Lycée Mariette Boulogne-sur-Mer 2023–2024

Exercices de Mathématiques
Partie I

Terminale Spécialité

Nicolas Perpète

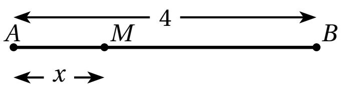
Table des matières

I. Compléments sur la dérivation

Exercice 1
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-2;6]$ par

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 4.$$

Exercice 2 (🏛)
On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 et un point mobile M pouvant se déplacer librement sur ce segment.



On note x la longueur du segment $[AM]$ et $f(x)$ le produit des longueurs $AM \times BM$.

1. Prouver que $f(x) = 4x - x^2$.

2. Où faut-il placer le point M pour que le produit des longueurs $AM \times BM$ soit maximal ?

Exercice 3
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}75x^2 - 3x - 1.$$

Exercice 4
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction h définie sur $[1;+\infty[$ par

$$h(x) = (x-6)\sqrt{x}.$$

Exercice 5
La fonction f est définie sur $[1;4]$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x} - 3$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, 2, 4 ; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. Prouver que $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$ pour tout $x \in [1;4]$.

2. Construire le tableau de variations de f.

3. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de T_A.

4. Déterminer également les équations de T_B et T_C.

5. Tracer les trois tangentes dans un repère orthonormé, puis construire la courbe de la fonction f.

Exercice 6 (🏛)
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par

$$i(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. Étudier les variations de i.

2. **a.** Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative (C) de la fonction i au point d'abscisse 0.

b. Étudier les positions relatives de (T) et (C).

3. Construire (C) et (T) dans un même repère.

Exercice 7
La distance (en m) parcourue au temps t (en s) par une pierre en chute libre est $d(t) = 5t^2$.
On lance cette pierre d'une hauteur de 20 m.

1. Combien de temps la pierre met-elle pour arriver au sol ?

2. Construire la courbe représentative de la fonction d dans un repère orthogonal (graduer de 0,2 en 0,2 en abscisse, et de 2 en 2 en ordonnée).

3. Déterminer la vitesse de la pierre au moment de l'impact au sol.

Exercice 8
Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{0{,}5x+1},\ g(x) = \mathrm{e}^{-1{,}5x},\ h(x) = \mathrm{e}^{2x-2},\ i(x) = \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Exercice 9 (🏛)
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Prouver que pour tout $x \in [0;4]$:

$$f'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Construire le tableau de variations de f.

Exercice 10 (🏛)
Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

Exercice 11
Exprimer chacun des nombres ci-dessous sous la forme e^a, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^3},\qquad \frac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2}{\left(\mathrm{e}^2\right)^2},\qquad \left(\mathrm{e}^2\right)^3 \times \mathrm{e}^{-5}.$$

Exercice 12

Résoudre les équations :

1. $e^x = -3$.
2. $e^{2x-1} = 1$.
3. $e^{2x} + 2e^x = 3$.

Exercice 13

Démontrer que pour tout nombre réel x :

1. $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$.
2. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Exercice 14

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = e^{-x^2}$.
2. $h(x) = (-4x+1)^3$.
3. $i(x) = e^{5x-9}$.
4. $j(x) = \left(x^2 - 3x\right)^5$.
5. $k(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$.

Exercice 15

Étudier la convexité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

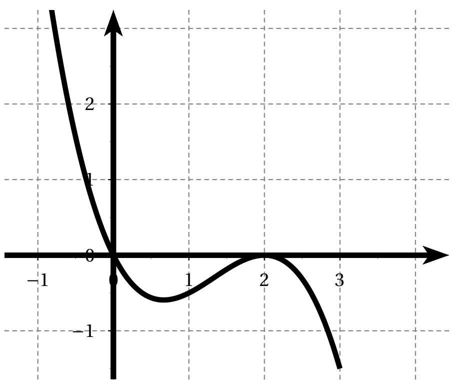
1. $f(x) = x^2$.
2. $g(x) = x^3$.
3. $h(x) = e^x$.

Exercice 16

La fonction g est définie sur l'intervalle $[-1;3]$ par

$$g(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 - 2x.$$

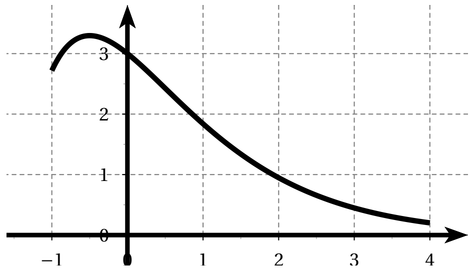
1. Étudier les variations de g.
2. Calculer la dérivée seconde de g et étudier sa convexité. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion.
3. Reproduire et coder la figure ci-dessous pour illustrer ces résultats.



Exercice 17

Étudier la convexité de la fonction h définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par

$$h(x) = (2x+3)e^{-x}.$$



Indication : On obtient $h''(x) = (2x-1)e^{-x}$.

