Lycée Mariette

Boulogne-sur-Mer

Exercices de Mathématiques

Seconde

Nicolas Perpète

Table des matières

I. Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1

1. Pour faire des crêpes pour 4 personnes, il faut 250 g de farine, 1/2 L de lait et 4 œufs. Combien faut-il de chaque ingrédient si l'on fait des crêpes pour 6 personnes ?
2. Combien payerai-je 6 yaourts de 125 g chacun, sachant que le prix au kg est de 2 € ?
3. Combien de temps (en heures, minutes) mettrai-je pour parcourir 45 km à la vitesse de 20 km/h ?
4. On a 7 florins en échange de 6 pistoles et 5 deniers en échange de 4 pistoles. Combien de florins aura-t-on en échange de 30 deniers ?

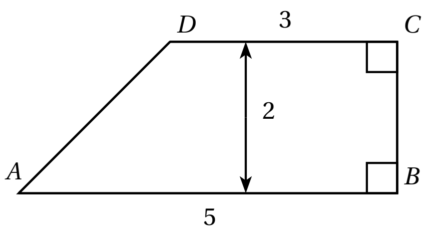
Exercice 2

Stéphane s'entraîne au triathlon. Il nage 500 m à la vitesse moyenne de 3 km/h, puis court 5 km à la vitesse moyenne de 15 km/h.

1. Combien de temps nage-t-il ? Combien de temps court-il ? On donnera les réponses en minutes.
2. Calculer la vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours.

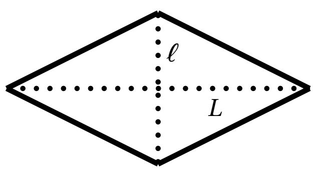
Exercice 3

Calculer l'aire du trapèze ci-dessous.



Exercice 4

Déterminer une formule pour l'aire du losange de diagonales ℓ et L.



Exercice 5

Illustrer par un schéma la propriété suivante :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 6

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.
Prouver que les triangles BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7

Écrire la négation des phrases ci-dessous :

1. Tous les hommes sont mortels.
2. Il existe un dessert sans sucre à la cantine.
3. Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.
4. Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne.
5. Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

Exercice 8

En mathématiques, une *implication* est un énoncé de la forme

Si A alors B.

L'implication réciproque est alors

Si B alors A.

Et l'implication contraposée est

Si (non B) alors (non A).

Lorsqu'une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi. En revanche, sa réciproque ne l'est pas forcément.

1. **a.** Qui sont A et B dans l'implication suivante ?
   Si un nombre se termine par 5, alors il est multiple de 5.
   Cette implication est-elle vraie ?
   b. Écrire l'implication contraposée et l'implication réciproque. Sont-elles vraies ?
2. Écrire une implication dont la réciproque soit vraie.

Exercice 9

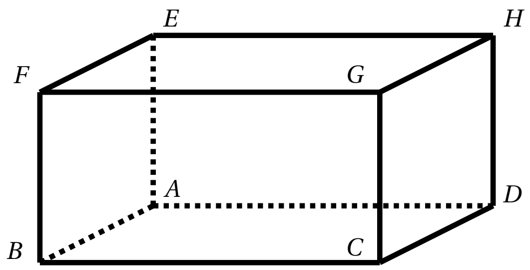
1. Énoncer le théorème de Pythagore.
2. Énoncer la contraposée.
3. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ?

Exercice 10

1. EFG est un triangle rectangle en E tel que $EF = 5$ et $FG = 7$. Faire une figure en prenant le cm comme unité de longueur, puis calculer EG.
2. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Est-il rectangle ?

Exercice 11

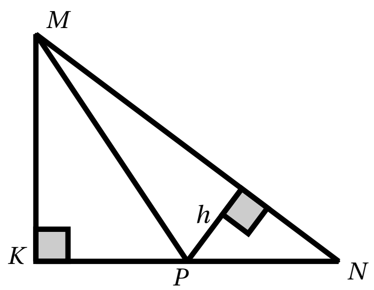
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



Calculer la longueur de la diagonale AG.

Exercice 12

Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1{,}2$ cm.



1. Calculer l'aire du triangle MNP.
2. En déduire la longueur PN.
3. Calculer enfin la longueur du segment $[MP]$.

Exercice 13

1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b, l'hypoténuse mesure c. Exprimer c en fonction de a et de b.
2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

   Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$.

Exercice 14

1. En remarquant que $1^2+2^2 = 5$, construire un segment de longueur $\sqrt{5}$ cm ou $\sqrt{5}$ carreaux.
2. Justifier l'encadrement
   $$2 < \sqrt{5} < 3.$$
3. Déterminer un encadrement de $\sqrt{5}$ de la forme $a < \sqrt{5} < b$, où la différence entre a et b est égale à 0,1.

Exercice 15

Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. Faire une figure pour illustrer la définition.
2. Prouver que pour tout point M sur Δ distinct de H, $AM > AH$.
3. Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Que représente $[AH]$ pour le triangle ABC ?

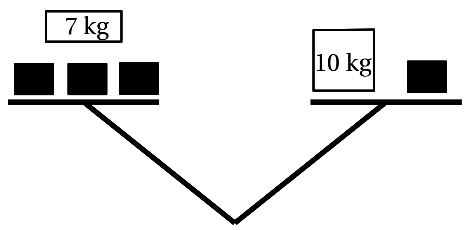
Exercice 16

Résoudre les équations :

1. $x+7 = 18$.
2. $3x+4 = 19$.
3. $3{,}5x - 9 = 5$.
4. $x+1 = -2x-5$.
5. $-2x+4 = 3x-6$.

Exercice 17

Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Déterminer la valeur de M.

Exercice 18

Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Traduire le problème par une équation.
2. Déterminer la valeur de x.

Exercice 19

Écrire sous forme de fractions irréductibles :

$A = \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$ $\quad B = \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ $\quad C = 2 + \frac{1}{5}$ $\quad D = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6}$

$E = 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9}$ $\quad F = 4 - 3 \times \frac{5}{6}$ $\quad G = \frac{6}{10} \times \frac{15}{8}$, $H = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Exercice 20

Son père et ses deux frères offrent un livre à Zoé. Le père donne le tiers de la somme nécessaire. Le petit-frère donne le quart de la somme. Et pour avoir la somme exacte, le grand-frère donne 10 euros. Combien coûte le livre ?

Exercice 21

Calculer astucieusement :

$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4}, \qquad B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7}, \qquad C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}},$$

$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4}, \qquad E = \frac{\left(10^4\right)^3}{10^8}, \qquad F = \frac{4^5}{8^3},$$

$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7}.$$

Exercice 22

Ranger les nombres suivants par ordre croissant :

$$A = 35{,}4 \times 10^{-3},\ B = 0{,}034,\ C = 3{,}6 \times 10^{-2},$$

$$D = \frac{355}{10^4},\ E = \frac{7}{60} \times \frac{3}{10}.$$

Exercice 23

On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm, la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm. On dispose d'un robinet dont le débit est de 6 litres par minute.

1. Faire un schéma, puis calculer le volume de l'aquarium, en litres.
2. Déterminer la durée du remplissage.

Exercice 24

Sans utiliser la calculatrice, calculer :

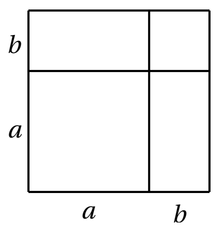
$$99^2 \quad ; \quad 103^2 \quad ; \quad 71 \times 69$$

$$2{,}05^2 \quad ; \quad 4{,}3 \times 3{,}7$$

Exercice 25

En calculant l'aire du grand carré de deux façons différentes, retrouver l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

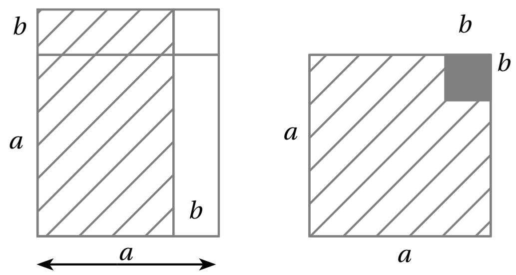


Exercice 26

1. Comparer les nombres $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$.
2. Comparer les nombres $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$.

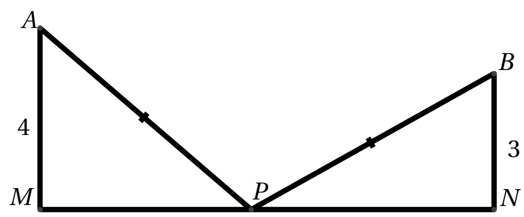
Exercice 27

Démontrer que les deux zones hachurées sur les figures ci-dessous ont la même aire.



Exercice 28

Sur la figure ci-dessous, les points M, P, N sont alignés dans cet ordre, les triangles MPA et NPB sont rectangles respectivement en M et en N et les longueurs AP et BP sont égales. On sait également que $MN = 10$.



Calculer la longueur MP.

Exercice 29

L'hypoténuse d'un triangle rectangle vaut 13 et son aire est égale à 30. On note x et y la longueur des côtés de l'angle droit, y désignant le plus petit des deux côtés.

1. Calculer $x^2 + y^2$, puis $(x+y)^2$. En déduire que $x + y = 17$.
2. Calculer de même $x - y$, puis déterminer les valeurs de x et de y.

II. Nombres réels

Exercice 30 (🏛)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier les réponses.

1. $-7 \in \mathbb{Q}$
2. $-7 \in \mathbb{N}$
3. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{Z}$
4. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{D}$
5. $5{,}824 \in \mathbb{D}$
6. $5{,}824 \in \mathbb{Q}$
7. $\dfrac{10}{6} \in \mathbb{D}$
8. $\dfrac{17}{11} \in \mathbb{D}$

Exercice 31 (🏛)

1. Construire une droite graduée et représenter chaque intervalle d'une couleur différente :
   a. $I_1 = [1;4]$
   b. $I_2 = [5;+\infty[$
   c. $I_3 =]-2;0[$
2. Construire une droite graduée et représenter chaque intervalle d'une couleur différente :
   a. $I_1 = [-1;1[$
   b. $I_2 =]3;+\infty[$
   c. $I_3 =]-\infty;-2]$

Exercice 32

Recopier et compléter les pointillés avec $\in$ ou $\notin$.

