Lycée Mariette Boulogne-sur-Mer

Cours de Mathématiques

Seconde Nicolas Perpète

Table des matières

CHAPITRE 1

Rappels de calcul et de géométrie

Plan de ce chapitre

I. Rappels de calcul.

Priorités opératoires.

Dans un calcul sont prioritaires, dans l'ordre :

1. Les parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et divisions
4. Les additions et soustractions

Attention

On ne peut pas diviser par 0.

Tableau de proportionnalité.

a	?
b	c

$$? = \frac{a \times c}{b}$$

Calculs avec des fractions.

Pour tous nombres a, b, c, d, k tels que les calculs aient un sens (c-à-d sans jamais diviser par 0) :

- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{c} = \frac{a \times k}{c \times k}$
- $k \times \frac{a}{c} = \frac{k \times a}{c}$
- $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$
- $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$
- $\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$

Calculs avec des puissances.

Pour tout nombre a, pour tout entier naturel n :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(la deuxième formule n'a de sens que pour $a \neq 0$)

Par convention $a^0 = 1$

Pour tous nombres a, b, pour tous entiers naturels n, m :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(la deuxième formule n'a de sens que pour $a \neq 0$, la cinquième formule pour $b \neq 0$)

Le cas particulier $a = 10$ est important en sciences physiques :

- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ \underbrace{000}_{3 \text{ zéros}}$
- $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = \underbrace{0,00}_{3 \text{ zéros}}\ 1$
- L'écriture scientifique d'un nombre est une écriture sous la forme $a \times 10^n$, où a n'a qu'un chiffre avant la virgule. Par exemple :

$$250,64 = 2,5064 \times 10^2, \qquad 0,0045 = 4,5 \times 10^{-3}$$

Équation du 1er degré.

Exemple 1.

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 11 \\ 2x+\cancel{3}\color{red}{-\cancel{3}} &= 11\color{red}{-3} \\ \frac{\cancel{2}x}{\color{blue}{\cancel{2}}} &= \frac{8}{\color{blue}{2}} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 7x-7 \\ 2x+\cancel{3}\color{red}{-\cancel{3}} &= 7x-7\color{red}{-3} \\ 2x &= 7x-10 \\ 2x\color{green}{-7x} &= \cancel{7x}-10\color{green}{-\cancel{7x}} \\ \frac{\cancel{-5}x}{\color{blue}{\cancel{-5}}} &= \frac{-10}{\color{blue}{-5}} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Développements et identités remarquables.

Pour tous nombres a, b, c, d :

- $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
- $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$
- $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Identités remarquables.

Pour tous nombres a et b :

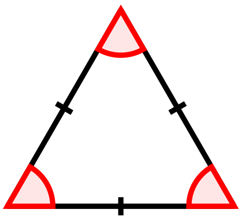
- **IR1.** $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
- **IR2.** $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
- **IR3.** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Racines carrées.

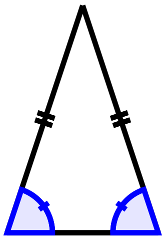
- La racine carrée d'un nombre positif a est l'unique nombre positif dont le carré vaut a. On la note $\sqrt{a}$.
  Par exemple $4^2 = 16$, donc $\sqrt{16} = 4$.
- $\sqrt{a}^2 = a$.

II. Rappels de géométrie.

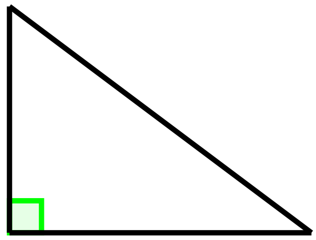
Triangles remarquables.



Triangle équilatéral



Triangle isocèle



Triangle rectangle

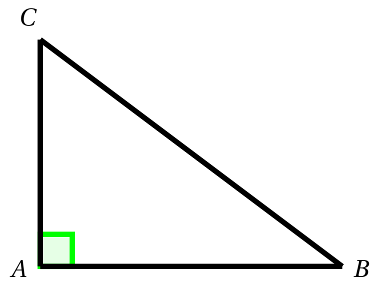
Théorème de Pythagore et théorème réciproque.

Théorème de Pythagore.
Si le triangle ABC est rectangle en A, alors

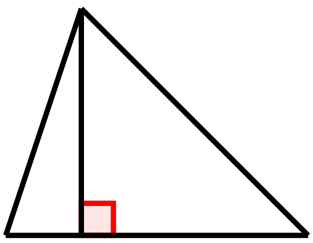
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Théorème réciproque de Pythagore.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

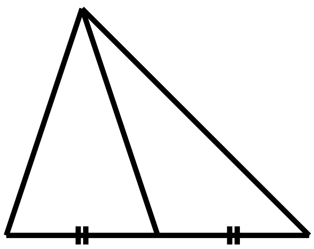
Contraposée du théorème de Pythagore.
Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.



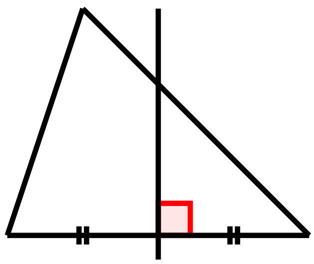
Droites remarquables du triangle.



Hauteur

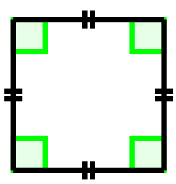


Médiane



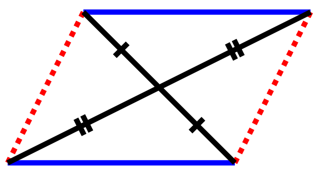
Médiatrice

Quadrilatères remarquables (1).



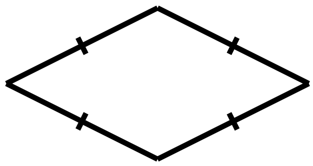
Carré

Rectangle

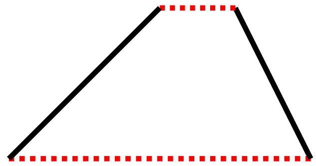


Parallélogramme : côtés opposés parallèles
OU diagonales se coupent en leur milieu

Quadrilatères remarquables (2).



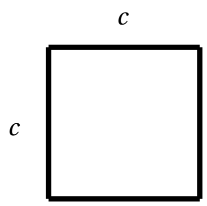
Losange



Trapèze

(deux côtés parallèles)

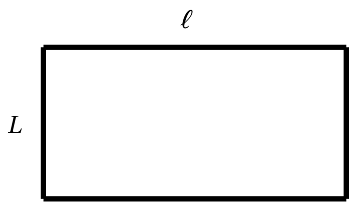
Périmètres et aires.



Carré :

$P = 4 \times c$

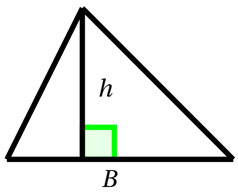
$\mathscr{A} = c^2$



Rectangle :

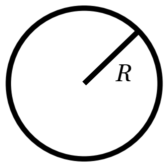
$P = 2 \times \ell + 2 \times L$

$\mathscr{A} = \ell \times L$



Triangle :

$\mathscr{A} = \dfrac{B \times h}{2}$

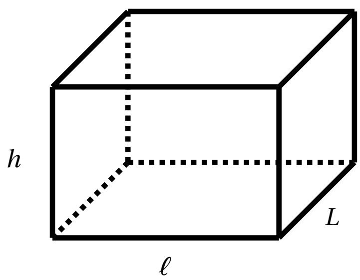


Cercle et disque :

$P = 2 \times \pi \times R$

$\mathscr{A} = \pi \times R^2$

Volumes.



Pavé droit

$V = \ell \times L \times h$

Le litre est une unité de volume.

$$1\ \ell = 1\ \text{dm}^3.$$

Autrement dit, 1 litre est le volume d'un cube de 1 dm de côté (sachant que 1 dm = 10 cm).

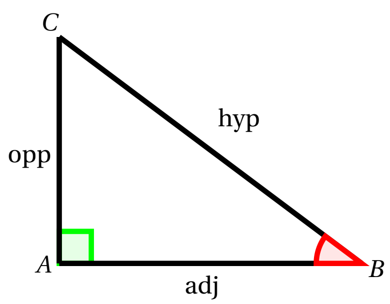
Trigonométrie.

Dans un triangle ABC rectangle en A :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$



CHAPITRE 2

Les nombres réels

Plan de ce chapitre

I. Les différents ensembles de nombres.

Définition 1

1. Les entiers naturels sont
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

2. Les entiers (aussi appelés entiers relatifs) sont
$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$
L'ensemble des entiers est noté $\mathbb{Z}$.

3. Les décimaux sont les nombres dont l'écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres après la virgule :
$$24{,}628 \quad , \quad -0{,}025 \quad , \quad \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad , \quad 5\times 10^{-3} = 0{,}005 \quad , \quad \ldots$$
L'ensemble des décimaux est noté $\mathbb{D}$.

4. Les rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers :
$$\frac{3}{4} \quad , \quad -\frac{10}{3} = \frac{-10}{3} \quad , \quad 14 = \frac{14}{1} \quad , \quad 2{,}25 = \frac{225}{100} \quad , \quad \ldots$$
L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

5. L'ensemble de tous les nombres (appelés nombres réels) est noté $\mathbb{R}$.

Remarque. Il faut se fatiguer un peu pour trouver des nombres irrationnels (c'est-à-dire non rationnels). Il y a par exemple $\sqrt{2}$ (voir feuille d'exercices) ou π (carrément difficile à prouver). Pour $\sqrt{2}$, ce sont Pythagore et ses disciples qui l'ont démontré les premiers. Cela les a beaucoup contrariés, parce qu'ils pensaient pouvoir « expliquer le monde » uniquement avec des nombres rationnels.

Exemples 1

1. -4 n'est pas un entier naturel, mais c'est un entier et un décimal. C'est aussi un rationnel, car on peut l'écrire $-4 = \frac{-4}{1}$. Et comme tous les nombres, c'est un réel.
   Conclusion : $-4 \notin \mathbb{N}$, $-4 \in \mathbb{Z}$, $-4 \in \mathbb{D}$, $-4 \in \mathbb{Q}$, $-4 \in \mathbb{R}$.

   Remarque. $\in$ se lit « appartient à ».

2. $\frac{5}{2}$ n'est ni un entier naturel, ni un entier, car $\frac{5}{2} = 2,5$. En revanche, c'est un rationnel et un décimal.
   Conclusion : $\frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$, $\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{5}{2} \in \mathbb{D}$, $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{5}{2} \in \mathbb{R}$.
3. $53,4$ n'est ni un entier, ni un entier naturel. En revanche, c'est un décimal et un rationnel, car $53,4 = \frac{534}{10}$.
   Conclusion : $53,4 \notin \mathbb{N}$, $53,4 \notin \mathbb{Z}$, $53,4 \in \mathbb{D}$, $53,4 \in \mathbb{Q}$, $53,4 \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{1}{3}$ n'est ni un entier naturel, ni un entier, ni un décimal car $\frac{1}{3} = 0,333\cdots$ (une infinité de chiffres après la virgule). Mais c'est un rationnel.
   Conclusion : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$.

