   $a=-3 \Rightarrow +$ à gauche :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-3x+6$		$+$	0	$-$	

3. On résout l'équation :

$$x+5=0 \qquad x+\cancel{5}-\cancel{5}=0-5 \qquad x=-5$$

   ⚠ $a=1$, puisque $x+5$ signifie $1x+5 \Rightarrow +$ à droite :

8. Voir la leçon sur les équations de droites.
9. La solution de cette équation est $x=-\frac{b}{a}$, mais c'est le genre de chose qu'il ne faut pas retenir : il vaut mieux résoudre l'équation dans chaque cas particulier – comme nous l'avons fait avec $2x-3=0$ et avec $-2x+5=0$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	

4. On résout l'équation :

$$-2x-1=0 \qquad -2x-\cancel{1}+\cancel{1}=0+1 \qquad \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\frac{1}{-2} \qquad x=-0,5$$

$a=-2 \Rightarrow +$ à gauche :

x	$-\infty$		-0.5		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$	

Exercice 113 1. (a) On résout :

$$x+4=0$$
$$x+\cancel{4}-\cancel{4}=0-4$$
$$x=-4$$

$a=1$, puisque $x+4=\color{red}{1}\color{black}x+4 \Rightarrow +$ à droite

$$-2x+6=0$$
$$-2x+\cancel{6}-\cancel{6}=0-6$$
$$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\frac{-6}{-2}$$
$$x=3$$

$a=-2 \Rightarrow +$ à gauche

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+4)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(b) On résout :

$$4x-3=0$$
$$4x-\cancel{3}+\cancel{3}=0+3$$
$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\frac{3}{4}$$
$$x=\frac{3}{4}$$

$a=4 \Rightarrow +$ à droite

$$-3x+2=0$$
$$-3x+\cancel{2}-\cancel{2}=0-2$$
$$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}=\frac{-2}{-3}$$
$$x=\frac{2}{3}$$

$a=-3 \Rightarrow +$ à gauche

⚠Attention à l'ordre des valeurs en haut : $\frac{3}{4}=0,75$ et $\frac{2}{3}\approx 0,67$, donc $\frac{2}{3}$ est **avant** $\frac{3}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(4x-3)(-3x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(c) D'abord on factorise : $x^2 - 3x = x(x-3)$.

On résout :

$$x = 0$$

rien à résoudre !

$a = 1$, puisque $x = {\color{red}1}x + 0 \Rightarrow +$ à droite

$$x - 3 = 0$$
$$x - \cancel{3} + \cancel{3} = 0 + 3$$
$$x = 3$$

$a = 1$, puisque $x - 3 = {\color{red}1}x - 3 \Rightarrow +$ à droite

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 - 3x = x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(d) D'abord on factorise : $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$ – grâce à l'IR n°3 : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

On résout :

$$x + 2 = 0$$
$$x + \cancel{2} - \cancel{2} = 0 - 2$$
$$x = -2$$

$a = 1$, puisque $x + 2 = {\color{red}1}x + 2 \Rightarrow +$ à droite

$$x - 2 = 0$$
$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 + 2$$
$$x = 2$$

$a = 1$, puisque $x - 2 = {\color{red}1}x - 2 \Rightarrow +$ à droite

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(e) On manipule les « t » comme s'il s'agissait de « x » (c'est juste un changement de nom de la variable) :

On résout :

$$2t = 0$$
$$\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}} = \frac{0}{2}$$
$$t = 0$$

$a = 2 \Rightarrow +$ à droite

$$t + 1 = 0$$
$$t + \cancel{1} - \cancel{1} = 0 - 1$$
$$t = -1$$

$a = 1 \Rightarrow +$ à droite

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$2t$		$-$		$-$	0	$+$	
$t+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2t(t+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

(f) x^2+1 n'est pas du 1er degré et ne se factorise pas comme dans la question (d) (⚠ce n'est pas x^2-1). Aucune méthode du cours ne s'applique donc pour étudier le signe dans ce cas. Pourtant ce n'est pas un problème, car l'étude du signe est en réalité assez évidente :

- vous savez bien qu'un carré est positif, donc x^2 est positif quelle que soit la valeur de x.
- x^2+1 est donc plus grand que 1 ; et donc du signe « + » tout le temps.

Autrement dit, on a le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+1		$+$	

2. Pour étudier le signe de x^2-4 sur l'intervalle $[0;5]$, on reprend le tableau de la question (d), que l'on « restreint » à l'intervalle $[0;5]$. On a donc deux étapes :

1re étape
On reprend le tableau de la question (d), où on rajoute les valeurs 0 et 5 – aux bonnes places !

x	$-\infty$		-2		0		2		5		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

2e étape
On se restreint à l'intervalle $[0;5]$.

x	0		2		5
x^2-4		$-$	0	$+$	

Remarque : Bien sûr, la première chose à faire est le travail de la question (d) !

Exercice 114 1. Le tableau de signe de x peut-être fait avec la méthode pour $ax+b$, puisque $x = 1x+0$ (c'est d'ailleurs ce que l'on a fait dans la question 2.(c) de l'exercice précédent). Il est cependant plus facile (et plus naturel) de remarquer que :

- $x = 0$ lorsque $x = 0$ (en voilà une belle tautologie !) ;
- x est strictement positif lorsque $x \in]0;+\infty[$;
- x est strictement négatif lorsque $x \in]-\infty;0[$.

Autrement dit, on a le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

Pour x^2, il y a deux méthodes :

Méthode n°1

On écrit $x^2 = x \times x$ et on utilise la méthode pour le tableau de signe d'un produit.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	

Méthode n°2

Un carré est positif, donc x^2 est positif quelle que soit la valeur de x. De plus x^2 ne peut valoir 0 que lorsque $x = 0$. On a donc directement le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	

On termine avec le tableau de x^3. À nouveau, il y a deux méthodes : soit on écrit $x^3 = x \times x \times x$, soit on se pose la question de savoir le signe de x^3 lorsque $x > 0$ et lorsque $x < 0$. Par exemple, si $x < 0$, alors $x^3 < 0$, puisque « $\ominus \times \ominus \times \ominus = \ominus$ ».
Quelle que soit la méthode, on obtient le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	+	

2. Le signe de $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}$ dépend de la parité de n :

Si n est pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n		+	0	+	

Si n est impair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n		$-$	0	+	

Exercice 115 1. On résout :

$$\begin{aligned} -2x + 1 &= 0 \\ -2x + \cancel{1} - \cancel{1} &= 0 - 1 \\ \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} &= \frac{-1}{-2} \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

$a = -2 \Rightarrow +$ à gauche

$$\begin{aligned} x + 5 &= 0 \\ x + \cancel{5} - \cancel{5} &= 0 - 5 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$a = 1$, puisque $x + 5 = 1x + 5 \Rightarrow +$ à droite

x	$-\infty$		-5		0.5		$+\infty$
$-2x+1$		+		+	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	+		+	
$\dfrac{-2x+1}{x+5}$		$-$	‖	+	0	$-$	

2. On résout :

$$\begin{aligned} 3t - 6 &= 0 \\ 3t - \cancel{6} + \cancel{6} &= 0 + 6 \\ \frac{\cancel{3}t}{\cancel{3}} &= \frac{6}{3} \\ t &= 2 \end{aligned}$$

$a = 3 \Rightarrow +$ à droite

$$\begin{aligned} 4t &= 0 \\ \frac{\cancel{4}t}{\cancel{4}} &= \frac{0}{4} \\ t &= 0 \end{aligned}$$

$a = 4 \Rightarrow +$ à droite

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3t-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$4t$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3t-6}{4t}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

3. On résout :

$$\begin{aligned} -x+4&=0\\ -x+\cancel{4}-\cancel{4}&=0-4\\ x&=4 \end{aligned}$$

$a=1$, car $-x+4=\textcolor{red}{-1}x+4 \Rightarrow +$ à gauche

On a déjà étudié le signe de x^2 dans l'exercice précédent.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x+4}{x^2}$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

4. On a déjà fait le tableau de signe de x dans l'exercice précédent.

$|x|$ est positif pour toute valeur de x, donc $|x|+3$ est supérieur à 3 (et donc également positif)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$\|x\|+3$		$+$		$+$	
$\dfrac{x}{\|x\|+3}$		$-$	0	$+$	

Exercice 116 Je n'écris pas tous les détails de la correction de cet exercice, qui ressemble beaucoup à ce que l'on a déjà fait auparavant.

1.

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-3x+4)(4x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

⚠Attention à l'ordre des valeurs en haut : $\frac{4}{3} \approx 1,33$ et $\frac{5}{4} = 1,25$

2. On commence par factoriser :

$$3x^2 + 6x = x(3x+6).$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2+6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On commence par factoriser :

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

4.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x}{-x+1}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

5.

x	$-\infty$		1		2.5		$+\infty$
$-2x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x+5}{3x-3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

6.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\|x\|+3$		$+$	

7.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x^2+2		$+$		$+$	
$\dfrac{x}{x^2+2}$		$-$	0	$+$	

Exercice 117 1. $(x-1)^2$ est un carré, donc toujours positif. Il peut cependant valoir 0, lorsque $x=1$:

$$(1-1)^2 = 0^2 = 0$$

(il n'y a que pour $x=1$ que $(x-1)^2$ vaut 0). On a donc le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	

Remarque : On aurait aussi pu écrire $(x-1)^2 = (x-1)\times(x-1)$ et utiliser la technique habituelle – ça aurait simplement été un peu plus long.

2. On fait le tableau de signe de $|x|-3$.

On cherche d'abord où il faut placer les « 0 ». On résout donc l'équation

$$\begin{gathered} |x|-3=0 \\ |x|-\cancel{3}+\cancel{3}=0+3 \\ |x|=3 \\ x=3 \qquad \text{ou} \qquad x=-3 \end{gathered}$$

On placera donc les « 0 » en dessous de 3 et de -3.

On cherche ensuite où placer les « $-$ ». Autrement dit, on cherche pour quelles valeurs de x on a $|x|-3<0$. On résout donc :

$$\begin{gathered} |x|-3<0 \\ |x|-\cancel{3}+\cancel{3}<0+3 \\ |x|<3 \end{gathered}$$

Les nombres dont la valeur absolue est strictement inférieure à 3 sont les nombres de l'intervalle $]-3;3[$.
Conclusion : $|x|-3$ est du signe « $-$ » lorsque $x\in\,]-3;3[$.

Pour terminer, on remarque que partout ailleurs (donc là où ce n'est ni égal à 0, ni strictement négatif), $|x|-3$ est strictement positif. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$\lvert x\rvert-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On fait le tableau de signe de $x-\dfrac{1}{x}$. Pour cela, on réduit au même dénominateur et on factorise le numérateur grâce à l'IR n°3 :

$$x-\frac{1}{x}=\frac{x}{1}-\frac{1}{x}=\frac{x\times x}{1\times x}-\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2-1^2}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}.$$

On obtient le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x+1)(x-1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$		$+$	

Exercice 118 On cherche une fonction f ayant le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

On constate qu'il suffit de pouvoir écrire $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, où les signes de $A(x)$ et de $B(x)$ sont donnés par le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$A(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Les choix $A(x) = x(x+3)$ et $B(x) = |(x+1)(x-1)|$ conviennent (les valeurs absolues pour $B(x)$ permettent d'avoir une expression toujours positive, mais qui s'annule pour $x = -1$ et pour $x = 1$).

Conclusion : $f(x) = \dfrac{x(x+3)}{|(x+1)(x-1)|}$ est une solution du problème – mais ce n'est pas la seule, il y en a une infinité.

10 Statistiques

Exercice 119 1. La dépense moyenne par personne est

$$\frac{6 \times 16 + 5 \times 19 + 4 \times 22}{15} = \frac{279}{15} = 18,6 \text{ €}.$$

2. Si les 15 amis commandent en plus 3 bouteilles de vin à 17 € l'unité, la dépense totale est $279 + 3 \times 17 = 330$ €. Donc la dépense moyenne par personne est

$$\frac{330}{15} = 22 \text{ €}.$$

Autre méthode : $18,6 + \frac{3 \times 17}{15} = 22$.