Exercice 18

On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle et T sa tangente au point $A(0;1)$.

1. Déterminer l'équation de T et faire une figure.
2. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.

Exercice 19

Déterminer $v \circ u(x)$ dans les cas suivants :

1. $u(x) = x^2$, $v(x) = 4x+1$.
2. $u(x) = x+2$, $v(x) = x^3 - 3x$.
3. $u(x) = x-4$, $v(x) = \sqrt{x}$.
4. $u(x) = 2x+3$, $v(x) = e^x$.

Exercice 20

Dans chaque cas, déterminer une formule pour $v(x)$ et pour $u(x)$ connaissant $v(u(x))$.

1. $v \circ u(x) = \sqrt{x^2+1}$.
2. $v \circ u(x) = (x-3)^2 + 5(x-3) + 1$.
3. $v \circ u(x) = e^{3x-1}$.

Exercice 21

On considère dans un repère orthonormé la parabole $P : y = x^2$ et le point $A(3;0)$.

1. Soit m un réel et soit M le point de P d'abscisse m. Quelle est l'ordonnée de M ? Prouver que
$$AM = \sqrt{m^4 + m^2 - 6m + 9}.$$
2. On pose $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prouver que
$$f'(x) = \frac{(x-1)\left(2x^2+2x+3\right)}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}},$$
puis construire le tableau de variations de la fonction f.
3. Pour quelle valeur de m la longueur AM est-elle minimale ? Prouver que, dans ce cas, la tangente à P au point M est orthogonale à la droite (AM). Illustrer par une figure.

II. Suites et récurrence

Exercice 22

Dans chaque question, calculer les premiers termes des suites.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
3. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$
4. $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = v_n + n \qquad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23

Pour soigner son cancer de la thyroïde, un patient doit ingérer une unique gélule contenant 10 μg (microgrammes) d'iode 131. Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8 %. On note v_n la masse (en μg) d'iode 131 après n jours.

1. Déterminer v_0, v_1 et v_2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Quelle est la masse d'iode 131 après 10 jours (arrondir à 0,1 μg près).
3. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'iode 131 se désintègrent. Déterminer la valeur de la demi-vie de l'iode 131.

Exercice 24

Une plaque en verre teinté atténue de 15 % l'intensité lumineuse d'un rayon qui la traverse.
On note v_n l'intensité lumineuse (mesurée en lumens) d'un rayon à la sortie si on superpose n plaques identiques ($n \geq 1$).
On suppose que l'intensité lumineuse à l'entrée de la première plaque est $v_0 = 12$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Quel est le nombre minimal de plaques à superposer pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 100 ?

Exercice 25

Une suite v est définie par $v_0 = 4$ et la relation de récurrence
$$v_{n+1} = 2v_n + 2$$
pour tout entier naturel n.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Prouver que v n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Exercice 26 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = 3u_n - 1$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = u_n - 0,5$ pour tout entier naturel n. Calculer v_0, v_1 et v_2.
3. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. Déduire de la question 3 l'expression de v_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Exprimer enfin u_n en fonction de n.

Exercice 27

Le 01/01/2020, on emprunte 10 000 € à la banque au taux d'intérêt mensuel de 2 %. À chaque fin de mois on rembourse 300 €.

Comment ça marche ?... Le 01/01/2020 on emprunte 10 000 € au taux d'intérêt mensuel de 2 %, donc à la fin du mois de janvier 2020 la somme à rembourser est passée à
$$1,02 \times 10000 = 10200 \text{ €}.$$
À ce moment on rembourse 300 €, donc le 01/02/2020 il reste à rembourser
$$10200 - 300 = 9900 \text{ €}.$$
On note u_n la somme à rembourser le 1er jour du ne mois (en convenant que janvier 2020 est le mois 0, février 2020 le mois 1, etc.). On a donc $u_0 = 10000$ et $u_1 = 9900$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose
$$v_n = u_n - 15000.$$
Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
4. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer la durée du crédit. Calculer la somme totale remboursée.

Exercice 28 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = 2^n - 1.$$

Exercice 29 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (n+1)^2.$$

Exercice 30 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq 6.$$

Exercice 31 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 32

Soit q un réel différent de 1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Exercice 33 (Inégalité de Bernoulli 🏅)

Soit x un réel positif. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 34 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose également $v_n = \frac{4}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 35 (🏛)

Une salle de sport compte 500 abonnés en 2020. On suppose qu'à partir de cette date, chaque année, 80 % des personnes inscrites renouvellent leur abonnement et 40 nouvelles personnes s'abonnent.
On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année $2020 + n$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Compléter les pointillés : pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \ldots u_n + \ldots.$$

c. Justifier brièvement le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On pose $v_n = u_n - 200$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 200 + 300 \times 0,8^n.$$

c. Suivant ce modèle, quel devrait être le nombre d'abonnés en 2030 ? (arrondir à l'unité)

3. Redémontrer par récurrence la formule obtenue pour u_n dans la question 2.b.

Exercice 36 (🏛)

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $v_0 = 8$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2. Placer ces nombres, ainsi que u_0 et v_0, sur une droite graduée.