1. $5 \cdots [2;6[$
2. $-2 \cdots]-2;1]$
3. $\pi \cdots]3;4[$

Exercice 33 (🏛)

Calculer :

1. $5 \times |-6| = \ldots$
2. $|3| + |-3| = \ldots$
3. $|5| - |-5| = \ldots$
4. $|-4| \times |2| = \ldots$
5. $|7-4| = \ldots$
6. $|4-7| = \ldots$
7. $|4-3| + |5-6| = \ldots$
8. $|5-11| + 2 \times |7-8| = \ldots$
9. $|8-5| \times |7-10| = \ldots$
10. $|15-6| - 4 \times |1-4| = \ldots$

Exercice 34 (🏛)

Résoudre les équations :

1. $|x-2| = 3$
2. $|x-1| = 4$
3. $|x+2| = 2.$
4. $|x-2| = |x-6|$ (indication : interpréter l'égalité en termes de distance).

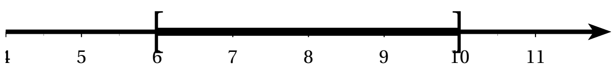
Exercice 35

Recopier et compléter en utilisant la valeur absolue : Pour tout nombre x,

$$\sqrt{x^2} = \ldots$$

Exercice 36 (🏅)

1. Représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres x tels que $|x-2| < 3$. Écrire cet ensemble sous forme d'intervalle.
2. Caractériser les points de l'intervalle ci-dessous à l'aide de la valeur absolue.



Exercice 37 (🏅)

Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. Prouver que $2q^2 = p^2$.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2										

3. Construire un tableau similaire donnant le chiffre des unités de $2q^2$ en fonction du chiffre des unités de q.
4. En observant les deux tableaux, quels sont les chiffres possibles des unités de p et q ?
5. Aboutir à une absurdité et conclure.

III. Géométrie repérée

Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 38 (🏛)

1. Construire un repère et placer les points $A(1;2)$ et $B(4;-2)$.
   a. Placer le milieu I de $[AB]$ et calculer ses coordonnées.
   b. Calculer la longueur AB.
2. Dans le même repère, placer $C(-4;2)$ et $D(2;-3)$.
   a. Placer le milieu J de $[CD]$ et calculer ses coordonnées.
   b. Calculer la longueur CD.

Exercice 39

On considère les points $A(0;-2)$, $B(7;5)$, $C(2;3)$ et $D(5;0)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ et du milieu M' du segment $[CD]$.
3. Que peut-on en déduire pour $ACBD$ et pour la longueur de ses côtés ?
4. Calculer les longueurs AC et CB. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ACBD$?

Exercice 40 (🏛)

On donne les points $A(2;4)$, $B(-2;1)$ et $C(1;-3)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

Rappel

- **Définition.** Le cercle circonscrit à un triangle est l'unique cercle qui passe par les trois sommets du triangle.
- **Propriété.** Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

Exercice 41 (🏛)

Soient $A(6;0)$, $B(1;5)$ et $C(0;2.)$ On fera une figure.

1. Prouver que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Calculer les coordonnées de I, milieu du segment $[AB]$.
3. On appelle Γ (gamma) le cercle circonscrit au triangle ABC. Qui est le centre de Γ ? Pourquoi ? Calculer le rayon de Γ.
4. Le point $H(3,5\ ;\ 6)$ appartient-il à Γ ? Justifier votre réponse.

Exercice 42

On considère les points $A(0;4)$, $B(6;1)$, $C(4;-3)$ et $D(-2;0)$. On fera une figure.

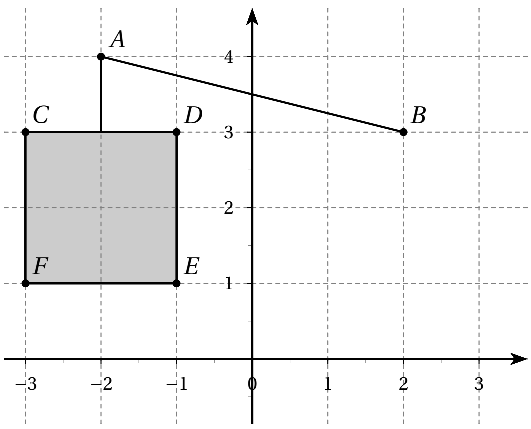
1. Prouver que les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu. Que peut-on en déduire pour ce quadrilatère ?
2. Prouver que les diagonales de $ABCD$ sont de même longueur. Conclusion ?

Exercice 43 (🏅)

1. Sur une droite graduée, donner sans justification le symétrique de 2 par rapport à 5,5.
2. D'une manière générale, si a et b sont deux nombres réels, déterminer une formule pour le symétrique c de a par rapport à b.
3. Placer dans un repère les points $A(1;2)$ et $B(3,25;-1,75)$, puis construire le point C, symétrique du point A par rapport à B. Calculer ses coordonnées.

Exercice 44

Une télécabine se déplace le long d'un câble de A vers B.



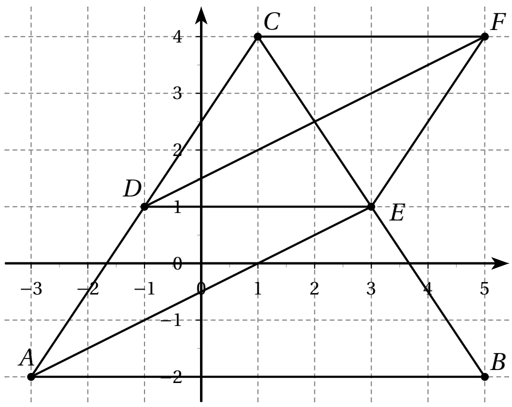
1. Reproduire la figure et dessiner la télécabine lorsqu'elle sera arrivée au point B.
2. Comment s'appelle le déplacement de la télécabine de A vers B ?

Exercice 45 (🏛)

1. Construire un repère et placer les points $A(-3;0)$ et $B(1;2)$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Placer à présent les points $I(1;-2)$ et $J(5;0)$. Prouver que
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}.$$

Exercice 46

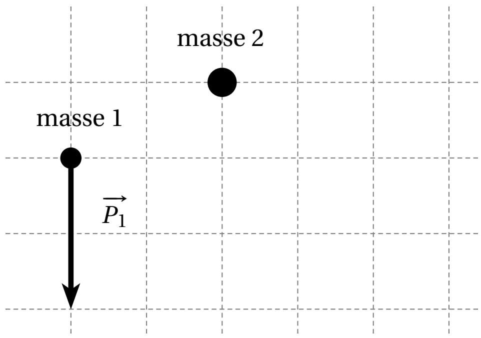
Dans un repère du plan on considère les points $A(-3;-2)$, $B(5;-2)$, $C(1;4)$, $D(-1;1)$, $E(3;1)$, $F(5;4)$.



Déterminer trois couples de vecteurs égaux. Justifier vos réponses.

Exercice 47

La figure ci-dessous représente deux masses en chute libre, soumises uniquement à leur poids. On a représenté le vecteur poids $\overrightarrow{P_1}$ pour la masse 1.



Reproduire la figure et représenter ce même vecteur poids pour la masse 2, sachant que $\left\|\overrightarrow{P_2}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{P_1}\right\|$.

Exercice 48 (🏛)

Placer dans un repère les points $A(-2;2)$, $B(0;-4)$, $C(1;3)$. Construire l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

IV. Études graphiques de fonctions

Fonctions affines

- Les fonctions affines sont les fonctions de la forme

$$f(x) = ax + b.$$

- La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Exercice 49

Un voyageur de commerce fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

1. Quel est le montant de la note de frais du voyageur de commerce s'il fait 120 km dans la journée ?
2. On note x le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et $f(x)$ le montant de la note de frais. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
3. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan (on graduera en abscisse jusqu'à 200 km, de 20 en 20 ; et en ordonnée jusqu'à 130 €, de 10 en 10).
4. Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Combien de km a-t-il effectués dans la journée ?

Exercice 50

Un contrat d'abonnement téléphonique prévoit que les 100 premiers Mo téléchargés dans le mois seront facturés 3 €, puis que chaque Mo au-delà du 100^{e} sera facturé 0,04 €.

1. Déterminer le prix à payer si on télécharge 50 Mo, puis si on télécharge 150 Mo.
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (les prix sont en €) :

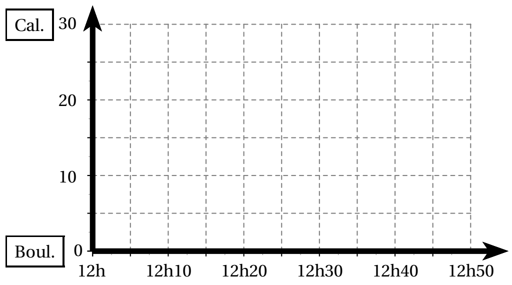
Nombre de Mo	0	50	100	150	200
Prix à payer					

3. Construire une courbe qui donne le prix payé en fonction du nombre de Mo téléchargés.
4. J'ai payé 4,60 €. Combien de Mo ai-je téléchargés ?

Exercice 51

Les gares de Calais et de Boulogne-sur-Mer sont distantes de 30 km. Un train part à 12 h de Boulogne-sur-Mer en direction de Calais et roule à la vitesse de 40 km/h. Un train part de Calais à 12 h 15 et fait route en sens inverse à la vitesse de 60 km/h.

1. Reproduire le graphique ci-après et représenter la position de chacun des deux trains en fonction du temps.
2. Déterminer l'heure à laquelle les deux trains se croiseront.



Exercice 52

Un cycliste part à 9 h d'une ville A pour une ville B distante de 60 km. Il roule à 20 km/h mais s'arrête 40 min à mi-parcours. Une automobile part de B à 9h40, arrive en A une heure plus tard et repart à 11 h pour être de retour en B à midi. Déterminer l'heure exacte de chacune des rencontres du cycliste et de l'automobile.

Exercice 53

Le taux d'anticorps (en g/l) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en mois), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 12 mois, est donné par la formule suivante :

$$f(x) = 0,1x^2 - 1,6x + 12.$$

1. Faire un tableau de valeurs pour f sur $[0;12]$ avec un pas de 2.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique : 1 carreau ou 1 cm pour une unité en abscisse et en ordonnée).
3. Quel est le taux d'anticorps à la naissance ?
4. Construire le tableau de variations de la fonction f. À quel âge le taux d'anticorps est-il minimal ?
5. À l'aide du graphique, déterminer pendant combien de mois le taux d'anticorps est inférieur à 6,5 g/l. Coder la figure pour justifier votre réponse.

