

# Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

## Table des matières

**1 Le second degré : équations et paraboles**

**2**

# 1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions des équations.

**Exercice 1** 1. On résout l'équation  $x^2 + 2x = 0$  :

On factorise :

$$x(x+2) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{aligned}x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 &= 0 \\x + \cancel{2} - \cancel{2} &= 0 - 2 \\x &= -2\end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions :  $x = 0$  et  $x = -2$ . Autrement dit :

$$\mathcal{S} = \{0; -2\}.$$

2. On résout l'équation  $x^2 - 16 = 0$  :

On « isole »  $x^2$  :

$$\begin{aligned}x^2 - 16 &= 0 \\x^2 - \cancel{16} + \cancel{16} &= 0 + 16 \\x^2 &= 16\end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{16} = -4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{4; -4\}.$$

3. On résout l'équation  $(2x - 1)(x - 5) = 0$  :

$$\begin{aligned}2x - 1 &= 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0 \\2x - \cancel{1} + \cancel{1} &= 0 + 1 \quad \text{ou} \quad x - \cancel{5} + \cancel{5} = 0 + 5 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 5 \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}; 5 \right\}.$$

4. On résout l'équation  $x^2 + 7 = 0$  :

$$\begin{aligned}x^2 + 7 &= 0 \\x^2 + \cancel{7} - \cancel{7} &= 0 - 7 \\x^2 &= -7\end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre  $x$  ne peut avoir un carré égal à  $-7$ ).

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

(On rappelle que  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

**Exercice 2** Dans chaque cas, on note  $\Delta$  le discriminant.

1. On résout l'équation  $x^2 - 3x - 4 = 0$  :

- $a = 1, b = -3, c = -4$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = -1,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{-1; 4\}.$$

2. On résout l'équation  $2x^2 - 12x = -18$  :

On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ ) en « transposant  $-18$  » :

$$2x^2 - 12x + 18 = -18 + 18$$

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

- $a = 2, b = -12, c = 18$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$ .
- $\Delta = 0$ , donc il y a une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{3\}.$$

3. On résout l'équation  $x^2 - 4x + 5 = 0$  :

- $a = 1, b = -4, c = 5$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$ .
- $\Delta < 0$ , donc il n'y a pas de solution.

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

4. On résout l'équation  $x^2 + 2x - 4 = 0$  :

- $a = 1, b = 2, c = -4$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2}.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{20}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \right\}.$$

**Remarque :** On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5},$$

on trouve

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\cancel{2}(-1 + \sqrt{5})}{\cancel{2}} = -1 + \sqrt{5}.$$

De même,  $x_1 = -1 - \sqrt{5}$ .

5. On résout l'équation  $x^2 = -6x$  :

À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le «  $-6x$  » dans le membre de gauche, qui devient «  $+6x$  ».

$$\begin{aligned}x^2 &= -6x \\x^2 + 6x &= 0.\end{aligned}$$

Ici, il y a deux méthodes possibles :

- soit on utilise le discriminant, avec  $a = 1$ ,  $b = 6$  et  $c = 0$  (puisque  $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$ ) ;
- soit on factorise.

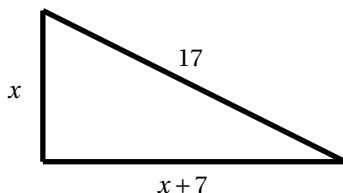
On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}x(x+6) &= 0 \\x = 0 \quad \text{ou} \quad x+6 &= 0 \\x &= -6.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \{0; -6\}.$$

**Exercice 3** On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas  $x$ .



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe  $(x+7)^2$  avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 &= 289 \\2x^2 + 14x + 49 - 289 &= 0 \\2x^2 + 14x - 240 &= 0.\end{aligned}$$

- $a = 2$ ,  $b = 14$ ,  $c = -240$ .
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1920 = 2116$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 - 46}{4} = -15, \\x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 + 46}{4} = 8.\end{aligned}$$

Or  $x$  désigne une longueur, donc la première solution ( $x_1$ ) est impossible. On a donc  $x = 8$ .

**Remarque :** Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

$$x = 8, \quad x+7 = 8+7 = 15 \quad \text{et} \quad 17.$$

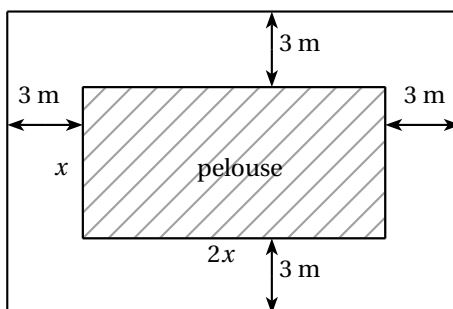
On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

---

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec  $\Delta$  dans le cas où  $b$  ou  $c$  valent 0.