Théorème 1

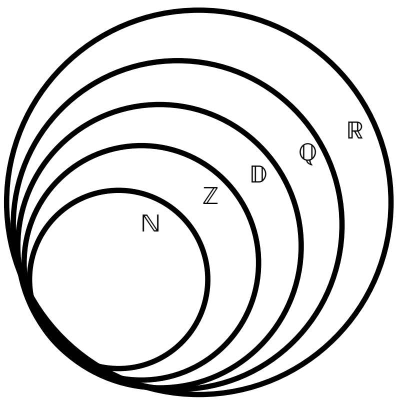
Les différents ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres suivant le schéma ci-contre.
Autrement dit :

- tous les entiers naturels sont des entiers ;
- tous les entiers sont des décimaux ;
- tous les décimaux sont des rationnels ;
- tous les rationnels sont des réels.

On peut noter

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

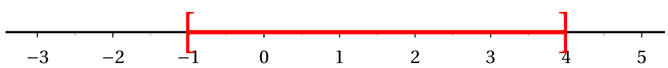
Remarque. $\subset$ se lit « est inclus dans ».



II. Intervalles.

Exemple 2

Ci-dessous on a représenté, sur une droite graduée, l'ensemble des nombres compris entre -1 et 4 (extrémités comprises) [a].



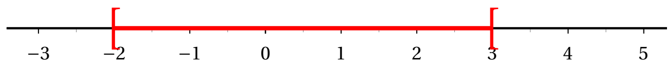
Cet ensemble de nombres est l'intervalle $[-1;4]$.
Étant donné un nombre x, il est équivalent d'écrire :

$$-1 \leq x \leq 4 \qquad \text{et} \qquad x \in [-1;4].$$

a. Le fait de tourner les crochets vers l'intérieur signifie précisément que -1 et 4 font partie de la zone qui nous intéresse.

Exemple 3

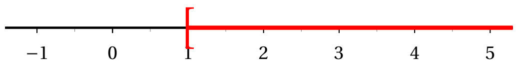
Si l'on veut exclure une des deux extrémités de l'intervalle (ou les deux), on tourne le (ou les) crochet(s) vers l'extérieur. Par exemple, l'ensemble des nombres compris entre -2 et 3, -2 inclus et 3 exclu, se note $[-2;3[$.



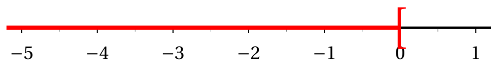
On dit que l'intervalle est fermé à gauche et ouvert à droite. On peut aussi bien sûr rencontrer les intervalles des deux formes suivantes :

Exemple 4

Lorsque l'intervalle continue indéfiniment vers la droite ou vers la gauche, on utilise les notations $+\infty$ ou $-\infty$; le symbole ∞ se lit « l'infini ».



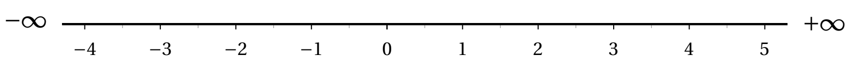
Intervalle $[1;+\infty[$.



Intervalle $]-\infty;0[$.

Remarques.

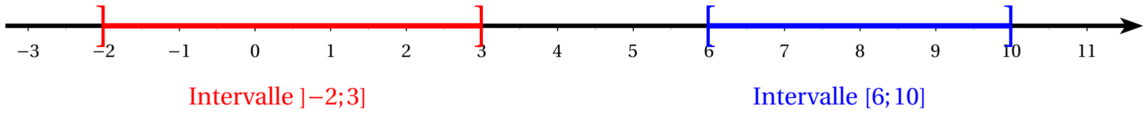
- $+\infty$ et $-\infty$ sont des notations pour dire que ça ne s'arrête pas. Mais ce ne sont pas des nombres !
- On tourne toujours les crochets vers l'extérieur en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Pour s'aider, on peut écrire $-\infty$ et $+\infty$ aux extrémités de la droite graduée.

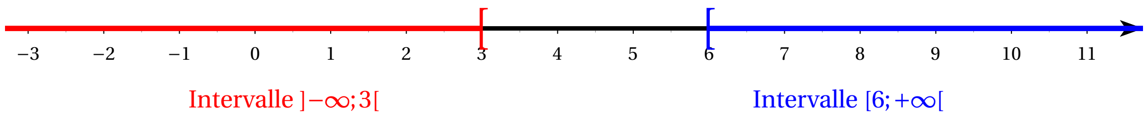


- L'ensemble de tous les nombres est noté $\mathbb{R}$. On a donc $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

Exemple 5

On représente quelques intervalles :





III. Valeur absolue.

Exemple 6

De façon informelle, prendre la valeur absolue d'un nombre, c'est « enlever le signe "−" quand il y en a un ». On note $|x|$ la valeur absolue d'un nombre x.

Par exemple :

$$|3| = 3, \qquad |-3| = 3, \qquad |5,24| = 5,24, \qquad |-12,3| = 12,3, \qquad |0| = 0.$$

Définition 2

De façon plus rigoureuse, la valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, est le nombre défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exemples 7

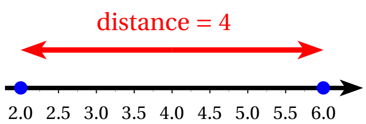
1. $3 > 0$, donc $|3| = 3$.
2. $-3 < 0$, donc $|-3| = -(-3) = 3$.
3. $|8-6| = |2| = 2$.
4. On calcule $|7-4| - 2\times|5-9|$. Comme c'est un peu plus difficile, on détaille chaque étape :

$$\begin{aligned} |7-4| - 2\times|5-9| &= |3| - 2\times|-4| && \text{(on calcule \underline{dans} les valeurs absolues)} \\ &= 3 - 2\times 4 && \text{(on calcule \underline{les} valeurs absolues)} \\ &= 3 - 8 = -5 && \text{(calcul usuel).} \end{aligned}$$

La valeur absolue est surtout un moyen pratique de mesurer les distances :

Exemple 8

Prenons les nombres $x = 6$ et $y = 2$. La distance qui les sépare est $d(6,2) = 6-2 = 4$.



Exemple 8 – Suite

Calculons $|x-y|$ et $|y-x|$:

$$|x-y| = |6-2| = |4| = 4\,;$$
$$|y-x| = |2-6| = |-4| = 4.$$

Dans les deux cas, on obtient la distance entre x et y. Dans le deuxième calcul, le fait de prendre la valeur absolue permet de supprimer le « $-$ » qui apparaît quand on calcule $y-x$.

Théorème 2

La distance entre deux nombres réels x et y, notée $d(x,y)$, est égale à $|x-y|$:

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Elle est aussi égale à $|y-x|$.

Exemple 9

On résout l'équation $|x-4| = 3$.
Il y a deux méthodes possibles :

Avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc dire que

$$|x-4| = 3$$

revient à dire que

$$x-4=3 \qquad \text{ou que} \qquad x-4=-3$$

– il y a deux possibilités !
Donc

$$\begin{array}{lll} x-\cancel{4}+\cancel{4} = 3+4 & \text{ou} & x-\cancel{4}+\cancel{4} = -3+4 \\ x = 7 & \text{ou} & x = 1 \end{array}$$

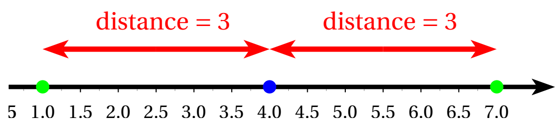
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 7$ et $x = 1$.

Avec la distance.

Dire que

$$|x-4| = 3$$

revient à dire que la distance entre x et 4 est égale à 3.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 7$ et $x = 1$.

CHAPITRE 3

Géométrie repérée

Plan de ce chapitre

Dans le premier paragraphe, on donne les formules pour calculer les coordonnées du milieu et la longueur d'un segment $[AB]$ connaissant les coordonnées de A et B. Le paragraphe 2 introduit la notion de vecteur, que nous utiliserons dans une prochaine leçon et qui est un concept fondamental en mathématiques et en physique.

Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

I. Milieu et longueur d'un segment.

Théorème 1

A et B sont les points du plan de coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

1. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées
$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right).$$
2. La longueur du segment $[AB]$ est
$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}.$$

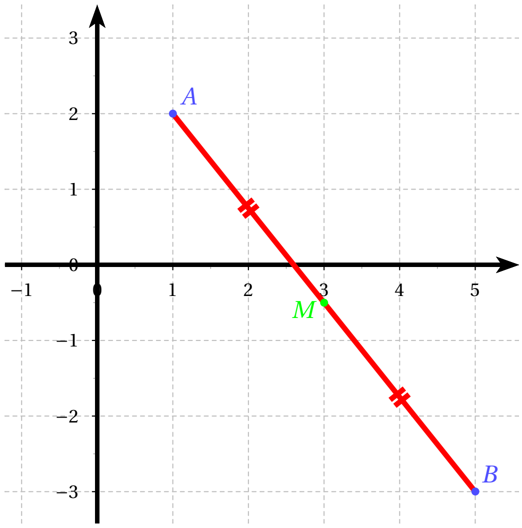
Exemple 1

On prend les points $A(1;2)$ et $B(5;-3)$. On calcule les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ et la longueur AB.

On a $A(\underset{x_A}{1}\ ;\ \underset{y_A}{2})$ et $B(\underset{x_B}{5}\ ;\ \underset{y_B}{-3})$.

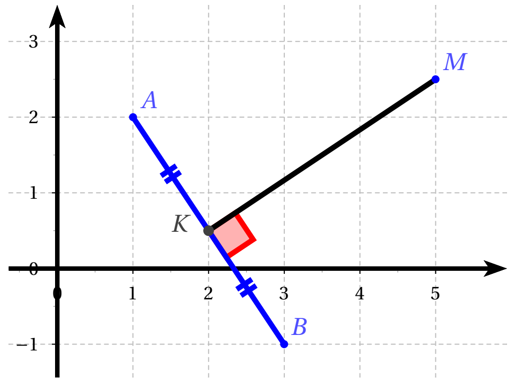
- On calcule les coordonnées de M :
$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right) \qquad M\left(\frac{1+5}{2}; \frac{2+(-3)}{2}\right) \qquad M(3;-0,5)$$
- On calcule la longueur de $[AB]$:
$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2} = \sqrt{(5-1)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{4^2+(-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

Exemple 1 – Suite



Exemple 2

Soient $A(1;2)$, $B(3;-1)$, $M(5\ ;\ 2,5)$ et soit K le milieu du segment $[AB]$. On voudrait prouver que (KM) est la médiatrice de $[AB]$.



On sait que la médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment passant par son milieu. Or K est le milieu de $[AB]$, donc pour prouver que (KM) est la médiatrice de $[AB]$, il suffit de prouver que $(BK) \perp (KM)$. Pour cela, on va utiliser le théorème réciproque de Pythagore.