2. On pose $s_n = v_n + u_n$ et $d_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prouver que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3. Exprimer d_n, puis u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37

Éditer en machine un programme Python qui affiche les carrés des entiers de 1 à 5.

Exercice 38

Éditer en machine un programme Python qui affiche les uns en-dessous des autres les nombres de la table de 8 :

$$8\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ \cdots\ ,\ 80.$$

Exercice 39

Que calcule le programme suivant ?

```
s = 0
for i in range(1,101) :
    s = s + i
print(s)
```

Exercice 40

Éditer en machine un programme Python qui calcule :

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10.$$

Exercice 41

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que calcule le programme suivant ?

```
u = 3
for i in range(4) :
    u = 2 * u - 1
print(u)
```

Exercice 42

Éditer en machine un programme Python qui affiche **la liste** des nombres de la table de 8 :

$$[8\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ \cdots\ ,\ 80]\,.$$

Exercice 43

On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir exercice 41).
Écrire un programme Python qui affiche la liste des termes de u_0 à u_6.

Exercice 44

Quels seront les affichages des programmes suivants ?

Programme 1

```
x = 3
if x == 4 :
    print(5*x)
else :
    print(2*x)
```

Programme 2

```
x = 3
if x <= 4 :
    print(5*x)
else :
    print(2*x)
```

Exercice 45

On rappelle que si a et b sont deux entiers, les instructions Python $a//b$ et $a\%b$ donnent respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b. Par exemple :

$$\begin{array}{rr|l} & 3\ 4 & 6 \\ \cline{3-3} - & 3\ 0 & 5 \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

Donc, avec Python, $34//6 = 5$ et $34\%6 = 4$.

Éditer un programme Python qui renvoie la liste des diviseurs positifs de 30 (c'est-à-dire $[1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]$).

Exercice 46

Éditer la fonction suivante en machine :

```
def f(x) :
    return x**2
```

Quelle est la valeur renvoyée lorsqu'on entre f(3) ? Et f(−2) ?

Exercice 47

Que fait la fonction suivante ?

```
def g( ) :
    return 5
```

Exercice 48

Écrire une fonction **moyenne** de façon que l'instruction

$$\text{moyenne}(a,b)$$

renvoie la moyenne des deux nombres a et b.

Exercice 49

Comme les notes à un DS sont mauvaises, un professeur de mathématiques décide de multiplier toutes les notes par 1,2, mais sans dépasser 20.
Éditer une fonction **transforme** qui renvoie la nouvelle note d'un élève après transformation. Par exemple,

transforme(15)

renvoie 18, puisque $15 \times 1{,}2 = 18$; et

transforme(19)

renvoie 20, puisque $19 \times 1{,}2 = 22{,}8$.

Exercice 50 (🏛)

On reprend encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 41 : $u_0 = 3$ et

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Éditer une fonction **terme** de manière que

terme(n)

renvoie la valeur de u_n.

2. Éditer une fonction **liste** de manière que

liste(n)

renvoie la liste de tous les termes de u_0 à u_n.

Exercice 51 (🏛)

On considère la fonction :

```
def somme(n) :
    s = 0
    for k in range(1,n+1) :
        s = s + 1/k
    return s
```

Que calcule somme(100) ?

Exercice 52 (🏛 🏅)

On considère la fonction **mystere** définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.

```
def mystere(L) :
    M = L [0]
    for i in range(len(L)) :
        if L [i] > M
            M = L [i]
    return M
```

Que renvoie la commande mystere([2, 3, 7,0]) ?

Exercice 53 (🏅)

Une suite de Syracuse est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier strictement positif ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers strictement positifs.

1. On part de $u_0 = 26$. Calculer les termes successifs de la suite, jusqu'à observer un phénomène particulier.
Indication : On trouve $u_6 = 16$.

2. Écrire une fonction **syracuse** de manière que

syracuse( )

calcule et renvoie **la liste** de tous les termes de $u_0 = 26$ jusqu'à $u_{10} = 1$ (c'est-à-dire la liste que vous avez obtenue dans la question 1).

III. Dénombrement

Exercice 54

Un clavier de 12 touches comportant les chiffres de 1 à 9 et les lettres A, B, C se trouve à l'entrée d'un immeuble. Pour accéder à cet immeuble, il faut composer un code à 4 symboles.

1. Combien y a-t-il de codes d'entrée possibles ?

2. Combien y a-t-il de codes d'entrée ne comportant pas la lettre A ?

3. Combien y a-t-il de codes d'entrée formés de 4 symboles différents ?

Exercice 55

1. Combien le mot VOYAGE a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) ?

2. Même question avec le mot ANTILLES.

Exercice 56

Dans un test d'aptitude, on pose 10 questions à un candidat auxquelles il doit répondre par « Vrai » ou « Faux ».
De combien de façons différentes peut-il remplir ce questionnaire ?