Exercice 54

On considère la fonction f définie sur $[-1;3]$ par

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

1. Faire un tableau de valeurs pour f sur $[-1;3]$ avec un pas de 0,5.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Calculer l'image de $-0,8$ par f.
4. Déterminer graphiquement les antécédents de 1 par f.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$.
6. Construire le tableau de variations de f.
7. Construire le tableau de signe de f.

Exercice 55

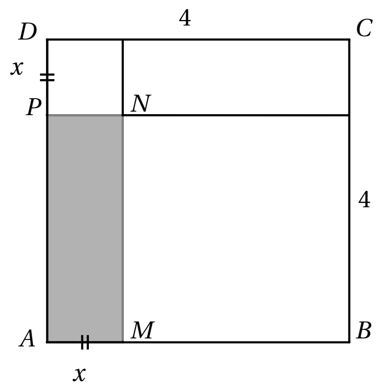
On considère la fonction g définie sur $[1;4]$ par

$$g(x) = x - \frac{6}{x}.$$

1. Faire un tableau de valeurs pour g sur $[1;4]$ avec un pas de 0,5 (on arrondira les résultats à 10^{-2} près par excès).
2. Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.
3. Déterminer graphiquement l'image de $3,2$ par g.
4. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -1$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \geq -1$.
6. Construire le tableau de variations de g.
7. Construire le tableau de signe de g.

Exercice 56

$ABCD$ est un carré de côté 4. M et P sont deux points mobiles des segments $[AB]$ et $[AD]$ tels que $AM = DP$, N est le point tel que $AMNP$ soit un rectangle.



On note x la longueur AM.

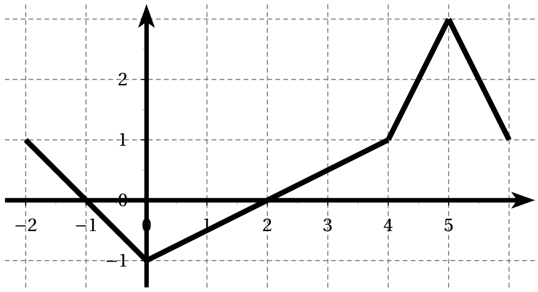
1. Donner un encadrement des valeurs possibles pour x.
2. Exprimer, en fonction de x :
   - la longueur AP ;
   - l'aire du rectangle AMNP.
3. La fonction f est définie pour $0 \leq x \leq 4$ par

$$f(x) = 4x - x^2.$$

   a. Faire un tableau de valeurs pour f puis construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c. Comment placer M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit la plus grande possible ? Justifier votre réponse.

Exercice 57 (🏛)

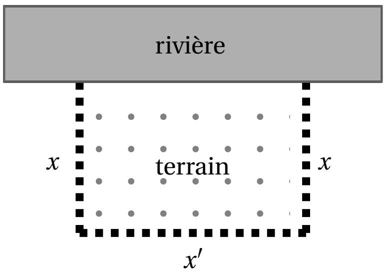
Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



1. Lire sur le graphique l'image de 3 par f.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 2$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Quels sont le maximum et le minimum de f ?
6. Construire le tableau de signe de f.

Exercice 58 (🏛 🖩)

On dispose d'une clôture de 100 mètres de long pour délimiter un terrain rectangulaire le long d'une rivière (la clôture est en pointillés — on ne met pas de clôture le long de la rivière). On note x et x' les longueurs des côtés du terrain.



1. **a.** Donner un encadrement des valeurs possibles pour x.

   b. Montrer que $x' = 100 - 2x$.

   c. Montrer que l'aire du terrain est égale à $100x - 2x^2$.

2. On définit à présent la fonction f sur $[0;50]$ par

$$f(x) = 100x - 2x^2.$$

   a. Faire un tableau de valeurs pour f sur $[0;50]$ avec un pas de 5.

   b. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (on choisira soigneusement les unités).

   c. Pour quelle valeur de x l'aire du terrain est-elle maximale ?

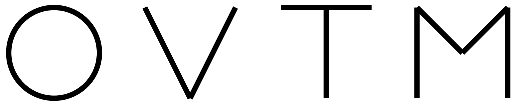
Exercice 59 (🏛)

Construire la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $[-2;3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

- f est croissante sur l'intervalle $[-2;1]$;
- f est affine sur l'intervalle $[1;3]$;
- $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$;
- les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2.

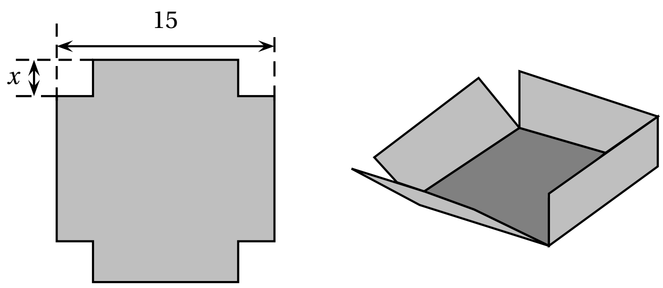
Exercice 60

Parmi les dessins suivants, lesquels sont les courbes représentatives de fonctions ?



Exercice 61 (🏅 🖩)

On dispose d'un carré de métal de 15 cm de côté. Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords par pliage.



1. **a.** Quelles sont les valeurs possibles de x ?

   b. On donne $x = 3$. Dessiner le patron de la boîte sur votre cahier, puis montrer que son volume est égal à 243 cm^3.

2. **a.** Le fond de la boîte est un carré. Exprimer, en fonction de x, la longueur de son côté.

   b. En déduire que le volume $V(x)$ de la boîte (en cm^3) est égal à

$$4x^3 - 60x^2 + 225x.$$

   c. Faire un tableau de valeurs pour V sur $[0\,;\,7{,}5]$ avec un pas de $0{,}5$, puis construire la courbe de la fonction V dans un repère orthogonal.

   d. Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

V. Probabilités

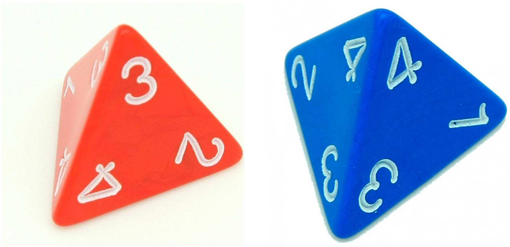
Exercice 62

Un sac contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On pioche successivement deux jetons au hasard, sans avoir remis le premier avant de tirer le deuxième.
Si on tire le jeton 2 puis le 3, on note $(2,3)$; si on tire le 3 puis le 1, on note $(3,1)$. Etc.

1. Écrire l'univers U.
2. Écrire de façon mathématique l'événement
   A : « un des jetons porte le n°1 ».
   En déduire $P(A)$.
3. Écrire $\overline{A}$ en français, puis déterminer $P\left(\overline{A}\right)$.

Exercice 63

On lance deux dés équilibrés à 4 faces : un rouge et un bleu. On note les événements élémentaires sous la forme (x, y), où x est le résultat du dé rouge et y le résultat du dé bleu.



1. Écrire l'univers U.
2. Écrire de façon mathématique l'événement
   B : « au moins l'un des deux dés tombe sur 4 ».
3. En déduire $P(B)$.

Exercice 64

Une tenue de footballeur est constituée d'un maillot, d'un short et d'une paire de chaussettes. Un footballeur possède :

- trois maillots : un rouge, un bleu, un vert;
- deux shorts : un bleu, un rouge;
- deux paires de chaussettes : une paire bleue, une paire rouge.

Pour s'habiller, le footballeur choisit au hasard un maillot, un short et une paire de chaussettes. Si le footballeur met un maillot vert, un short rouge et une paire de chaussettes rouges, on note VRR, etc.

1. Écrire l'univers U.
2. On considère l'événement
   A : « la tenue du footballeur comporte du bleu ».
   Écrire $\overline{A}$ en français, puis calculer $P\left(\overline{A}\right)$. En déduire $P(A)$.

Exercice 65

Déprimé par des pertes importantes, un turfiste parie au hasard sur le résultat d'une course à venir. Six chevaux, numérotés de 1 à 6, sont au départ; et notre turfiste joue le tiercé, c'est-à-dire qu'il parie sur le podium de la course.

1. Expliquer pourquoi il y a 120 podiums différents possibles (en tenant compte de l'ordre d'arrivée).
2. Calculer la probabilité de l'événement
   T : « le turfiste a le tiercé dans le désordre ».

Exercice 66

Lors de la finale des mondiaux d'athlétisme huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont Américains.

1. Combien de podiums possibles y a-t-il?
2. Combien de podiums y a-t-il comportant au moins un Américain?

Exercice 67

On lance deux équilibrés à 4 faces.

1. Recopier le tableau ci-dessous, puis dessiner le symbole ♡ dans les cases favorables à l'événement
   A : « la somme des deux faces est égale à 5 ».

Dé 2 / Dé 1	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

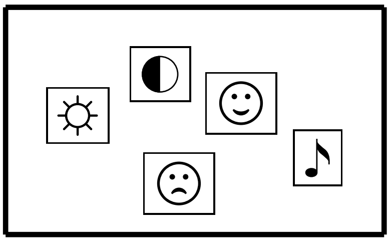
   En déduire $P(A)$.
2. Calculer de même les probabilités des événements
   B : « exactement un des deux dés tombe sur 4 ».
   C : « on tire deux numéros impairs ».

Exercice 68

Les enfants d'une école disposent d'un dé équilibré dont les 6 faces représentent chacune le drapeau d'un des pays fondateurs de l'UE : France, Allemagne, Italie, Belgique, Pays-Bas, Luxembourg.
Au début de la récréation, ils lancent le dé deux fois et décident que le match de football du jour opposera les deux pays dont les drapeaux sont apparus (si un même pays sort deux fois de suite, les enfants relancent le dé).
À l'aide d'un tableau, calculer la probabilité des événements :
A : « la France joue ».
B : « le match oppose la France à l'Allemagne ».
C : « le match oppose deux pays du Benelux ».

Exercice 69 (🏛)

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher. Chacun d'eux porte un symbole différent : un visage content, un visage triste, un soleil, une demi-lune et une note de musique.



On choisit un jeton au hasard, on le replace dans l'urne, puis on en choisit un deuxième.

À l'aide d'un tableau, calculer la probabilité des événements :

A : « les deux jetons choisis sont identiques ».

B : « exactement un des deux jetons représente un visage ».

Exercice 70 (🏅)

Un candidat à un examen connaît trois questions d'histoire sur les six possibles et deux questions de géographie sur les cinq possibles. Un examinateur lui pose une question d'histoire et une question de géographie.