On calcule d'abord les coordonnées de K. C'est le milieu de $[AB]$, donc

$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \qquad K\left(\frac{1+3}{2};\frac{2+(-1)}{2}\right) \qquad K\,(2;0,5)\,.$$

Ensuite on calcule les longueurs :

$$\begin{aligned}
BK &= \sqrt{(x_K-x_B)^2+(y_K-y_B)^2} = \sqrt{(2-3)^2+(0,5-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2+(1,5)^2} = \sqrt{1+2,25} = \sqrt{3,25},\\
KM &= \sqrt{(x_M-x_K)^2+(y_M-y_K)^2} = \sqrt{(5-2)^2+(2,5-0,5)^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},\\
BM &= \sqrt{(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2} = \sqrt{(5-3)^2+(2,5-(-1))^2} = \sqrt{2^2+3,5^2} = \sqrt{4+12,25} = \sqrt{16,25}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l}
BM^2 = \sqrt{16,25}^2 = 16,25\\
BK^2+KM^2 = \sqrt{3,25}^2+\sqrt{13}^2 = 3,25+13 = 16,25
\end{array}\right\} BM^2 = BK^2+KM^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, BKM est rectangle en K. La droite (KM) est donc bien la médiatrice de $[AB]$.

II. Vecteurs.

Définition 1

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. On définit :

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le couple de points (A, B).
2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{abscisse} \\ \leftarrow \text{ordonnée} \end{matrix}$$

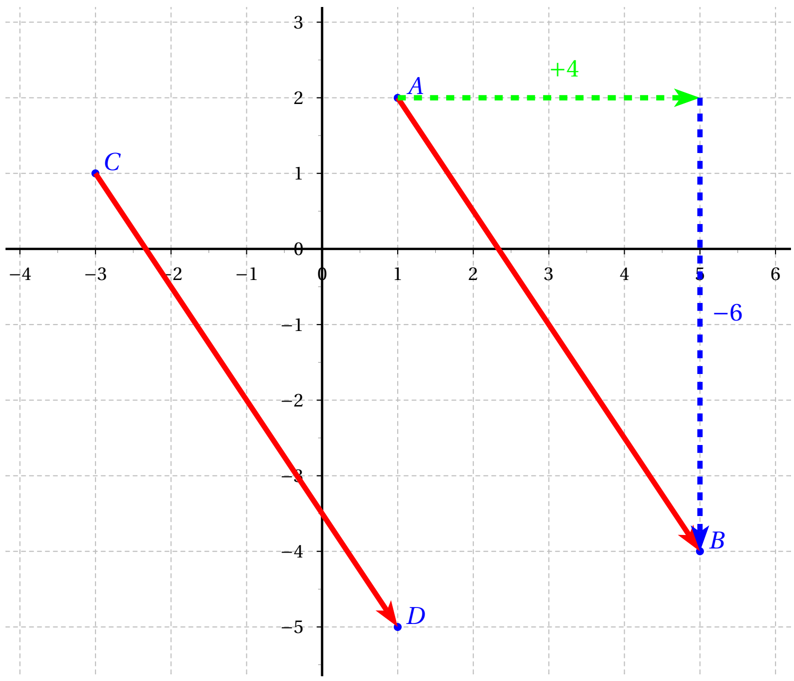
   On note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

3. Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

Remarque.
Si on nous demande de représenter le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère, on trace une flèche qui part de A et qui arrive en B.

Exemple 3

On prend les points $A(1;2)$, $B(5;-4)$, $C(-3;1)$, $D(1;-5)$.
On représente les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et on calcule leurs coordonnées.



On commence par $\overrightarrow{AB}$:
$A(\underset{x_A}{1}\ ;\ \underset{y_A}{2})$ et $B(\underset{x_B}{5}\ ;\ \underset{y_B}{-4})$, donc

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ -4-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Pour aller de A à B, il faut avancer de $+4$ en abscisse (flèche en pointillés verts sur la figure ci-dessus) et -6 en ordonnée (flèche en pointillés bleus).

Exemple 3 – Suite

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$: $C(\underbrace{-3}_{x_C}\,;\,\underbrace{1}_{y_C})$ et $D(\underbrace{1}_{x_D}\,;\,\underbrace{-5}_{y_D})$, donc

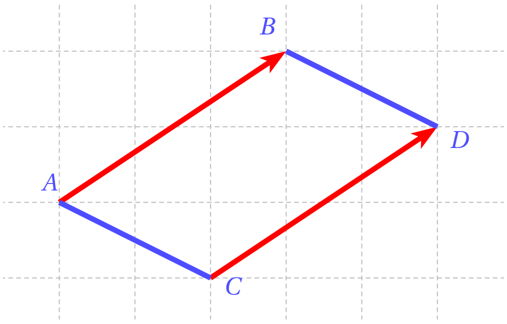
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-(-3)\\-5-1\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Dans l'exemple 3, $ABDC$ est un parallélogramme. C'est en fait le cas dès qu'on a deux vecteurs égaux :

Théorème 2

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.



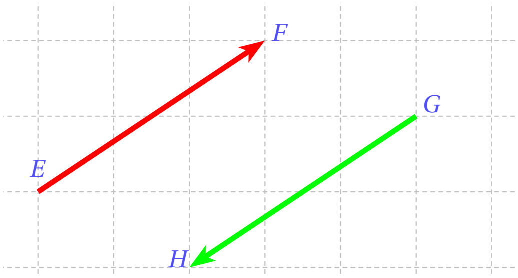
Remarque. On peut parler de la norme, de la direction et du sens d'un vecteur :

- la norme de $\overrightarrow{AB}$, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, est la longueur AB :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB\,;$$

- la direction de $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB), ou toute droite parallèle à (AB) ;
- le sens de $\overrightarrow{AB}$ est « de A vers B ».

Par exemple, sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ont même direction ((EF) est parallèle à (GH)) et même norme ($EF=GH$), mais ils sont de sens contraire.



Ces notions seront utilisées dans votre cours de physique, où un vecteur représentera une force ou un déplacement.

CHAPITRE 4

Études graphiques de fonctions

Plan de ce chapitre

La fonction g est définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par

$$g(x) = x^2 - 4x - 2.$$

Remarque. On ne peut calculer $g(x)$ que pour les nombres x de l'intervalle $[-1;4]$. On dit que $[-1;4]$ est l'ensemble de définition de la fonction g.

Dans tout ce chapitre, cette fonction g nous sert de support pour rappeler des techniques du collège concernant les fonctions – en commençant par la construction de la courbe représentative –, avant de voir des choses nouvelles : inéquation, tableau de variations et tableau de signes.

I. Courbe représentative.

On fait un tableau de valeurs pour g sur $[-1;4]$ avec un pas de $0,5$.

x	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$g(x)$	3	$0,25$	-2	$-3,75$	-5	$-5,75$	-6	$-5,75$	-5	$-3,75$	-2

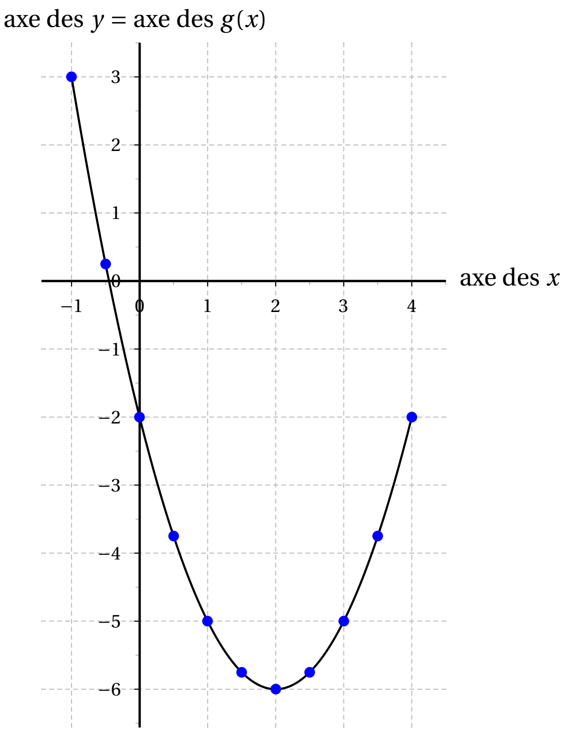
Détail de deux calculs :

- $g(-1) = (-1)^2 - 4 \times (-1) - 2 = 1 + 4 - 2 = 3.$
- $g(1,5) = 1,5^2 - 4 \times 1,5 - 2 = 2,25 - 6 - 2 = -5,75.$

On peut aussi obtenir le tableau à l'aide de la calculatrice :

- $\boxed{\text{MODE}}$ ou $\boxed{\text{MENU}}$
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=$X^2 - 4X - 2$ $\boxed{\text{EXE}}$
  (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? -1 $\boxed{\text{EXE}}$
- Fin ? 4 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas ? $0,5$ $\boxed{\text{EXE}}$

On place les points correspondant au tableau de valeurs (x en abscisse et $g(x)$ en ordonnée) et on construit la courbe en reliant ces points.

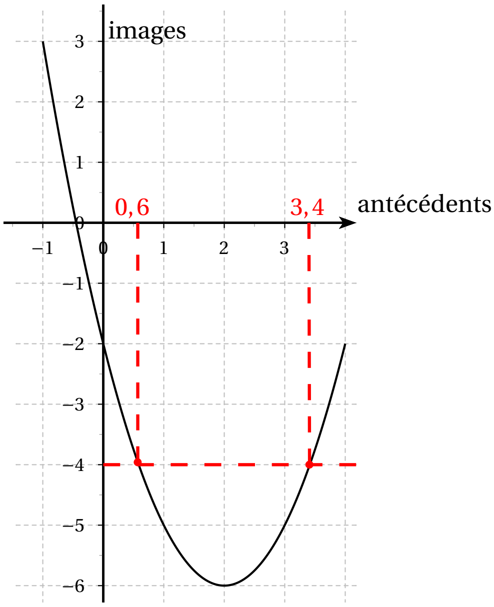


II. Équation.

On résout graphiquement l'équation $g(x) = -4$.

On cherche donc les nombres dont l'image est égale à -4. Pour cela, on trace la droite horizontale qui coupe l'axe des ordonnées en -4. Cette droite coupe la courbe en deux points. Les solutions de l'équation $g(x) = -4$ sont les abscisses de ces points : $x \approx 0,6$ et $x \approx 3,4$.

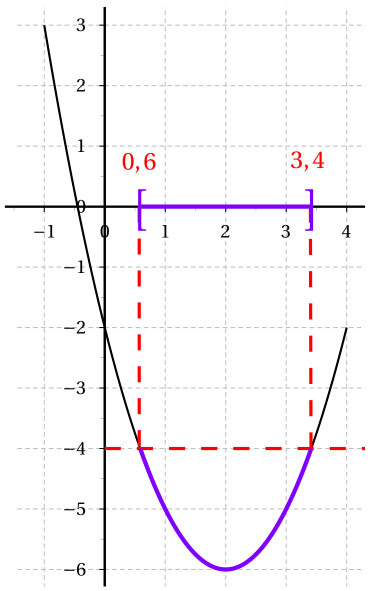
Il revient au même de dire que les antécédents de -4 par g sont $0,6$ et $3,4$ environ.



