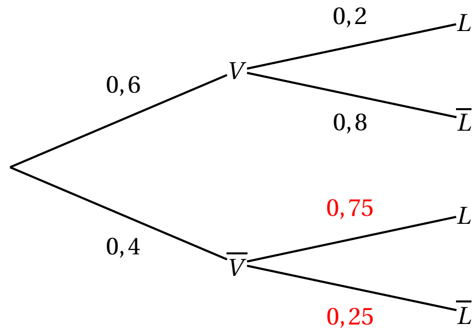
Corrigé du bac blanc n°2

Exercice 1

Partie A

1. On traduit la situation par un arbre pondéré. Tout ce qui apparaît en rouge n'est obtenu qu'après avoir traité la question 4.



2. La probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE est

$$\boxed{P\left(V\cap\overline{L}\right)=0,6\times0,8=0,48.}$$

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(L)=P(V\cap L)+P\left(\overline{V}\cap L\right)$$
$$0,42=0,6\times0,2+P\left(\overline{V}\cap L\right).$$

La probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est donc

$$\boxed{P\left(\overline{V}\cap L\right)=0,42-0,12=0,3.}$$

4. D'après les questions précédentes :

$$\boxed{P_{\overline{V}}(L)=\frac{P\left(\overline{V}\cap L\right)}{P\left(\overline{V}\right)}=\frac{0,3}{0,4}=0,75.}$$

C'est l'un des deux nombres en rouge de l'arbre.

5. Un client a pris l'option PILOTE. La probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile est

$$\boxed{P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0,6 \times 0,2}{0,42} \approx 0,29.}$$

Partie B

1. D'après l'énoncé

$$\boxed{P(L \cap A) = 0,42 \times 0,005 = 0,0021} \qquad \text{et} \qquad \boxed{P\left(\overline{L} \cap A\right) = 0,58 \times 0,12 = 0,0696.}$$

2. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité qu'un client subisse une avarie est

$$P(A) = P(L \cap A) + P\left(\overline{L} \cap A\right) = 0,0021 + 0,0696 = 0,0717.$$

   Donc si l'entreprise loue 1 000 bateaux, on peut s'attendre à

$$\boxed{1000 \times 0,0717 \approx 72 \text{ avaries environ.}}$$

Partie C

1. On répète 40 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre 0,42, donc

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 40,\ p = 0,42.}$$

2. La probabilité qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE est

$$\boxed{P(X \geq 15) \approx 0,768.}$$

   Le calcul est automatique avec une NUMWORKS, *mais très pénible avec une calculatrice collège. Toutefois, le correcteur attribue les points à l'élève qui écrit qu'il faut calculer* $P(X \geq 15) = P(X = 15) + P(X = 16) + \cdots + P(X = 40)$, *où* $P(X = k) = \binom{40}{k} \times 0,42^k \times (1 - 0,42)^{40-k}$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) On prend $n = 0$ dans la formule de récurrence :

$$\boxed{u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 0 - 3 = 12.}$$

   (b) On prend $n = 1$ dans la formule de récurrence :

$$\boxed{u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 53.}$$

   (c) $\boxed{\text{Il semble que la suite } (u_n) \text{ soit croissante et qu'elle ait pour limite } +\infty.}$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n \geq n + 1.$$

   - **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 3 \\ 0+1 & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_0 \geq 0 + 1 \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

   - **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k \geq k + 1.$$

   On multiplie par 5 :

$$u_k \times 5 \geq (k+1) \times 5$$
$$5u_k \geq 5k + 5.$$

   Puis on ajoute $-4k - 3$:

$$5u_k - 4k - 3 \geq 5k + 5 - 4k - 3$$
$$u_{k+1} \geq k + 2.$$

   La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

   - **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc

$$\boxed{\mathscr{P}_n \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

   (b) $u_n \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$, donc par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= (5u_n - 4n - 3) - n - 1 - 1 && \text{(définition de } u_{n+1}\text{)} \\ &= 5u_n - 5n - 5 && \text{(calcul)} \\ &= 5(u_n - n - 1) && \text{(factorisation)} \\ &= 5v_n && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \end{aligned}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5v_n$, donc

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = 5.}$$

   Enfin

$$\boxed{v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = 2.}$$

   (b) On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 5^n.}$$

   (c) Puis comme $v_n = u_n - n - 1$:

$$\boxed{u_n = v_n + n + 1 = 2 \times 5^n + n + 1.}$$

   (d) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1\right) - \left(2 \times 5^n + n + 1\right) \\ &= 2 \times 5 \times 5^n + n + 1 + 1 - 2 \times 5^n - n - 1 \\ &= 10 \times 5^n - 2 \times 5^n + 1 = 8 \times 5^n + 1. \end{aligned}$$

   Or $8 \times 5^n + 1 \geq 0$, donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$$

4. (a)

```
def suite():
    u = 3
    n = 0
    while u<10**7:
        u = 5*u-4*n-3
        n = n+1
    return n
```

   (b) La fonction renvoie la valeur $\boxed{10.}$

   Pour l'obtenir, soit on rentre le code en machine (sur NUMWORKS), soit on calcule les termes successifs de la suite (on obtient $u_9 = 3\,906\,260$ et $u_{10} = 19\,531\,261$).