Quelle est la probabilité que le candidat connaisse les deux questions ? Une seule des deux questions ?

Exercice 71 (🏛)

Dans un lycée, deux options sport sont proposées aux élèves : une option escalade et une option VTT. Il est autorisé de pratiquer les deux options à la fois. Dans une classe de 32 élèves de ce lycée :

- 3 élèves font à la fois de l'escalade et du VTT ;
- au total, 10 élèves de la classe font de l'escalade ;
- il y a autant d'élèves qui pratiquent le VTT que d'élèves qui ne le pratiquent pas.

1. Traduire les données de l'énoncé par un tableau d'effectifs.

2. On interroge un élève au hasard dans la classe. Quelles sont les probabilités des événements :

A : « l'élève pratique à la fois l'escal. et le VTT ».

B : « l'élève ne pratique aucun sport ».

C : « l'élève pratique au moins un sport ».

Exercice 72 (🏛)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays (vaches, bœufs, etc.). Elle touche 5 % des animaux.

Un test permet de détecter systématiquement la maladie lorsqu'elle est présente chez un animal ; en revanche le test indique la présence de la maladie chez 4 % des animaux sains (on parle de « faux positifs »).

1. Construire un tableau d'effectifs en partant d'un total de 10 000 bêtes.

2. On choisit un animal au hasard. On considère les événements

M : « l'animal est malade »,

T : « le test est positif ».

a. Calculer $P(M)$ et $P(T)$.

b. Un animal a un test positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

c. Un animal est malade. Quelle est la probabilité qu'il ait un test positif ?

Exercice 73 (🏛 🏅)

Les 280 pensionnaires d'une maison de retraite peuvent s'abonner à deux journaux, *Le Soir* et *Le Matin*, qu'ils reçoivent chaque jour dans leur chambre. Le matin, la personne chargée de la distribution des journaux apporte *Le Matin* à 70 pensionnaires ; et le soir, elle distribue *Le Soir* à 100 pensionnaires. Par ailleurs, 160 pensionnaires de la maison de retraite ne sont abonnés à aucun journal.

1. Représenter la situation par un tableau d'effectifs.

2. On choisit un pensionnaire au hasard. On considère les événements :

S : « le pensionnaire est abonné au *Soir* »,

M : « le pensionnaire est abonné au *Matin* ».

a. Donner les valeurs de $P(S)$ et de $P\left(\overline{M}\right)$.

b. Quelle est la probabilité que le pensionnaire soit abonné aux deux journaux ?

c. On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. Quelle est la probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* ?

Exercice 74 (🏛)

Les joueurs de jeux de rôles utilisent parfois des dés équilibrés à 100 faces, numérotées de 1 à 100. On lance un tel dé et on considère les événements :

A : « le résultat obtenu est pair ».

B : « le résultat obtenu est multiple de 5 ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

2. Écrire en français, de façon claire et simple, l'événement $A \cap B$.

3. Déterminer $P(A \cap B)$ et en déduire $P(A \cup B)$.

Exercice 75

Pour le week-end de la Sainte-Gudule, une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. À l'aller, 65 % des clients font le voyage en bateau; et au retour, ils sont 75 % à choisir ce mode de transport. Par ailleurs, chaque client fait au moins l'un des deux voyages en bateau.

On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

A : « le client choisit de faire l'aller en bateau »,
R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

1. Écrire en français l'événement $A \cup R$, puis déterminer $P(A \cup R)$.
2. Quelle est la probabilité que le client fasse l'aller et le retour en bateau ?

Exercice 76

Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

1. On suppose que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$ et $P(A \cup B) = 0,9$.
   a. Calculer $P(A \cap B)$.
   b. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. On tire une carte dans un jeu de 32 et on considère les événements :

   A : « la carte est rouge ».
   B : « la carte est un roi ».

   a. Écrire l'événement $A \cap B$ en français – de façon claire et simple !
   b. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Dans cette question, on suppose que $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,7$; et que les événements A et B sont indépendants. Déterminer la valeur de $P(B)$.

VI. Équations de droites

Attention

On fera toutes les figures dans des repères orthonormés.

Exercice 77

1. Tracer la droite $d : y = 0,5x - 2$.
2. Les points suivants sont-ils sur la droite d ? $A(1;-1)$, $B(4;0)$, $C(-2\,;\,-3)$, $E(5;1)$.
3. Soit $\Delta : y = -x+3$. Les points suivants sont-ils sur Δ ? $H(1;2)$, $I(-2;6)$, $J(1000;-997)$.

Exercice 78

1. Soit $D : y = 2x + 1$.
   a. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et tracer D :

x	-1	0	1	2
y				

   b. Recopier et compléter les pointillés :

   Quand x augmente de 1, y augmente de ....
2. Soit Δ une droite non verticale quelconque, d'équation $y = ax + b$; et soient A et B deux points distincts de Δ.
   a. A est sur Δ, donc $y_A = a \times x_A + b$. De même, B est sur Δ, donc .... (recopier et compléter les pointillés).
   b. Démontrer l'égalité : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exercice 79

Dans chacune des trois questions, on fera une figure et on déterminera les équations des droites (AB) et (CD).

1. $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(5;-1)$, $D(1;3)$.
2. $A(-2;-3)$, $B(6;1)$, $C(1;1)$, $D(-2;2)$.
3. $A(2;-2)$, $B(-1;-2)$, $C(4;-3)$, $D(4;4)$.

Exercice 80

1. Tracer dans un même repère les droites $D_1 : y = x - 4$ et $D_2 : y = -2x + 3$.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_2.

Exercice 81

1. Tracer la droite $D : y = 2x + 1$.
2. Placer les points $A(2;2)$, $B(4;-2)$, tracer la droite (AB) et déterminer son équation.
3. Les droites D et (AB) se coupent en M. Calculer les coordonnées du point M.
4. La droite D coupe l'axe des abscisses en N. Calculer les coordonnées de ce point.

Exercice 82 (🏛)

On considère les points $A(-2;1)$ et $B(1;3)$.

1. Faire une figure – on la complétera dans la suite de l'exercice.
2. Déterminer l'équation de la droite (AB).
3. Tracer la droite $\Delta : y = -2x+3$.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection M de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection N des droites (AB) et Δ.

Exercice 83 (🏛)

1. Tracer les droites $\Delta : y = x-3$ et $\mathrm{D} : y = -2x+1$.
2. Les droites Δ et D se coupent en un point M. Déterminer, par le calcul, les coordonnées de ce point.
3. Placer les points $\mathrm{A}(-2\,;\,1)$ et $\mathrm{B}(3\,;\,5)$. Tracer la droite (AB) et déterminer son équation.
4. La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point N. Déterminer les coordonnées de N.

Exercice 84 (🏛)

On prendra 1 cm comme unité graphique.

1. **a.** Tracer la droite $d : y = 1{,}5x - 2{,}4$.

   b. Tracer la parallèle Δ à d passant par le point $A(1{,}4\,;\,2{,}2)$, puis déterminer l'équation de Δ.
2. **a.** Placer dans un nouveau repère les points $A(1;2)$ et $B(-1\,;\,5{,}2)$, tracer la droite (AB) ainsi que la droite $D : y = -1{,}5x-1$.

   b. La droite D est-elle parallèle à la droite (AB) ?

Exercice 85 (🏛)

1. Soient $A(1;-2)$ et $B(5;0)$. Tracer (AB), puis déterminer son équation.
2. Tracer la droite $\Delta : y = -2x+5$.
3. Déterminer les coordonnées de M, point d'intersection de (AB) et Δ.
4. Soit d la parallèle à Δ passant par $C(-2;3)$ Tracer d et déterminer son équation.
5. La droite d coupe l'axe des abscisses en N. Placer N et calculer ses coordonnées.

Dans l'exercice suivant, on pourra admettre et utiliser le théorème :

Droites perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, on considère :

- une droite D de coefficient directeur a,
- une droite D' de coefficient directeur a'.

Alors :

$$D \perp D' \iff a \times a' = -1.$$

Exercice 86 (🏅)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(0;-4)$, $B(3;0{,}5)$, $C(-2;2)$ et $D(1;0)$.
   Prouver que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
2. Soient $A(-1;0)$, $B(2;4)$ et $C(5;-2)$. Déterminer l'équation de la perpendiculaire Δ à (BC) passant par A.

Exercice 87 (🖩)

Le tableau suivant donne la part (en pourcentage) des voitures diesel dans les ventes de voitures neuves, en France, entre 2012 et 2017.

Rang de l'année	0	1	2	3	4	5
% des voitures diesel	73	67	64	58	52	48

1. Construire le nuage de points correspondant au tableau (en abscisse : rang des années ; en ordonnée : pourcentage de voitures diesel). Graduer l'axe des abscisses jusqu'à l'année 9.
2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite D réalisant un ajustement affine du nuage de points par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients a et b au dixième).
3. Tracer la droite D. Quelle devrait être la part des voitures diesel en 2021 selon ce modèle ?

Exercice 88

Au 18° siècle, l'étude des distances entre les planètes et le soleil a conduit les astronomes Titius et Bode à imaginer l'existence d'une planète encore inconnue, Cérès, entre Mars et Jupiter.
Le graphique ci-dessous donne les distances des planètes au soleil, en unités astronomiques (1 UA = distance terre-soleil).

Nom	Vénus	Terre	Mars	Cérès	Jup.	Satur.
Rang	1	2	3	4	5	6
Distance	0,7	1	1,5	?	5,2	9,5

1. Construire le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal.
2. On définit une fonction par

   $$f(x) = 0{,}4 + 0{,}15 \times 2^x.$$

   Tracer, aussi précisément que possible, la courbe de cette fonction dans le repère déjà construit.
3. On admet que cette courbe réalise un bon ajustement de la série de données.
   A quelle distance du soleil la planète Cérès devrait-elle se trouver ?

VII. Pourcentages, taux d'évolution

Attention

Quand les résultats ne tombent pas « juste », arrondir à 0,01 % près.

