

## Devoir surveillé n°4

- Le soin, la rédaction et l'orthographe seront pris en compte dans l'évaluation des copies.
- On demande aux élèves de rendre le sujet du devoir avec leur copie.

### Exercice 1

**5 points**

Écrire sur votre copie lesquels sont corrects parmi les énoncés A, B, C, D, E, F, G, H suivants. Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte rapporte 1 pt, une réponse fausse enlève 0,5 pt.

- |                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>A. <math>14 \equiv 2 [3]</math>.</p> <p>B. <math>6 \equiv -4 [4]</math>.</p> <p>C. <math>6^{100} \equiv 1 [2]</math>.</p> <p>D. <math>\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n+1 \equiv 1 [n]</math>.</p> <p>E. <math>\forall k \in \mathbb{Z}, 39k \equiv 4k [5]</math>.</p> | <p>F. Soient <math>a, b, q, r</math> dans <math>\mathbb{N}^*</math>. Si <math>a = bq + r</math>, alors <math>a \equiv r [b]</math>.</p> <p>G. Soit <math>n \in \mathbb{Z}</math>. Si <math>n \equiv 3 [9]</math>, alors <math>n</math> est divisible par 3.</p> <p>H. Le seul entier <math>0 \leq n \leq 12</math> qui vérifie <math>n \equiv -5 [6]</math> est <math>n = 1</math>.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Exercice 2

**6 points**

1. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Recopier et compléter le tableau de congruence ci-dessous, avec les entiers 0, 1 ou 2 :

modulo 3, $n$ est congru à	0	1	2
modulo 3, $n^2 - 1$ est congru à			

Justifier chaque réponse.

2. Démontrer l'affirmation suivante :

Si  $n$  n'est pas multiple de 3, alors  $n^2 - 1$  est multiple de 3.

3. Prouver que la propriété de la question précédente est aussi une conséquence du petit théorème de Fermat.

### Exercice 3

**5 points**

1. Justifier l'égalité  $7^2 \equiv -1 [10]$ .
2. En déduire le chiffre des unités de  $7^{100}$ .
3. Déterminer le chiffre des unités de  $7^{99}$ . (Indication : écrire  $7^{100} \equiv 7^{99} \times 7 [10]$  et multiplier par 3.)

### Exercice 4

**6 points**

Déterminer les couples d'entiers  $(u, v)$  solutions de l'équation

$$13u - 5v = 2.$$

(Indication : on aura intérêt à travailler modulo 5.)