Exercice 57

Lors de la finale des mondiaux d'athlétisme huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont Américains.

1. Combien de podiums possibles y a-t-il (en distinguant le 1$^{\text{er}}$, le 2$^{\text{e}}$ et le 3$^{\text{e}}$ de la course) ?

2. Combien de podiums y a-t-il comportant au moins un Américain ?

Exercice 58 (🏛)

On considère la fonction :

```
def fact(n) :
    p = 1
    for i in range(1,n+1) :
        p = p ∗ i
    return p
```

Que calcule fact(4) ?

Exercice 59 (🏛)

Un candidat à un examen connaît trois questions d'histoire sur les six possibles et deux questions de géographie sur les cinq possibles. Un examinateur lui pose une question d'histoire et une question de géographie.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité que le candidat connaisse les deux questions ? Au moins une des deux questions ?

Exercice 60 (🏛)

Lorsqu'on actionne la manette d'une machine à sous, on fait apparaître sur l'écran trois symboles choisis au hasard parmi ♡ (cœur), ♢ (carreau), ♠ (pique) et ♣ (trèfle).

♠	♡	♠

Calculer la probabilité des événements :

G : « Les trois symboles à l'écran sont différents. »

H : « Au moins un cœur apparaît à l'écran. »

Exercice 61 (🏛)

1. On demande aux 30 élèves d'une classe de choisir un nombre au hasard entre 1 et 200. Quelle est la probabilité qu'ils choisissent tous un nombre différent ?
2. Calculer explicitement cette probabilité grâce à un programme Python.

Exercice 62

Douze chevaux sont au départ d'une course. Un joueur joue au tiercé, c'est-à-dire qu'il mise sur le 1er, le 2e et le 3e de la course à venir. Il choisit les chevaux au hasard. À l'arrivée, ce sont les n°7, 4 et 10 qui arrivent aux trois premières places.

Calculer la probabilité de l'événement

A : « Le joueur obtient le tiercé. »

(c'est-à-dire qu'il a trouvé les trois chevaux sur le podium, mais pas forcément dans l'ordre).

Exercice 63

1. Donner les valeurs explicites de

$$A = \binom{5}{2}, \quad B = \binom{6}{3}, \quad C = \binom{50}{1}, \quad D = \binom{4}{0}.$$

2. Comparer les nombres $\binom{10}{3}$ et $\binom{10}{7}$, puis les nombres $\binom{100}{60}$ et $\binom{100}{40}$. Généraliser.

Exercice 64

On coche trois numéros sur une grille de neuf cases numérotées de 1 à 9.

Combien y a-t-il de grilles possibles ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Exercice 65 (🏛)

On prend 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de mains possibles ?

Exercice 66

Lorsqu'ils se rencontrent en arrivant le matin au lycée, les 24 élèves d'une classe se serrent la main. Combien de poignées de mains sont-elles échangées ?

Exercice 67 (🏅)

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Que vaut $(p-1)! \times p$?
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

3. Soient $1 \leq k \leq n$ deux entiers naturels. Démontrer que $n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$.

Exercice 68

Une association a vendu des calendriers dans le but de financer un voyage. Malheureusement, seuls 12 des 20 membres pourront effectivement partir compte tenu du peu d'argent récolté.

1. Quel est le nombre de groupes différents de 12 personnes que l'on peut constituer pour participer au voyage ?
2. David est un des membres de l'association. Combien y a-t-il :
   - de groupes de 12 personnes contenant David ?
   - de groupes de 12 personnes ne contenant pas David ?
3. Quelle égalité résulte des questions 1 et 2 ?
4. Généraliser : si $1 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n}{k} = \cdots + \cdots$$

5. Redémontrer par le calcul la formule obtenue à la question précédente.

Exercice 69 (🏛)

Un sélectionneur d'une équipe de football dispose de vingt joueurs dont trois gardiens de but.
Combien d'équipes différentes de onze joueurs, dont un gardien, peut-il former ?

Exercice 70 (🏛)

Une colonie de vacances compte 40 enfants et 5 moniteurs. Cette colonie possède un mini-bus de 12 places pour les excursions.
Sachant que deux moniteurs doivent accompagner les excursions, combien y a-t-il de remplissages possibles du mini-bus ?

Exercice 71 (🏛)

Un jeu de 32 cartes est formé des cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as dans chacune des quatre couleurs cœur, carreau, pique, trèfle.

1. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes possibles ?

2. Quelle est la probabilité qu'une main contienne :
- exactement 3 dames ?
- trois cœurs et deux carreaux ?
- exactement un roi et deux valets ?

