Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250\times6}{4}=\frac{1\,500}{4}=375$ g de farine, $\frac{500\times6}{4}=\frac{3\,000}{4}=750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6\times125=750$ g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai $\frac{750\times2}{1\,000}=\frac{1\,500}{1\,000}=1,5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes [1].

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra $\frac{60\times45}{20}=\frac{\cancel{20}\times3\times45}{\cancel{20}}=135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135=120+15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4\times30\div5=24$ pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7\times24}{6}=\frac{7\times4\times\cancel{6}}{\cancel{6}}=28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

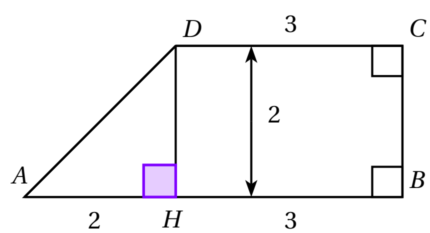
Stéphane nage $\frac{60\times0,5}{3}=\frac{30}{3}=10$ min, puis il court $\frac{60\times5}{15}=\frac{300}{15}=20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5+0,5=5,5$ km, en $10+20=30$ min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60\times5,5}{30}=\frac{\cancel{30}\times2\times5,5}{\cancel{30}}=11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

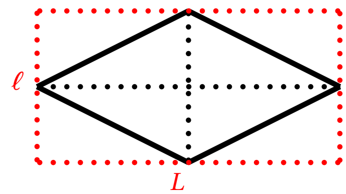
- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD, d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

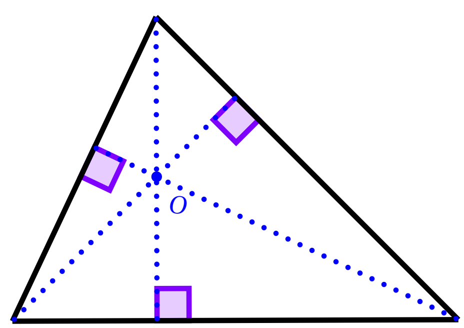
$$\mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(5+3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L, donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

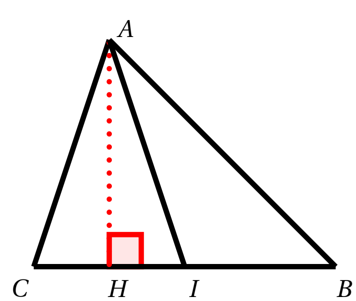


Exercice 5 **Rappels :**

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA, donc

$$\mathscr{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2} \qquad \mathscr{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I et le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7 La méthode la plus simple pour écrire la négation d'une affirmation est d'utiliser des « ne pas », comme vous avez appris à le faire à l'école primaire. Par exemple, la négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Tous les hommes ne sont pas mortels.

Dans le corrigé, on propose une autre méthode, plus efficace en général dans les situations rencontrées en cours de mathématiques.

1. La négation de

   Tous les hommes sont mortels.

   est

   Il existe un homme immortel.

2. La négation de

   Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

   est

   Tous les desserts sont sucrés à la cantine.

   Remarque : Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe » , et réciproquement; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

3. La négation de

   Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

   est

   Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

   Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

   est

   Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé ni en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni… ni… » est « ou ». Donc la négation de

   Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

   est

   Chloé aime les fraises ou les framboises.

Exercice 8 1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par } 5}_{\text{A}}\text{, alors } \underbrace{\text{il est multiple de } 5}_{\text{B}}.$$

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b) • L'implication contraposée est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de } 5}_{\text{non B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il ne se termine pas par } 5}_{\text{non A}}.$$

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

• L'implication réciproque est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de } 5}_{\text{B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il se termine par } 5}_{\text{A}}.$$

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par } 0}_{\text{A}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il est multiple de } 10}_{\text{B}}.$$

et sa réciproque

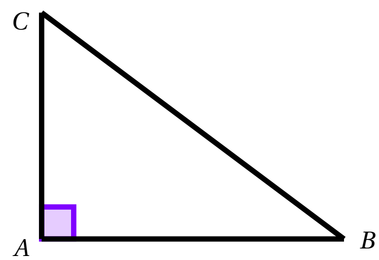
$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de } 10}_{\text{B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il se termine par } 0}_{\text{A}}.$$