Exercice 120 1. Les coefficients sont 2 pour la logique, 3 pour l'anglais et 5 pour le français.

2. Pour le candidat 1, on fait le calcul

$$\frac{2 \times 5 + 3 \times 12 + 5 \times 10}{10} = 9,6.$$

On a un calcul analogue pour le candidat 2.

Pour le candidat 3, on note x la note inconnue en logique. La moyenne est

$$\frac{2\times x+3\times 4+5\times 13}{10}=10,9.$$

On résout cette équation :

$$\begin{aligned}
\frac{2\times x+12+65}{\cancel{10}}\times\cancel{10}&=10,9\times 10\\
2x+77&=109\\
2x+\cancel{77}-\cancel{77}&=109-77\\
\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}&=\frac{32}{2}\\
x&=16.
\end{aligned}$$

On obtient le tableau :

	L	A	F	Sortie
Candidat 1	5	12	10	9,6
Candidat 2	5	15	6	8,5
Candidat 3	16	4	13	10,9

Exercice 121 On note x et y les deux nombres inconnus de la série. La moyenne des sept nombres est 6, donc

$$\frac{5+8+10+4+7+x+y}{7}=6.$$

On a donc $5+8+10+4+7+x+y=6\times 7=42$, ce qui donne $x+y=8$.

Si l'un des deux nombres positifs x ou y était supérieur à 10, leur somme ne pourrait pas faire 8 ; x et y sont donc inférieurs à 10 et le nombre 10 est le plus grand des sept nombres de la série.

L'étendue de la série étant égale à 8, le plus petit nombre de la série est 2 ; et donc x ou y vaut 2.

Finalement, comme $x+y=8$, il y a deux possibilités (dont on vérifie immédiatement que, réciproquement, elles satisfont aux deux conditions de l'énoncé) :

$$\big(x=2 \text{ et } y=6\big) \quad \text{ou bien} \quad \big(x=6 \text{ et } y=2\big).$$

Exercice 122 1. La nouvelle note d'un élève ayant eu 5/20 est

$$0,8\times 5+4=8.$$

2. La note la plus haute possible est

$$0,8\times 20+4=20,$$

la note la plus basse possible est

$$0,8\times 0+4=4.$$

3. La nouvelle moyenne de classe est

$$0,8\times(\text{ancienne moyenne})+4=0,8\times 7,5+4=10.$$

Exercice 123 Pour calculer la moyenne des nombres

$$100,4\ ;\ 100,7\ ;\ 99,8\ ;\ 99,6\ ;\ 100,$$

on retire 100 à chaque nombre :

$$0,4\ ;\ 0,7\ ;\ -0,2\ ;\ -0,4\ ;\ 0.$$

La moyenne de ces 5 nouveaux nombres est

$$\frac{0,4+0,7-0,2-0,4+0}{5}=0,1,$$

donc la moyenne de la série initiale est

$$100+0,1=100,1.$$

Exercice 124 On range les données par ordre croissant :

$$3-5-7-\boxed{10}-12-18-25$$

Il y a un nombre impair de données, donc la médiane est la valeur centrale : $m_e = 10$.

Exercice 125 On range les âges par ordre croissant :

$$24-25-26-28-\boxed{28\text{ - }29}-30-32-33-34$$

Il y a un nombre pair de données, donc la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales :

$$m_e = \frac{28+29}{2} = 28,5 \text{ ans.}$$

Exercice 126 Il est agréable d'ajouter une ligne avec les effectifs cumulés croissantes (notés e.c.c. ci-dessous). On les obtient en ajoutant les effectifs de proche en proche :

$$4+5=9,\ 9+5=14,\ 14+5=19,\ 19+5=24,\ 24+2=26,\ 26+3=29,\ 29+1=30,\ 30+1=31.$$

On obtient le tableau :

Temps (en jours)	17	18	19	20	21	22	24	25	30
Nombre de concurrents	4	5	5	5	5	2	3	1	1
e.c.c.	4	9	14	19	24	26	29	30	31

Les e.c.c. s'interprètent de la façon suivante : le « 26 » en dessous du « 22 » signifie que 26 concurrents ont mis moins de 22 jours à finir la course.

Venons-en à la médiane. $n = 31$ concurrents ont fini la course, donc la médiane est le nombre de jours mis par le $\frac{n+1}{2} = \frac{31+1}{2} = \frac{32}{2} = 16^{e}$ concurrent. D'après la ligne avec les e.c.c., cette médiane est de 20 jours. En effet, 14 concurrents ont mis moins de 19 jours, et 19 en ont mis moins de 20, donc le 16^{e} a mis 20 jours pour terminer la course.

Conclusion : $m_e = 20$ jours.

Remarque : une méthode moins élégante consiste à énumérer par ordre croissants les résultats de tous les concurrents (en écrivant autant de fois chaque durée qu'il y a de concurrents l'ayant réalisée) :

$$17-17-17-17-18-18-18-18-18-19-19-19-19-19-20-\boxed{20}-20-20-20-21-21-21-21-21-22-22-24-24-24-25-30$$

Bon courage avec cette méthode si la série est de longueur 10 000...

Exercice 127 On complète une ligne avec les effectifs cumulés croissants (e.c.c.).

Nombre de TV	0	1	2	3	4	5
Effectif	4	19	15	9	3	2
e.c.c.	4	23	38	47	50	52

$\frac{n+1}{2} = \frac{52+1}{2} = \frac{53}{2} = 26,5$, donc pour avoir la médiane, on calcule la moyenne du nombre de TV de la 26^{e} et de la 27^{e} personnes : toutes les deux ont 2 TV, donc

$$m_e = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Exercice 128 1. Les statistiques sont meilleures en 2017 (les premiers quartiles sont identiques les deux années, mais la médiane et le troisième quartile sont plus élevés en 2017 qu'en 2018). C'est donc en 2017 que les élèves ont le mieux réussi.

2. Les distances interquartiles sont :
   - $Q_3 - Q_1 = 14 - 10 = 4$ en 2017 ;
   - $Q_3 - Q_1 = 12 - 10 = 2$ en 2018.
3. La distance interquartile est plus faible en 2018, donc le niveau des candidats était plus homogène cette année-là.

Exercice 129 1. Les distances interquartiles sont :
   - $Q_3 - Q_1 = 13 - 11 = 2$ aux USA ;

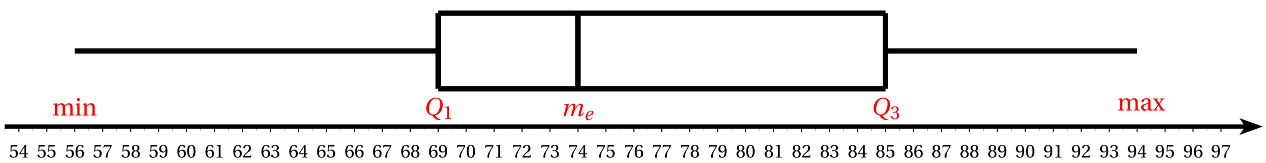
- $Q_3 - Q_1 = 13 - 9,75 = 3,25$ dans l'UE.

2. Le nombre de jours fériés est plus variable dans l'UE, car la distance interquartile de la série y est plus élevée.

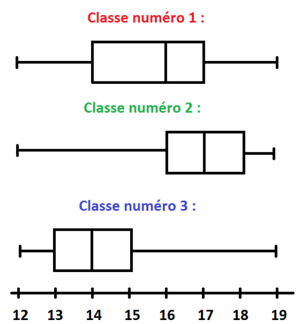
Exercice 130 1. Le fait que $D_3 = 1270$ € signifie que 30 % des personnes seules vivent avec moins de 1270 € par mois.

2. 20 % des personnes seules vivent avec plus de 2297 € par mois, donc 80 % des personnes seules vivent avec moins de 2297 € ; et donc $D_8 = 2297$ €.

Exercice 131 Diagramme en boîtes de la série de notes de la classe de 2[de] :



Remarque : En général, on dessine les diagrammes en boîtes les uns en dessous des autres pour comparer les séries, comme sur la figure suivante :



Exercice 132 1. La moyenne est plus élevée dans la classe 2, donc c'est celle qui a globalement le mieux réussi ce devoir.

2. L'écart-type est plus faible dans la classe 2, donc c'est celle dans laquelle les résultats ont été les plus homogènes.

Exercice 133 Les écarts de température sont plus importants à Grenoble (climat continental) qu'à Quimper (climat océanique), donc c'est à Grenoble qu'il y a le plus grand écart-type des températures.

Exercice 134 1. Le débit moyen est plus important à Vernon : la courbe est plus haute.

2. L'écart-type du débit est plus important à Vernon : il y a des variations plus importantes dans la courbe (elle est plus « étirée »).

Remarque : Vernon se trouve en aval d'Alfortville lorsqu'on suit le cours de la Seine. Cette dernière gagne les eaux de la Marne et de l'Oise entre les deux villes, ce qui fait que son débit est plus important à Vernon.

Exercice 135 La transformation

$$\text{Note} \mapsto 0,8 \times \text{Note} + 4$$

peut être décomposée en deux étapes :

- **1[re] étape :** On multiplie les notes par 0,8.

  Cela a pour effet de « réduire » la série, toutes les valeurs étant diminuées de 20 % : c'est le cas du minimum, de la moyenne, de la note maximale, etc. L'écart entre les notes est réduit de la même manière, ce qui fait fait que l'écart-type est multiplié lui aussi par 0,8.

Série de notes d'origine Série après multiplication par 0,8 $\Longrightarrow$ données resserrées

- **2[e] étape :** On ajoute 4 points à chaque note.

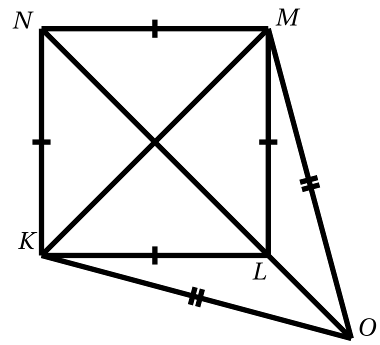
  Les notes sont « décalées vers la droite », mais l'écart entre elles ne change pas. Cela n'a donc pas d'effet sur l'écart-type.

Conclusion : seule la multiplication par 0,8 a une incidence sur l'écart-type, qui devient

$$0,8 \times 5 = 4.$$

16 Trigonométrie

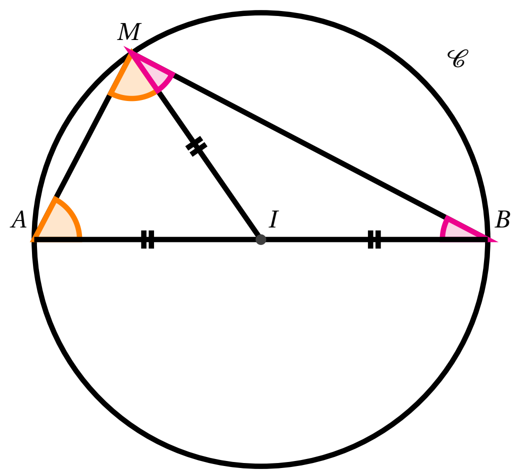
Exercice 180 1.



2. On note Δ la médiatrice du segment $[MK]$. On rappelle que c'est :
   - *Définition.* La perpendiculaire à $[MK]$ passant par son milieu ;
   - *Caractérisation.* L'ensemble des points qui se trouvent à égale distance de M et de K.