Exercice 72 (🏅)

1. Huit candidats se présentent à un concours d'orchestre. Les recruteurs peuvent choisir autant de candidats qu'ils le souhaitent, et même n'en choisir aucun s'ils estiment qu'ils n'ont pas le niveau suffisant.

a. Si 3 candidats sont recrutés, montrer qu'il y a 56 façons possibles de les choisir.

b. Si 7 candidats sont recrutés, de combien de façons différentes peuvent-ils être choisis ?

c. Combien y a-t-il de recrutements différents possibles ? Écrire la réponse sous forme de somme, en utilisant les combinaisons.

d. Montrer, par une autre méthode de dénombrement, qu'il y a 256 recrutements différents possibles.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En vous inspirant de la question précédente, calculer

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}.$$

Exercice 73 (🏅)

On dispose de deux urnes :

- une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;
- une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.

On tire simultanément et au hasard deux boules de chaque urne. Calculer la probabilité de l'événement
A : « parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches. »

Pour simplifier le calcul, on pourra supposer que les boules portent toutes un numéro différent.

IV. Limites de suites

Exercice 74 (🏛)

On a vu dans le cours que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. En utilisant ce résultat et les règles de calcul sur les limites, calculer les limites des suites de termes généraux :

1. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$.

2. $v_n = 4 - \dfrac{1}{n^2}$.

3. $w_n = \left(5+\dfrac{3}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$.

4. $x_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}}$.

5. $y_n = \dfrac{3n-5}{4n+1}$.
On pourra mettre n en facteur au numérateur et au dénominateur.

Exercice 75

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 6$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n - 4$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On admet qu'elle converge. Calculer sa limite.

Exercice 76

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 = 20$ et de raison $q = -0{,}5$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.

2. On admet que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer sa limite.

Exercice 77

1. Prouver que pour tout entier $n \geq 1$:
$$0 \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}.$$
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

Exercice 78 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}4n + 1$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $u_1 = 1{,}6$ et calculer u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$n \leq u_n \leq n+1.$$
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.

Exercice 79

En utilisant la définition, prouver que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{4} = +\infty.$$

Exercice 80

Démontrer le théorème de limite par comparaison :

Théorème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n \leq v_n.$$
Alors
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Exercice 81 (🏛)

Dans chaque cas, dire si la suite est majorée, minorée, croissante, décroissante.

1. $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 1$ et la relation de récurrence
$$w_{n+1} = \frac{w_n}{1+2w_n}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra admettre, sans le justifier, que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.

Exercice 82

On reprend la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice précédent. Prouver qu'elle converge.

Exercice 83 (🏛)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $v_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.
2. On suppose que $\ell \neq 0$.
   a. Prouver que
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b. En calculant la limite dans chacun des deux membres de l'égalité de la question précédente, aboutir à une absurdité. Quelle conclusion en tirez-vous pour ℓ ?

Exercice 84 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 10$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$4 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 85 (🏅)

On définit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et
$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admet que cette suite est à termes positifs.

1. Étudier les variations de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Nous souhaitons prouver à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty. \qquad (\clubsuit)$$
   On suppose donc que $(\clubsuit)$ n'est pas vraie.
2. Prouver que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie $\ell \geq 2$.
3. En déduire que
$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$$
et aboutir à une absurdité. Conclure.

Exercice 86 (🏛)
Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = 0,8^n + (-0,2)^n$.
2. $v_n = 4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. $w_n = \dfrac{0,5^n - 1}{0,5^n + 1}$.
4. $x_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$.

Exercice 87 (🏛)
On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 84 : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

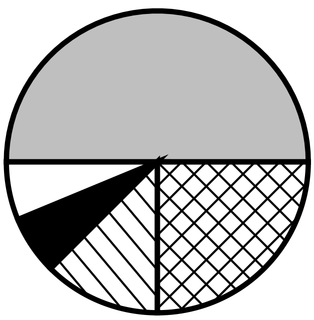
$$v_n = u_n - 4$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 88 (🏅)

1. Interpréter en termes de somme infinie le découpage du disque ci-dessous.



2. Soit q un réel dans l'intervalle $]-1;1[$. Vous savez (cours de première) que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

À l'aide de ce résultat, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(q + q^2 + \cdots + q^n\right).$$

3. Démontrer rigoureusement le résultat de la question 1.

Exercice 89
Quel est l'affichage en sortie du programme suivant ?

```
n = 10
while n <= 14 :
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice 90
Éditer en machine une fonction **div** dont le but est le suivant : on part d'un nombre réel x, que l'on divise par 2 jusqu'à avoir un résultat strictement inférieur à 1. On affiche le dernier résultat obtenu.

Par exemple, l'instruction

div(15)

renvoie 0.9375, puisque

15÷2 = 7.5 ; 7.5÷2 = 3.75 ; 3.75÷2 = 1.875 ; 1.875÷2 = 0.9375.

Exercice 91 (🏛)
On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 84 : $u_0 = 10$ et

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a vu qu'elle était décroissante, et qu'elle convergeait vers 4.

Quelle est la valeur renvoyée par la fonction suivante ?

