

Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1	Le second degré : équations et paraboles	2
2	Probabilités	11

1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note \mathcal{S} l'ensemble des solutions des équations.

Exercice 1 1. On résout l'équation $x^2 + 2x = 0$:

On factorise :

$$x(x+2) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\ x + \cancel{2} - \cancel{2} = 0 - 2 \\ x = -2 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 0$ et $x = -2$. Autrement dit :

$$\mathcal{S} = \{0; -2\}.$$

2. On résout l'équation $x^2 - 16 = 0$:

On « isole » x^2 :

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= 0 \\ x^2 - \cancel{16} + \cancel{16} &= 0 + 16 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{16} = -4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{4; -4\}.$$

3. On résout l'équation $(2x - 1)(x - 5) = 0$:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0 \\ 2x - \cancel{1} + \cancel{1} &= 0 + 1 \quad \text{ou} \quad x - \cancel{5} + \cancel{5} = 0 + 5 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 5 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}; 5 \right\}.$$

4. On résout l'équation $x^2 + 7 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + 7 &= 0 \\ x^2 + \cancel{7} - \cancel{7} &= 0 - 7 \\ x^2 &= -7 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre x ne peut avoir un carré égal à -7).

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

(On rappelle que \emptyset désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

Exercice 2 Dans chaque cas, on note Δ le discriminant.

1. On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$:

- $a = 1, b = -3, c = -4$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = -1,$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{-1; 4\}.$$

2. On résout l'équation $2x^2 - 12x = -18$:

On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$) en « transposant -18 » :

$$2x^2 - 12x + 18 = -18 + 18$$
$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

- $a = 2, b = -12, c = 18$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$.
- $\Delta = 0$, donc il y a une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{3\}.$$

3. On résout l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$:

- $a = 1, b = -4, c = 5$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$.
- $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solution.

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

4. On résout l'équation $x^2 + 2x - 4 = 0$:

- $a = 1, b = 2, c = -4$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2},$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2}.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{20}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \right\}.$$

Remarque : On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5},$$

on trouve

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \cancel{2} \frac{(-1 + \sqrt{5})}{\cancel{2}} = -1 + \sqrt{5}.$$

De même, $x_1 = -1 - \sqrt{5}$.

5. On résout l'équation $x^2 = -6x$:

À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le « $-6x$ » dans le membre de gauche, qui devient « $+6x$ ».

$$\begin{aligned}x^2 &= -6x \\x^2 + 6x &= 0.\end{aligned}$$

Ici, il y a deux méthodes possibles :

- soit on utilise le discriminant, avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 0$ (puisque $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$) ;
- soit on factorise.

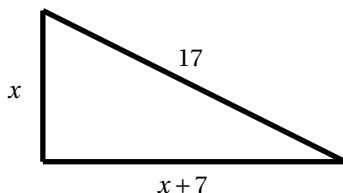
On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide¹ :

$$\begin{aligned}x(x+6) &= 0 \\x = 0 \quad \text{ou} \quad x+6 &= 0 \\x &= -6.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{0; -6\}.$$

Exercice 3 On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas x .



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe $(x+7)^2$ avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 &= 289 \\2x^2 + 14x + 49 - 289 &= 0 \\2x^2 + 14x - 240 &= 0.\end{aligned}$$

- $a = 2$, $b = 14$, $c = -240$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1920 = 2116$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 - 46}{4} = -15, \\x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 + 46}{4} = 8.\end{aligned}$$

Or x désigne une longueur, donc la première solution (x_1) est impossible. On a donc $x = 8$.

Remarque : Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

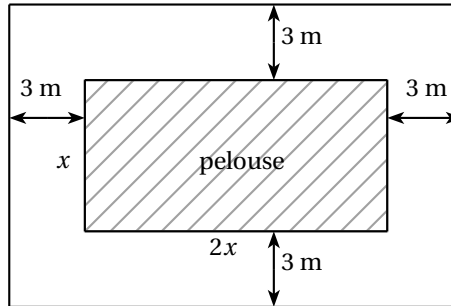
$$x = 8, \quad x+7 = 8+7 = 15 \quad \text{et} \quad 17.$$

On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec Δ dans le cas où b ou c valent 0.