   $KLMN$ est un carré, donc $NK = NM$; et donc $N \in \Delta$ d'après la caractérisation ci-dessus. De même, $LK = LM$, donc $L \in \Delta$.
   Enfin KOM est équilatéral, donc $OK = OM$ et par conséquent $O \in \Delta$.
   Conclusion : les points O, L, N sont sur Δ, donc ils sont alignés.
3. O, L, N étant alignés, $\widehat{OLN} = 180°$. D'autre part, il est clair que MLN est rectangle isocèle en M, donc ses angles à la base sont égaux et l'on a $\widehat{MLN} = \frac{180°-90°}{2} = 45°$.
   On en déduit $\widehat{MLO} = \widehat{OLN} - \widehat{MLN} = 180° - 45° = 135°$.

Exercice 181 1.



2. $[IA]$ et $[IM]$ sont deux rayons de $\mathscr{C}$, donc IAM est isocèle en I et ses angles à la base $\widehat{IAM}$ et $\widehat{AMI}$ sont égaux :

$$\widehat{IAM} = \widehat{AMI}.$$

   La démonstration est la même pour les deux autres angles grâce au triangle IBM :

$$\widehat{IMB} = \widehat{MBI}.$$

3. $\widehat{IAM} + \widehat{AMI} + \widehat{IMB} + \widehat{MBI}$ est la somme des angles du triangle AMB, donc

$$\widehat{IAM} + \widehat{AMI} + \widehat{IMB} + \widehat{MBI} = 180°.$$

4. D'après les questions 2 et 3 :

$$\underbrace{\widehat{IAM} + \widehat{AMI}}_{2\widehat{AMI}} + \underbrace{\widehat{IMB} + \widehat{MBI}}_{2\widehat{IMB}} = 180°.$$

En divisant par 2 l'égalité $2\widehat{AMI}+2\widehat{IMB}=180°$, on obtient

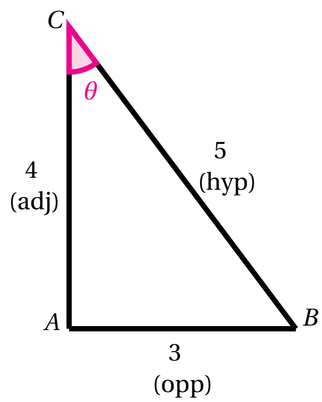
$$\widehat{AMI}+\widehat{IMB}=90°\ ;$$

soit finalement

$$\widehat{AMB}=90°.$$

Exercice 182 ABC est un triangle tel que $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. On pose $\theta=\widehat{ACB}$.

1.



$$\left.\begin{array}{l} BC^2=5^2=25 \\ AB^2+AC^2=3^2+4^2=16+9=25 \end{array}\right\} BC^2=AB^2+AC^2.$$

D'après **le théorème réciproque de Pythagore**, ABC est rectangle en A.

2. Dans ABC rectangle en A :

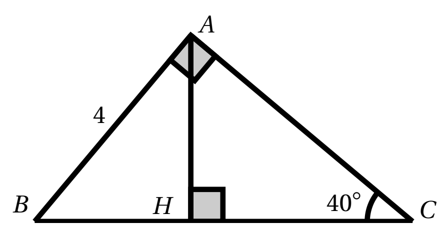
$$\cos\theta=\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}=\frac{4}{5}\qquad,\qquad \sin\theta=\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}=\frac{3}{5}\qquad,\qquad \tan\theta=\frac{\text{opp}}{\text{adj}}=\frac{3}{4}.$$

3. D'après la question précédente :

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{4^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}=\tan\theta$$

Exercice 183 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=4$ et $\widehat{BCA}=40°$. On note H le pied de la hauteur issue de A.



On commence par la longueur AC.
Dans ABC rectangle en A :

$$\tan 40°=\frac{\text{opp}}{\text{adj}}=\frac{4}{AC}.$$

On a donc $\tan 40°\times AC=\frac{4}{\cancel{AC}}\times\cancel{AC}$, puis $\frac{\cancel{\tan 40°}\times AC}{\cancel{\tan 40°}}=\frac{4}{\tan 40°}$.
Conclusion : on obtient grâce à la calculatrice

$$AC=\frac{4}{\tan 40°}\approx 4{,}77.$$

Ensuite on calcule AH.
Dans AHC rectangle en H :

$$\sin 40° = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{AH}{AC}.$$

On a donc $\sin 40° \times AC = \frac{AH}{\cancel{AC}} \times \cancel{AC}$, soit

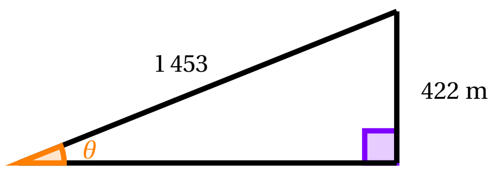
$$AH = \sin 40° \times AC = \sin 40° \times \frac{4}{\tan 40°} \approx 3,06.$$

Remarque : Ne prenez pas de valeurs approchées dans les calculs intermédiaires, car les erreurs d'arrondis pourraient grossir au fur et à mesure des étapes de calcul, et même finir par « exploser ». Si vous voulez un exemple, entrez la formule « =1/3 » dans la cellule $A1$ d'une feuille de calcul (un tableur). Vous obtenez $0,3333333\cdots$ Ensuite, vous entrez la formule « =4*A1-1 » dans la cellule A2, puis vous étirez vers le bas. En théorie, vous devriez toujours obtenir la même réponse, puisque $4 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$. Vous verrez que ce n'est pas du tout le cas, ce qui est dû à des problèmes d'arrondis.

Exercice 184 La différence d'altitude entre le haut et le bas de la piste est

$$2\,261 - 1\,839 = 422 \text{ m},$$

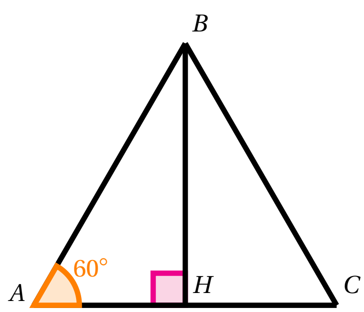
si bien que l'on peut représenter la situation par la figure suivante :



On nous demande de calculer la mesure de l'angle θ. On utilise le sinus : $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{422}{1\,453}$, donc $\theta \approx 16,9°$.

Exercice 185 ABC est un triangle équilatéral de côté 4, H est le pied de la hauteur issue de B.

1.



Le triangle ABC est équilatéral, donc la hauteur $[HB]$ est aussi une médiane (propriété du collège) et H est le milieu de $[AC]$. On a donc $AH = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.
Ensuite on calcule HB : d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AHB,

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \qquad 2^2 + HB^2 = 4^2 \qquad 4 + HB^2 = 16 \qquad HB^2 = 16 - 4 = 12 \qquad HB = \sqrt{12}.$$

2. Dans AHB rectangle en H :

$$\cos 60° = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{AH}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\sin 60° = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{HB}{AB} = \frac{\sqrt{12}}{4}$$
$$\tan 60° = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{HB}{AH} = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

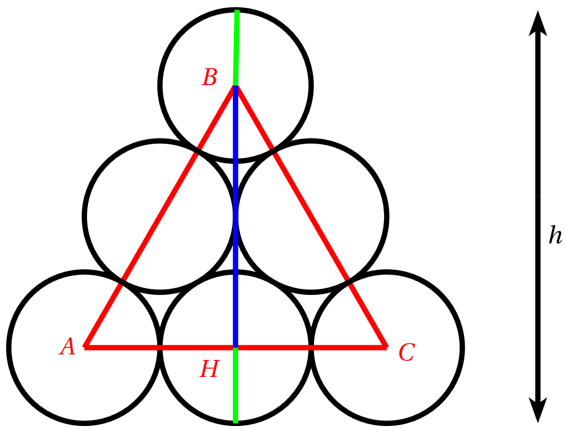
Remarque : le nombre $\frac{\sqrt{12}}{4}$ est mieux connu sous la forme $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce que l'on obtient par le calcul

$$\frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{4\times 3}}{4} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{4} = \frac{2\times\sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{2}\times\sqrt{3}}{\cancel{2}\times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

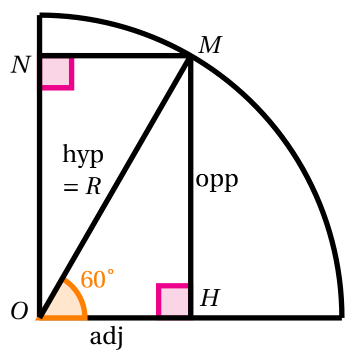
Avec le même calcul on trouve $\tan 60° = \sqrt{3}$.

Exercice 186 Chacun des cercles a pour rayon 1, donc le triangle ABC est équilatéral de côté 4. C'est donc le triangle de l'exercice précédent (!), et l'on sait que sa hauteur $[HB]$ (en bleu) mesure $\sqrt{12}$. Comme chaque segment vert mesure 1, on obtient

$$h = \sqrt{12} + 2.$$

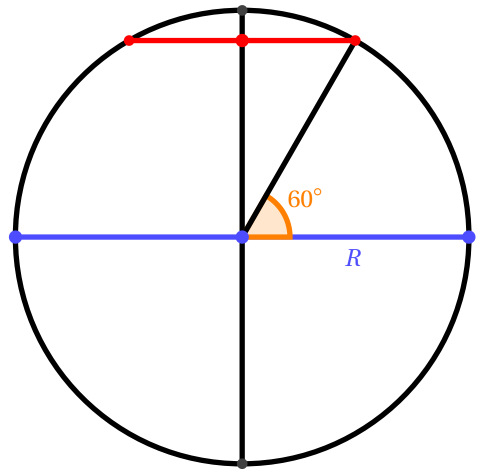


Exercice 187 Commençons par une remarque :
La figure ci-dessous représente un quart de cercle de rayon R, dans lequel on a tracé un angle de 60°. Dans un exercice précédent, on a vu que $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Pour notre figure, cela signifie que le rapport $\frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{OH}{OM}$ est égal à $\frac{1}{2}$. Mais OM est le rayon R du quart de cercle, et $MN = OH$; on en déduit donc que $\frac{OH}{OM} = \frac{MN}{R} = \frac{1}{2}$; c'est-à-dire que la longueur MN est deux fois plus petite que le rayon R.



Revenons à l'exercice : on peut assimiler la terre a une sphère de périmètre 40 000 km [10], donc l'équateur mesure 40 000 km de long. Dans le dessin de la terre de profil ci-dessous, cela correspond au périmètre du cercle de rayon R (en bleu).

10. Rappelons qu'à l'origine, le mètre a été défini comme 1/40 000 000e du périmètre de la terre. La valeur 40 000 est donc une excellente approximation.

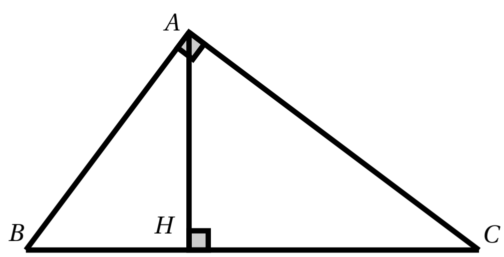


D'après la remarque faite au début de l'exercice, le cercle que l'on parcourt lorsqu'on fait le tour de la terre à 60° de latitude nord a un rayon (en rouge) deux fois plus petit que celui du cercle à l'équateur.

Le cercle rouge ayant un rayon deux fois plus petit que celui du cercle bleu, son périmètre est aussi deux fois plus petit que celui du cercle bleu [11] ; il mesure donc 20 000 km.

Conclusion : lorsqu'on fait le tour de la terre en restant à 60° de latitude nord, on parcourt 20 000 km.

Exercice 188 AHC est un triangle rectangle en H. La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B.
On sait que $AH = 4,8$ et que $HC = 6,4$.