```
def seuil( ) :
    u = 10
    n = 0
    while u >= 4.5 :
        u = 0.5*u + 2
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 92 (🏛)
On place 100 € sur un compte au taux d'intérêt annuel de 5 %. On a donc :

- 100 × 1,05 = 105 € après 1 an ;
- 105 × 1,05 = 110,25 € après 2 ans ;
- etc.

Écrire une fonction **seuil** qui permette de déterminer le nombre d'années nécessaires pour avoir plus de 200 € sur le compte.

Exercice 93 (🏅)
On reprend l'algorithme de Syracuse (exercice 53). Éditer en machine une fonction **syr** de manière que l'instruction

syr(a)

renvoie la liste des termes de la suite de Syracuse, en partant de $u_0 =$ a, et jusqu'à obtenir 1. Par exemple,

syr(26)

renvoie la liste

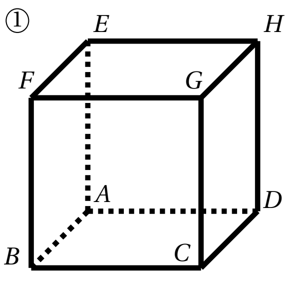
[26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1] .

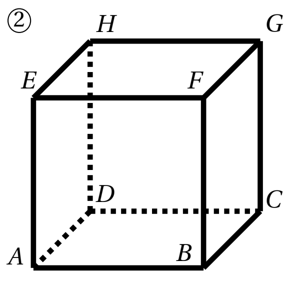
V. Géométrie repérée dans l'espace

Attention

Tous les repères utilisés dans les exercices sont orthonormés.

Dans tous les exercices où on parle d'un cube $ABCDEFGH$, les sommets sont placés comme sur l'une des deux figures ci-contre, suivant les indications de l'énoncé : ① ou ②.





Exercice 94

$ABCDEFGH$ est un cube ②. On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Faire une figure et placer les points $I(0;0;0,75)$ et $J(1;1;0,25)$.
2. Prouver que $BJHI$ est un parallélogramme. Est-ce un losange ?

Exercice 95

$ABCDEFGH$ est un cube ①. On note J et K les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

1. Faire une figure.
2. On travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Déterminer dans ce repère les coordonnées de tous les points de la figure.
3. Prouver que les droites (FH) et (JK) sont parallèles.
4. En déduire que les droites (FJ) et (HK) sont sécantes. Construire leur point d'intersection sur la figure.

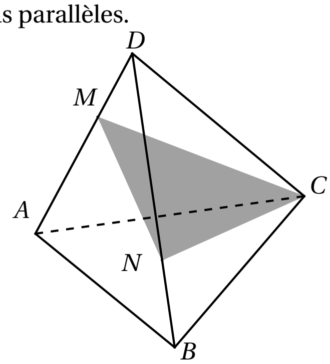
Exercice 96 (🏛)

$ABCDEFGH$ est un cube ②. Les points J et K sont définis par $\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{DB}$.

1. Faire une figure.
2. On travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Donner sans justification les coordonnées des points F et K, puis prouver que J a pour coordonnées $(2;-1;0)$.
3. Prouver que les points K, F et J sont alignés.

Exercice 97

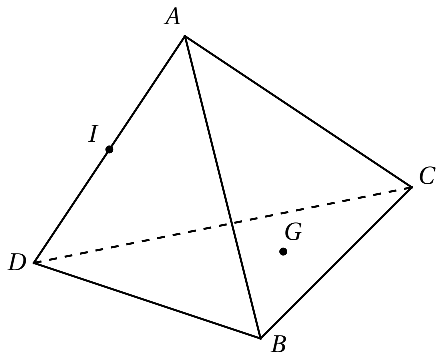
$ABCD$ est un tétraèdre. M est un point de l'arête $[AD]$ et N de l'arête $[BD]$. Les droites (MN) et (AB) ne sont pas parallèles.



Reproduire la figure et construire sans justification la droite d'intersection des plans (ABC) et (MNC).

Exercice 98 (🏅)

$ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[AD]$, G est un point de la face ABC distinct des sommets et tel que la droite (IG) ne soit pas parallèle au plan (BCD).



Reproduire la figure et construire sans justification l'intersection de la droite (IG) avec le plan (BCD).

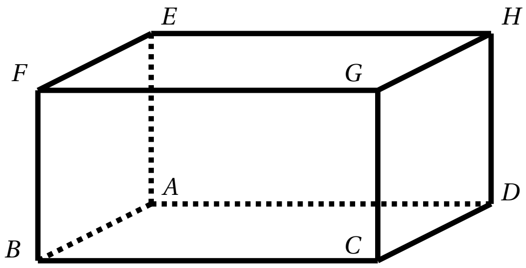
Exercice 99 (🏛)

$ABCDEFGH$ est un cube ①, I est le point tel que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées des points H, I, J, E, G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
3. Le plan (EGJ) coupe la droite (AB) en K. Construire le point K et déterminer ses coordonnées.
4. Prouver que la droite (HI) est parallèle au plan (EGJ).

