

Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1

1. f est de la forme $f = u^n$, avec $u(x) = 5x - 3$, $u'(x) = 5$ et $n = 4$. Donc pour tout réel x :

$$f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1} = 4 \times 5 \times (5x - 3)^{4-1} = 20(5x - 3)^3.$$

2. g est de la forme $g = e^u$, avec $u(x) = x^2 - x + 1$, $u'(x) = 2x - 1$. Donc pour tout réel x :

$$g'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x - 1)e^{x^2 - x + 1}.$$

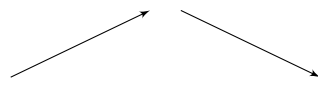
Exercice 2

1. (a) La fonction f s'écrit comme un produit : $f = u \times v$, avec (b) On étudie le signe de f' et on en déduit les variations de f :

- $u(x) = 4x - 2$, $u'(x) = 4$,
- $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.

Donc pour tout $x \in [0; 6]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 4 \times e^{-x} + (4x - 2) \times (-e^{-x}) \\ &= 4 \times e^{-x} - 4x \times e^{-x} + 2 \times e^{-x} \\ &= (4 - 4x + 2) e^{-x} \\ &= (-4x + 6) e^{-x}. \end{aligned}$$

| x | 0 | 1.5 | 6 |
|-----------|--|-----|---|
| $-4x + 6$ | + | 0 | - |
| e^{-x} | + | | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ |  | | |

2. (a) On admet que

$$f''(x) = (4x - 10)e^{-x}$$

pour tout $x \in [0; 6]$. On peut donc construire le tableau de signe :

| x | 0 | 2.5 | 6 |
|-----------|---|-----|---|
| $4x - 10$ | - | 0 | + |
| e^{-x} | + | | + |
| $f''(x)$ | - | 0 | + |

Par conséquent :

- f'' est négative sur $[0; 2,5]$, donc f est concave sur cet intervalle.
 - f'' est positive sur $[2,5; 6]$, donc f est convexe sur cet intervalle.
- (b) f'' change de signe en 2,5, donc il y a un unique point d'inflexion A , dont l'abscisse vaut 2,5.
La tangente T en ce point A a pour équation

$$y = f'(2,5)(x - 2,5) + f(2,5).$$

On calcule :

- $f(2,5) = (4 \times 2,5 - 2)e^{-2,5} = 8e^{-2,5}$,
 - $f'(2,5) = (-4 \times 2,5 + 6)e^{-2,5} = -4e^{-2,5}$,
- donc

$$T : y = -4e^{-2,5}(x - 2,5) + 8e^{-2,5}$$

$$T : y = -4e^{-2,5}x + 10e^{-2,5} + 8e^{-2,5}$$

$$T : y = -4e^{-2,5}x + 18e^{-2,5}$$

(c) Le point B est le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses. Pour obtenir ses coordonnées, on remplace donc y par 0 dans l'équation de T , puis on résout pour trouver x :

$$0 = -4e^{-2,5}x + 18e^{-2,5} \iff 4e^{-2,5}x = 18e^{-2,5} \iff x = \frac{18e^{-2,5}}{4e^{-2,5}} \iff x = 4,5.$$

Conclusion : B a pour coordonnées $(4,5 ; 0)$.

Exercice 3

Un mobile se déplace sur un axe $[Ox]$ gradué en cm. On observe son déplacement pendant une durée de 6 secondes.

Sa position sur l'axe est donnée en fonction du temps t (en s), par la fonction

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t.$$

1. Pour tout $t \in [0;6]$:

$$f'(t) = \frac{1}{3} \times 3t^2 - 4 \times 2t + 12 \times 1 = t^2 - 8t + 12.$$

Pour obtenir le signe de f' , on résout l'équation $t^2 - 8t + 12 = 0$:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 16,$$

donc il y a deux racines :

$$t_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{8+4}{2} = 6,$$

$$t_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{8-4}{2} = 2.$$

On en déduit le signe de f' et les variations de f :

| t | 0 | 2 | 6 |
|---------|---|----------------|---|
| $f'(t)$ | + | 0 | - |
| $f(t)$ | 0 | $\frac{32}{3}$ | 0 |

- D'après le tableau de variations de la question précédente, le mobile part du point O , puis se déplace vers la droite, jusqu'à la graduation $\frac{32}{3}$ cm, qu'il atteint au temps $t = 2$ s. Ensuite il revient au point O , qu'il atteint au temps $t = 6$ s.
- Lorsqu'il retourne au point O , donc au temps $t = 6$ s, la vitesse du mobile est $f'(6) = 0$ cm/s.