Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1

1. D'une minute à la suivante, 20% du médicament présent dans le sang est éliminé ; c'est-à-dire que la quantité de médicament est multipliée par 0,80. Mais comme on injecte aussi 1 mL, cette quantité augmente de 1. Autrement dit :
$$u_{n+1} = 0,8u_n + 1.$$

2.
```python
def suite(n):
        u=10
        for i in range(n):
                u=0.8*u+1
        return u
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= u_{n+1} - 5 && \text{(déf. de } (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= (0,8u_n + 1) - 5 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= 0,8u_n - 4 && \text{(calcul)}\\
&= 0,8\left(u_n - \frac{4}{0,8}\right) && \text{(factorisation)}\\
&= 0,8(u_n - 5) && \text{(calcul)}\\
&= 0,8z_n && \text{(déf. de } (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}
\end{aligned}$$
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 0,8z_n$, donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,8$.

4. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,8$, et $z_0 = u_0 - 5 = 10 - 5 = 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n.$$
Enfin $z_n = u_n - 5$ donc
$$u_n = z_n + 5 = 5 \times 0,8^n + 5.$$

5. On fait un tableau de valeurs avec la calculatrice, en rentrant la formule
$$Y = 5 * 0.8^X + 5.$$
On obtient ainsi
$$\begin{aligned} u_{27} &\approx 5,0121,\\ u_{28} &\approx 5,0097. \end{aligned}$$
Le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 5,01$ est donc 28.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n \geq 5.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 10 \\ 10 & \geq 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k \geq 5 \qquad \text{(H.R.)}$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} \geq 5.$$

On part de

$$u_k \geq 5.$$

On multiplie par $0,8$:

$$\begin{aligned} u_k \times 0,8 &\geq 5 \times 0,8 \\ 0,8u_k &\geq 4 \end{aligned}$$

Puis on ajoute 1 :

$$\begin{aligned} 0,8u_k + 1 &\geq 4 + 1 \\ u_{k+1} &\geq 5. \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit k un entier naturel. Si $\mathscr{P}_k$ est vraie, alors $v_k = 2^k + k + 1$. Donc

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= 2v_k - k && (\text{déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= 2\left(2^k + k + 1\right) - k && (\text{par H.R.}) \\ &= 2^{k+1} + 2k + 2 - k && (\text{développement}) \\ &= 2^{k+1} + (k+1) + 1 && (\text{réécriture}) \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.