Exercice 100

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = AE$ et $AD = 2AB$, le point I est le milieu du segment $[GH]$.



Reproduire la figure et construire la section du parallélépipède par le plan (EBI).

Exercice 101

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé de centre O, on considère les points $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$ et $D(4;3;0)$.

1. Faire une figure et construire la pyramide $OADBC$. Calculer son volume.
2. Prouver que le point M de coordonnées $\left(\frac{8}{3};2;\frac{4}{3}\right)$ appartient au segment $[CD]$ et préciser sa position sur ce segment.
3. M se projette orthogonalement en P sur le plan (OAB) et P se projette orthogonalement en H sur la droite (OA).

   Compléter la figure et donner sans justification les coordonnées des points P et H.

Exercice 102

$ABCDEFGH$ est un cube ①.

1. Démontrer que (AE) est orthogonale au plan (ABD).
2. En déduire que (AE) est orthogonale à la droite (BD).
3. Montrer que (BD) est orthogonale au plan (AEC).
4. Que peut-on dire des droites (BD) et (AG) ?

Exercice 103

On reprend l'énoncé de l'exercice précédent et on travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

En utilisant le produit scalaire, prouver que (BD) est orthogonale à (AG).

Exercice 104 (🏛)

$ABCDEFGH$ est un cube ①, I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[BC]$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (AK) et (DI) sont orthogonales.
3. Prouver que (AK) est orthogonale au plan (DIJ).

Exercice 105 (🏛)

On reprend l'énoncé de l'exercice précédent. Calculer une mesure à 1° près de l'angle $\widehat{DIJ}$.

Exercice 106 (🏅)

1. Prouver que les points $A(2;4;5)$ et $B(6;3;0)$ sont situés sur une même sphère $\mathscr{S}$ de centre $O(0;0;0)$.
2. Calculer la distance géodésique entre A et B, c'est-à-dire la distance minimale pour aller de A à B en restant à la surface de la sphère. Arrondir à $0,01$ près.

VI. Continuité et limites de suites

Exercice 107 (🏛)

La fonction f est définie sur $[0;2]$ par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

1. Construire son tableau de variations.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0;2]$.
3. Déterminer un encadrement de x_0 au centième.

Exercice 108

1. La fonction f est définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 1.$$

   a. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$.

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   c. Construire le tableau de signe de f.

2. a. La fonction g est définie sur $[0;1]$ par

$$g(x) = -\mathrm{e}^{-2x} - x + 2.$$

   Construire son tableau de variations (on ne demande pas de compléter l'extrémité des flèches).

   b. Déterminer un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 109 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Tracer dans un même repère les droites d'équations $y = x$ et $y = 0{,}5x + 3$ sur l'intervalle $[0;10]$ (on prendra 1 cm ou 1 carreau comme unité graphique).
3. Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$

5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 110 (🏛)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0{,}5$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.
2. Tracer dans un même repère les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$ (on prendra 10 cm ou 10 car. comme unité graph.). Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Déterminer la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 111 (🏛)

On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad g(x) = x - \mathrm{e}^{-x}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0;1]$ (on prendra 10 cm ou 10 carreaux comme unité graphique), puis construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in [0;1]$.

   a. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $[0;1]$, puis que cette solution est ℓ.

   b. Déterminer une valeur approchée de ℓ au centième.

Exercice 112

La partie entière d'un nombre réel x, notée $E(x)$, est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
Construire la courbe de cette fonction.

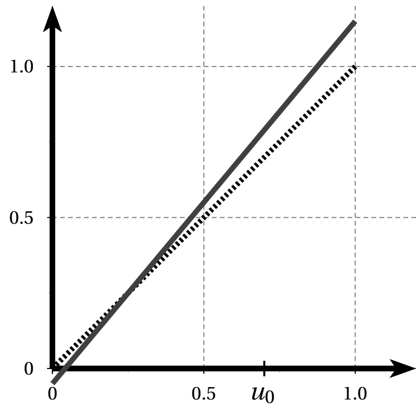
Exercice 113

Sur chacune des figures ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f en traits pleins et la droite d'équation $y = x$ en pointillés. Dans chaque cas, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence

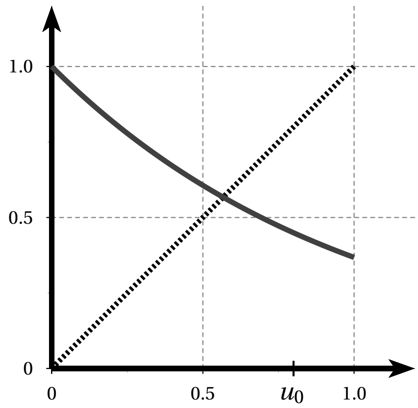
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

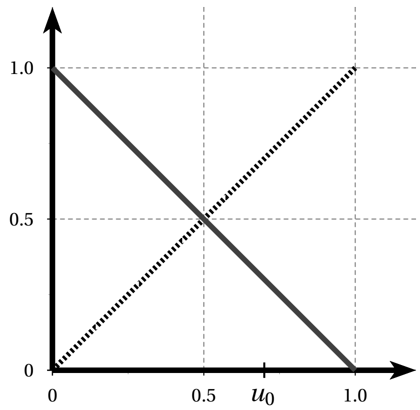
Représenter graphiquement les premiers termes des suites, puis compléter les pointillés sous chacune des figures (on ne demande pas de justification)..



