Devoir surveillé n°8

- Le soin, la rédaction et l'orthographe seront pris en compte dans l'évaluation des copies.
- On demande aux élèves de rendre le sujet du devoir avec leur copie.

Exercice 1 — 10 points

On définit une fonction f par

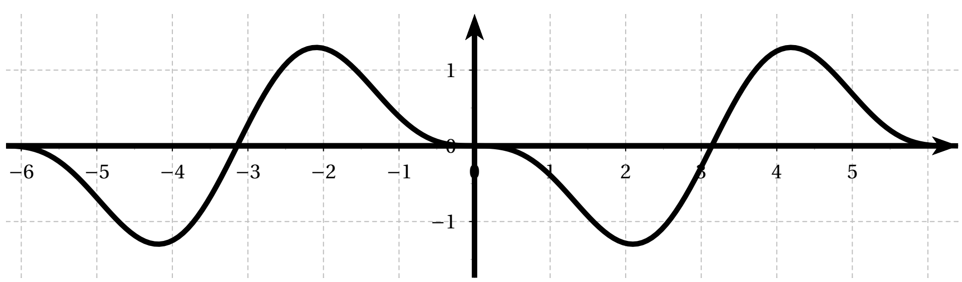
$$f(x) = (\cos x - 1)\sin x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de f, puis prouver qu'elle est 2π-périodique.

   On en déduit que l'on peut ramener l'étude de f à l'intervalle $[0;\pi]$.
2. Prouver que
   $$f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x,$$
   puis que
   $$f'(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1$$
   pour tout $x \in [0;\pi]$.
3. En posant $X = \cos x$, résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation
   $$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$
4. Construire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$. On indiquera les valeurs aux extrémités des flèches.

Pour vous permettre de contrôler vos réponses, on a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$.



Exercice 2 — 10 points

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, pour tout $0 \leqslant x \leqslant \pi$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \sin x \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

   (b) En déduire que

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation suivante, pour tout entier naturel n :

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n.$$

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nJ_n$.