1. La somme des angles du triangle ABC vaut 180°, donc
$$\widehat{ACH} + \widehat{HBA} = 180° - \widehat{BAC} = 180° - 90° = 90°. \tag{1}$$
On raisonne de la même façon dans le triangle BAH :
$$\widehat{BAH} + \widehat{HBA} = 180° - \widehat{AHB} = 180° - 90° = 90°. \tag{2}$$
On compare les égalités (1) et (2) :
$$\widehat{ACH} + \widehat{HBA} = 90° \qquad \text{et} \qquad \widehat{BAH} + \widehat{HBA} = 90°,$$
donc
$$\widehat{ACH} = \widehat{BAH}.$$
2. Dans ACH rectangle en H :
$$\tan\widehat{ACH} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{AH}{HC} = \frac{4,8}{6,4} = \frac{48}{64} = \frac{\cancel{16}\times 3}{\cancel{16}\times 4} = \frac{3}{4}.$$
3. On sait que $\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$, donc comme $\tan\widehat{ACH} = \frac{3}{4}$, on a aussi $\tan\widehat{BAH} = \frac{3}{4}$.
Mais dans le triangle BAH rectangle en H,
$$\tan\widehat{BAH} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{BH}{AH} = \frac{BH}{4,8}.$$
On a donc $\frac{3}{4} = \frac{BH}{4,8}$, puis $BH = \frac{3}{4} \times 4,8 = 3 \times \frac{4,8}{4} = 3 \times 1,2 = 3,6$.

11. Il y a proportionnalité entre rayon et périmètre d'après la formule $P = 2\pi R$.

11 Systèmes et équations de droites

Exercice 136 1. On multiplie la deuxième ligne par 2 et on laisse la première inchangée :

$$\begin{cases} 8x+6y=26 & \color{red}{(\times 1)} \\ 5x-3y=-31 & \color{red}{(\times 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x+6y=26 \\ 10x-6y=-62 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre et on résout l'équation en x :

$$\begin{aligned} 8x+\cancel{6y}+10x-\cancel{6y} &= 26-62 \\ \frac{\cancel{18}x}{\cancel{18}} &= \frac{-36}{18} \\ x &= -2. \end{aligned}$$

On remplace dans la première ligne pour trouver y :

$$\begin{aligned} 8\times(-2)+6y &= 26 \\ -16+6y &= 26 \\ \cancel{-16}+6y+\cancel{16} &= 26+16 \\ \frac{\cancel{6}y}{\cancel{6}} &= \frac{42}{6} \\ y &= 7. \end{aligned}$$

On vérifie la solution trouvée :

$$\begin{aligned} 8\times(-2)+6\times 7 &= 26 \\ 5\times(-2)-3\times 7 &= -31. \end{aligned}$$

Conclusion : la solution du système est $(x,y)=(-2,7)$.

2. On multiplie la première ligne par 2 et la deuxième par -3 :

$$\begin{cases} 9x+2y=17 & \color{red}{(\times 2)} \\ 6x+5y=-7 & \color{red}{(\times(-3))} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x+4y=34 \\ -18x-15y=21 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre et on résout l'équation en y :

$$\begin{aligned} \cancel{18x}+4y-\cancel{18x}-15y &= 34+21 \\ \frac{\cancel{-11}y}{\cancel{-11}} &= \frac{55}{-11} \\ y &= -5. \end{aligned}$$

On remplace dans la première ligne pour trouver x :

$$\begin{aligned} 9x+2\times(-5) &= 17 \\ 9x-10 &= 17 \\ 9x-\cancel{10}+\cancel{10} &= 17+10 \\ \frac{\cancel{9}x}{\cancel{9}} &= \frac{27}{9} \\ x &= 3. \end{aligned}$$

On vérifie la solution trouvée :

$$9\times 3+2\times(-5)=17$$
$$6\times 3+5\times(-5)=-7.$$

Conclusion : la solution du système est $(x,y)=(3,-5)$.

Exercice 137 On note :
- x le nombre d'objets A fabriqués ;
- y le nombre d'objets B fabriqués.

On a fabriqué 45 objets, donc $x+y=45$. On a utilisé 163 kg de bois, donc $3x+5y=163$. L'énoncé se traduit donc par le système :

$$\begin{cases} x+y=45 \\ 3x+5y=163 \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par -3 et on laisse la deuxième identique :

$$\begin{cases} x+y=45 & \quad (\times(-3)) \\ 3x+5y=163 & \quad (\times 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x-3y=-135 \\ 3x+5y=163 \end{cases}$$

Puis on ajoute membre à membre les deux lignes et on en déduit la valeur de y :

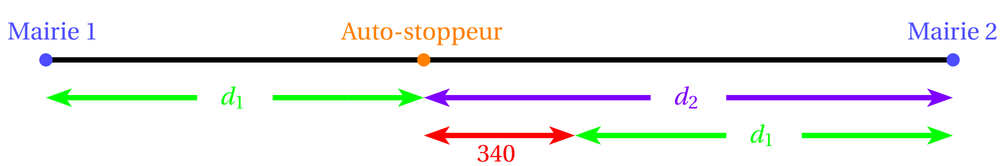
$$\cancel{-3x}-3y+\cancel{3x}+5y=-135+163$$
$$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}}=\frac{28}{2}$$
$$y=14.$$

Puis en reprenant la première ligne du système de départ :

$$x+y=45$$
$$14+y=45$$
$$\cancel{14}+y-\cancel{14}=45-14$$
$$y=31.$$

Ici, il est inutile de vérifier la solution, car on est sûr dès le départ qu'il en existe une (les objets ont été fabriqués !).
Conclusion : la solution est $x=14$, $y=31$. Autrement dit, on a fabriqué 14 objets de type A et 31 objets de type B.

Exercice 138 On note :
- d_1 la distance (exprimée en mètres) à la mairie la plus proche de l'auto-stoppeur ;
- d_2 la distance (exprimée en mètres) à la mairie la plus éloignée.



- La distance totale (en mètres) entre les deux mairies est

$$d_1+d_2=3\,000.$$

- Le son émis par le carillon de la Mairie 1 met une seconde de moins pour arriver jusqu'à l'auto-stoppeur que le son émis par le carillon de la Mairie 2. Autrement dit, quand le son émis par le carillon de la Mairie 1 arrive à l'auto-stoppeur, il reste 340 mètres à parcourir au son qui vient du carillon de la Mairie 2.[12] Finalement :

$$d_2=d_1+340.$$

12. On utilise le fait que le son parcourt 340 mètres en 1 seconde.

Le problème se traduit donc par le système

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 3\,000 \\ \qquad d_2 = d_1 + 340 \end{cases}$$

On présente sous la forme habituelle :

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 3\,000 \\ -d_1 + d_2 = 340 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre (il est inutile de multiplier les lignes par des nombres, les d_1 vont s'éliminer) :

$$\begin{aligned} \cancel{d_1} + d_2 - \cancel{d_1} + d_2 &= 3\,000 + 340 \\ \frac{\cancel{2}d_2}{\cancel{2}} &= \frac{3\,340}{2} \\ d_2 &= 1\,670 \end{aligned}$$

Conclusion : l'auto-stoppeur est à 1 670 mètres de la Mairie 2, et à $3\,000 - 1\,670 = 1\,330$ mètres de la Mairie 1.

Exercice 139 1. A l'aller, il y a 2 locomotives et 10 wagons-citernes, pour une longueur totale de 152 m. On a donc

$$2x + 10y = 152.$$

Au retour, il y a 1 locomotive et 12 wagons-citernes, pour une longueur de 160 m. On a donc

$$1x + 12y = 160.$$

L'énoncé se traduit donc par le système

$$\begin{cases} 2x + 10y = 152 \\ x + 12y = 160 \end{cases}$$

2. On multiplie la deuxième ligne par -2 :

$$\begin{cases} 2x + 10y = 152 \\ x + 12y = 160 \qquad \times(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 10y = 152 \\ -2x - 24y = -320 \end{cases}$$

Puis on ajoute membre à membre les deux lignes :

$$2x + 10y - 2x - 24y = 152 - 320.$$

Les x se simplifient :

$$-14y = -168.$$

On en déduit

$$\frac{\cancel{-14}y}{\cancel{-14}} = \frac{-168}{-14} \qquad\qquad y = 12.$$

Puis en reprenant la deuxième ligne du système de départ :

$$\begin{aligned} x + 12y &= 160 \\ x + 12 \times 12 &= 160 \\ x + 144 &= 160 \\ x + \cancel{144} - \cancel{144} &= 160 - 144 \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Ici, il est inutile de vérifier la solution, car on est sûr dès le départ qu'il en existe une (les locomotives et les wagons-citernes ont une longueur !).

Conclusion : les locomotives mesurent 16 m de long, et les wagons-citernes 12 m.

Exercice 140 On exprimera les distances en m et le temps en s.

Je note v_1 ma vitesse propre en m/s (c'est-à-dire la vitesse que j'aurais sans tapis roulant), et v_2 la vitesse du tapis roulant (en m/s également).

À l'aller, dans le sens du tapis, je parcours 15 m en 5 s, donc j'avance à $15 \div 3 = 5$ m/s. Cette vitesse est la somme de v_1 et v_2, soit

$$v_1 + v_2 = 3.$$

Au retour, en sens contraire, je parcours 5 m en 5 s, donc j'avance à 1 m/s. Cette vitesse est la différence de v_1 et v_2, soit

$$v_1 - v_2 = 1.$$

On a donc le système

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 3 \\ v_1 - v_2 = 1 \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire de résoudre le système dans son intégralité, puisqu'on nous demande seulement la vitesse v_2 du tapis roulant. Pour aller au plus vite, on multiplie la deuxième ligne par (-1) et on ajoute membre à membre :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 3 \\ v_1 - v_2 = 1 \qquad \times(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 3 \\ -v_1 + v_2 = -1 \end{cases}$$

On obtient

$$\cancel{v_1} + v_2 - \cancel{v_1} + v_2 = 3 - 1$$
$$\frac{\cancel{2}v_2}{\cancel{2}} = \frac{2}{2}$$
$$v_2 = 1.$$

Conclusion : le tapis roulant avance à la vitesse de 1 m/s.

Exercice 141 1. On écrit les équations sous forme cartésienne :

$$D : y = 2x - 4 \qquad D' : x = 3$$
$$D : -2x + 1y + 4 = 0 \qquad D' : 1x + 0y - 3 = 0$$

2. On écrit les équations sous forme réduite :

$$\Delta : -5x + y + 3 = 0 \qquad \Delta' : 3x + 4y = 0$$
$$\Delta : y = 5x - 3 \qquad \Delta' : 4y = -3x$$
$$\Delta' : y = -\frac{3}{4}x$$

Exercice 142 1. On écrit les équations de droites sous forme réduite pour pouvoir les tracer :

$$D_1 : 3x + 2y - 5 = 0 \qquad D_2 : -x + y + 3 = 0$$
$$D_1 : 2y = -3x + 5 \qquad D_2 : y = x - 3$$
$$D_1 : y = \frac{-3x + 5}{2}$$

Tracé de D_1.

x	0	2
y	2,5	−0,5

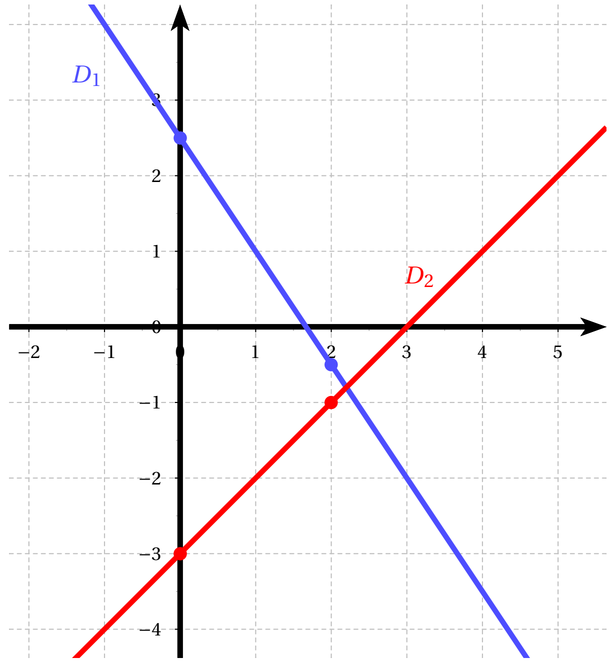
$$\frac{-3 \times 0 + 5}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$
$$\frac{-3 \times 2 + 5}{2} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

Tracé de D_2.

x	0	2
y	-3	-1

$0-3=-3$

$2-3=-1$



2. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2, on résout le système :

$$\begin{cases}3x+2y-5=0\\ -x+y+3=0\end{cases} \qquad \begin{cases}3x+2y=5 & (\times 1)\\ -x+y=-3 & (\times 3)\end{cases} \qquad \begin{cases}3x+2y=5\\ -3x+3y=-9\end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux lignes. Les x s'éliminent. On obtient une équation du premier degré en y, que l'on résout :

$$\begin{aligned}\cancel{3x}+2y-\cancel{3x}+3y&=5-9\\ \frac{\cancel{5}y}{\cancel{5}}&=\frac{-4}{5}\\ y&=-0,8.\end{aligned}$$

On reprend la première ligne du système pour trouver x :

$$\begin{aligned}3x+2y-5&=0\\ 3x+2\times(-0,8)-5&=0\\ 3x-1,6-5&=0\\ 3x-6,6&=0\\ 3x-\cancel{6,6}+\cancel{6,6}&=0+6,6\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{6,6}{3}\\ x&=2,2.\end{aligned}$$

Enfin on vérifie que le couple $(x,y)=(2,2;-0,8)$ est bien solution du système :

$$\begin{cases}3\times 2,2+2\times(-0,8)-5=0\\ -2,2+(-0,8)+3\quad =0\end{cases}$$

Conclusion : les droites D_1 et D_2 se coupent au point de coordonnées $(2,2;-0,8)$.