Exercice 89

1. Il y a 80 % de filles dans une classe de 30 élèves. Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?
2. Sur le porte-avions Charles de Gaulle, 1 046 des 1 760 marins ont attrapé le Covid 19. Quel pourcentage des marins sont tombés malades ?
3. Une bouteille de vin de 500 mL est titrée à 12 % vol. Calculer la quantité d'alcool pur dans cette bouteille.
4. Au deuxième tour des élections présidentielles de 2017, dans la ville de Boulogne-sur-Mer, 8 892 des 16 161 suffrages exprimés ont été en faveur de E. Macron. Quel pourcentage des suffrages cela représente-t-il ?
5. Il y a 56 % d'hommes dans une entreprise, et 25 % d'entre eux fument. Quel pourcentage des employés les hommes fumeurs représentent-ils ?

Exercice 90

1. Il y a 120 inscrits dans un club de sport en décembre. Quel sera l'effectif si le nombre d'inscrits augmente de 22,5 % en janvier ?
2. Il y avait 5 812 logements à Outreau en 2007, et 6 065 en 2015. Quel a été le taux d'évolution du nombre de logements entre ces deux dates ?
3. Entre 2023 et 2024, le prix du cookie dans la boulangerie Dupont a augmenté de 12 %. Sachant que le cookie coûtait 0,84 € en 2024, quel était son prix en 2023 ?
4. Le montant hors taxe d'une montre est de 80 €. Déterminer le montant TTC, sachant que le taux de TVA sur les montres est de 20 %.

Exercice 91

1. Une voiture coûte 12 000 €. Le vendeur accepte de faire une remise de 30 %. Quel est le nouveau prix de vente ?
2. Un industriel prévoit de faire passer ses émissions d'oxyde de soufre de 240 tonnes à 228 tonnes en un an. Quel sera le taux d'évolution s'il respecte son engagement ?
3. Après une remise de 25 %, j'achète un article 63 €. Quel était le prix initial ?

Exercice 92

Le taux de TVA sur les médicaments non remboursés par la sécurité sociale est de 10 %. Sur une boîte de Dolirhume affichée 4,95 € en magasin, quelle somme revient à l'état ?

Exercice 93

Le tableau ci-dessous traduit l'évolution du SMIC horaire brut en euro entre 2011 et 2014. Il indique également les taux d'évolution annuels.

Année	2011	2012	2013	2014
SMIC hor. brut	9	9,31	9,43	
Taux d'évolution				+1,06%

Recopier et compléter le tableau.

Exercice 94

En 2016, un article est affiché en magasin à 70 €. Il y a une hausse de 60 % des prix entre 2016 et 2017, puis une baisse de 10 % entre 2017 et 2018.

1. Calculer le prix en 2017 et en 2018.
2. Calculer le taux d'évolution global entre 2016 et 2018.

Exercice 95

1. Un vendeur augmente un prix de 16 %. De quel pourcentage doit-il le baisser pour revenir au prix de départ ?
2. Dans un magasin, un article a subi une baisse de 36 %. Quelle hausse (en %) faut-il appliquer pour retomber sur le prix de départ ?
3. Quel sont les taux d'évolution réciproques de +60 %, −15 %, −50 % ?

Exercice 96

1. Dix augmentations successives de 5 % font une augmentation de ....
2. Deux augmentations successives de t % font une augmentation de 44 %. Combien vaut t ?
3. Deux augmentations successives de t % font une augmentation de 26 %. Combien vaut t ?

VIII. Opérations sur les vecteurs

Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 97

1. On donne les points $A(1;3)$ et $B(4;-1)$. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis la longueur du segment $[AB]$.
2. Représenter sur une même figure les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1,5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{x}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 98

Prenons le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs définis ci-dessous. Représenter ces vecteurs sur une figure.

$$\vec{v}=3\vec{u},\quad \vec{w}=-2\vec{u},\quad \vec{y}=1,5\vec{u},\quad \vec{z}=-\vec{u}.$$

Exercice 99

Soient $A(0;1)$ et $B(3;-1)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis celles de $-\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$. Conclusion ?

Exercice 100

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2,5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2,5\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\3,75\end{pmatrix}$.

1. Représenter ces vecteurs dans un repère orthonormé.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?

Exercice 101

Soient $O(0;0)$, $A(3;2)$, $B(4,5\ ;3)$, $C(3;-2,5)$ et $D(7;-1,5)$.

1. Les points O, A, B sont-ils alignés ?
2. Les droites (OC) et (AD) sont-elles parallèles ?

Exercice 102

On donne les points $A(-3;-1)$, $B(-1;2)$, $C(4;3)$ et $D(7;1)$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que $ABCD$ est un trapèze.
3. Le point $E(2,5\ ;\ 0)$ appartient-il à la droite (AD) ?

Exercice 103

Dans chaque cas, construire la somme $\vec{u}+\vec{v}$ et calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 104

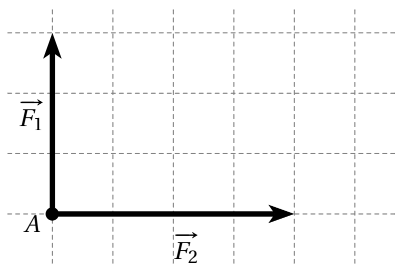
Soient $C(0;2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

Faire une figure et, sans faire aucun calcul, construire les points M et N définis par les égalités

$$\overrightarrow{CM}=\vec{u}+\vec{v}\quad,\quad \overrightarrow{CN}=\vec{w}+\vec{u}$$

Exercice 105

Un objet A subit les deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ à angle droit représentées sur la figure ci-dessous, dont les intensités respectives sont $\left\|\vec{F_1}\right\|=3$ N, $\left\|\vec{F_2}\right\|=4$ N.



Reproduire la figure, puis représenter la force résultante et calculer son intensité.

Exercice 106

Soient $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ trois points du plan.

1. Rappeler la formule pour les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
2. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
3. Quelle égalité vectorielle obtient-on en conséquence ?

Exercice 107 (🏛)

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. En justifiant chaque étape des calculs, réduire les sommes vectorielles :

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$.
2. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$.
3. $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}$.
4. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$.
5. $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$.

Exercice 108 (🏅)

ABC est un triangle, I est le milieu du segment $[BC]$.

1. Compléter grâce à la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\ldots \qquad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\ldots$$

2. Justifier brièvement l'égalité :

$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}.$$

3. En décomposant les vecteurs comme dans la question 1, prouver que

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}.$$

Exercice 109 (🏅)

ABC est un triangle, I est le milieu de $[BC]$ et G est le point défini par

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

1. Faire une figure.
2. En utilisant l'exercice précédent, prouver que

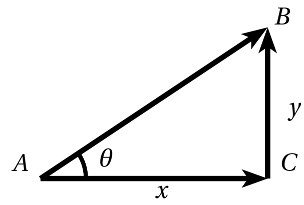
$$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

3. En déduire que

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$$

Exercice 110

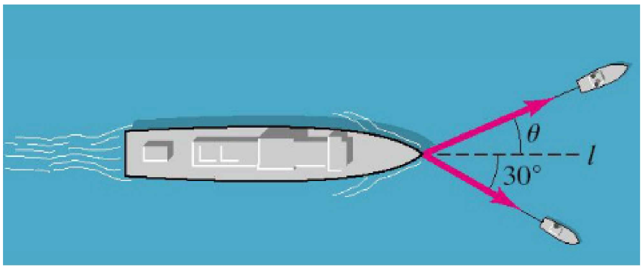
On décompose un vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ selon une composante horizontale et une composante verticale.



Exprimer x et y en fonction de la longueur AB et de l'angle θ.

Exercice 111 (🏅 🖩)

La figure ci-dessous montre deux remorqueurs qui ramènent un navire vers un port.



Le remorqueur le plus puissant (en haut) génère une force de 20 kN sur son câble, le plus petit (en bas) une force de 16 kN. Le navire suit une ligne droite l.

On n'attend pas ici toute la rigueur habituellement requise dans la résolution d'un exercice de mathématiques.

1. Sachant que $\sin 30° = 0,5$ et en utilisant les idées de l'exercice précédent, prouver que

$$20\sin\theta = 8.$$

2. Calculer l'angle θ (arrondir au degré).

IX. Tableaux de signes

Exercice 112

1. Tracer les droites $D : y = 2x-3$ et $\Delta : y = -2x+5$ dans un même repère.
2. Utiliser le graphique pour construire les tableaux de signes de $2x-3$ et de $-2x+5$.
3. Soit a un réel non nul, soit b un réel. Dans quel cas le tableau de signe de $ax+b$ est-il de la forme suivante ?

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Et dans quel cas est-il de la forme suivante ?

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Exercice 113 (🏛)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $4x-3$.
2. $-3x+6$.
3. $x+5$.
4. $-2x-1$.

Exercice 114 (🏛)

1. Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.
   a. $(x+4)(-2x+6)$.
   b. $(4x-3)(-3x+2)$.
   c. x^2-3x.
   d. x^2-4.
   e. $2t(t+1)$.
   f. x^2+1.
2. Étudier le signe de x^2-4 sur l'intervalle $[0;5]$.

Exercice 115

1. Construire les tableaux de signes de x, x^2 et x^3.
2. Déterminer, suivant la valeur de l'entier $n \geq 1$, le signe de x^n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 116 (🏛)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $\dfrac{-2x+1}{x+5}$.
2. $\dfrac{3t+6}{4t}$.
3. $\dfrac{-x+4}{x^2}$.
4. $\dfrac{x}{|x|+3}$.

Exercice 117 (🏛)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $(-3x+4)(4x-5)$.
2. $3x^2+6x$.
3. x^2-16.
4. $\dfrac{2x}{-x+1}$.
5. $\dfrac{-2x+5}{3x-3}$.
6. $|x|+3$
7. $\dfrac{x}{x^2+2}$.

Exercice 118 (🏅)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $(x-1)^2$.
2. $|x|-3$.
3. $x-\dfrac{1}{x}$.

Exercice 119 (🏅)

Déterminer une fonction f ayant le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

X. Statistiques

Exercice 120 (🏛)
15 amis ont déjeuné dans un restaurant pour fêter la fin de l'année scolaire : 6 ont pris le menu à 16 €, 5 le menu à 19 € et les autres le menu à 22 €.

1. Calculer la dépense moyenne par personne.
2. Que devient cette dépense moyenne si les 15 amis commandent en plus 3 bouteilles de vin à 17 € l'unité ?

Exercice 121 (🏛)
Le concours EGC est composé de trois épreuves écrites : logique, anglais et français. Pour chaque candidat, le jury utilise la formule ci-dessous pour calculer la moyenne :

$$\overline{X} = \frac{2L+3A+5F}{10},$$

où L, A, F désignent respectivement les notes en logique, anglais et français.