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. **Théorème de Pythagore.**

$$\text{Si } ABC \text{ est rectangle en } A, \text{ alors } BC^2 = AB^2 + BC^2.$$



2. **Théorème contraposé de Pythagore.**

$$\text{Si } BC^2 \neq AB^2 + BC^2, \text{ alors } ABC \text{ n'est pas rectangle en } A.$$

3. **Théorème réciproque de Pythagore.**

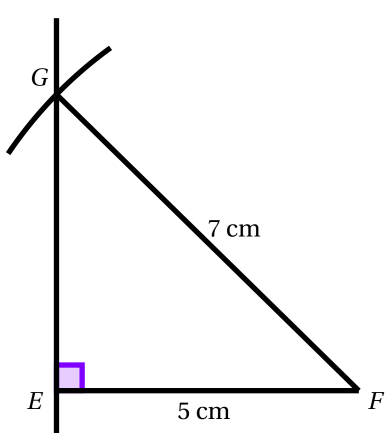
$$\text{Si } BC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ alors } ABC \text{ est rectangle en } A.$$

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E.
- Un arc de cercle de centre F, de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G.



D'après **le théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

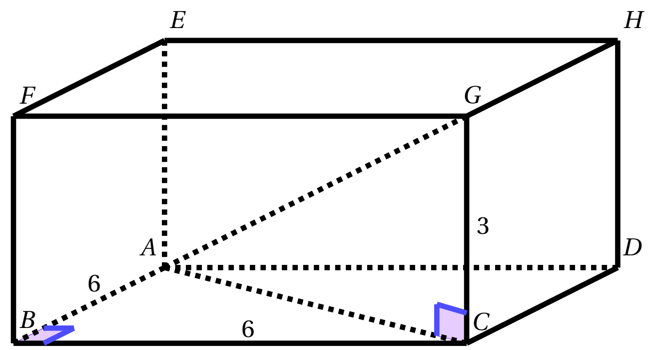
$$\begin{aligned} FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\ 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\ 49 &= 25 + EG^2 \\ 49 - 25 &= EG^2 \\ \sqrt{24} &= EG \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

⚠Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A.
   On calcule :
$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{array}\right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$
   D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$
$$AC^2 = 36 + 36$$
$$AC^2 = 72$$

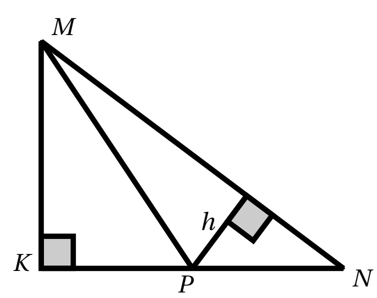
(Inutile de donner AC !)

Dans ACG rectangle en C,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$
$$AG^2 = 72 + 3^2$$
$$AG^2 = 72 + 9$$
$$AG^2 = 81$$
$$AG = \sqrt{81} = 9$$

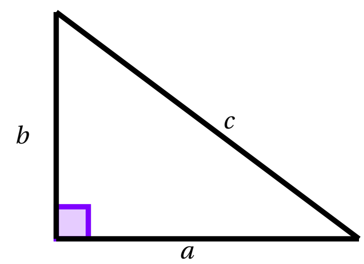
Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1{,}2$ cm.



1. $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{MN\times h}{2} = \frac{5\times 1{,}2}{2} = 3 \text{ cm}^2$.
2. On a aussi $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{PN\times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN\times 3}{2}$, soit $\cancel{3}\times 2 = PN\times\cancel{3}$; et donc $PN = 2$ cm.
3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN, puis KP et MP.
   ⚠On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.
   - Pour KN, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN. On obtient $KN = 4$ cm.
   - $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
   - Enfin, pour calculer PM, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP. On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b, l'hypoténuse mesure c.