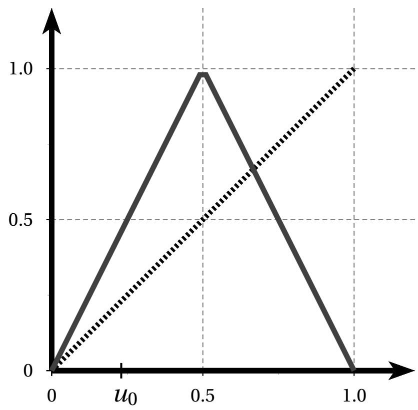
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$



$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$



La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ....



....

VII. Variables aléatoires, loi binomiale

Exercice 114 (🏛)

Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53 % de chances que ce soit un tir à 2 points et 47 % de chances que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est 52 % contre 44 % à 3 points.
On choisit un tir au hasard. On considère les événements :

D : « Stephen Curry tire à 2 points »,
M : « Stephen Curry marque ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque.
3. Montrer que $P(M) = 0,4824$.
4. Calculer $P_M(D)$. Arrondir au centième.
5. On note X le nombre de points pour le tir choisi au hasard. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 115 (🏛)

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas. Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10. Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

A : « le client choisit de faire l'aller en bateau »,

R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. a. Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.

   b. Calculer la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport.

   c. Le client a fait le retour en bateau. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi fait l'aller en bateau? (Arrondir au millième.)
3. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 500 € en bateau ; il est de 300 € en train.

   On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euros de son trajet aller-retour.

   a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

   b. Calculer l'espérance mathématique de Y.

Exercice 116 (🏛)

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

On interroge une personne au hasard et on note :

R : « la personne utilise régulièrement les transports en commun »,

J : « la personne est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré – on ne peut pas le compléter en entier pour l'instant.
2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française. Calculer $P\left(\overline{R} \cap J\right)$.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun. (Arrondir au millième.)

Exercice 119 (🏛)

Un QCM comporte 10 questions. Pour chacune d'entre elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On note X le nombre de bonnes réponses à ce QCM pour un élève qui répond au hasard à toutes les questions.

On arrondira les réponses au millième.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité des événements :

   A : « l'élève a exactement trois bonnes réponses. »

   B : « l'élève a au moins une bonne réponse. »
3. L'élève a au moins une bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il en ait exactement trois?

Exercice 117 (🏛)

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15. La bille numérotée 1 est rouge, les billes numérotées 2 à 5 sont bleues, les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.

On note R (respectivement B et V) l'événement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

1. a. Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair?

   b. Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7?
2. Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.

   Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

   - Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
   - Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
   - Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

   On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ.

   Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est $3 \times 3 - 10 = -1$ euro.

   Calculer $P(G = 5)$, $P_R(G = 0)$ et $P_{(G=-4)}(V)$.

Exercice 118 (🏛)

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 96 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de dix adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses **illisibles** parmi ces dix adresses.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Calculer $P(X = 2)$. Arrondir au millième.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins une adresse soit illisible? Arrondir au millième.

Exercice 120 (🏛)

On lance un dé équilibré à dix faces cent fois de suite. On note X le nombre de 10.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.
2. À l'aide de la calculatrice, calculer $P(5 \leq X \leq 15)$ (arrondir au millième).

Exercice 121 (🏛)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p = 0,8$.

À l'aide de la calculatrice, calculer :

$$P(X \geq 35) \quad , \quad P(X \geq 40) \quad , \quad P_{(X \geq 35)}(X \geq 40).$$

Exercice 122

On lance n fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité de faire au moins un 6 ?

Exercice 123

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

- **a.** Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
- **b.** Calculer l'espérance $E(X)$.
- **c.** Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

Exercice 124

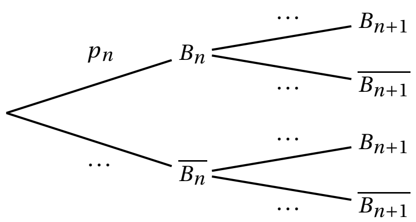
Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi. On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Pour tout entier naturel n, on note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4.$$

4. On admet que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer sa limite et interpréter la réponse.

Exercice 125

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1.
- **a.** Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
- **b.** Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
- **c.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

2.
- **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700.$$

- **b.** En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- **c.** Déterminer la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.
- **a.** Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil( ) :
    A = 1700
    n = 0
    while ......
        .........
        n = n + 1
    return ...
```

- **b.** Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction **seuil**.