III. Inéquation.

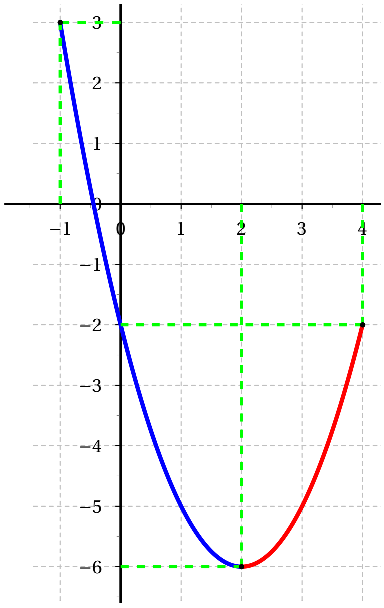
On résout graphiquement l'inéquation $g(x) \leq -4$.

On cherche donc les nombres dont l'image est plus petite que -4. Pour cela, on trace la droite horizontale qui coupe l'axe des ordonnées en -4 et on surligne tous les points de la courbe situés sous cette droite. On reporte sur l'axe des abscisses la partie surlignée : les nombres solutions sont tous les nombres de l'intervalle $[0,6;3,4]$ environ.



IV. Tableau de variations, maximum, minimum.

- la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-1;2]$: lorsque x va de -1 à 2, la courbe descend (partie bleue).
- la fonction g est croissante sur l'intervalle $[2;4]$: lorsque x va de 2 à 4, la courbe monte (partie rouge).



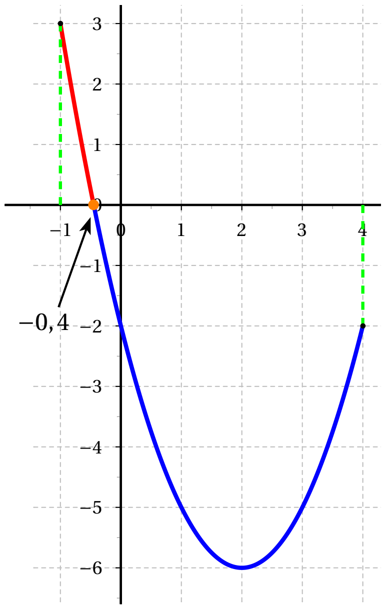
On résume ces informations dans un **tableau de variations** :

x	-1		2		4
$g(x)$	3	↘	-6	↗	-2

- le minimum de g est -6. C'est la valeur minimale prise par la fonction.
- le maximum de g est 3. C'est la valeur maximale prise par la fonction.

V. Tableau de signe.

- $g(x) = 0$ lorsque $x = -0,4$ environ (point orange).
- la fonction g est positive sur l'intervalle $[-1;-0,4]$ environ : lorsque x va de -1 à $-0,4$, la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses (partie rouge).
- la fonction g est négative sur l'intervalle $[-0,4;4]$ environ : lorsque x va de $-0,4$ à 4, la courbe est située en dessous de l'axe des abscisses (partie bleue).



On résume ces informations dans un **tableau de signe** :

x	-1		-0.4		4
$g(x)$		$+$	0	$-$	

CHAPITRE 5

Probabilités

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, on donne quelques méthodes nouvelles de calculs de probabilités. On utilise notamment des tableaux et des diagrammes.

I. Vocabulaire.

Déf.1

On se place dans la situation d'une expérience aléatoire.

1. L'ensemble de tous les cas possibles est l'univers, noté U.
2. Un événement est une partie de l'univers.
3. Un événement élémentaire est un événement contenant un seul élément.

Exemple 1

On lance un dé équilibré à 6 faces. L'univers est

$$U = \{1;2;3;4;5;6\}\,.$$

On s'intéresse à l'événement

$$A = \text{« obtenir un n° impair »} = \{1;3;5\}.$$

Remarques.

- Les événements peuvent s'écrire en français (en rouge ci-dessus) ou sous forme ensembliste (en bleu ci-dessus).
- Dans la suite, on notera plutôt A : « obtenir un n° impair » (donc : à la place de =).

L'événement A est la réunion des trois événements élémentaires $\{1\}$, $\{3\}$ et $\{5\}$.

Déf.2

La probabilité uniforme P associe à tout événement E le nombre $P(E)$ défini par :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } E}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple 2

On reprend l'exemple 1. Il y a 6 cas possibles et 3 cas favorables à A, donc

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Remarques.

- On peut aussi écrire la réponse sous forme décimale ou sous forme de pourcentage : $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$.
- Dans ce cours, on utilisera toujours la probabilité uniforme. Cela signifie que nous serons toujours dans des situations où tous les événements élémentaires ont la même chance de se produire, comme avec le dé à 6 faces : on a 1 chance sur 6 d'obtenir 1, 1 chance sur 6 d'obtenir 2, 1 chance sur 6 d'obtenir 3, etc.
- Pour tout événement E, $P(E)$ est un nombre compris entre 0 et 1.

Déf. 3

Étant donné un événement E, son contraire est noté $\overline{E}$.

Exemple 3

On reprend l'exemple 1. Le contraire de

$$A : \text{« obtenir un n° impair »}$$

est

$$\overline{A} : \text{« obtenir un n° pair »}.$$

Théorème 1

Étant donné un événement E et son contraire $\overline{E}$:

$$P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right) \qquad \text{et} \qquad P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E).$$

II. Quelques méthodes de calcul.

Exemple 4 (tableau à double entrée)

Cinq amis, Kevin, Marc, Clara, Léa et Yvan, organisent une soirée. L'un d'entre eux est désigné pour s'occuper de la sono, puis un autre pour s'occuper de la salle. Calculer la probabilité de l'événement :

$$A : \text{« les deux amis désignés sont des garçons »}.$$

On construit un tableau à double entrée.

Sono \ Salle	K	M	Y	C	L
K		♡	♡		
M	♡		♡		
Y	♡	♡			
C					
L					

La diagonale du tableau est exclue, puisque la même personne ne peut pas s'occuper de la sono et de la salle. Il y a donc $5 \times 5 - 5 = 20$ cas possibles. On place un cœur dans les 6 cases favorables à l'événement A.
Conclusion : $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Exemple 5 (tableau d'effectifs)

Dans une classe de 30 élèves, deux voyages scolaires ont été organisés dans l'année : un voyage en Allemagne et un voyage en Italie. 20 élèves ont participé au voyage en Allemagne, 12 ont participé au voyage en Italie et 6 élèves de la classe n'ont participé à aucun voyage. On interroge un élève au hasard. Calculer la probabilité de l'événement

C : « l'élève est parti en Italie, mais pas en Allemagne ».

Remarque. Comme $20+12+6=38$, il est clair que certains élèves ont participé à plusieurs voyages : certains sont partis à la fois en Allemagne et en Italie.

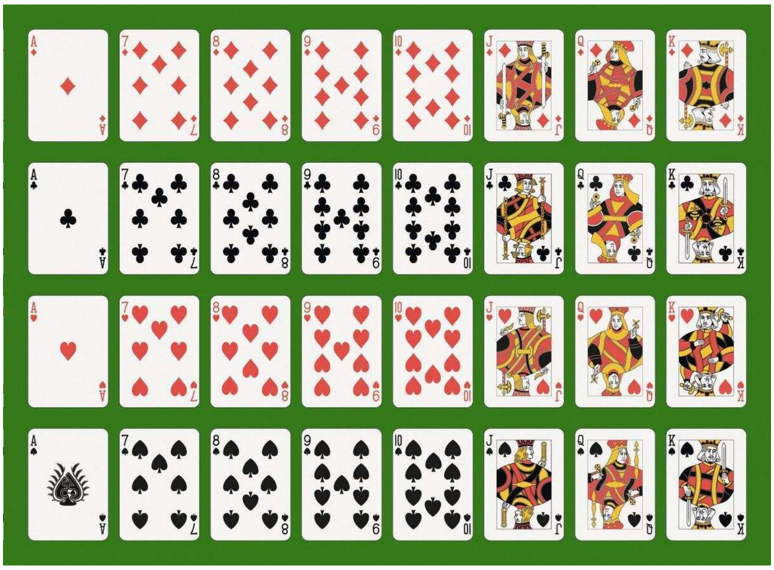
On construit le tableau d'effectifs suivant (que l'on remplit avec les données de l'énoncé, puis en faisant des additions/soustractions) :

	Partis en Italie	Pas partis en Italie	Total
Partis en Allemagne	8	12	20
Pas partis en Allemagne	4	6	10
Total	12	18	30

Il y a 4 élèves qui sont partis en Italie, mais pas en Allemagne. On a donc : $P(C)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$.

Exemple 6 (union et intersection)

On tire une carte dans un jeu de 32.



On considère les événements :

A : « la carte est un cœur »,

B : « la carte est une dame ».

On a

$$P(A)=\frac{8}{32}, \qquad P(B)=\frac{4}{32}.$$

Exemple 6 (union et intersection) – Suite

On définit deux nouveaux événements :

$A \cap B$: « la carte est un cœur ET une dame » = « la carte est la dame de cœur ».

$A \cup B$: « la carte est un cœur OU une dame ».

Définition 4

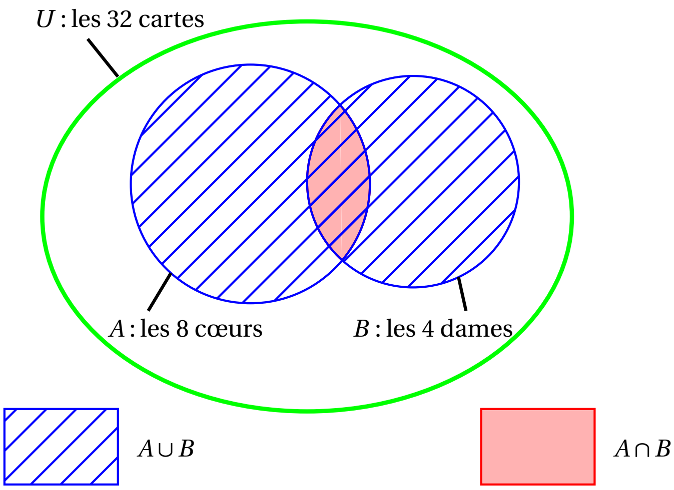
1. $\cap$ se lit « inter » et correspond au mot français « ET ».
2. $\cup$ se lit « union » et correspond au mot français « OU ». Ce « OU » est inclusif, à ne surtout pas confondre donc avec un « OU BIEN » [a]

[a] Autrement dit, dans notre exemple, on doit prendre en compte tous les cœurs et toutes les dames, y compris la dame de cœur.

Il y a une dame de cœur dans le jeu, donc

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

Pour calculer $P(A \cup B)$, on utilise un diagramme :



Les cartes qui correspondent à l'événement $A \cup B$ sont les cartes de la zone hachurée. Il y en a $8+4-1=11$ (on ajoute les cœurs et les dames, et on retire la dame de cœur – zone rouge, qui sinon serait comptée deux fois).