Remarques :

- On aurait aussi pu utiliser la méthode de la leçon sur les équations de droites et résoudre l'équation

$$\frac{-3x+5}{2} = x-3$$

(on rappelle que cela permet de trouver x ; et qu'il faut ensuite remplacer dans l'une des deux équations de droites pour trouver y).

- Si la plupart des systèmes d'équations ont une unique solution, c'est que leur résolution revient à chercher les points d'intersection de deux droites ; et que lorsque les droites ne sont pas parallèles, il n'y a qu'un seul point d'intersection [13].

Exercice 143 1. On note Δ la perpendiculaire à (BC) passant par A. Le vecteur

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5-2 \\ -2-4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

est perpendiculaire à Δ, donc d'après le théorème admis dans le cadre avant l'énoncé, Δ a une équation cartésienne de la forme

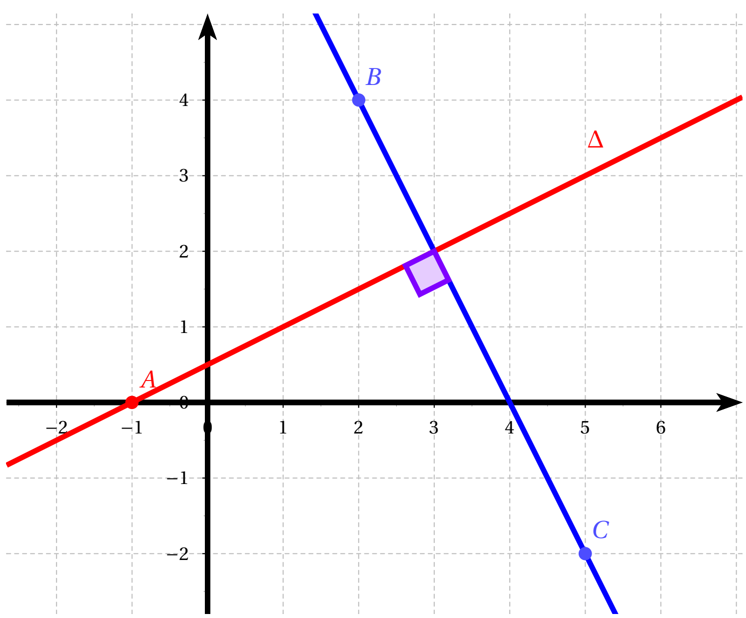
$$3x+(-6)y+c=0.$$

De plus Δ passe par $A(-1;0)$, donc $3\times(-1)+(-6)\times 0+c=0$, soit $-3+c=0$; et donc $c=3$. On a donc finalement

$$\Delta : 3x-6y+3=0.$$

Remarque : On peut diviser par 3, pour avoir quelque chose de plus « léger » :

$$\Delta : x-2y+1=0.$$



2. La médiatrice Δ de $[AB]$ est la perpendiculaire à $[AB]$ passant par son milieu. On note I ce milieu et on calcule ses coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{0+4}{2};\frac{-2+4}{2}\right) \qquad I\left(\frac{4}{2};\frac{2}{2}\right) \qquad I\,(2;1)\,.$$

Le vecteur

13. Lorsque les droites sont parallèles, soit elles sont confondues et le système a une infinité de solutions (correspondant à tous les points de la droite) ; soit les droites sont parallèles et distinctes, et alors le système n'a aucune solution. Un exemple est $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$, qui n'a clairement aucune solution, puisque quel que soit le couple (x,y), $2x+y$ ne peut pas être égal à la fois à 4 et à 5. En transposant, on obtient les droites d'équations $y=-2x+4$ et $y=-2x+5$, qui sont parallèles puisqu'elles ont le même coefficient directeur (-2), mais qui sont distinctes puisque leurs ordonnées à l'origine différent (4 pour l'une, 5 pour l'autre).

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

est perpendiculaire à Δ, donc d'après le théorème admis dans le cadre avant l'énoncé, Δ a une équation cartésienne de la forme

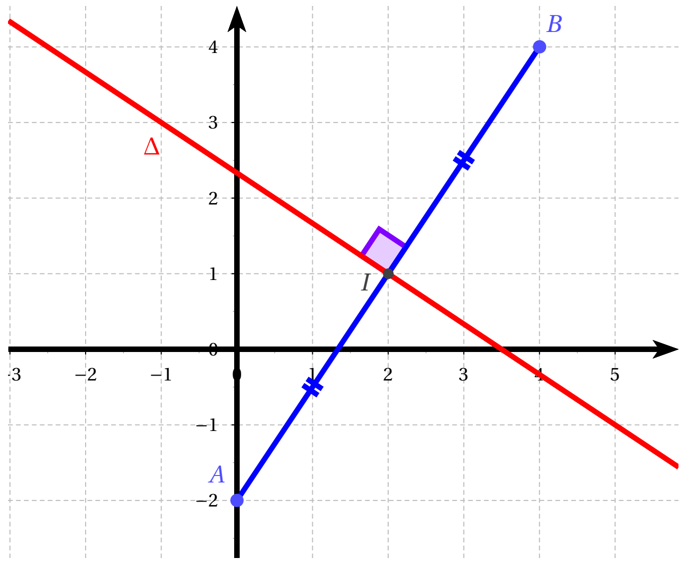
$$4x + 6y + c = 0.$$

De plus Δ passe par $I(2;1)$, donc $4 \times 2 + 6 \times 1 + c = 0$, soit $14 + c = 0$; et donc $c = -14$. On a donc finalement

$$\Delta : 4x + 6y - 14 = 0.$$

Remarque : Là aussi, on peut diviser (par 2) pour avoir quelque chose de plus simple :

$$\Delta : 2x + 3y - 7 = 0.$$



14 Fonctions de référence

Exercice 166 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. On rappelle que l'on remplace x par les différentes valeurs. Par exemple :

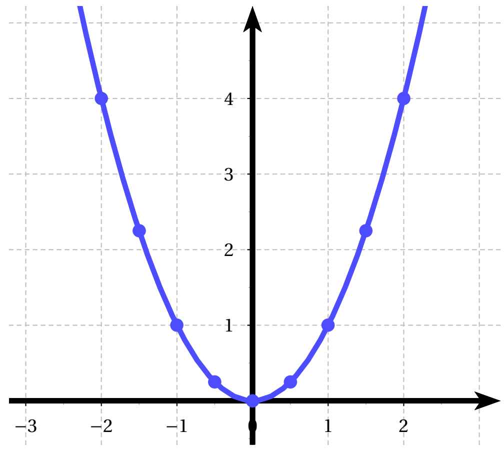
$$f(0,5) = 0,5^2 = 0,25,$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4.$$

   On obtient :

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$f(x)$	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4

   On rappelle également que la courbe est une parabole – terme générique pour les courbes d'équations $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).

2.



Remarque : L'axe des ordonnées est axe de symétrie pour la courbe.

3. On a tracé la courbe à partir d'un tableau de valeurs sur $[-2;2]$, mais on construit les tableaux de variations et de signe sur $]-\infty;+\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

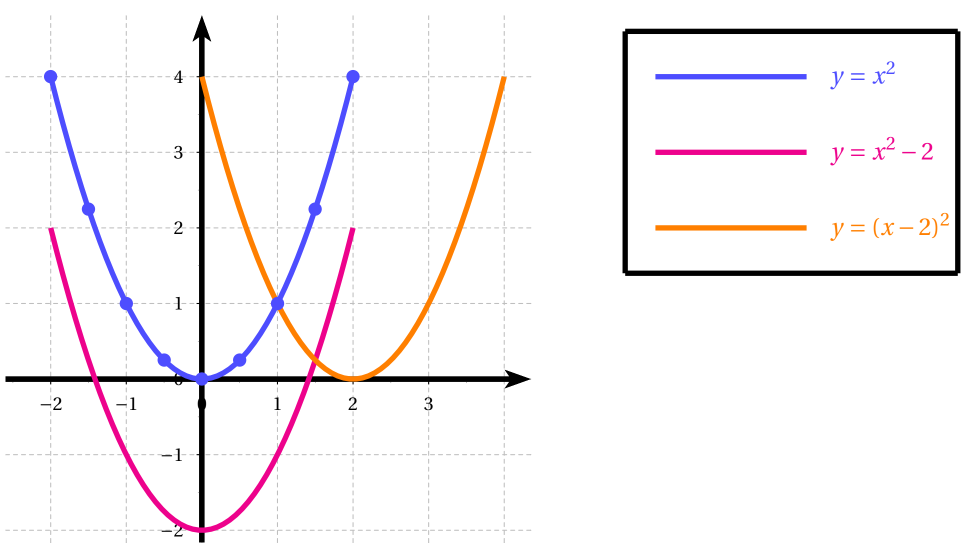
Remarque : Les valeurs écrites en rouge sont des limites. Cette notion sera étudiée en terminale et il n'est donc pas obligatoire d'écrire ces limites – je les ai fait apparaître à titre informatif.

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Exercice 167 La parabole d'équation $y = x^2$ a été tracée dans l'exercice précédent. Les deux autres courbes s'obtiennent de la façon suivante :

- Pour la courbe rose ($y = x^2 - 2$), on décale la courbe bleue de deux carreaux vers le bas.
- Pour la courbe orange ($y = (x-2)^2$), on décale la courbe bleue de deux carreaux vers la droite [14].



Exercice 168 La fonction r est définie sur $[0;+\infty[$ par $r(x) = \sqrt{x}$.

14. Oui, vers la droite, parce que la courbe orange a « deux carreaux de retard sur la bleue ». Prenons par exemple $x = 0$ en abscisse. Sur la parabole bleue, le point correspondant a pour ordonnée $y = 0^2 = 0$. Pour obtenir la même valeur en ordonnée dans le tracé de la courbe orange, il faut prendre $x = 2$, et l'on obtient bien $y = (2-2)^2 = 0^2 = 0$.