1. Quels sont les coefficients pour chaque épreuve ?
2. On examine les résultats de trois candidats pris au hasard.

	L	A	F	$\overline{X}$
Candidat 1	5	12	10	
Candidat 2	5	15	6	
Candidat 3		4	13	10,9

Recopier et compléter le tableau.

Exercice 122 (🏅)
Une série statistique à 7 éléments, qui sont tous des nombres positifs, est connue de façon partielle :

$$5-8-10-4-7-\cdots-\cdots$$

Déterminer les deux nombres qui ont été remplacés par des pointillés sachant que :

- l'étendue de la série [a] est égale à 8 ;
- la moyenne de la série est égale à 6.

[a] On rappelle que l'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite modalité.

Exercice 123
Les notes d'un devoir de mathématiques sont mauvaises et la moyenne est de 7,5/20. Le professeur transforme toutes les notes avec la formule suivante :

$$\text{Note} \longmapsto 0,8 \times \text{Note} + 4.$$

1. Quelle est la nouvelle note d'un élève ayant eu 5/20 ?
2. Quelles sont les notes maximale et minimale possibles avec cette transformation ?
3. Quelle est la nouvelle moyenne de classe ?

Exercice 124 (🏛)
Calculer sans calculatrice la moyenne des nombres :

$$100,4-100,7-99,8-99,6-100$$

Exercice 125 (🏛)
Déterminer la médiane de la série de nombres :

$$3-12-5-7-10-18-25$$

Exercice 126 (🏛)
La série ci-dessous indique l'âge des vainqueurs successifs du tour de France entre 2006 et 2015.

$$28-24-33-26-25-34-32-28-29-30$$

Déterminer la médiane de la série.

Exercice 127 (🏛)
On considère les temps réalisés par les concurrents ayant fini la course dans la classe Class40 à la Route du Rhum 2014.

Temps (en j)	17	18	19	20	21	22	24	25	30
Nb conc.	4	5	5	5	5	2	3	1	1

Déterminer la médiane de la série.

Exercice 128 (🏛)
On a réalisé un sondage auprès de 52 personnes sur le nombre de téléviseurs dans leur foyer. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Nombre de TV	0	1	2	3	4	5
Effectif	4	19	15	9	3	2

Déterminer la médiane de la série.

Exercice 129 (🏛)
Le directeur d'une école de journalisme cherche à comparer les promotions 2017 et 2018 avec leurs notes en histoire.

	2017	2018
Q_1	10	10
m_e	12	11
Q_3	14	12

1. Quelle année les candidats ont-ils été les meilleurs ?
2. Calculer la distance interquartile pour les notes en 2017 et en 2018.
3. Quelle année le niveau des candidats a-t-il été le plus homogène ?

Exercice 130

On a compté le nombre de jours fériés dans les 50 états des USA et dans les 28 pays de l'Union Européenne.

	USA	UE
Q_1	11	9,75
m_e	11	11
Q_3	13	13

1. Calculer la distance interquartile pour les USA et pour l'UE.
2. Le nombre de jours fériés est-il plus variable dans les états des USA ou dans ceux de l'UE ?

Exercice 131

On obtient les quartiles d'une série statistique en coupant la série en 4 parties égales. De la même manière, on obtient les déciles D_1, D_2,…, D_9 en coupant la série en 10 parties égales.

On s'intéresse au revenu mensuel (en €) pour une personne vivant seule en France.

1. Sachant que $D_3 = 1270$ €, compléter la phrase :

   …… des personnes seules vivent avec moins de …… par mois.

2. Interpréter la phrase suivante en termes de déciles :

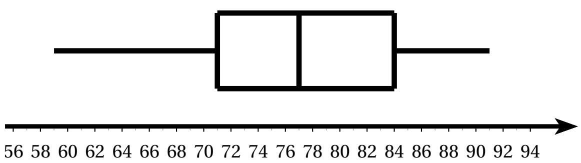
   20 % des personnes seules vivent avec plus de 2297 € par mois.

Exercice 132

On a relevé le rythme cardiaque au repos (noté R.C. ci-dessous) dans deux classes d'un lycée.

Stat.	min	Q_1	m_e	Q_3	max
R.C. en 1re	59	71	77	84	91
R.C. en 2de	56	69	74	85	94

Le « diagramme en boîtes » ci-dessous représente la série de la classe de 1re. Construire un diagramme similaire pour la classe de 2de.



Exercice 133

Un professeur compare les résultats de deux classes à un devoir :

	$\overline{X}$	σ
Classe 1	10	4,1
Classe 2	11,5	3,8

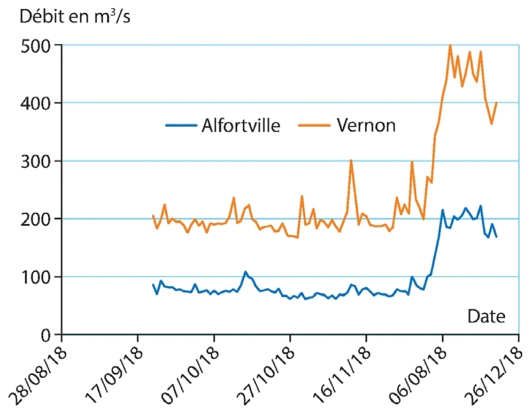
1. Laquelle des deux classes a-t-elle le mieux réussi le devoir ?
2. Dans laquelle des deux classes les notes sont-elles les plus homogènes ?

Exercice 134

Les températures moyennes à Quimper et à Grenoble sont relativement similaires, mais le climat y est très différent. D'après vous, laquelle des deux villes a le plus grand écart-type sur ses températures ?

Exercice 135

Le graphique ci-dessous montre le débit de la Seine à Alfortville et à Vernon.



1. Dans laquelle des deux villes le débit moyen est-il le plus important ?
2. Dans laquelle des deux villes l'écart-type du débit est-il le plus important ?

Exercice 136

On reprend l'énoncé de l'exercice 123, où le professeur transforme toutes les notes avec la formule

$$\text{Note} \mapsto 0,8 \times \text{Note} + 4.$$

Si l'écart-type des notes avant transformation est 5, quel est l'écart-type après transformation ?

XI. Systèmes et équations de droites

Exercice 137 (🏛)

Résoudre les systèmes d'équations :

1.
$$\begin{cases} 8x+6y=26 \\ 5x-3y=-31 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 9x+2y=17 \\ 6x+5y=-7 \end{cases}$$

Exercice 138 (🏛)

Une entreprise artisanale fabrique deux types d'objets en bois, notés A et B.
Un objet de type A nécessite 3 kg de bois et un objet de type B nécessite 5 kg de bois.
Pendant une journée, l'entreprise a utilisé 163 kg de bois pour fabriquer 45 objets.
Déterminer le nombre d'objets A et le nombre d'objets B fabriqués.

Exercice 139 (🏅)

Les mairies de deux villages sont distantes de 3 km, leurs carillons sont parfaitement synchronisés. Situé sur la route en ligne droite qui les relie, un auto-stoppeur entend le carillon d'une des deux mairies sonner 1 heure, puis une seconde plus tard, le carillon de l'autre.
A quelle distance de chaque mairie notre auto-stoppeur se trouve-t-il ?

N.B. On prendra comme vitesse du son dans l'air $v_{\text{son}} = 340$ m/s.

Exercice 140 (🏛)

Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives et de dix wagons-citernes du même modèle. Ce train mesure alors 152 m de long.
Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes.
Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160 m de long.
On cherche la longueur x d'une locomotive et la longueur y d'un wagon-citerne.

1. Traduire le problème par un système d'équations.
2. En déduire les valeurs de x et y.

Exercice 141 (🏅)

Je fais un aller-retour sur un tapis roulant long de 15 m en marchant à vitesse constante. À l'aller, j'avance dans le sens du tapis ; et au retour, en sens contraire. Sachant que je mets 5 s à faire l'aller et 15 s à faire le retour, quelle est la vitesse du tapis roulant ?

Exercice 142 (🏛)

1. Écrire les équations sous forme cartésienne :
$$D : y = 2x-4, \qquad D' : x = 3.$$
2. Écrire les équations sous forme réduite :
$$\Delta : -5x+y+3=0, \qquad \Delta' : 3x+4y=0.$$

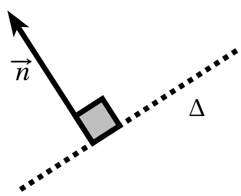
Exercice 143 (🏛)

1. Tracer les droites $D_1 : 3x+2y-5=0$ et $D_2 : -x+y+3=0$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2.

Dans l'exercice suivant, on pourra admettre et utiliser le théorème :

Vecteur perpendiculaire à une droite

Dans un repère orthonormé, si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la droite Δ, alors Δ a une équation cartésienne de la forme
$$ax+by+c=0,$$
pour un certain réel c.



Exercice 144 (🏅)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(-1;0)$, $B(2;4)$ et $C(5;-2)$. Déterminer l'équation cartésienne de la perpendiculaire Δ à (BC) passant par A.
2. Soient $A(0;-2)$ et $B(4;4)$. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

XII. Arithmétique et racines carrées

Exercice 145 (🏛)
Les nombres suivants sont-ils divisibles par 2, 3, 5 ou 9 ?

$$84\ ;\ 495\ ;\ 9545\ ;\ 8052.$$

Exercice 146 (🏛)
1. Déterminer les diviseurs de 48, puis les diviseurs de 84.
2. En déduire leur plus grand diviseur commun, que l'on note $\text{PGCD}(48, 84)$.

Exercice 147
Les nombres suivants sont-ils premiers ?

$$425\ ;\ 53\ ;\ 7777\ ;\ 97\ ;\ 143.$$

Exercice 148 (🏛)
Déterminer $\text{PGCD}(840, 756)$.

Exercice 149 (🏛)
Une association organise une compétition sportive, 144 filles et 252 garçons se sont inscrits.
L'association désire répartir les inscrits en équipes mixtes, de telle manière que le nombre de filles et le nombre de garçons soit le même dans chaque équipe.

Quel est le nombre maximal d'équipes que l'association peut former ? Combien chacune des équipes compte-t-elle de filles et de garçons dans ce cas ?

Exercice 150 (🏛)
Manon a ramassé 60 pêches, 84 abricots et 120 cerises. En utilisant tous les fruits, elle prépare des cageots tous identiques. Quel est le plus grand nombre de cageots qu'elle peut faire ?

Exercice 151 (🏛)
1. Décomposer 126 et 420 en produits de nombres premiers.
2. En déduire leur plus petit multiple commun strictement positif, que l'on note $\text{PPCM}(126, 420)$.