Exercice 4 1. Voici un schéma du terrain en notant x la largeur de la pelouse (donc la longueur est $2x$) :



2. La longueur du terrain (en m) est

$$2x + 3 + 3 = 2x + 6,$$

sa largeur est

$$x + 3 + 3 = x + 6.$$

Donc la surface du terrain (en m^2) est

$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x + 6) \times (x + 6).$$

Or on sait que cette surface vaut 360 m^2 , donc

$$(2x + 6) \times (x + 6) = 360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente² :

$$\begin{aligned} (2x + 6) \times (x + 6) &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x \times x + 2x \times 6 + 6 \times x + 6 \times 6 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 6x + 36 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x + 36 - 360 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x - 324 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré.

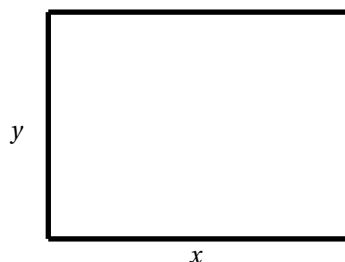
- $a = 2$, $b = 18$, $c = -324$.
- $\Delta = 18^2 - 4 \times 2 \times (-324) = 2916$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 - \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 - 54}{4} = \frac{-72}{4} = -18, \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 + \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 + 54}{4} = \frac{36}{4} = 9. \end{aligned}$$

Or x désigne une longueur, donc x ne peut pas être négatif et seule la solution $x_2 = 9$ est valable.

Conclusion : $x = 9$, donc la longueur du terrain (en m) est $2 \times 9 + 3 + 3 = 24$, sa largeur est $9 + 3 + 3 = 15$.

Exercice 5 On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note x et y les dimensions du champ.



2. Les « \Leftrightarrow » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est

$$x + y = 27.$$

- L'aire est 180, donc

$$x \times y = 180.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x + y = 27 & L_1 \\ xy = 180 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie L_1 par x :

$$(x + y) \times x = 27 \times x, \quad \text{soit} \quad x^2 + xy = 27x.$$

Or d'après L_2 , $xy = 180$, donc

$$x^2 + 180 = 27x, \quad \text{et ainsi} \quad x^2 - 27x + 180 = 0.$$

On aboutit à une équation du 2^d degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) : $x_1 = 12$, $x_2 = 15$.

On sait que $x + y = 27$, donc si $x = 12$, alors $y = 27 - x = 27 - 12 = 15$; et si $x = 15$, alors $y = 27 - x = 27 - 15 = 12$.

Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

Exercice 6 On note n le nombre d'amis initialement présents, et p le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc

$$n \times p = 2400. \quad (1)$$

- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas $(n - 2)$ amis, et chacun paye alors $(p + 40)$ €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit

$$(n - 2) \times (p + 40) = 2400.$$

En développant, cela donne encore

$$np + 40n - 2p - 80 = 2400. \quad (2)$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2400 dans les deux cas, on obtient l'égalité

$$np = np + 40n - 2p - 80,$$

soit

$$40n - 2p - 80 = 0.$$

Finalement, le couple (n, p) est solution du système

$$\begin{cases} n \times p = 2400 \\ 40n - 2p - 80 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient

$$n = 12, \quad p = 200.$$

Conclusion : comme $12 - 10 = 2$, ce sont 10 amis qui sont finalement partis.

Exercice 7 1. $P_1 : y = x^2 - 6x + 5$.

- $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$.
- a est \oplus , donc P_1 est vers le haut.
- On note S le sommet de P_1 . D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

On en déduit

$$y_S = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4.$$

On a donc $S(3; -4)$.

Venons-en au tracé de la parabole. On fait un tableau de valeurs sur $[0; 6]$, avec un pas de 1³. Pour cela, on utilise la calculatrice :

3. Nous choisissons un intervalle symétrique par rapport à l'abscisse du sommet, et qui ne soit ni trop court, ni trop long. On choisit un pas de 1 par facilité, mais le graphique serait bien sûr plus précis avec un pas plus petit.

Calculatrices collège

- **MODE** ou **MENU**
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- $f(X)=X^2-6X+5$ **EXE**
(si on demande $g(X)=$, ne rien rentrer)
- Début? 0 **EXE**
- Fin? 6 **EXE**
- Pas? 1 **EXE**

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches

- **alpha** **x**
- **home**
- Fonctions **EXE** puis choisir Fonctions **EXE**
- $f(x)=x^2-6x+5$ **EXE**
- choisir Tableau **EXE** puis Régler l'intervalle **EXE**
- X début 0 **EXE**
- X fin 6 **EXE**
- Pas 1 **EXE**
- choisir Valider