Conclusion : comme il y a 11 cas favorables à $A \cup B$ sur 32 possibles,

$$P(A \cup B) = \frac{11}{32}.$$

Remarque.
En fait

$$P(A \cup B) = \frac{11}{32} = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cette méthode se généralise :

Théorème 2

Étant donnés deux événements A et B, on a :

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
2. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

CHAPITRE 6

Équations de droites

Plan de ce chapitre

Le point central de cette leçon est le fait que les points d'une droite non verticale sont ceux dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient une certaine égalité $y = ax + b$, appelée « équation de la droite ». On explique comment trouver a et b, par le calcul et graphiquement.

Les idées de cette leçon reviendront sans cesse dans le cours de mathématiques de 1re, quelle que soit votre orientation.

I. Tracer une droite d'équation donnée

Déf.1 Les fonctions affines sont les fonctions f de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Théorème 1

- La courbe représentative d'une fonction affine est une droite non verticale.
- Réciproquement, toute droite non verticale est la courbe représentative d'une fonction affine.

Exemple 1

On trace la droite D représentant la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - 3$.

On fait un tableau de valeurs avec deux valeurs, puis on construit la courbe (deux points suffisent, puisque c'est une droite).

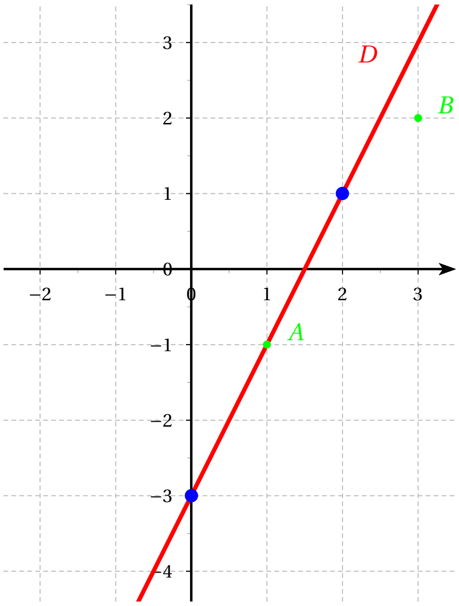
x	0	2
y	-3	1

$f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$

$f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$

(on a choisi les valeurs 0 et 2, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs).

Exemple 1 – Suite



Remarque (cruciale !). On dit que $y = 2x - 3$ est l'équation de la droite D. On écrit

$$D : y = 2x - 3.$$

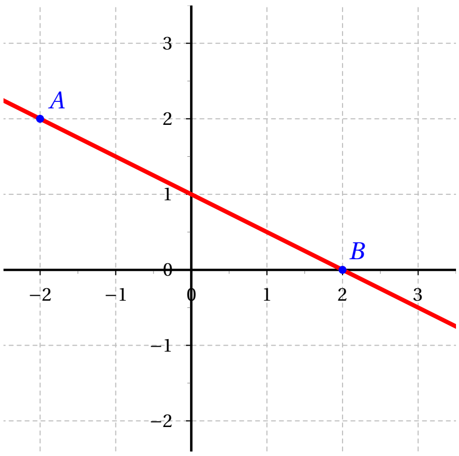
Cela signifie qu'un point M du plan de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite D si, et seulement si, $y = 2x - 3$.
Par exemple :

- Le point A de coordonnées $(1; -1)$ appartient à la droite D car $-1 = 2 \times 1 - 3$.
- Le point B de coordonnées $(3; 2)$ n'appartient pas à la droite D car $2 \neq 2 \times 3 - 3$.

II. Déterminer l'équation d'une droite.

Exemple 2

Soient $A(-2; 2)$ et $B(2; 0)$. On cherche l'équation de la droite (AB).



L'équation de (AB) est de la forme

$$y = ax + b.$$

Il faut trouver a et b.

1re étape. On trouve a.
Pour cela, on utilise la formule

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.}$$

$$a = \frac{0 - 2}{2 - (-2)} = \frac{-2}{4} = -0,5.$$

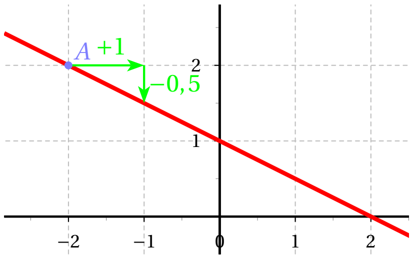
a s'appelle coefficient directeur (ou pente) de la droite D.

Exemple 2 – Suite

On peut aussi lire sa valeur graphiquement :

- on part du point A, on avance de 1 carreau vers la droite ;
- on regarde de combien il faut monter ou descendre pour « retomber » sur la droite ; la valeur que l'on obtient est a.

Sur le graphique, il faut descendre de $0,5$ pour retomber sur la droite, donc $a = -0,5$.
On a bien l'idée de pente.



On sait maintenant que l'équation de notre droite est de la forme $y = -0,5x + b$. Il reste à trouver b.

2ᵉ étape. On trouve b.
On remplace x et y par les coordonnées de A dans l'équation de (AB).
$y = -0,5x + b$ et $A(-2;2)$, donc

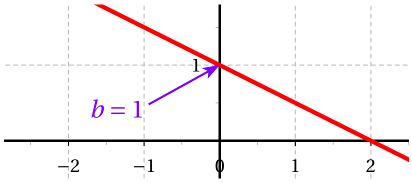
$$2 = -0,5 \times (-2) + b.$$

On obtient une équation du premier degré. On trouve la valeur de b en la résolvant :

$$\begin{aligned} 2 &= -0,5 \times (-2) + b \qquad \text{(un conseil : laissez } b \text{ dans le membre de droite)} \\ 2 &= 1 + b \\ 2 - 1 &= \cancel{1} + b - \cancel{1} \\ 1 &= b. \end{aligned}$$

b s'appelle ordonnée à l'origine de la droite (AB).

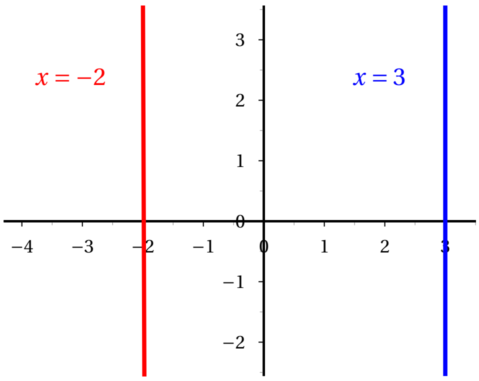
On peut aussi lire sa valeur graphiquement, en regardant en quel point la droite coupe l'axe des ordonnées. Sur notre figure, on lit graphiquement : $b = 1$.



Conclusion : $(AB) : y = -0,5x + 1$.

Remarque.

La méthode qui précède est valable pour toute droite non verticale. La droite verticale qui passe par le point de coordonnées $(k\ ;\ 0)$ a pour équation $x = k$ (voir figure ci-contre).



III. Intersection de droites.

Exemple 3

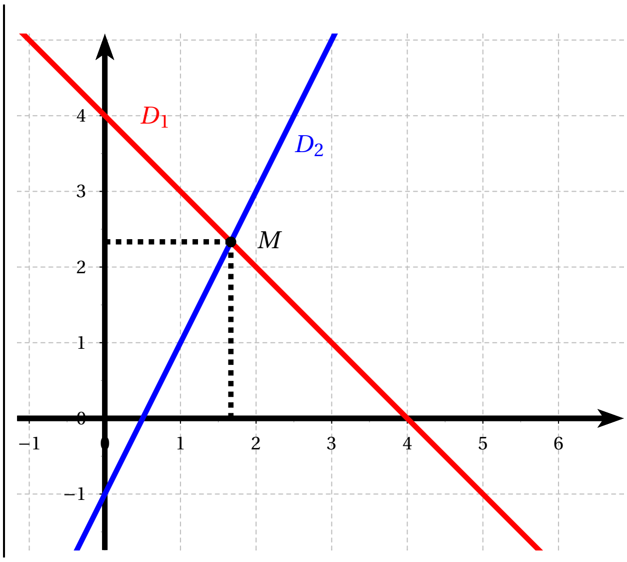
On trace les droites $D_1 : y = 2x - 1$ et $D_2 : y = -x + 4$, puis on cherche les coordonnées de leur point d'intersection M.

Tableau pour le tracé de D_1 :

x	0	2
y	-1	3

Tableau pour le tracé de D_2 :

x	0	2
y	4	2



$M\left(x_M ; y_M\right)$ appartient à D_1 et D_2, donc ses coordonnées vérifient les équations des deux droites : on a

$$\begin{cases} y_M = 2x_M - 1 \\ y_M = -x_M + 4 \end{cases}$$

On en déduit : $2x_M - 1 = -x_M + 4$. On trouve x_M en résolvant cette équation, puis y_M en remplaçant dans une des deux lignes du système.
La méthode est toujours la même lorsqu'on cherche l'intersection de deux droites ; on peut alléger la présentation ainsi :

1re étape. On résout l'équation

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= -x + 4 \\ 2x - \cancel{1} + x + \cancel{1} &= -\cancel{x} + 4 + \cancel{x} + 1 \\ 3x &= 5 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{5}{3} \\ x &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

2e étape. On remplace dans l'équation de D_1 (ou de D_2, au choix) pour avoir y :

$$y = 2x - 1 = 2 \times \frac{5}{3} - 1 = \frac{10}{3} - \frac{3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Conclusion : $M\left(\frac{5}{3} ; \frac{7}{3}\right)$.

IV. Droites parallèles.

Théorème 2

Deux droites non verticales sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

Exemple 4

On considère les points $A(1;0)$ et $B(4;-2)$, ainsi que la droite $d : y = -0,6x - 2$.
On trace les droites d et (AB) et on se pose la question de savoir si elles sont parallèles ou non.

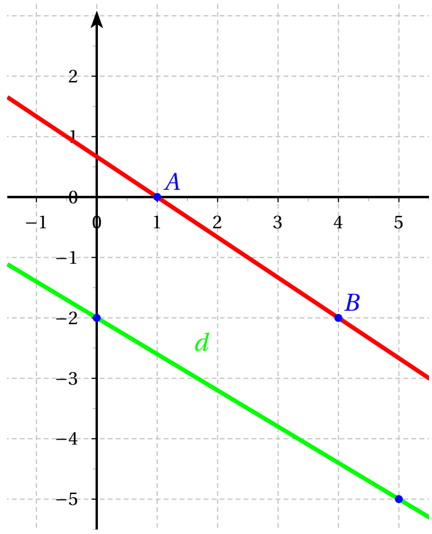
Pour tracer d, on fait un tableau de valeurs avec deux valeurs (pour ne pas être embêté avec les nombres à virgule, il est judicieux de prendre $x = 0$ et $x = 5$) :

x	0	5
y	-2	-5

Pour savoir si les droites sont parallèles ou non, il faut savoir si elles ont le même coefficient directeur ou non :

- Le coefficient directeur de la droite d est $-0,6$.
- Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-0}{4-1} = -\dfrac{2}{3}$.

Les deux droites n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles ne sont pas parallèles.



CHAPITRE 7

Pourcentages, taux d'évolution

Plan de ce chapitre

Dans cette leçon, on s'intéresse à l'effet d'une hausse ou d'une baisse exprimée en pourcentage. On apprend des techniques qui permettent de faire des calculs rapides, puis on étudie le problème des évolutions successives.