Exercice 152 (🏛)
L'objet A apparaît dans le ciel tous les 168 jours ; l'objet B tous les 90 jours. Si je les vois tous les deux dans le ciel aujourd'hui, dans combien de jours seront-ils de nouveau visibles en même temps ?

Exercice 153 (🏛 🏅)
1. Décomposer 60 en produit de nombres premiers. En déduire la décomposition de $60^2 = 3600$ en produit de nombres premiers.
2. Le nombre $2^4 \times 3^6 \times 7^8$ est-il un carré parfait ? Et le nombre $2^{10} \times 3^5 \times 7^4$?

   Le terme « carré parfait » désigne le carré d'un entier.
3. Déterminer le plus petit entier strictement positif n vérifiant les deux conditions :
   - n est divisible par 792 ;
   - n est un carré parfait.

Exercice 154
1. Rappeler la définition de $\sqrt{6}$.
2. Prouver que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.
3. Généraliser : si a et b sont deux réels positifs, alors
   $$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \dots$$
4. Prouver que $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Exercice 155 (🏛)
Exprimer chaque expression sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers naturels et b est le plus petit possible.
1. $\sqrt{45} - \sqrt{20}$.
2. $\sqrt{50} + 3\sqrt{2} - \sqrt{32}$.
3. $2\sqrt{12} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$.
4. $6\sqrt{10} + 2\sqrt{40} - 3\sqrt{90}$.
5. $\sqrt{200} - 2\sqrt{18} + \sqrt{2}$.

Exercice 156 (🏛)
Démontrer les égalités :
1. $\frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$.
2. $\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right)^2 = 8$.
3. $\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right) = 1$.

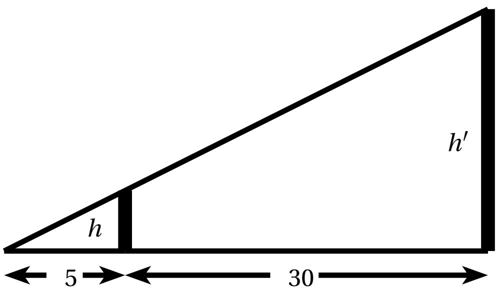
XIII. Inégalités

Exercice 157 (🏛)

1. Soit $1 \leq x \leq 2$. Donner un encadrement de :
   - $2x$.
   - $2x-1$.
   - $-3x+4$.
2. Soit $-2 < x \leq 5$. Donner un encadrement de :
   - $x-3$.
   - $-4x$.
   - $-x+2$.

Exercice 158

Sur la figure ci-dessous, on sait que les deux segments en traits gras sont parallèles et que $2 \leq h \leq 3$. Déterminer un encadrement de h'.



Exercice 159

Soient $a \leq b$ et $c \leq d$.

1. Prouver que :
   - $a+c \leq b+c$.
   - $b+c \leq b+d$.
2. Que peut-on en déduire pour $a+c$ et $b+d$?

Exercice 160 (🏛)

Soient $A = \sqrt{7+\sqrt{47}}$ et $B = 2+\sqrt{3}$.

1. Calculer A^2 et prouver que $B^2 = 7+\sqrt{48}$.
2. Comparer A et B.

Exercice 161 (🏛)

Comparer les nombres $A = \sqrt{7}+\sqrt{8}$ et $B = 3+\sqrt{6}$.

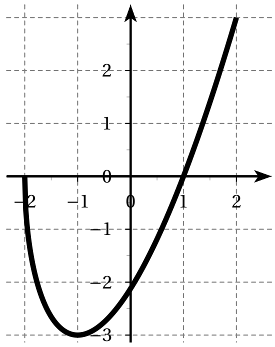
Exercice 162 (🏅)

Montrer que pour tous nombres $a > 0$, $b > 0$:

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Exercice 163

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f.



1. Construire le tableau de variations de f.
2. Combien l'équation $f(x) = -1$ admet-elle de solutions ?

Exercice 164 (🏛)

Soit g une fonction définie sur $[-3;3]$, dont voici le tableau de variations :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	5	4	2	4	5	4	0

Par lecture du tableau de variations :

1. Résoudre l'équation $g(x) = 4$.
2. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 4$.

Exercice 165 (🏛)

On pose $f(x) = -x^2+6x+1$ pour $x \in [0;7]$. On admet que f est strictement croissante sur $[0;3]$ et strictement décroissante sur $[3;7]$.

1. Construire le tableau de variations de f.
2. Combien l'équation $f(x) = 2$ admet-elle de solutions ? Compléter le tableau de variations pour expliquer la réponse.

Exercice 166 (🏛)

On pose $f(x) = x+\frac{4}{x}$ pour $x \in [1;10]$. On admet que f est strictement décroissante sur $[1;2]$ et strictement croissante sur $[2;10]$.

1. Construire le tableau de variations de f.
2. Combien l'équation $f(x) = 8$ admet-elle de solutions ?

XIV. Fonctions de référence

Exercice 167

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$f(x)$							

2. Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.
3. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de f.

Exercice 168 (🏛)

Tracer dans un même repère, de trois couleurs différentes, les courbes d'équations $y = x^2$, $y = x^2 - 2$ et $y = (x-2)^2$.

Exercice 169

La fonction r est définie sur $[0;+\infty[$ par $r(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	0	1	4	9
$r(x)$				

2. Construire la courbe de la fonction r dans un repère orthonormé.

Exercice 170

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x|$.
Construire la courbe de la fonction h dans un repère orthonormé.

Exercice 171 (🏛)

Tracer dans un même repère, de deux couleurs différentes, les courbes d'équations $y = |x|$ et $y = |x-2|$.

Exercice 172 (🖩)

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$
$g(x)$							

2. Construire la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé.
3. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de g.

Exercice 173

On pose $i(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. [a]

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	$0,25$	$0,5$	1	2	4
$i(x)$					
x	$-0,25$	$-0,5$	-1	-2	-4
$i(x)$					

2. Construire la courbe de la fonction i.
3. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de i.

a. $\mathbb{R} - \{0\}$ désigne l'ensemble de tous les nombres, sauf 0.

Exercice 174 (🏛 🖩)

La fonction f est définie par

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs (arrondir les résultats au centième) :

x	$-4,5$	$-2,5$	$-1,5$	-1	$-0,75$
$f(x)$					
x	$-0,25$	0	$0,5$	$1,5$	$3,5$
$f(x)$					

3. Tracer dans un même repère :
   - en pointillés les droites $d_1 : y = \frac{3}{2}$ et $d_2 : x = -\frac{1}{2}$;
   - en traits continus la courbe représentative de la fonction f.
4. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de f.

XV. Fractions et manipulation de formules

Exercice 175

Calculer et exprimer chacun des nombres suivants sous forme de fraction irréductible :

1. $A = \frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$
3. $C = \frac{5}{6} - \frac{3}{4}$
4. $D = \frac{4}{15} \times \frac{5}{6}$
5. $E = \frac{5}{6} \times 4$
6. $F = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
7. $G = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$
8. $H = 3 \div \frac{15}{4}$
9. $I = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \times 3$
10. $J = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$
11. $K = \frac{35}{56} \times \frac{72}{45}$
12. $L = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{7}}{\frac{4}{3} \times \frac{2}{7}}$
13. $M = \frac{2 - \frac{10}{7}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{7}}$
14. $N = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{2}{3}\right)$
15. $O = \frac{5}{7} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{4}$
16. $P = \frac{2}{24} + \frac{5}{2} - \frac{50}{60}$
17. $Q = \frac{\frac{5}{6} + \frac{9}{12}}{\frac{3}{4} + \frac{10}{12}}$
18. $R = \frac{11}{6} \times \frac{14}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{11}$

Exercice 176

Quels termes faut-il enlever de la somme

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$$

pour que la somme des termes restants soit égale à 1 ?

Exercice 177

On appelle fraction égyptienne une fraction de la forme $\dfrac{1}{a}$, où a est un nombre entier strictement positif.

Il est possible d'écrire n'importe quelle fraction comme une somme de fractions égyptiennes distinctes. Par exemple

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

1. Écrire $\dfrac{3}{4}$ comme la somme de deux fractions égyptiennes.
2. Déterminer l'entier n tel que
$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$
Justifier la réponse.
3. **a.** Prouver que pour tout entier a supérieur à 1 :
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}.$$
b. En déduire une écriture de $\frac{1}{6}$ comme somme de deux fractions égyptiennes distinctes.

Exercice 178

La moyenne harmonique de deux nombres strictement positifs a et b est le nombre h défini par :

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

1. **a.** Montrer que la moyenne harmonique de 2 et 6 est 3.
   b. Calculer la moyenne harmonique de 4 et 16.
2. Un cycliste monte une côte de 7 km à la vitesse moyenne de 14 km/h. Arrivé en haut, il fait demi-tour et redescend la côte à la vitesse moyenne de 35 km/h.
   a. Combien de temps le cycliste met-il pour monter la côte ? Pour la descendre ? (Répondre en heures.)
   b. Calculer la vitesse moyenne du cycliste sur l'ensemble de son parcours.
   c. Montrer que cette vitesse moyenne est la moyenne harmonique de 14 et 35.
3. Généraliser le résultat de la question 2 : si le cycliste monte à la vitesse v_1 puis descend à la vitesse v_2, sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est la moyenne harmonique de v_1 et v_2.

Exercice 179

Écrire sous forme de fractions irréductibles :

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Exercice 180

Compléter :

1. $v = \frac{d}{t}$ donc $d = \ldots$ et $t = \ldots$
2. $U = RI$ donc $I = \ldots$
3. $P = UI$ et $U = RI$ donc $P = \ldots$ (répondre avec R et I).
4. $v = \sqrt{2gh}$ donc $h = \ldots$
5. $E = mc^2$ donc $c = \ldots$

XVI. Trigonométrie

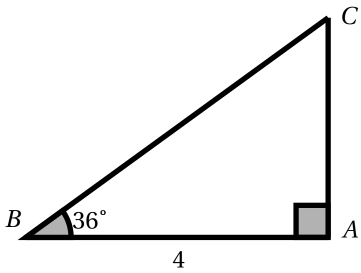
Exercice 181

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. On pose $\theta = \widehat{ACB}$.

1. Prouver que ABC est un triangle rectangle et faire une figure.
2. Calculer $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$. Écrire les réponses sous forme de fractions.
3. Vérifier que :
   - $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$;
   - $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Exercice 182

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $\widehat{ABC} = 36°$.