Exercice 3

Les bonnes réponses sont

1.**a**	2.**a**	3.**b**	4.**c**	5.**d**

Exemples de méthodes pour chaque question :

1. On teste les primitives possibles en les dérivant chacune tour à tour. Avec $F(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^{x}$ et en utilisant la formule pour la dérivée d'un produit, on obtient $F' = f$.
2. Les droites ne sont pas parallèles, car leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Cela élimine sans effort les réponses b et c.

   Pour trancher entre a et d, il faut savoir si le système $\begin{cases} 2+t &= 1-s\\ 1+r &= -1+s\\ -r &= 2-s\end{cases}$ admet ou non une solution. On résout et on constate qu'il existe bien une solution : $(r, s) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Les droites (d_1) et (d_2) sont donc sécantes.
3. Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (P), et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ dirige (Δ). Ces vecteurs sont orthogonaux, car leur produit scalaire est nul, donc (Δ) est parallèle à (P). Les bonnes réponses ne peuvent donc être que b ou c.

   Pour trancher, on « injecte » la représentation paramétrique dans l'équation du plan :

   $$2x - y + z - 1 = 2(2+u) - (4+u) + (1-u) - 1 = 4 + 2u - 4 - u + 1 - u - 1 = 0,$$

   donc $(\Delta) \subset (P)$.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{n}_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ sont normaux à (P_1) et (P_2). Ils ne sont ni orthogonaux (leur produit scalaire est non nul), ce qui élimine la réponse a, ni colinéaires, ce qui élimine les réponses b et d.
5. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ est positif (on trouve $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 5$).
   Or $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos\widehat{FEG}$, donc $\cos\widehat{FEG} > 0$; et donc $\widehat{FEG}$ est aigu. De plus, cet angle n'est pas nul, car les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires. Cela élimine toutes les réponses, à l'exception de la d.

Exercice 4

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. (a)

$$\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to 0} (5x^2+2x) & = 0 & \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) & = 0 & \text{par CC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.}$$

   (b) Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x^2\left(5 + \frac{2}{x} - 2\ln x\right).$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(5+\frac{2}{x} - 2\ln x\right) & = \text{"}5+0-\infty\text{"} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.}$$

2. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit : pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = 10x + 2 - \left(4x \times \ln x + 2x^2 \times \frac{1}{x}\right) = 10x + 2 - 4x\ln x - 2x = 8x + 2 - 4x\ln x.$$

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = 8x + 2 - 4x\ln x.}$$

3. (a) On utilise à nouveau la formule pour la dérivée d'un produit : pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f''(x) = 8 - \left(4 \times \ln x + 4x \times \frac{1}{x}\right) = 8 - 4\ln x - 4 = 4 - 4\ln x = 4(1 - \ln(x)).$$

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[,\ f''(x) = 4(1 - \ln(x)).}$$

   (b) D'après le cours, pour un intervalle I :

$$f \text{ au-dessus de ses tangentes sur } I \iff f \text{ convexe sur } I \iff f'' \text{ positive sur } I.$$

   On étudie donc le signe de f'' :

$$1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = \mathrm{e}.$$

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	||	$+$	0	$-$	

   Conclusion :

$$\boxed{\text{le plus grand intervalle sur lequel } \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de ses tangentes est }]0;\mathrm{e}].}$$

(c)

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	|| 2	$\nearrow$	$4\mathrm{e}+2$	$\searrow$	$-\infty$

$f'(\mathrm{e}) = 8\mathrm{e}+2-4\mathrm{e}\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{=1} = 8\mathrm{e}+2-4\mathrm{e} = 4\mathrm{e}+2.$

4. (a) Pour tout $x \in]0;\mathrm{e}]$, $f'(x) > 2$, donc l'équation $f'(x) = 0$ n'a aucune solution dans $]0;\mathrm{e}]$.
En revanche, l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution dans $[\mathrm{e};+\infty[$.

x	0		e		α		$+\infty$
$f''(x)$	||	$+$	0		$-$		
$f'(x)$	|| 2	$\nearrow$	$4\mathrm{e}+2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Pour justifier les choses rigoureusement, on utilise la théorème de la bijection :

- La fonction f' est continue et strictement décroissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$;
- $f'(\mathrm{e}) = 4\mathrm{e}+2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$;
- $0 \in]-\infty;4\mathrm{e}+2[$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f'(x) = 0$ a exactement une solution α dans $[\mathrm{e};+\infty[$; et donc une unique solution dans $]0;+\infty[$.

Avec la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{7,87 < \alpha < 7,88.}$$

(b) On déduit des questions précédentes le signe de f' et les variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

5. (a) L'égalité $f'(\alpha) = 0$ se réécrit

$$8\alpha + 2 - 4\alpha \ln \alpha = 0.$$

On en déduit

$$8\alpha + 2 = 4\alpha \ln \alpha,$$

donc

$$\boxed{\ln \alpha = \frac{8\alpha + 2}{4\alpha} = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.}$$

Puis

$$f(\alpha) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \ln \alpha = 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} = 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha + 1) = 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha = \alpha^2 + \alpha.$$

Conclusion :

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha.}$$

(b) Le maximum de f est $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$. Or la fonction $x \mapsto x^2 + x$ est strictement croissante sur $[7,87\ ;\ 7,88]$ (car sa dérivée est strictement positive), donc

$$7,87^2 + 7,87 < \alpha^2 + \alpha < 7,88^2 + 7,88.$$

Finalement, grâce à la calculatrice :

$$\boxed{69,8 < f(\alpha) < 70.}$$