TI graphiques

X s'obtient avec la touche

- x, t, θ, n
- $f(x)$
- $Y_1 = X^2 - 6X + 5$ **EXE**
- 2nde **déf table**
- DébTable=0 **EXE**
- PasTable=1 **EXE**
ou $\Delta Tbl=1$ **EXE**
- 2nde **table**

CASIO graphiques

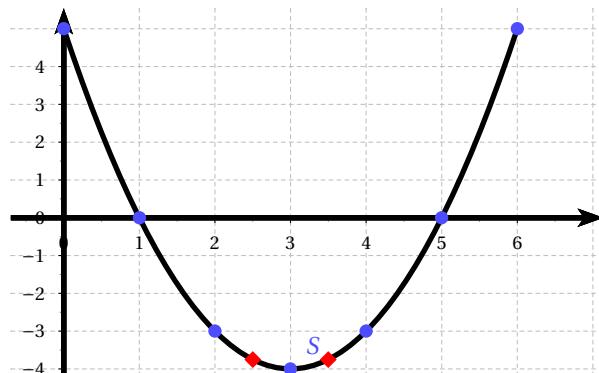
X s'obtient avec la touche

- **X,θ,T**
- **MENU** puis choisir TABLE **EXE**
- $Y_1 : X^2 - 6X + 5$ **EXE**
- **F5** (on choisit donc SET)
- Start : 0 **EXE**
- End : 6 **EXE**
- Step : 1 **EXE**
- **EXIT**
- **F6** (on choisit donc TABLE)

On obtient le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Enfin on construit le graphique (j'ai un peu « écrasé » l'axe des ordonnées pour gagner de la place) :



Remarque : On peut avoir intérêt à ajouter des points près du sommet pour obtenir un tracé plus précis. C'est ce que l'on a fait ci-dessus avec les deux losanges rouges, correspondant au tableau de valeurs ci-dessous.

x	2,5	3,5
y	-3,75	-3,75

2. $P_2 : y = -0,5x^2 - x + 4$.

- $a = -0,5$, $b = -1$, $c = 4$.
- a est \ominus , donc P_2 est vers le bas.
- On note S le sommet de P_2 . D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times (-0,5)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

On en déduit

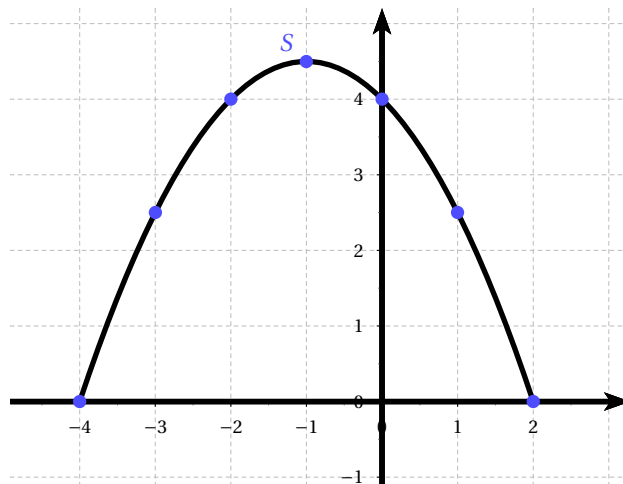
$$y_S = -0,5 \times (-1)^2 - (-1) + 4 = -0,5 + 1 + 4 = 4,5.$$

On a donc $S(-1 ; 4,5)$.

Tableau de valeurs :

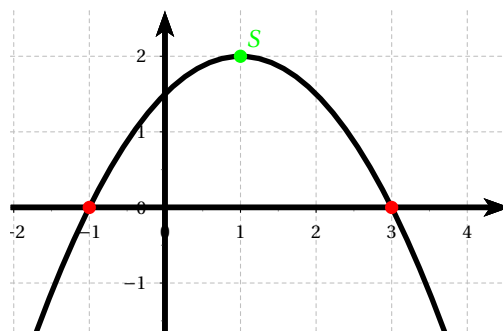
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

Tracé de la parabole :



Exercice 8 1. On trace la parabole P :

- qui coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -1$ et en $x_2 = 3$.
- dont le sommet est le point $S(1;2)$.