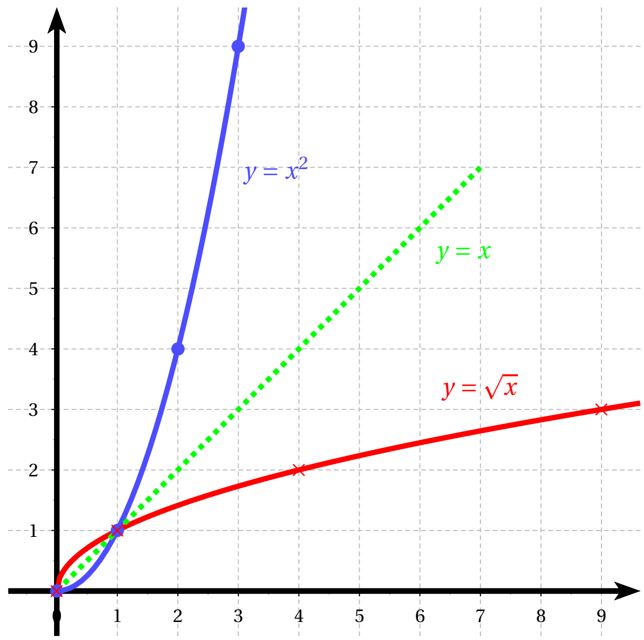
1. On complète côte à côte :
   - un tableau de valeurs pour $y = x^2$, sur $[0;3]$ et avec un pas de 1 ;
   - le tableau de valeurs de l'énoncé.

x	0	1	2	3
x^2	0	1	4	9

x	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	2	3

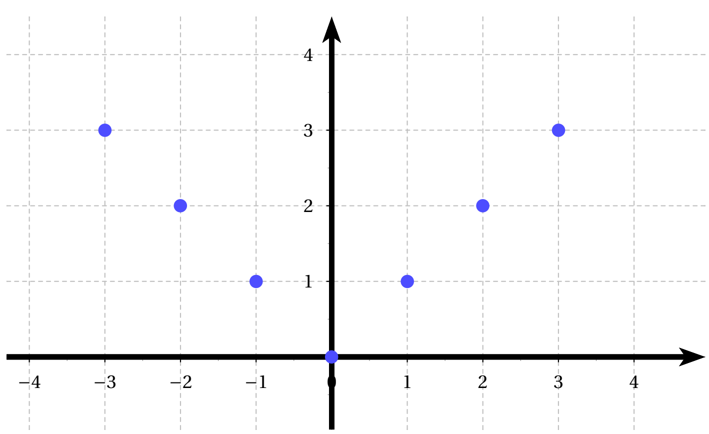
   Remarque : Les lignes des deux tableaux sont « inversées » : la première ligne du 1$^{\text{er}}$ est la deuxième ligne du 2$^{\text{nd}}$; et la deuxième ligne du 1$^{\text{er}}$ est la première ligne du 2$^{\text{nd}}$. Graphiquement, cela va se traduire par le fait que l'on passe de la courbe d'équation $y = x^2$ à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ « en inversant les valeurs en abscisse et en ordonnée ».

2. Du fait de la remarque faite à la question 1, les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (tracée en pointillés).



Exercice 169 On commence par un tableau de valeurs, puis on place les points correspondants dans un repère :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3



On constate que les points sont alignés de part et d'autre de l'axe des ordonnées. Faut-il dès lors tracer la courbe avec une règle, comme on le fait pour les fonctions affines, ou relier les points « à main levée », comme on le fait pour les autres fonctions ? Pour le savoir, il faut se rappeler de la définition de la valeur absolue [15] :

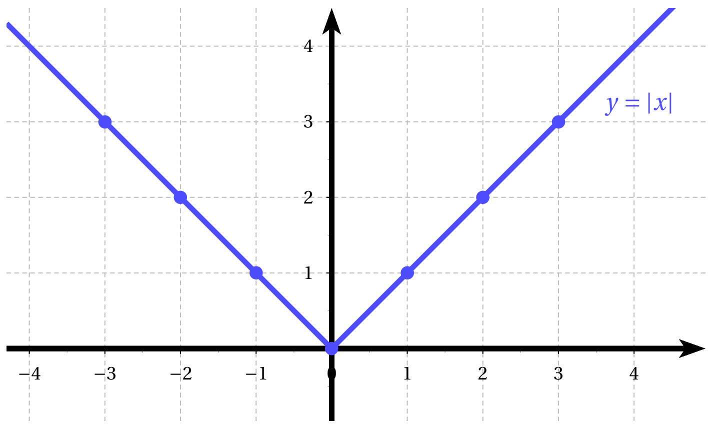
15. Pour $|0|$, vous choisissez la formule que vous voulez. Elles donnent toutes les deux le même résultat : $0 = -0 = |0|$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que la courbe de la fonction valeur absolue est la réunion :

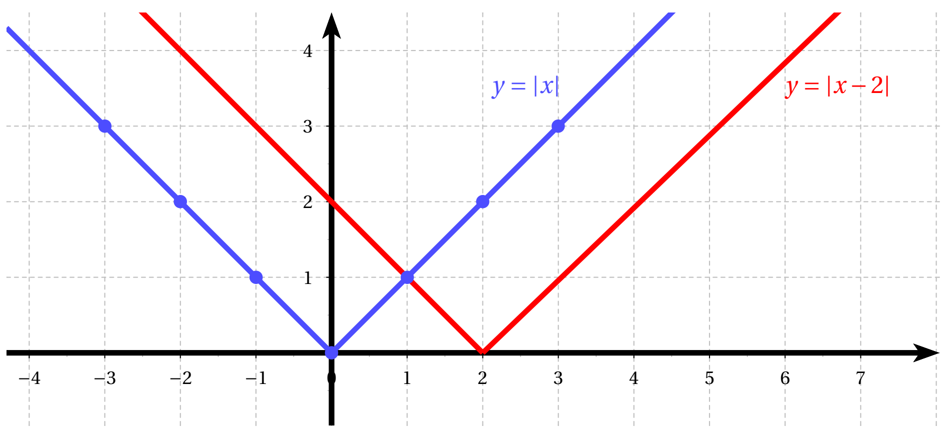
- de la droite d'équation $y = x$ sur $[0; +\infty[$,
- de la droite d'équation $y = -x$ sur $]-\infty; 0]$.

Comme ce sont deux droites, on les trace avec une règle !



Remarque : L'axe des ordonnées est axe de symétrie pour la courbe.

Exercice 170 La courbe d'équation $y = |x-2|$ s'obtient à partir de la courbe d'équation $y = |x|$ « en décalant de deux carreaux vers la droite ».



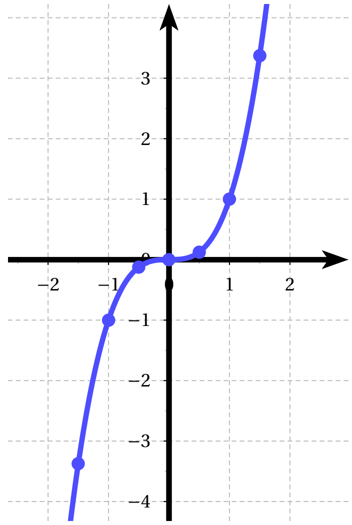
Exercice 171 La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.

1. Exemple de calcul :

$$g(-1,5) = (-1,5)^3 = (-1,5) \times (-1,5) \times (-1,5) = -3,375.$$

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$
$g(x)$	$-3,375$	-1	$-0,125$	0	$0,125$	1	$3,375$

2.



Remarques :

- $0,125 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, donc on place $0,125$ en montant d'1/8^{e} de carreau (une demi interligne, si vous avez des grands carreaux). De même $3,375$ est entre 3 et 4, une interligne et demi au dessus de 3.
- Le centre du repère est centre de symétrie pour la courbe.

3.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Remarque : On a ajouté la valeur en 0 pour information, ainsi que les limites.

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 172 On pose $i(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. [16]

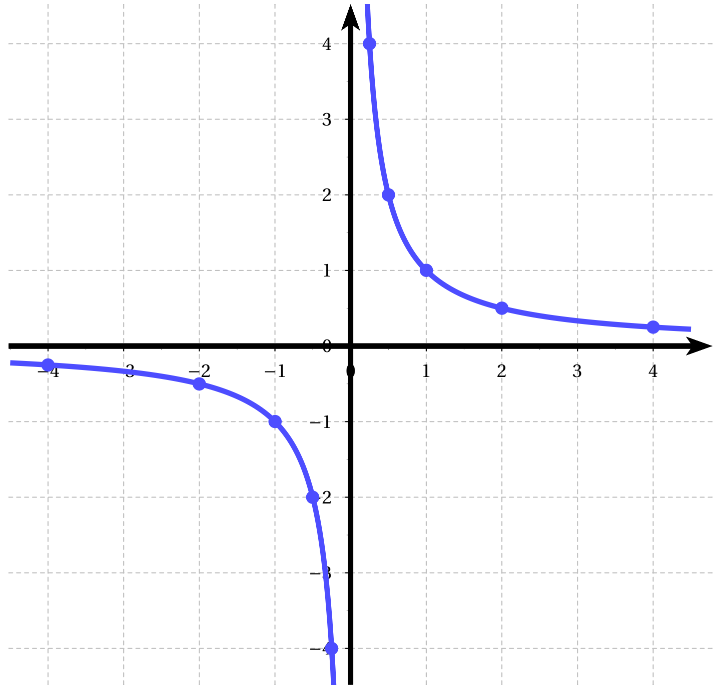
1. Le pas n'est pas régulier, donc on est un peu obligé de faire les calculs un par un , sans utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	$0,25$	$0,5$	1	2	4
$g(x)$	$-0,25$	$-0,5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0,5$	$0,25$

On ne peut pas diviser par 0, donc 0 est « valeur interdite ». Graphiquement, cela va se traduire par le fait que la courbe est « coupée en deux » au niveau de l'axe des ordonnées (voir question suivante).

2. La courbe, qu'on appelle une hyperbole, est symétrique par rapport au centre du repère.

16. $\mathbb{R} - \{0\}$ désigne l'ensemble de tous les nombres réels, sauf 0.



3. Le fait que 0 soit valeur interdite se traduit par une double barre dans le tableau de signe et dans le tableau de variations.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$i(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Remarque : On a de nouveau écrit les limites en rouge.

Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$i(x)$		$-$	‖	$+$	

Exercice 173 La fonction f est définie par

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

1. On ne peut pas diviser par 0, donc $\frac{3x+2}{2x+1}$ a un sens pour tous les réels x, sauf quand $2x+1=0$. On résout cette équation :

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 0 \\ 2x+\cancel{1}-\cancel{1} &= 0-1 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{-1}{2} \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : la seule valeur interdite est $x=-\frac{1}{2}$, donc l'ensemble de définition de f est

$$\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$$

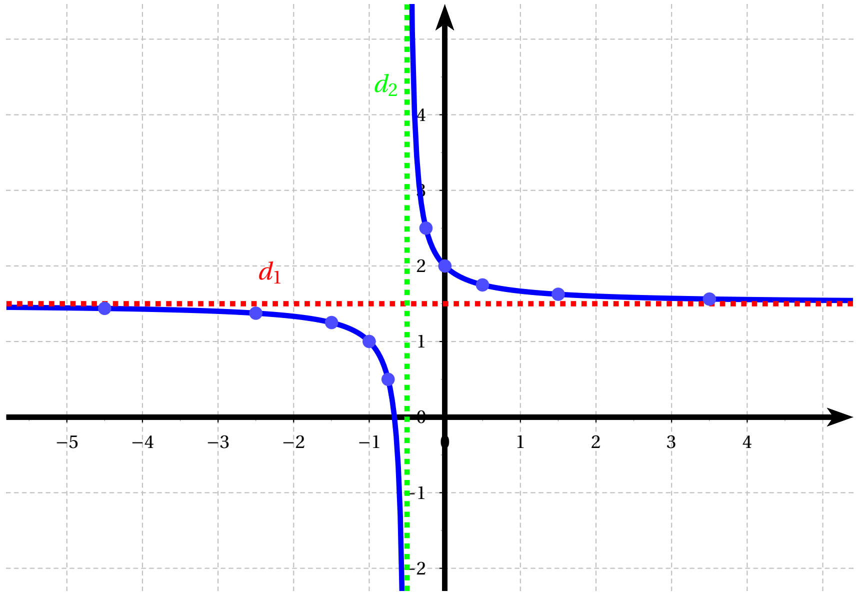
(ensemble de tous les réels, sauf $-\frac{1}{2}$).