I. Taux d'évolution.

Exemple 1

En 2016, un timbre coûtait 0,80 €. Entre 2016 et 2018, ce prix a augmenté de 31,25 %. Quel est le prix du timbre en 2018 ?

$100\ \% + 31,25\ \% = 131,25\ \% = \dfrac{131,25}{100} = 1,3125$, donc pour augmenter un nombre de 31,25 %, il faut le multiplier par 1,3125. On complète donc le schéma :

$$\boxed{0,80} \xrightarrow{\times\ 1,3125} \boxed{???}$$

Prix 2016 Prix 2018

Conclusion : le prix du timbre en 2018 est

$$0,80 \times 1,3125 = 1,05\ €.$$

On dit que le taux d'évolution est de +31,25 %.

Exemple 2

D'après une étude de l'INSEE, le salaire net annuel moyen des hommes en France était de :

- 21 498 € en 2000 ;
- 26 831 € en 2010.

Quel a été le pourcentage d'augmentation du salaire moyen entre ces deux dates ?
On complète le schéma :

$$\boxed{21\,498} \xrightarrow{\times\ ???} \boxed{26\,831}$$

Salaire 2000 Salaire 2010

Exemple 2 – Suite

Connaître le pourcentage d'augmentation revient à savoir par combien il faut multiplier pour passer de 21 498 à 26 831. Pour cela on effectue la division :

$$26\,831 \div 21\,498 \approx 1,2481 = 124,81\ \%.$$

Conclusion : le salaire moyen a augmenté de 24,81 % environ. Autrement dit, le taux d'évolution est de +24,81 %.

Exemple 3

Un vendeur nous accorde une remise de 15 % sur un téléviseur dont le prix initial est de 170 €. Quel est le prix après la remise ?

$100\ \% - 15\ \% = 85\ \% = \dfrac{85}{100} = 0,85$, donc pour baisser un nombre de 15 %, il faut le multiplier par 0,85. On complète donc le schéma :

$$\boxed{170} \xrightarrow{\times 0,85} \boxed{???}$$

Prix avant remise — Prix après remise

Conclusion : le prix après la remise est

$$170 \times 0,85 = 144,50\ €.$$

On dit que le taux d'évolution est de −15 %.

Exemple 4

Selon le JDN (journal du net), le prix médian au m^2 pour l'achat d'un T1 à Saint-Martin-Boulogne était de :

- 1 520 € en 2017 ;
- 1 390 € en 2018.

Quel a été le pourcentage de baisse en un an ?

On complète le schéma :

$$\boxed{1\,520} \xrightarrow{\times\ ???} \boxed{1\,390}$$

Prix 2017 — Prix 2018

Connaître le pourcentage de baisse revient à savoir par combien il faut multiplier pour passer de 1 520 à 1 390. Pour cela on effectue la division :

$$1\,390 \div 1\,520 \approx 0,9145 = 91,45\ \%.$$

Conclusion : comme $100\ \% - 91,45\ \% = 8,55\ \%$, le prix médian au m^2 pour l'achat d'un T1 a baissé de 8,55 % environ. Autrement dit, le taux d'évolution est de −8,55 %.

II. Évolutions successives.

Exemple 5

Le prix du timbre est passé de $0,50$ € en 2003 à $0,60$ € en 2011 et à $1,05$ € en 2019 [a].

$$\boxed{0{,}50} \xrightarrow{\times ???} \boxed{0{,}60} \xrightarrow{\times ???} \boxed{1{,}05}$$

Prix 2003 — Prix 2011 — Prix 2019

Quel est le taux d'évolution des prix à chaque étape ? Quel est le taux d 'évolution global ?

- $0,60 \div 0,50 = 1,20$, donc le taux d'évolution entre 2003 et 2011 est $+20$ %.
- $1,05 \div 0,60 = 1,75$, donc le taux d'évolution entre 2011 et 2019 est $+75$ %.
- $1,05 \div 0,50 = 2,1$, donc le taux d'évolution entre 2003 et 2019 est $+110$ %. [b]

Pour obtenir le taux d'évolution entre 2003 et 2019, on peut aussi calculer :

$$1,20 \times 1,75 = 2,1.$$

a. Remarquez qu'on a relevé les prix à 8 ans d'intervalle.
b. En effet, $2,1 = 210\ \% = 100\ \% + 110\ \%$.

Attention

Dans l'exemple qui précède, on voit que deux hausses successives de 20 % puis 75 % NE FONT PAS une hausse de 95 %. Il y a le même type de piège dans les deux exemples qui suivent.

Exemple 6

Un prix augmente de 10 %, puis baisse de 10 %.

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 1{,}10} \boxed{110} \xrightarrow{\times 0{,}90} \boxed{99}$$

Prix de départ — Après la hausse — Après la baisse

Conclusion : on est passé de 100 € à 99 €, donc il y a eu une baisse globale de 1 %.

Terminons avec le problème du taux réciproque :

Exemple 7

On baisse un nombre de 20 %. Quel est le taux à appliquer pour revenir au nombre de départ ?

Partons de la valeur 100 et faisons le schéma habituel, sachant qu'une baisse de 20 % revient à faire une multiplication par 0,80 :

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 0{,}80} \boxed{80} \xrightarrow{\times ???} \boxed{100}$$

Valeur initiale — Après la baisse — Retour à la valeur initiale

Pour déterminer le deuxième taux d'évolution, on calcule :

$$??? = 100 \div 80 = 1,25 = 125\ \%,$$

donc la baisse de 20 % est compensée par une hausse de 25 %.
On dit que -20 % et $+25$ % sont deux taux d'évolution réciproques l'un de l'autre.

CHAPITRE

8 Opérations sur les vecteurs

Plan de ce chapitre

Dans cette leçon on effectue des opérations sur les vecteurs comme on effectue des opérations sur les nombres, le but étant de donner un sens à des expressions du type $2\vec{u}+3\vec{v}$. On donne aussi quelques applications, mais il faudra attendre la classe de 1re pour « passer aux choses sérieuses ».

Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

I. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

Déf. 1

Étant donné un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et un nombre réel k, le vecteur $\vec{v}=k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Exemple 1

Prenons le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et posons

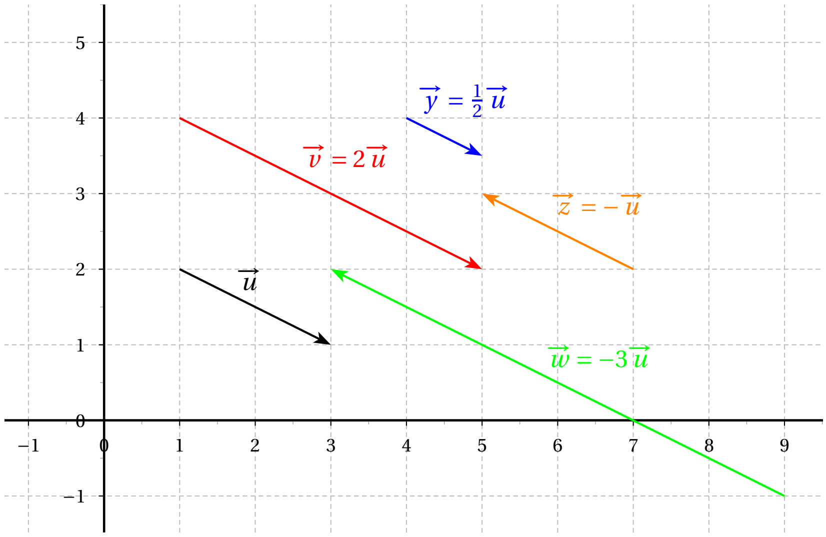
$$\vec{v}=2\vec{u},\quad \vec{w}=-3\vec{u},\quad \vec{y}=\frac{1}{2}\vec{u},\quad \vec{z}=-1\vec{u}.$$

On a

$$\vec{v}\begin{pmatrix}2\times2\\2\times(-1)\end{pmatrix}\ \vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix},\quad \vec{w}\begin{pmatrix}-3\times2\\-3\times(-1)\end{pmatrix}\ \vec{w}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix},\quad \vec{y}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times2\\\frac{1}{2}\times(-1)\end{pmatrix}\ \vec{y}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \vec{z}\begin{pmatrix}-1\times2\\-1\times(-1)\end{pmatrix}\ \vec{z}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut noter $\vec{z}=-\vec{u}$ au lieu de $\vec{z}=-1\vec{u}$.

Exemple 1 – Suite

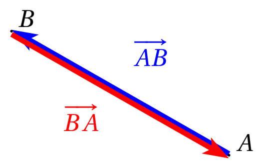


Déf.2 Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Remarque.
Pour tout point A, on a $\overrightarrow{AA}\begin{pmatrix}x_A - x_A\\y_A - y_A\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AA}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ (puisque $\overrightarrow{AA}$ et $\overrightarrow{0}$ ont les mêmes coordonnées).

Théorème 1
Pour tous points A, B :

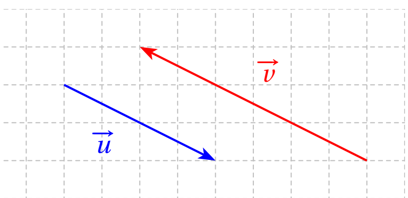
$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$



II. Colinéarité.

Définition 3

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un nombre réel k tel $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.



Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Considérons deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Dire qu'ils sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Il revient au même de dire que le tableau

x	x'
y	y'

est un tableau de proportionnalité. Or vous savez depuis le collège qu'on reconnaît un tel tableau à l'égalité des produits en croix : $x \times y' = x' \times y$, ou encore $xy' - x'y = 0$. Cela nous conduit à la

Déf. 4

Le déterminant de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

et au

Théorème 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple 2

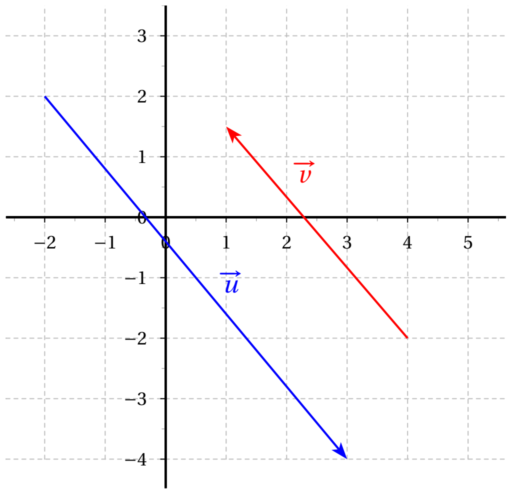
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
Pour le savoir, on calcule leur déterminant :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{matrix} {\color{red}x} \\ {\color{red}y} \end{matrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 3,5 \end{pmatrix}\begin{matrix} {\color{red}x'} \\ {\color{red}y'} \end{matrix}$$

donc

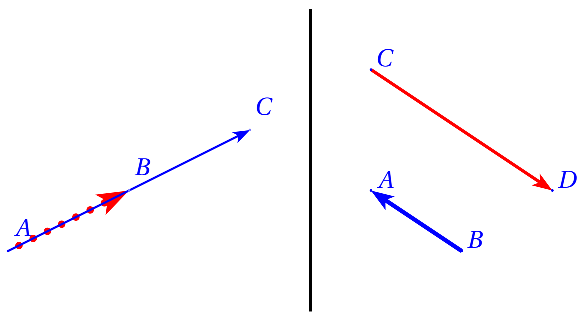
$$\begin{aligned} \det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) &= {\color{red}xy' - x'y} \\ &= 5 \times 3,5 - (-3) \times (-6) = 17,5 - 18 = -0,5. \end{aligned}$$

Conclusion : $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \neq 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



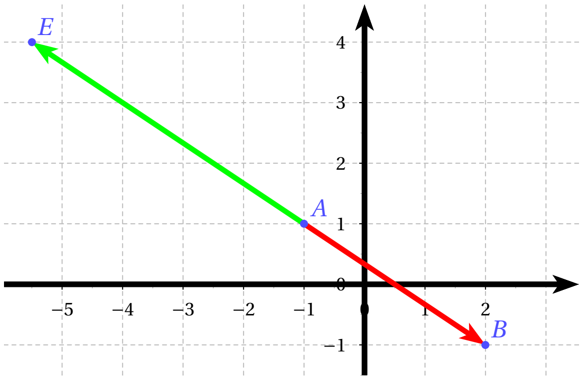
Théorème 3

1. Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Exemple 3

Les points $A(-1;1)$, $B(2;-1)$, $E(-5,5;4)$ sont-ils alignés ?