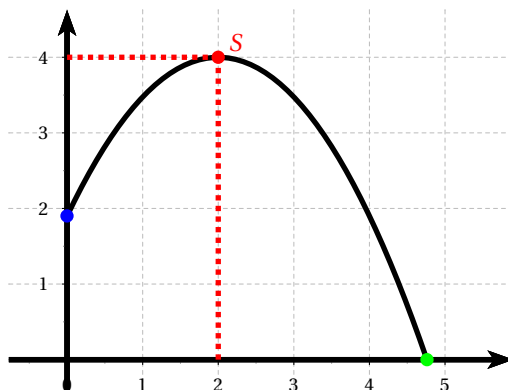


Remarque : Il est difficile de faire un tracé hyper précis avec si peu d'informations. L'élève intéressé peut essayer de prouver – en faisant un bel effort – que $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$. Auquel cas, il pourra faire un tableau de valeurs et obtenir une courbe presque aussi parfaite que celle dessinée ci-dessus avec l'ordinateur.

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Comme P est vers le bas, a est du signe \ominus .
- Comme P coupe l'axe des abscisses en deux points, il y a deux racines et Δ est du signe \oplus .

Exercice 9 La trajectoire de la balle en fonction du temps est la parabole $P : y = -0,525t^2 + 2,1t + 1,9$, tracée ci-dessous :



1. Clément commence sa passe à la hauteur

$$h(0) = -0,525 \times 0 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9 \text{ mètres.}$$

Cela correspond au point bleu sur la figure.

2. La hauteur maximale de la balle est l'ordonnée du sommet S de la parabole, en rouge sur la figure.

- $a = -0,525$, $b = 2,1$, $c = 1,9$.
- On calcule avec la formule :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2,1}{2 \times (-0,525)} = \frac{-2,1}{-1,05} = 2.$$

On en déduit

$$y_S = -0,525 \times 2^2 + 2,1 \times 2 + 1,9 = 4,$$

et donc la hauteur maximale de la balle est de 4 mètres.

3. Pour déterminer le temps de vol de la balle, on cherche à quel moment elle retombe au sol (point vert sur la figure). On résout donc l'équation

$$-0,525t^2 + 2,1t + 1,9 = 0.$$

- $\Delta = 2,1^2 - 4 \times (-0,525) \times 1,9 = 8,4$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

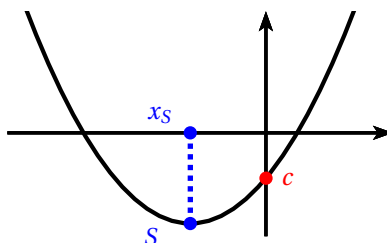
$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1 - \sqrt{8,4}}{2 \times (-0,525)} \approx 4,76,$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1 + \sqrt{8,4}}{2 \times (-0,525)} \approx -0,76.$$

La deuxième solution est impossible, car le temps cherché est positif.

Conclusion : la balle retombe au sol après 4,76 secondes environ.

Exercice 10 On a tracé une parabole $P : y = ax^2 + bx + c$.



1.
 - $a > 0$, car P est vers la haut.
 - Si $x = 0$, alors $y = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$, donc la P passe par le point de coordonnées $(0; c)$ – autrement dit, elle coupe l'axe des ordonnées en c .
Par lecture graphique, on obtient donc $c < 0$.
 - Il y a deux racines, car P coupe l'axe des abscisses deux fois. On a donc $\Delta > 0$.
2. D'après le cours, $x_S = -\frac{b}{2a}$, donc

$$\begin{aligned} x_S \times 2a &= -\frac{b}{2a} \times 2a \\ x_S \times 2a &= -b \\ -x_S \times 2a &= b. \end{aligned}$$

On sait que $x_S < 0$ et $a > 0$, donc $b = -\underbrace{x_S}_{\ominus} \times \underbrace{2a}_{\oplus}$ est du signe \oplus : $b > 0$.

Exercice 11 Soit $P : y = ax^2 + bx + c$ une parabole et S son sommet. On sait que $x_S = -\frac{b}{2a}$, donc

$$\begin{aligned} y_S &= a \times \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \cancel{a} \times \frac{b^2}{4\cancel{a}^2} - \frac{b^2 \times \cancel{2}}{2a \times \cancel{2}} + \frac{c \times \cancel{4}a}{1 \times \cancel{4}a} \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Exercice 12 1. Le coût de fabrication des x objets est

$$C(x) = x^2 + 230x + 325.$$

Chaque objet est vendu 300 €, donc la recette issue de la vente des x objets est

$$R(x) = 300x.$$

On en déduit que le bénéfice est

$$B(x) = \text{Recette} - \text{Coût} = R(x) - C(x) = 300x - (x^2 + 230x + 325) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325.$$

2. Le bénéfice est une expression du second degré, avec $a < 0$. Il est donc représenté par une parabole orientée vers le bas. Maximiser le bénéfice revient donc à trouver le (l'abscisse du) sommet de cette parabole :

- $a = -1$, $b = 70$, $c = -325$.
- $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2 \times (-1)} = \frac{-70}{-2} = 35$.