2. Comme dans l'exercice précédent, le pas n'est pas régulier, donc on fait les calculs un par un. Par exemple :

$$f(1,5) = \frac{3\times 1,5+2}{2\times 1,5+1} = \frac{6,5}{4} = 1,625 \approx 1,63.$$

x	$-4,5$	$-2,5$	$-1,5$	-1	$-0,75$	$-0,25$	0	$0,5$	$1,5$	$3,5$
$f(x)$	$1,44$	$1,38$	$1,25$	1	$0,5$	$2,5$	2	$1,75$	$1,63$	$1,56$

3. On rappelle que :
   - la droite d_1 d'équation $y = \frac{3}{2}$ est horizontale ;
   - la droite d_2 d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est verticale.



Remarques :
- La courbe est « coupée en deux » au niveau de la valeur interdite, donc par la droite d_2. La courbe se rapproche de cette droite d_2, sans jamais la toucher.
- Prenons une « grande valeur de x » et faisons le calcul :

$$f(1\,000) = \frac{3 \times 1\,000 + 2}{2 \times 1\,000 + 1} = \frac{3\,002}{2\,001}.$$

  Le résultat est très proche de $\frac{3}{2}$ (la calculatrice donne $\frac{3\,002}{2\,001} \approx 1{,}500\,25$) donc pour les grandes valeurs de x, la courbe se rapproche de la droite d_1 (elle s'en rapproche, mais à nouveau sans jamais la toucher).
  Il en est de même pour de « grandes valeurs négatives » :

$$f(-1\,000) = \frac{3 \times (-1\,000) + 2}{2 \times (-1\,000) + 1} = \frac{2\,998}{1\,999} \approx 1{,}499\,75.$$

- La courbe s'appelle une hyperbole. Pour effectuer le tracé, une personne expérimentée se contenterait de placer les points de coordonnées $(-1; 1)$ et $(0; 2)$, puis viendrait « s'appuyer » sur les droites en pointillés (qu'il aurait préalablement tracées).
- Le point d'intersection des droites d_1 et d_2 est centre de symétrie pour la courbe.

4. **Tableau de variations**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$

Tableau de signe

On va le faire « par le calcul ». Le graphique nous permettra ensuite de contrôler notre tableau.

On résout :

$$\begin{aligned} 3x+2&=0\\ 3x+\cancel{2}-\cancel{2}&=0-2\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{-2}{3}\\ x&=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$a=3 \Rightarrow +$ à droite

$$\begin{aligned} 2x+1&=0\\ 2x+\cancel{1}-\cancel{1}&=0-1\\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}&=\frac{-1}{2}\\ x&=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$a=2 \Rightarrow +$ à droite

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{3x+2}{2x+1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Remarques :
- La courbe coupe l'axe des abscisses en $x=-\frac{2}{3}\approx -0,67$.
- On retrouve la valeur interdite $x=-\frac{1}{2}$.

12 Arithmétique et racines carrées

Exercice 144 Rappelons que :
- les nombres divisibles par 2 sont ceux qui se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- les nombres divisibles par 5 sont ceux qui se terminent par 0 ou 5 ;
- les nombres divisibles par 3 sont ceux dont la somme des chiffres est divisible par 3 ;
- les nombres divisibles par 9 sont ceux dont la somme des chiffres est divisible par 9.

Les calculs utiles à l'exercice sont :
- $8+4=12$, qui est divisible par 3, mais pas par 9 ;
- $4+9+5=18$, qui est divisible par 3 et par 9 ;
- $9+5+4+5=23$, qui n'est divisible ni par 3, ni par 9 ;
- $8+0+5+2=15$, qui est divisible par 3, mais pas par 9.

Ces calculs permettent de compléter le tableau (un pouce vert signifie la divisibilité, une croix rouge la non divisibilité) :

Nombre \ Divisible par	2	3	5	9
84	👍	👍	❌	❌
495	❌	👍	👍	👍
9545	❌	❌	👍	❌
8052	👍	👍	❌	❌

Remarque : 2, 3, 5 et 9 font partie des rares nombres pour lesquels il existe un critère de divisibilité simple. C'est également le cas de 25, 100 ou encore 11 (vous pouvez chercher le critère de divisibilité par 11, il n'est pas évident à deviner). Mais la plupart du temps, la seule solution pour tester la divisibilité est de poser la division euclidienne et de voir si le reste est nul ou non. Par exemple, pour savoir si 9 545 est divisible par 7, la méthode la plus simple n'a aucune subtilité :

$$\begin{array}{r|l}
9\,5\,4\,5 & 7 \\ \cline{2-2}
2\,5 & 1\,3\,6\,3 \\
4\,4 & \\
2\,5 & \\
4 &
\end{array}$$

Le reste est non nul, donc 9 545 n'est pas divisible par 7.

Exercice 145 1. On cherche tous les diviseurs de 48 et de 84. Pour cela, on écrit tous les produits d'entiers qui donnent 48 et 84 :

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \times 48 \\ &= 2 \times 24 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 4 \times 12 \\ &= 6 \times 8. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 48 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

$$\begin{aligned} 84 &= 1 \times 84 \\ &= 2 \times 42 \\ &= 3 \times 28 \\ &= 4 \times 21 \\ &= 6 \times 14 \\ &= 7 \times 12. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.

2. Le PGCD est le plus grand nombre qui divise à la fois 48 et 84. L'examen des listes ci-dessus donne

$$\text{PGCD}(48, 84) = 12.$$

Exercice 146 Rappelons pour commencer que les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7 et 11.

Pour savoir si un nombre n est premier, on essaye de le diviser par tous les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{n}$. S'il n'est divisible par aucun d'entre eux, c'est qu'il est premier ; sinon, qu'il ne l'est pas. Parfois, il y a un diviseur évident, ce qui nous épargne de fastidieux calculs.

- 425 n'est pas premier, car il est divisible par 5 (diviseur évident).
- $\sqrt{53} = 7, \cdots$
  53 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à 7 (à savoir 2, 3, 5 et 7 [17]), donc il est premier.
- $7777 = 7 \times 1111$, donc 7 777 n'est pas premier (7 est un diviseur évident).
- $\sqrt{97} \approx 9, \cdots$, et 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7. Il est donc premier.
- $\sqrt{143} = 11, \cdots$ Le test avec 2, 3, 5 et 7 pourrait laisser penser que 143 est premier ; mais ce n'est pas le cas, puisque $143 = 11 \times 13$ (il faut tester jusque 11, et ça ne fonctionne que pour 11).

Exercice 147 On décompose chacun des deux nombres en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

$$\begin{array}{r|l} 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7.$$

On en déduit $\text{PGCD}(840, 756) = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$.

Exercice 148 Le nombre d'équipes doit diviser le nombre de filles et le nombre de garçons. Pour avoir le nombre maximal d'équipes, il faut donc calculer le PGCD de 144 et 252 :

17. Pour 2, 3 et 5, c'est la même technique que dans le 1er exercice de la feuille ; pour 7, on utilise les tables de multiplication : 53 est entre $7 \times 7 = 49$ et $7 \times 8 = 56$.

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3.$ $\quad$ $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7.$

On en déduit PGCD$(144, 252) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.

Conclusion : il y aura 36 équipes ; et comme $144 \div 36 = 4$ et $252 \div 36 = 7$, chacune comportera 4 filles et 7 garçons.

Exercice 149 Le nombre de cageots doit diviser 60, 84 et 120 ; et on veut que ce nombre soit le plus grand possible. On calcule donc le PGCD de 60, 84 et 120 :
On décompose chacun des trois nombres en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$ $\quad$ $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7.$ $\quad$ $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5.$

On en déduit PGCD$(84, 60, 120) = 2 \times 2 \times 3 = 12$.

Conclusion : Manon peut faire 12 cageots au maximum. (Chacun d'eux contiendra $60 \div 12 = 5$ pêches, $84 \div 12 = 7$ abricots et $120 \div 12 = 10$ cerises.)

Exercice 150 1. On décompose chacun des deux nombres en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7.$ $\quad$ $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7.$

2. Le PPCM doit être un multiple de 126 et de 420, donc chacun des nombres apparaissant dans les décompositions de 126 et 420 doit apparaître dans celle du PPCM. De plus, le PPCM doit être le plus petit possible ; on l'obtient donc en multipliant tous les nombres qui apparaissent au moins une fois dans les décompositions de 126 et 420 :

$$\text{PPCM}(126, 420) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 1\,260.$$

Remarque : $1\,260 = 126 \times 10 = 420 \times 3$.

Exercice 151 Je verrai à nouveau les objets en même temps dans un nombre de jours multiple à la fois de 168 et 90. Comme on cherche la plus petite solution, il faut déterminer le plus petit multiple commun à 168 et 90.

On décompose comme d'habitude en produits de nombres premiers (je ne détaille pas) ; on obtient :

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7,$$
$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5,$$

d'où l'on tire

$$\text{PPCM}(168, 90) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2\,520.$$

Les objets A et B apparaîtront de nouveau en même temps dans 2 520 jours.

Remarque : Le même type de calcul que celui que nous venons de mener permet de comprendre que le Soleil, la Terre et la Lune se retrouvent dans des configurations sensiblement identiques tous les 18 ans et 11 jours. Cette période, appelée « saros », est utilisée pour prédire les éclipses.

Exercice 152

1. On décompose avec la méthode habituelle (je ne détaille pas) :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1.$$

On en déduit

$$3\,600 = 60^2 = 60 \times 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2.$$

Chaque exposant (en rouge ci-dessous) de la décomposition de 3 600 est le double (en bleu) de celui de la décomposition de 60 :

$$3\,600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2,$$
$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1.$$

2. • Le nombre $2^4 \times 3^6 \times 7^8$ est un carré parfait : c'est le carré de $2^2 \times 3^3 \times 7^4$ (il suffit de diviser chaque exposant par 2, comme dans la question précédente).

Remarque : Il n'est pas utile de faire le calcul !

• Lorsqu'on élève un nombre au carré, chaque exposant dans la décomposition est multiplié par 2. Les exposants sont donc des nombres pairs, comme dans les décompositions de $60^2 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$ et de $2^4 \times 3^6 \times 7^8$ rencontrées ci-dessus.

Ce n'est en revanche pas le cas de $2^{10} \times 3^5 \times 7^4$, à cause de l'exposant 5, qui est impair. Ce nombre n'est donc pas un carré parfait.

Remarque : D'une façon générale, un entier naturel non nul est un carré parfait si, et seulement si, chaque exposant dans sa décomposition en produit de nombres premiers est un nombre pair.

3. On décompose avec la méthode habituelle (je ne détaille pas) :

$$792 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 11^1.$$

On cherche un entier strictement positif n qui soit multiple de 792. Dans la décomposition de n doivent apparaître 2^a, 3^b et 11^c, avec $a \geq 3$, $b \geq 2$ et $c \geq 1$, puisque 792 divise n.
De plus, a, b et c doivent être pairs, compte tenu de la remarque qui conclut la question précédente.

Conclusion : le plus petit entier qui convienne est

$$n = 2^4 \times 3^2 \times 11^2$$

(que l'on n'est pas obligé de calculer explicitement – mais pour information, $n = 17\,424$).

Exercice 153

1. $\sqrt{6}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut 6.

2. • le nombre $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ est positif (car $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ le sont).

- le carré de $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ est

$$\left(\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{2}^2 \times \sqrt{3}^2 = 2 \times 3 = 6.$$

Conclusion : $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ est un nombre positif dont le carré vaut 6, donc (par définition) il est égal à $\sqrt{6}$.