**Exercice 4** 1. Voici un schéma du terrain en notant  $x$  la largeur de la pelouse (donc la longueur est  $2x$ ) :



2. La longueur du terrain (en m) est

$$2x + 3 + 3 = 2x + 6,$$

sa largeur est

$$x + 3 + 3 = x + 6.$$

Donc la surface du terrain (en  $\text{m}^2$ ) est

$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x + 6) \times (x + 6).$$

Or on sait que cette surface vaut  $360 \text{ m}^2$ , donc

$$(2x + 6) \times (x + 6) = 360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} (2x + 6) \times (x + 6) &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x \times x + 2x \times 6 + 6 \times x + 6 \times 6 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 6x + 36 &= 360 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x + 36 - 360 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 18x - 324 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré.

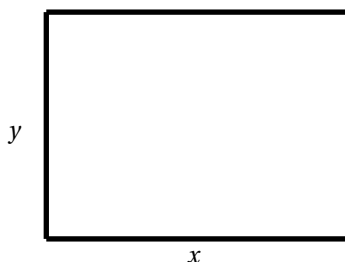
- $a = 2$ ,  $b = 18$ ,  $c = -324$ .
- $\Delta = 18^2 - 4 \times 2 \times (-324) = 2916$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 - \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 - 54}{4} = \frac{-72}{4} = -18, \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 + \sqrt{2916}}{2 \times 2} = \frac{-18 + 54}{4} = \frac{36}{4} = 9. \end{aligned}$$

Or  $x$  désigne une longueur, donc  $x$  ne peut pas être négatif et seule la solution  $x_2 = 9$  est valable.

Conclusion :  $x = 9$ , donc la longueur du terrain (en m) est  $2 \times 9 + 3 + 3 = 24$ , sa largeur est  $9 + 3 + 3 = 15$ .

**Exercice 5** On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note  $x$  et  $y$  les dimensions du champ.



2. Les «  $\Leftrightarrow$  » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est

$$x + y = 27.$$

- L'aire est 180, donc

$$x \times y = 180.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x + y = 27 & L_1 \\ xy = 180 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie  $L_1$  par  $x$  :

$$(x + y) \times x = 27 \times x, \quad \text{soit} \quad x^2 + xy = 27x.$$

Or d'après  $L_2$ ,  $xy = 180$ , donc

$$x^2 + 180 = 27x, \quad \text{et ainsi} \quad x^2 - 27x + 180 = 0.$$

On aboutit à une équation du 2<sup>d</sup> degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) :  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 15$ .

On sait que  $x + y = 27$ , donc si  $x = 12$ , alors  $y = 27 - x = 27 - 12 = 15$  ; et si  $x = 15$ , alors  $y = 27 - x = 27 - 15 = 12$ .

Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

**Exercice 6** On note  $n$  le nombre d'amis initialement présents, et  $p$  le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc

$$n \times p = 2400. \quad (1)$$

- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas  $(n - 2)$  amis, et chacun paye alors  $(p + 40)$  €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit

$$(n - 2) \times (p + 40) = 2400.$$

En développant, cela donne encore

$$np + 40n - 2p - 80 = 2400. \quad (2)$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2400 dans les deux cas, on obtient l'égalité

$$np = np + 40n - 2p - 80,$$

soit

$$40n - 2p - 80 = 0.$$

Finalement, le couple  $(n, p)$  est solution du système

$$\begin{cases} n \times p = 2400 \\ 40n - 2p - 80 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient

$$n = 12, \quad p = 200.$$

Conclusion : comme  $12 - 10 = 2$ , ce sont 10 amis qui sont finalement partis.

**Exercice 7** 1.  $P_1 : y = x^2 - 6x + 5$ .

- $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 5$ .
- $a$  est  $\oplus$ , donc  $P_1$  est vers le haut.
- On note  $S$  le sommet de  $P_1$ . D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

On en déduit

$$y_S = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4.$$

On a donc  $S(3; -4)$ .

Venons-en au tracé de la parabole. On fait un tableau de valeurs sur  $[0; 6]$ , avec un pas de 1<sup>3</sup>. Pour cela, on utilise la calculatrice :

3. Nous choisissons un intervalle symétrique par rapport à l'abscisse du sommet, et qui ne soit ni trop court, ni trop long. On choisit un pas de 1 par facilité, mais le graphique serait bien sûr plus précis avec un pas plus petit.