On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-1)\\-1-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$; et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-5,5-(-1)\\4-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-4,5\\3\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-4,5\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right) = xy' - x'y = 3\times 3-(-4,5)\times(-2) = 9-9 = 0.$$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points A, B, E sont alignés.

III. Somme de deux vecteurs.

Déf.5 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. La somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u}+\vec{v}$, est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Remarque. Il est clair sur la définition que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

Exemple 4

On prend $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

On a

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}4+2\\1+(-3)\end{pmatrix} \qquad \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}.$$

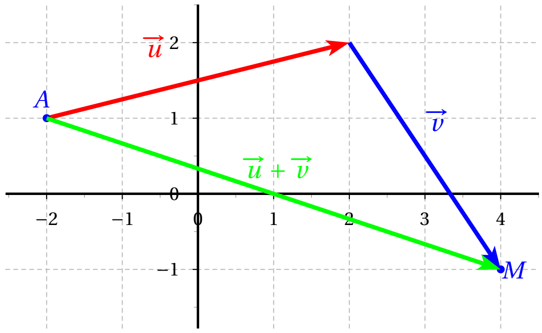
Sur la figure ci-dessous, on place le point $A(-2;1)$, [a] et on construit le point M tel que

$$\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}.$$

On remarque qu'il revient au même de construire $\vec{u}+\vec{v}$ que de mettre bout à bout les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Ce point a été choisi au hasard.

Exemple 4 – Suite

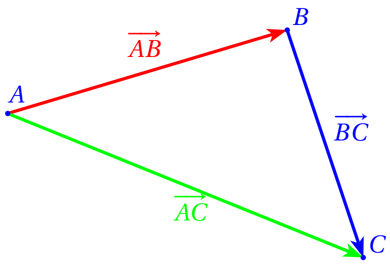


Le fait que la somme de deux vecteurs s'obtienne en les mettant bout à bout est un fait général, qui porte le nom de relation de Chasles :

Théorème 4 (relation de Chasles)

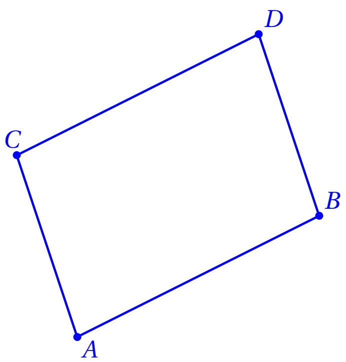
Pour tous points A, B, C :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



Exemple 5

$ABDC$ est un parallélogramme. On réduit la somme vectorielle $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



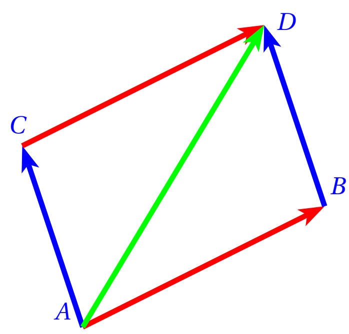
$ABDC$ est un parallélogramme, donc d'après le théorème 2 de la leçon n°3 (géométrie repérée) :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{A{\color{red}C}}+\overrightarrow{{\color{red}C}D}\quad\text{(on peut intervertir l'ordre)}\\&=\overrightarrow{AD}.\qquad\text{(relation de Chasles, les } {\color{red}C} \text{ se télescopent).}\end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi représenter la situation par le schéma ci-dessous : la somme des vecteurs rouge et bleu est le vecteur vert.



CHAPITRE 9

Tableaux de signes

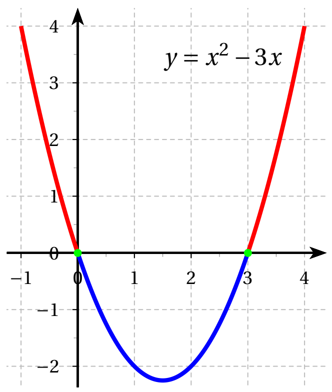
Plan de ce chapitre

Dans cette leçon, on explique comment faire un tableau de signe par le calcul. Vous utiliserez ces techniques en classe de 1re, lorsque vous étudierez la dérivation.

Exemple 1

On obtient le tableau de signe de $x^2 - 3x$ sur $\mathbb{R}$ à partir de la courbe :

x	-1	0	1	$1{,}5$	2	3	4
$x^2 - 3x$	4	0	-2	$-2{,}25$	-2	0	4



On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2 - 3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dans la suite du chapitre, on explique comment faire un tableau signe sans construire de graphique. On commence par le signe de $ax + b$.

Théorème 1

Soit a un réel non nul, soit b un réel. Lorsqu'on doit étudier le signe de $ax + b$:

1. On résout l'équation $ax + b = 0$; on place la solution trouvée dans le tableau et on met un « 0 » en dessous.
2. On distingue ensuite deux cas :
   - **Premier cas :** Si $a > 0$, on met un « + » à droite du « 0 » et un « − » à gauche ;
   - **Deuxième cas :** Si $a < 0$, on met un « + » à gauche du « 0 » et un « − » à droite.

Exemple 2

On fait le tableau de signe de $-4x+2$.
On résout l'équation :

$$-4x+2=0 \qquad -4x+\cancel{2}-\cancel{2}=0-2 \qquad \frac{\cancel{-4}x}{\cancel{-4}}=\frac{-2}{-4} \qquad x=0,5$$

$a=-4$, donc le « + » est à gauche et le « − » à droite :

x	$-\infty$		0.5		$+\infty$
$-4x+2$		$+$	0	$-$	

On en vient au tableau de signe d'un produit :

Exemple 3

On fait le tableau de signe de $(2x-8)(-x+3)$. Pour cela, on utilise les propriétés bien connues :

- positif multiplié par positif donne positif;
- positif multiplié par négatif donne négatif;
- négatif multiplié par négatif donne positif;
- un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul (donc $(2x-8)(-x+3)$ est nul lorsque $2x-8$ est nul, ou lorsque $-x+3$ est nul).

Venons-en au tableau proprement dit :

On résout :	On résout :
$2x-8=0$	$-x+3=0$
$2x-\cancel{8}+\cancel{8}=0+8$	$-x+\cancel{3}-\cancel{3}=0-3$
$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{8}{2}$	$-x=-3$
$x=4$	$x=3$
$a=2 \Rightarrow +$ à droite	$a=-1$, puisque $-x+3=-1x+3 \Rightarrow +$ à gauche

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$2x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-8)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque.
Certains exemples nécessitent de commencer par factoriser avant de pouvoir faire le tableau. Par exemple :

- $x^2-3x=x(x-3)$
- $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$ d'après l'IR n°3

Ces exemples seront traités en exercice.

Exemple 4

On fait le tableau de signe de $\frac{-2x+1}{x+2}$. Pour cela on regroupe en un seul tableau le signe de $-2x+1$ et de $x+2$, puis on en déduit le signe de leur quotient. Pour cela, on utilise les propriétés bien connues :

- positif divisé par positif donne positif;
- positif divisé par négatif donne négatif;
- négatif divisé par positif donne négatif;
- négatif divisé par négatif donne positif;
- un quotient est nul lorsque le numérateur est nul;
- un quotient n'a pas de sens quand le dénominateur est nul.

Venons-en au tableau proprement dit :

On résout :	On résout :
$-2x+1=0$	$x+2=0$
$-2x+\cancel{1}-\cancel{1}=0-1$	$x+\cancel{2}-\cancel{2}=0-2$
$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\frac{-1}{-2}$	$x=-2$
$x=0,5$	
$a=-2 \Rightarrow +$ à gauche	$a=1$, puisque $x+2=1x+2 \Rightarrow +$ à droite

x	$-\infty$		-2		0.5		$+\infty$
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x+1}{x+2}$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

Remarque. -2 est « valeur interdite » pour le quotient $\frac{-2x+1}{x+2}$: lorsque $x=-2$, le dénominateur $x+2$ est égal à $-2+2=0$, donc la fraction $\frac{-2x+1}{x+2}$ n'a pas de sens dans ce cas (on ne peut pas diviser par 0). On place alors une double barre dans le tableau.

CHAPITRE 10

Statistiques

Plan de ce chapitre

Dans le premier paragraphe, on étudie les indicateurs habituels de position d'une série statistique que sont la moyenne et la médiane. Dans le deuxième paragraphe, on introduit deux nouvelles notions, l'intervalle interquartile et l'écart-type, qui mesurent la dispersion d'une série statistique.

I. Indicateurs de position.

Exemple 1

Quand il travaille, Pierre va manger tous les jours au restaurant. Il a le choix entre trois formules, avec trois prix différents. Il obtient les statistiques suivantes pour le mois d'Avril :

Menu	n°1	n°2	n°3
Prix (en €)	25	27	31
Nombre de repas	10	6	8

La dépense moyenne par repas est

$$\overline{X} = \frac{10\times 25+6\times 27+8\times 31}{10+6+8} = \frac{660}{24} = 27,50 \text{ €}.$$

Exemple 2

Le tableau ci-dessous donne les températures maximales à Boulogne-sur-Mer du 1^{er} mars au 10 mars 2020.

Jours	01/03	02/03	03/03	04/03	05/03	06/03	07/08	08/03	09/03	10/03
Temp. max (en °C)	8	8,3	8,1	9,7	8	8,1	9,5	10,8	9,7	10,3

On voudrait calculer de tête la température maximale moyenne. Pour cela, on enlève 8°C à chaque température et on calcule la moyenne :

$$\frac{0+0,3+0,1+1,7+0+0,1+1,5+2,8+1,7+2,3}{10} = \frac{10,5}{10} = 1,05.$$

La température maximale moyenne est donc

$$\overline{X} = 8+1,05 = 9,05\text{°C}.$$

Déf. 1

On range par ordre croissant les données d'une série statistique. La médiane m_e de cette série est :

1. La valeur centrale s'il y a un nombre impair de données;
2. La moyenne des deux valeurs centrales s'il y a un nombre pair de données.

