Devoir surveillé n°9

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ».

Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que $91,7\,\%$ des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- $65\,\%$ des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- $98\,\%$ des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

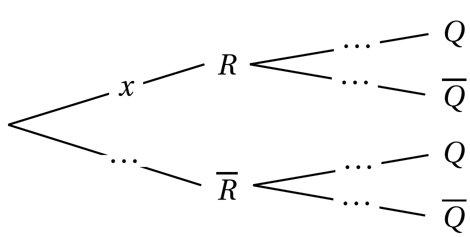
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Montrer que $x = 0,9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.

   Prouver, en détaillant le calcul, que $P(N \geq 18) \approx 0,005$.

   Dans la suite, on pourra utiliser $P(N \geq 18) = 0,005$ *pour faire les calculs.*
5. L'école compte 640 élèves. La directrice prévoit d'offrir un chèque cadeau d'un montant de 50 € à chacun de ceux dont la note est supérieure ou égale à 18.

   On numérote les élèves de 1 à 640. Pour tout entier i compris entre 1 et 640, on définit la variable aléatoire Z_i par

   $$Z_i = \begin{cases} 50 & \text{si l'élève n°} i \text{ obtient une note supérieure ou égale à 18,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Déterminer la loi de Z_1, puis prouver que $E(Z_1) = 0,25$.

   Dans la suite, on pourra utiliser sans le justifier le fait que

   $$E(Z_2) = \cdots = E(Z_n) = 0,25.$$

   (b) Que représente la variable aléatoire

   $$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{640}\ ?$$

   (c) Calculer $E(Z)$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
   Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
7. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

   (b) Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est supérieure à 80 %. »