### Calculatrices collège

- **MODE** ou **MENU**
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- $f(X)=X^2-6X+5$  **EXE**  
(si on demande  $g(X)=$ , ne rien rentrer)
- Début? 0 **EXE**
- Fin? 6 **EXE**
- Pas? 1 **EXE**

### NUMWORKS

x s'obtient avec les touches

- **alpha** **x**
- **⏠**
- Fonctions **EXE** puis choisir Fonctions **EXE**
- $f(x)=x^2-6x+5$  **EXE**
- choisir Tableau **EXE** puis Régler l'intervalle **EXE**
- X début 0 **EXE**
- X fin 6 **EXE**
- Pas 1 **EXE**
- choisir Valider

### TI graphiques

X s'obtient avec la touche

- $x, t, \theta, n$
- $f(x)$
- $Y_1 = X^2 - 6X + 5$  **EXE**
- 2nde **déf table**
- DébTable=0 **EXE**
- PasTable=1 **EXE**  
ou  $\Delta Tbl=1$  **EXE**
- 2nde **table**

### CASIO graphiques

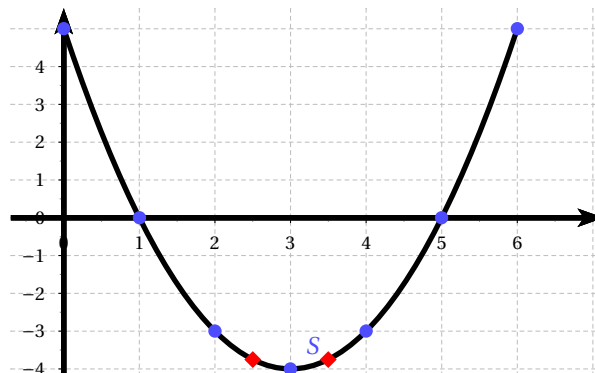
X s'obtient avec la touche

- **X,θ,T**
- **MENU** puis choisir TABLE **EXE**
- $Y_1 : X^2 - 6X + 5$  **EXE**
- **F5** (on choisit donc SET)
- Start : 0 **EXE**
- End : 6 **EXE**
- Step : 1 **EXE**
- **EXIT**
- **F6** (on choisit donc TABLE)

On obtient le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Enfin on construit le graphique (j'ai un peu « écrasé » l'axe des ordonnées pour gagner de la place) :



**Remarque :** On peut avoir intérêt à ajouter des points près du sommet pour obtenir un tracé plus précis. C'est ce que l'on a fait ci-dessus avec les deux losanges rouges, correspondant au tableau de valeurs ci-dessous.

x	2,5	3,5
y	-3,75	-3,75

2.  $P_2 : y = -0,5x^2 - x + 4$ .

- $a = -0,5$ ,  $b = -1$ ,  $c = 4$ .
- $a$  est  $\ominus$ , donc  $P_2$  est vers le bas.
- On note S le sommet de  $P_2$ . D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times (-0,5)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

On en déduit

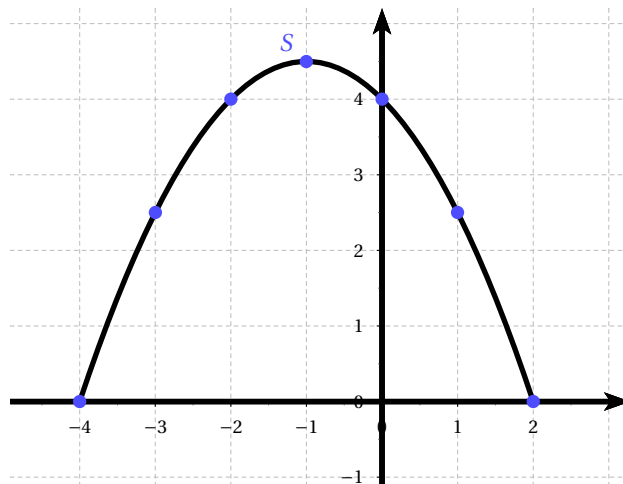
$$y_S = -0,5 \times (-1)^2 - (-1) + 4 = -0,5 + 1 + 4 = 4,5.$$

On a donc  $S(-1 ; 4,5)$ .

Tableau de valeurs :

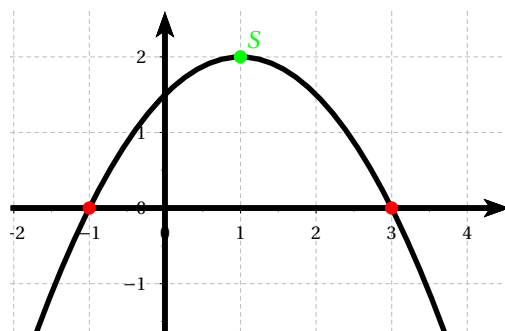
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

Tracé de la parabole :



**Exercice 8** 1. On trace la parabole  $P$  :

- qui coupe l'axe des abscisses en  $x_1 = -1$  et en  $x_2 = 3$ .
- dont le sommet est le point  $S(1;2)$ .



**Remarque :** Il est difficile de faire un tracé hyper précis avec si peu d'informations. L'élève intéressé peut essayer de prouver – en faisant un bel effort – que  $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$ . Auquel cas, il pourra faire un tableau de valeurs et obtenir une courbe presque aussi parfaite que celle dessinée ci-dessus avec l'ordinateur.

2. On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Comme  $P$  est vers le bas,  $a$  est du signe  $\ominus$ .
- Comme  $P$  coupe l'axe des abscisses en deux points, il y a deux racines et  $\Delta$  est du signe  $\oplus$ .