3. Si a et b sont deux réels positifs, alors
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}.$$
En effet, en calculant comme dans la question précédente, on montre que le carré de $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est égal à $a \times b$. Comme $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est un nombre positif, et que $\sqrt{a \times b}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut $a \times b$, on obtient $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

4. On utilise le résultat de la question précédente :
$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

Exercice 154 1.
$$\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (3-2)\sqrt{5} = 1\sqrt{5}.$$

2.
$$\sqrt{50} + 3\sqrt{2} - \sqrt{32} = \sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (5+3-4)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

3.
$$2\sqrt{12} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27} = 2\sqrt{4 \times 3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{9 \times 3} = 2\sqrt{4} \times \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 2 \times 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (4-5+3)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

4.
$$\begin{aligned} 6\sqrt{10} + 2\sqrt{40} - 3\sqrt{90} &= 6\sqrt{10} + 2\sqrt{4 \times 10} - 3\sqrt{9 \times 10} = 6\sqrt{10} + 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{10} - 3 \times \sqrt{9} \times \sqrt{10} \\ &= 6\sqrt{10} + 2 \times 2\sqrt{10} - 3 \times 3\sqrt{10} = (6+4-9)\sqrt{10} = 1\sqrt{10}. \end{aligned}$$

5.
$$\sqrt{200} - 2\sqrt{18} + \sqrt{2} = \sqrt{100 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 2} + \sqrt{2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = (10-6+1)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Remarque : Bien sûr, $1\sqrt{5} = \sqrt{5}$ et $1\sqrt{10} = \sqrt{10}$.

Exercice 155 1.
$$\frac{2+\sqrt{12}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{12}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{4 \times 3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\cancel{2} \times \sqrt{3}}{\cancel{2}} = 1 + \sqrt{3}.$$

2. On utilise l'identité remarquable n°2 :
$$\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{18}^2 - 2 \times \sqrt{18} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 18 - 2 \times \sqrt{18 \times 2} + 2 = 18 - 2 \times \sqrt{36} + 2 = 18 - 2 \times 6 + 2 = 18 - 12 + 2 = 8.$$

3. On utilise l'identité remarquable n°3 :
$$\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right) = \sqrt{5}^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1.$$

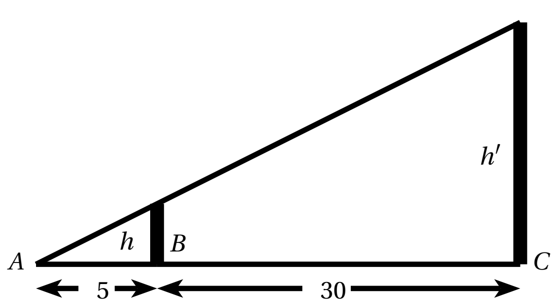
13 Inégalités

Exercice 156 1. • On part de
$$1 \leq x \leq 2.$$
On multiplie par 2 :
$$\begin{aligned} &1 \times 2 \leq x \times 2 \leq 2 \times 2 \\ &2 \leq 2x \leq 4. \end{aligned}$$

- On repart de
$$2 \leq 2x \leq 4$$
et on retranche 1 :
$$\begin{aligned} 2-1 &\leq 2x-1 \leq 4-1 \\ 1 &\leq 2x-1 \leq 3. \end{aligned}$$
- On part de
$$1 \leq x \leq 2.$$
On multiplie par (-3), ⚠sans oublier de changer le sens des inégalités, car (-3) est ⊖ :
$$\begin{aligned} 1\times(-3) &\geq x\times(-3) \geq 2\times(-3) \\ -3 &\geq -3x \geq -6. \end{aligned}$$
Puis on ajoute 4 :
$$\begin{aligned} -3+4 &\geq -3x+4 \geq -6+4 \\ 1 &\geq -3x+4 \geq -2. \end{aligned}$$

2. - On part de
$$-2 < x \leq 5.$$
On retranche 3 :
$$\begin{aligned} -2-3 &< x-3 \leq 5-3 \\ -5 &< x-3 \leq 2. \end{aligned}$$
   - On part de
$$-2 < x \leq 5.$$
On multiplie par (-4), ⚠sans oublier de changer le sens des inégalités, car (-4) est ⊖ :
$$\begin{aligned} -2\times(-4) &> x\times(-4) \geq 5\times(-4) \\ 8 &> -4x \geq -20. \end{aligned}$$
   - On remarque que $-x+2$ signifie $-1x+2$, donc on part de
$$-2 < x \leq 5$$
et on multiplie par (-1) (sans oublier, une nouvelle fois, de changer le sens des inégalités puisque (-1) est ⊖) :
$$\begin{aligned} -2\times(-1) &> x\times(-1) \geq 5\times(-1) \\ 2 &> -x \geq -5. \end{aligned}$$
Puis on ajoute 2 :
$$\begin{aligned} 2+2 &> -x+2 \geq -5+2 \\ 4 &> -x+2 \geq -3. \end{aligned}$$

Exercice 157 Sur la figure ci-dessous, on sait que les deux segments en traits gras sont parallèles et que $2 \leq h \leq 3$.



$AC = 5+30 = 35$, et $AB = 5$. La longueur AC est 7 fois plus grande que la longueur AB, donc d'après le théorème de Thalès, h' est 7 fois plus grande que h :

$$h' = h\times 7.$$

On part donc de

$$2 \leq h \leq 3$$

et on multiplie par 7 :

$$\begin{aligned} &2\times 7 \leq h\times 7 \leq 3\times 7 \\ &14 \leq h' \leq 21. \end{aligned}$$

Exercice 158 Soient $a \leq b$ et $c \leq d$.

1. - On part de

     $$a \leq b$$

     et on ajoute c :

     $$\begin{aligned} &a \leq b \\ &a+c \leq b+c. \end{aligned}$$

   - Cette fois, on part de

     $$c \leq d$$

     et on ajoute b :

     $$\begin{aligned} &c \leq d \\ &b+c \leq b+d. \end{aligned}$$

2. D'après la question 1,

   $$a+c \leq b+c \leq b+d,$$

   donc

   $$a+c \leq b+d.$$

Exercice 159 Soient $A = \sqrt{7+\sqrt{47}}$ et $B = 2+\sqrt{3}$.

1. D'une part $A^2 = \sqrt{7+\sqrt{47}}^2 = 7+\sqrt{47}$. D'autre part

   $$B^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 2^2+2\times 2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2 = 4+4\times\sqrt{3}+3 = 7+\sqrt{16}\times\sqrt{3} = 7+\sqrt{16\times 3} = 7+\sqrt{48}.$$

2. D'après la question précédente $A^2 < B^2$. Or A et B sont strictement positifs, et deux nombres strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc $A < B$.

Exercice 160 On calcule A^2 et B^2 :

- $A^2 = (\sqrt{7}+\sqrt{8})^2 = \sqrt{7}^2+2\times\sqrt{7}\times\sqrt{8}+\sqrt{8}^2 = 7+2\times\sqrt{7\times 8}+8 = 15+2\sqrt{56}.$
- $B^2 = (3+\sqrt{6})^2 = 3^2+2\times 3\times\sqrt{6}+\sqrt{6}^2 = 9+2\times\sqrt{9}\times\sqrt{6}+6 = 15+2\times\sqrt{9\times 6} = 15+2\sqrt{54}.$

On constate que $A^2 > B^2$. Or A et B sont strictement positifs, et deux nombres strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc $A > B$.

Remarque : On pouvait aussi « faire rentrer les 2 » dans les racines dans les calculs de A^2 et B^2. On aurait obtenu

$$A^2 = 15+\sqrt{224} \qquad \text{et} \qquad B^2 = 15+\sqrt{216}.$$

Exercice 161 Les nombres $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sont strictement positifs, puisque a et b le sont. On calcule et on compare leurs carrés, comme dans les exercices précédents :

- $\sqrt{a+b}^2 = a+b.$
- $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2+2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\sqrt{b}^2 = a+2\sqrt{a\times b}+b = a+b+2\sqrt{ab}.$

On voit que $\sqrt{a+b}^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$, puisque $2\sqrt{ab}$ est un nombre strictement positif. Or deux nombres strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

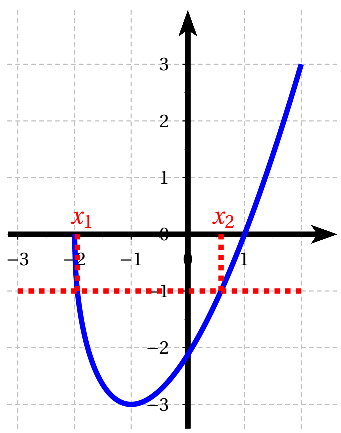
Exercice 162 On regroupe la correction des deux questions en une seule.

On trace la courbe de la fonction et on construit le tableau de variations à côté. Chacun des deux permet de voir que l'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions :

- une première solution x_1 dans l'intervalle $[-2;-1]$;
- une deuxième solution x_2 dans l'intervalle $[-1;2]$.

Remarques :

- Il revient au même de dire que -1 a exactement deux antécédents par f.
- Le graphique permet d'obtenir les valeurs approchées $x_1 \approx -1,9$ et $x_2 \approx 0,6$; mais déterminer ces valeurs approchées ne nous est pas demandé (ni dans cet exercice, ni dans les suivants), et c'est un problème (intéressant) que nous ne creuserons pas – nous le laissons pour les classes suivantes.



x	-2	x_1	-1	x_2	2
$f(x)$	0	-1	-3	-1	3

- En descendant de 0 à -3, la fonction prend une fois et une seule la valeur -1.
- En montant de -3 à 3, la fonction prend une fois et une seule la valeur -1.

Exercice 163 Soit g une fonction définie sur $[-3;3]$, dont voici le tableau de variations :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	5	4	2	4	5	4	0

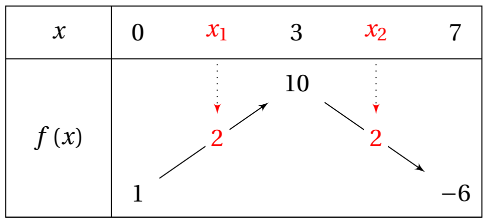
1. Les solutions de l'équation $g(x) = 4$ sont -2, 0 et 2 (codage en rouge dans le tableau de variations). L'ensemble des solutions de l'équation est donc
$$\mathscr{S} = \{-2;0;2\}.$$

2. $g(x) \geq 4$ lorsque $-3 \leq x \leq -2$ ou lorsque $0 \leq x \leq 2$ (codage en bleu dans le tableau de variations). L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc
$$\mathscr{S} = [-3;-2] \cup [0;2].$$

Remarque : On retrouve le $\cup$ (union) de la leçon de probabilités.

Exercice 164 On pose $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ pour $x \in [0;7]$. On admet que f est strictement croissante sur $[0;3]$ et strictement décroissante sur $[3;7]$.

1.



Pour compléter le tableau de variations, on calcule :

$f(0) = -0^2 + 6 \times 0 + 1 = 1$

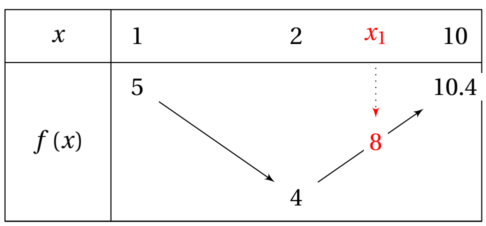
$f(3) = -3^2 + 6 \times 3 + 1 = -9 + 18 + 1 = 10$

$f(7) = -7^2 + 6 \times 7 + 1 = -49 + 42 + 1 = -6$

2. D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions x_1, x_2 (codage en rouge).

Exercice 165 On pose $f(x) = x + \frac{4}{x}$ pour $x \in [1;10]$. On admet que f est strictement décroissante sur $[1;2]$ et strictement croissante sur $[2;10]$.

1.



Pour compléter le tableau de variations, on calcule :

$$f(1) = 1 + \frac{4}{1} = 1 + 4 = 5$$

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 2 + 2 = 4$$

$$f(10) = 10 + \frac{4}{10} = 10 + 0,4 = 10,4$$

2. D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 8$ a une seule solution x_1 (codage en rouge).