1. Calculer la longueur AC, arrondie au centième.
2. Calculer la longueur BC, arrondie au centième.

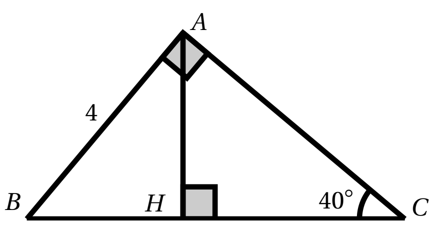
Exercice 183

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 4$ et $BC = 9$.

1. Faire une figure, en prenant le carreau ou le cm comme unité de longueur.
2. Calculer $\widehat{ABC}$, arrondi au degré.

Exercice 184

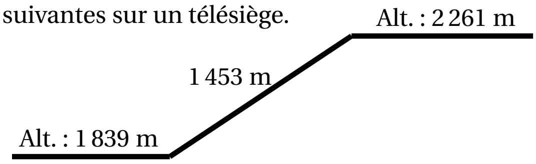
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $\widehat{BCA} = 40°$. On note H le pied de la hauteur issue de A.



Calculer la longueur AC, puis la longueur AH, arrondies au centième.

Exercice 185

Dans une station de ski, on peut lire les informations suivantes sur un télésiège.



Calculer l'angle formé par le télésiège avec l'horizontale. On arrondira au dixième de degré.

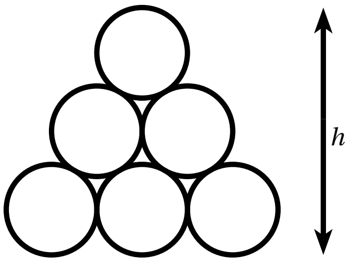
Exercice 186

ABC est un triangle équilatéral de côté 4, H est le pied de la hauteur issue de B.

1. Faire une figure et calculer les longueurs AH et BH.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos 60°$, $\sin 60°$ et $\tan 60°$.

Exercice 187

Les six cercles de rayon 1 ci-dessous sont tangents. Calculer la hauteur h.

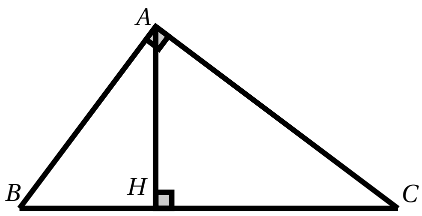


Exercice 188

Quelle distance parcoure-t-on lorsqu'on fait le tour de la terre en restant à 60° de latitude nord ?

Exercice 189

AHC est un triangle rectangle en H. La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B.
On sait que $AH = 4{,}8$ et que $HC = 6{,}4$.



1. Prouver que $\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$.
2. Montrer que $\tan\widehat{ACH} = \dfrac{3}{4}$.
3. En déduire la longueur BH.

XVII. Calcul littéral

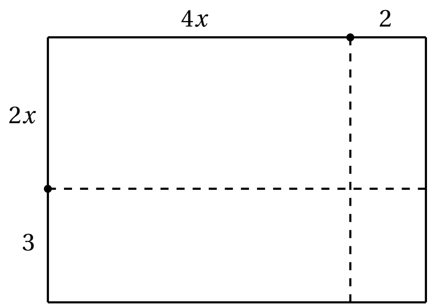
Exercice 190

x, y sont des nombres réels. Développer et réduire chacune des expressions :

1. $2(x+3)+3(x-5)$
2. $x(x+8)$
3. $(4x+5)(2x+6)$
4. $x(2x-3)$
5. $(12y-5)-2(5y+3)$
6. $(2x+4)(4x-2)$
7. $3(2y+3)+2(y-1)$
8. $3(x+y)-3(x-y)$
9. $(x-4)(2x+1)$

Exercice 191

Écrire le périmètre et l'aire du rectangle en fonction du réel x.



Exercice 192

Soit x un nombre réel. Développer et réduire :

- $(x-4)^2$
- $(2x+1)^2$
- $(x+5)(x-5)$
- $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$
- $x^2-(x+3)(x-3)$

Exercice 193

Soit x un nombre réel. Démontrer les égalités :

- $(x-3)^2-4=x^2-6x+5$
- $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

Exercice 194

1. Démontrer que pour tous nombres a, b :
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$
2. Déterminer de même une formule pour $(a-b)^3$.

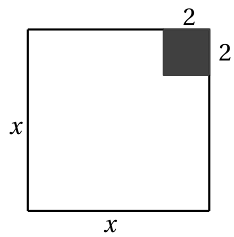
Exercice 195

Résoudre les équations :

1. $x^2-8x=0$
2. $5x^2=3x$
3. $x^2-16=0$
4. $x^2=10$
5. $x^2+7=0$
6. $2x^2+x=0$
7. $4x^2-9=0$

Exercice 196

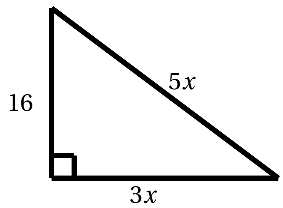
Sur la figure ci-dessous, on a enlevé à l'intérieur d'un grand carré de côté x un petit carré de côté 2. On sait que l'aire de la zone blanche est égale à 20.



Déterminer la valeur de x.

Exercice 197

Déterminer la valeur de x.

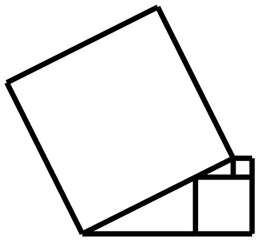


Exercice 198

1. **a.** Démontrer que pour tout nombre x :
$$x^2+2x-3=(x+1)^2-4.$$
b. Résoudre l'équation
$$x^2+2x-3=0.$$
2. **a.** Démontrer que pour tout nombre x :
$$x^2-8x-9=(x-4)^2-25.$$
b. Résoudre l'équation
$$x^2=8x+9.$$
3. **a.** Démontrer que pour tout nombre x :
$$x^2+4x-1=(x+2)^2-5.$$
b. Résoudre l'équation
$$x^2+4x-1=0.$$
4. Résoudre l'équation $x^2+6x+5=0$.
5. Résoudre l'équation $x^2-10x+23=0$.
6. Résoudre l'équation $x^2+x+1=0$.

XVIII. Problèmes

Exercice 199 ()
Un grand carré s'appuie sur deux autres carrés comme le montre la figure. Les aires des deux carrés les plus petits sont 1 et 9. Quelle est l'aire du grand carré ?



Exercice 200 ()
Soit x le plus petit entier positif dont la somme des chiffres est 2022. Quelle est la somme des chiffres de $x + 2023$?

Exercice 201 ()
On dispose de deux bidons de contenances 7 ℓ et 4 ℓ et d'un robinet d'eau. Déterminer une méthode pour mettre exactement 2 ℓ d'eau dans l'un des deux bidons.

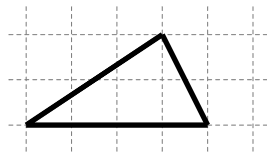
Exercice 202 ()
David mettrait une heure pour couper seul un tas de bois, et Rémy en mettrait deux.

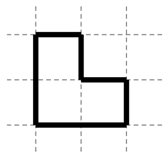
Combien de temps David et Rémy mettront-ils s'ils se partagent le travail ?

Exercice 203 ()
Par combien de 0 se termine l'écriture décimale du nombre $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$?

Exercice 204 ()
Le nombre $18^{2018} + 18^{2019}$ est-il divisible par 8 ? Par 18 ? Par 28 ? Par 38 ? Par 48 ?

Exercice 205 ()
Découper chaque figure en 4 figures identiques.





Exercice 206 ()
Vers la fin du XVI° siècle, on a accusé Marie Stuart, reine d'Écosse, de comploter contre sa cousine Elizabeth, reine d'Angleterre. Experte dans l'art du chiffre, Marie Stuart communiquait avec ses partisans depuis sa prison à l'aide de messages codés.
Le texte ci-dessous est la traduction en français d'une lettre que lui aurait envoyée l'un d'entre eux, Anthony Babbington. Il utilise un chiffrement par substitution : chaque lettre de l'alphabet est remplacée par une autre (par exemple le A devient K, le B devient M, le C devient A, etc.).
En traduisant le message, vous comprendrez pourquoi il a valu à Marie Stuart une condamnation à mort.

HMC-HJHJ WRRCRXJ GJ GCP EJNXCURIMHHJR JX G'DNJ SJNXWCNJ GJ NMR SMHYWENMNR

JNXTJYTJNGTMNR GJ GJUCKTJT KMXTJ YJTRMNNJ TMQWUJ GJR HWCNR GJ RJR JNNJHCR.

YMDT U'JUCHCNWXCMN GJ U'DRDTYWXTCSJ, JNKJTR LDC NMDR NMDR SMNRCGJTMNR TJUJKJR

GD GJKMCT G'MBJCRRWNSJ YWT RMN JPSMHHDNCSWXCMN, CU Q W RCP

NMBUJR VJDNJR EJNR, XMDR HJR WHCR CNXCHJR, LDC, WKJS UJ AJUJ LD'CUR

YMTXJNX W UW SWDRJ SWXIMUCLDJ, JX YMDT UJ RJTKCSJ GJ KMXTJ HWVJRXJ,

RJ SIWTEJTMNX GJ UW XJTTCBUJ JPJSDXCMN. HMC-HJHJ WRRCRXJ GJ GCP EJNXCURIMHHJR

JX G'DNJ SJNXWCNJ GJ NMR SMHYWENMNR JNXTJYTJNGTMNR GJ GJUCKTJT KMXTJ YJTRMNNJ

TMQWUJ GJR HWCNR GJ RJR JNNJHCR. YMDT U'JUCHCNWXCMN GJ U'DRDTYWXTCSJ,

JNKJTR LDC NMDR NMDR SMNRCGJTMNR TJUJKJR GD GJKMCT G'MBJCRRWNSJ

YWT RMN JPSMHHDNCSWXCMN, CU Q W RCP NMBUJR VJDNJR EJNR, XMDR

HJR WHCR CNXCHJR, LDC, WKJS UJ AJUJ LD'CUR YMTXJNX W UW SWDRJ

SWXIMUCLDJ, JX YMDT UJ RJTKCSJ GJ KMXTJ HWVJRXJ, RJ SIWTEJTMNX GJ

UW XJTTCBUJ JPJSDXCMN.