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

$$\text{Pour tous nombres positifs } a \text{ et } b,\ \sqrt{a^2+b^2} = a+b.$$

est FAUSSE ! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

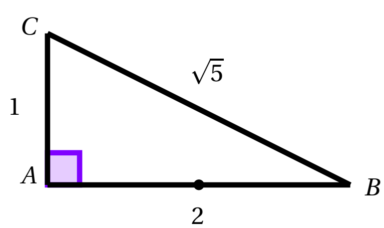
$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{est différent de} \qquad a+b = 4+3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2+b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a+b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

Exercice 14 1. L'égalité $1^2 + 2^2 = 5$ peut encore s'écrire

$$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2.$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore, un triangle de côtés $AB = 2$, $AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$ est rectangle en A.



2. On propose deux méthodes :

(a) **Méthode géométrique.** L'hypoténuse $[BC]$ du triangle construit dans la question 1 est strictement plus grande que le côté de l'angle droit $[AB]$, donc $2 < \sqrt{5}$.

Par ailleurs, la distance la plus courte de B à C est la ligne droite, donc le chemin qui part de B et passe par A avant d'arriver à C a une longueur strictement plus grande que celle du segment $[BC]$. Autrement dit, $\sqrt{5} < 2+1$; c'est-à-dire $\sqrt{5} < 3$.

Conclusion :

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

(b) **Méthode par le calcul.** On compare les carrés :

$$2^2 = 4, \qquad \sqrt{5}^2 = 5 \qquad \text{et} \qquad 3^2 = 9.$$

Or $4 < 5 < 9$, donc

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

3. On calcule en posant les multiplications :

$$
\begin{aligned}
2{,}0^2 &= 4 \\
2{,}1^2 &= 4{,}41 \\
2{,}2^2 &= 4{,}84 \\
2{,}3^2 &= 5{,}29.
\end{aligned}
$$

   Or $4{,}84 < 5 < 5{,}29$, donc

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3.$$

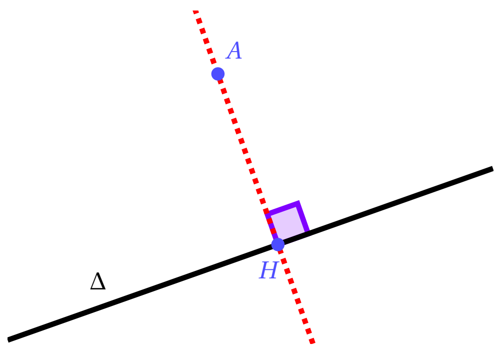
   Remarques :
   - L'écart entre 2,2 et 2,3 est bien égal à 0,1.
   - On devait continuer les calculs jusqu'à dépasser 5 – donc on aurait pu avoir besoin de calculer $2{,}4^2$, $2{,}5^2$, etc. On était sûr cependant de ne pas dépasser 3,0.
   - Rappel pour poser une multiplication avec un exemple :

$$
\begin{array}{r}
2.3 \\
\times\ 2.3 \\
\hline
6\ 9 \\
4\ 6\ \ \\
\hline
5.2\ 9
\end{array}
$$

     Rappelons que comme les facteurs 2,3 et 2,3 ont chacun 1 chiffre après la virgule, le résultat final en a $1 + 1 = 2$.

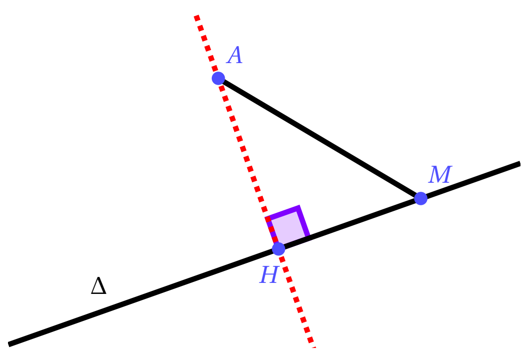
Exercice 15 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A. Elle coupe Δ en H.



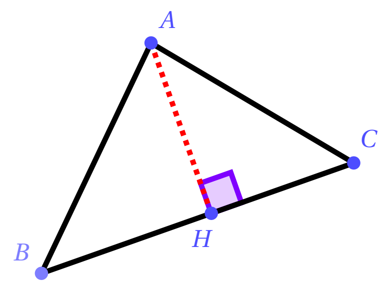
2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H, donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur [2] issue de A dans le triangle ABC.

2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur* ; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B \times h}{2}$ pour l'aire du triangle.


A
C
H
B