Conclusion : le bénéfice est maximal lorsqu'on produit et vend 35 objets.

Remarque : Le bénéfice maximal est

$$-35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900 \text{ €}.$$

Exercice 13 1. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow x^3 = 2x \\ & \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \\ & \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 = 2 \\ & \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conclusion : il y a trois solutions :

$$\mathcal{S} = \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}.$$

2. (a) Pour démontrer l'égalité, on développe et on réduit le membre de droite : pour tout nombre x ,

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2+3x-4) &= x \times x^2 + x \times 3x + x \times (-4) + 1 \times x^2 + 1 \times 3x + 1 \times (-4) \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + x^2 + 3x - 4 \\ &= x^3 + 4x^2 - x - 4. \end{aligned}$$

Conclusion : on a bien

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x+1)(x^2+3x-4).$$

- (b) On utilise la factorisation de la question 2.(a) pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x^2+3x-4) = 0 \\ & \Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+3x-4 = 0 \end{aligned}$$

On résout chaque équation séparément :

$$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

L'autre équation est du second degré, on utilise le discriminant :

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

- $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$.
- $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.

- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-3 + 5}{2} = 1.$$

Conclusion : l'équation $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$ a trois solutions :

$$\mathcal{S} = \{-1; -4; 1\}.$$

2 Probabilités

Exercice 14 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectif :

	Abonnés au soir	Pas abonnés au soir	Total
Abonnés au matin	50	20	70
Pas abonnés au matin	50	160	210
Total	100	180	280

2. (a) $P(S) = \frac{100}{280} = \frac{5}{14}$ et $P(\overline{M}) = \frac{210}{280} = \frac{3}{7}$.

- (b) • L'événement « le pensionnaire est abonné aux deux journaux » s'écrit $S \cap M$ ⁴. On a

$$P(S \cap M) = \frac{50}{280} = \frac{5}{28}.$$

- L'événement « le pensionnaire est abonné à au moins un journal » s'écrit $S \cup M$ ⁵. Il y a plusieurs façons de dénombrer les cas favorables à cet événement :

- ▶ ajouter les pensionnaires qui sont abonnés au *Soir* et ceux qui sont abonnés au *Matin*, puis retrancher ceux qui sont abonnés aux deux journaux (sinon ils sont comptés deux fois) : $100 + 70 - 50 = 120$.
- ▶ ajouter ceux qui ne sont abonnés qu'au *Soir*, ceux qui ne sont abonnés qu'au *Matin*, et ceux qui sont abonnés aux deux journaux : $50 + 20 + 50 = 120$.
- ▶ retrancher l'effectif de pensionnaires qui ne sont abonnés à aucun journal de l'effectif total : $280 - 160 = 120$.

Quelle que soit la méthode de calcul, on obtient :

$$P(S \cup M) = \frac{120}{280} = \frac{3}{7}.$$

- (c) On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. La probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* est⁶

$$P_M(S) = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}.$$

Exercice 15 1. Le candidat connaît 3 des questions d'histoire, donc $P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; et il connaît 2 des 5 questions de géographie, donc $P(G) = \frac{2}{5}$.

2. Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

On a colorié les cases de trois couleurs :

- en vert : le candidat connaît les deux questions ;
- en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
- en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

4. On rappelle que \cap se lit « inter » et correspond au mot français « ET ».

5. On rappelle que \cup se lit « union » et correspond au mot français « OU ».

6. On utilise la notation des probabilités conditionnelles, qui sera vue dans le paragraphe 2 du cours.

Hist Géo	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

6 des 30 cases sont coloriées en vert, donc la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est

$$P(G \cap H) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

3. $6 + 15 = 21$ des 30 cases sont coloriées en vert ou en orange, donc la probabilité que le candidat connaisse au moins l'une des deux questions est

$$P(G \cup H) = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}.$$

Remarque : On peut aussi obtenir 21 avec le calcul $30 - 9$, ou utiliser la formule du cours de 2^{de} :

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

Exercice 16 On utilise un tableau à double entrée. On place un symbole dans chacune des cases favorable à l'événement

A : « les deux dés montrent la même couleur ».

Dé n°1 \ Dé n°2	■	■	■	■	□	□
■	★	★				
■	★	★				
■			★	★		
■			★	★		
□					★	★
□					★	★

Il y a 12 cases favorables à A sur 36, donc $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.