Exemples 3

1. On détermine la médiane de la série $3-12-6-8-9$: on range les données par ordre croissant
$$3-6-\boxed{8}-9-12.$$
La médiane est $m_e = 8$.
2. On détermine la médiane de la série $3-12-6-8-5-10$: on range les données par ordre croissant
$$3-5-\boxed{6-8}-10-12.$$
La médiane est $m_e = \dfrac{6+8}{2} = 7$.

Remarques.

- Si la série comporte n données, la médiane est la $\left(\frac{n+1}{2}\right)^e$ donnée. Précisons cela avec les exemples précédents :
  - La série $3-6-8-9-12$ comporte $n=5$ données. On calcule $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$, donc la médiane est la 3e valeur : $m_e = 8$.
  - La série $3-5-6-8-10-12$ comporte $n = 6$ données. On calcule $\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$, donc la médiane est la moyenne de la 3e et de la 4e valeurs : $m_e = \dfrac{6+8}{2} = 7$.

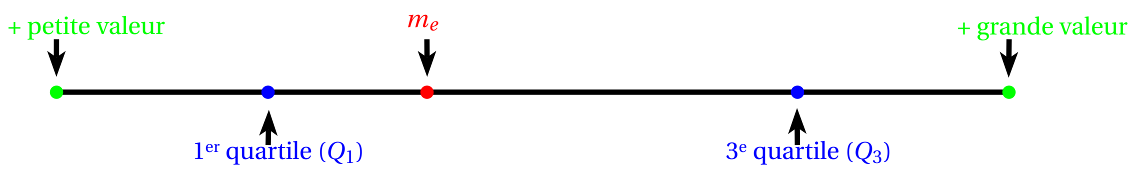
  Cette technique est utile pour les grandes séries, qu'il est difficile de couper en deux « d'un simple coup d'œil ». On aura également intérêt dans ce cas à utiliser les effectifs cumulés croissants (voir exercices).
- La moyenne et la médiane sont des « indicateurs de position » : lorsqu'on calcule la moyenne ou la médiane d'une classe à un devoir, c'est pour connaître la « position » de la classe, savoir si le devoir a été globalement réussi ou non.
- Dans bon nombre de situations, calculer la moyenne ou la médiane d'une série statistique revient à peu près au même. Voici un exemple où ce n'est pas le cas : dans un pays imaginaire comptant 1 million de salariés, 999 999 salariés gagnent 1 000 € par mois et 1 salarié gagne 1 milliard d'euros. Le salaire moyen par travailleur est
$$\frac{1 \times 1\,000\,000\,000 + 999\,999 \times 1\,000}{1\,000\,000} \approx 2000\text{ €}.$$
  Cette valeur est un très mauvais indicateur du niveau de revenu des travailleurs de ce pays imaginaire; il semble que la médiane, 1 000 €, soit bien plus pertinente. La médiane étant moins sensible que la moyenne aux valeurs extrêmes, on dit qu'elle est plus « robuste » que la moyenne.

  Cet exemple peut paraître artificiel, mais il n'est pas si éloigné que cela de la réalité : selon l'INSEE, en 2023 en France, le salaire net moyen pour un salarié travaillant à temps plein dans le secteur privé était de 2 735 €, tandis que le salaire médian s'élevait à 2 183 €.

II. Indicateurs de dispersion.

Définition 2

Étant donnée une série statistique, on range les valeurs par ordre croissant sur une droite graduée et on coupe la série en 4 parties de même effectif.



Entre chaque point de la droite graduée, il y a un quart de l'effectif total.

1. La valeur située au centre est la médiane m_e.
2. La valeur située au premier quart est le premier quartile Q_1.
3. La valeur située aux trois quarts est le troisième quartile Q_3.

Déf.3

La distance entre Q_1 et Q_3 s'appelle distance interquartile.

Remarques.

- Entre Q_1 et Q_3, il y a 50 % de l'effectif total.
- La distance interquartile est une mesure de la dispersion de la série : plus elle est grande, plus les données sont étalées. Cette distance est insensible aux valeurs extrêmes : les plus petites et les plus grandes valeurs de la série ne changent pas les valeurs de Q_1 et Q_3, donc elles ne changent pas la distance interquartile.

Exemple 4

On étudie le prix du litre de gasoil et de sans plomb 95 dans les 28 pays de l'Union Européenne en juillet 2014. On obtient les résultats suivants :

Gasoil.

min	Q_1	m_e	Q_3	max
1,19	1,31	1,36	1,45	1,82

Sans plomb 95.

min	Q_1	m_e	Q_3	max
1,28	1,36	1,49	1,65	1,84

Les distances interquartiles sont :

- pour le gasoil :
$$Q_3 - Q_1 = 1,45 - 1,31 = 0,14\text{ €}.$$
- pour le sans plomb 95 :
$$Q_3 - Q_1 = 1,65 - 1,36 = 0,29\text{ €}.$$

Les prix du sans plomb 95 sont donc plus variables que ceux du gasoil selon cet indicateur [a].

a. On pourrait aussi calculer l'étendue des séries, c'est-à-dire la distance entre le minimum et le maximum. Le problème, c'est qu'un carburant très peu cher ou au contraire très cher dans un seul des 28 pays pourrait « fausser » l'impression d'ensemble.

La distance interquartile permet de mesurer la dispersion des données autour de la médiane. On adjoint de même à la moyenne une mesure de la dispersion, appelée écart-type.

Déf. 4

L'écart-type d'une série statistique, noté σ, est l'écart moyen à la moyenne [a].

a. La lettre σ se lit « sigma ».

Exemple 5

- Dans une classe où tous les élèves ont 10/20 à un devoir, la moyenne est 10 et l'écart-type est 0 (la note de chaque élève est égale à la moyenne de classe).
- Dans une classe où la moitié des élèves a 15/20 et l'autre moitié 5/20, la moyenne est 10 également, mais l'écart-type est 5 (la note de chaque élève est à 5 points de la moyenne de classe).

Remarques.

- La définition que nous venons de donner est une définition simplifiée de l'écart-type. On renvoie à la section 3 pour la véritable définition.
- Contrairement à la distance interquartile, l'écart-type se calcule à partir de toutes les valeurs de la série. Il est donc sensible aux valeurs les plus basses et les plus élevées de cette série.

Exemple 6

On reprend l'exemple 4. On obtient les statistiques :

Gasoil.

$\overline{X}$	σ
1,39	0,14

Sans plomb 95.

$\overline{X}$	σ
1,51	0,16

Les prix du gasoil sont globalement plus faibles que ceux du sans plomb 95, car la moyenne est plus faible pour le gasoil ($1,39 < 1,51$).

Les prix du gasoil sont également moins dispersés (ou plus homogènes), parce que l'écart-type est plus faible pour le gasoil que pour le sans plomb 95 ($0,14 < 0,16$).

III. Définition rigoureuse de l'écart-type.

Considérons la série de cinq nombres :

$$8 \,;\, 13 \,;\, 11 \,;\, 7 \,;\, 16,$$

que l'on peut voir comme les notes d'un petit groupe d'élèves à un devoir.
La moyenne des notes est

$$\overline{X} = \frac{8+13+11+7+16}{5} = \frac{55}{5} = 11.$$

On complète un tableau avec chaque note, puis on calcule l'écart entre chaque note et la moyenne. On utilise la valeur absolue :

élèves	notes	écarts à la moyenne
1	8	$\lvert 8-11\rvert = \lvert -3\rvert = 3$
2	13	$\lvert 13-11\rvert = \lvert 2\rvert = 2$
3	11	$\lvert 11-11\rvert = \lvert 0\rvert = 0$
4	7	$\lvert 7-11\rvert = \lvert -4\rvert = 4$
5	16	$\lvert 16-11\rvert = \lvert 5\rvert = 5$

L'écart moyen à la moyenne est

$$\frac{3+2+0+4+5}{5} = \frac{14}{5} = 2,8.$$

Cela signifie qu'en moyenne, chaque élève se trouve à 2,8 points de la moyenne de classe, 11. Et bien sûr, plus l'écart moyen est grand, plus les notes sont dispersées autour de la moyenne.

L'écart moyen ne se prête pas très bien aux calculs [1] et il est peu utilisé malgré sa simplicité. On préfère calculer « l'écart quadratique moyen », c'est-à-dire qu'on met tous les écarts au carré :

$$\frac{3^2+2^2+0^2+4^2+5^2}{5} = \frac{54}{5} = 10,8.$$

1. Il y a tout un tas de formules dans un cours de statistiques un peu avancé.

Pour des raisons « d'homogénéité » , on prend ensuite la racine carrée de ce nombre[2], que l'on appelle l'écart-type et que l'on note σ :

$$\sigma = \sqrt{10,8} \approx 3,29.$$

Cette fois, c'est la définition rigoureuse.

Remarques.

- Finalement, $\sigma = \sqrt{\frac{(8-11)^2+(13-11)^2+(11-11)^2+(7-11)^2+(16-11)^2}{5}}$
- On vérifiera que l'on a aussi (formule de Koenig) : $\sigma = \sqrt{\frac{8^2+13^2+11^2+7^2+16^2}{5} - 11^2}$

2. Imaginez que les nombres 8 – 13 – 11 – 7 – 16 soient des mesures de longueurs, exprimées en cm. Comme on a mis au carré, la réponse obtenue, 10,8, s'exprime en cm². Or on a mesuré des longueurs, donc il faudrait que la mesure de dispersion soit exprimée en cm également. Il faut donc calculer la racine carrée de 10,8 pour obtenir cette mesure de dispersion, exprimée en cm.

CHAPITRE 11

Systèmes et équations de droites

Plan de ce chapitre

Dans le paragraphe 1, on explique comment résoudre un système d'équations. Dans le paragraphe 2, on réécrit les équations de droites sous une nouvelle forme, dite cartésienne, puis on fait le lien entre droites et systèmes d'équations.

I. Systèmes d'équations.

Exemple 1

On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 3x+4y=-5 \\ -2x-y=0 \end{cases} \qquad (\star).$$

Résoudre $(\star)$ signifie chercher tous les couples de nombres (x, y) vérifiant les deux lignes à la fois.

Pour résoudre le système, il y a 4 étapes :

Étape 1. On multiplie les deux lignes de $(\star)$ par deux nombres tels que les coefficients de l'inconnue x (ou ceux de y) soient opposés.

Dans notre cas, on multiplie par exemple la première ligne par 2 et la deuxième ligne par 3 :

$$\begin{cases} 3x+4y=-5 & (\times 2) \\ -2x-y=0 & (\times 3) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 6x+8y=-10 \\ -6x-3y=0 \end{cases}.$$

Les coefficients en x sont maintenant deux nombres opposés : 6 et -6.

Étape 2. On ajoute membre à membre les deux lignes. Les x s'éliminent. On obtient une équation du premier degré en y, que l'on résout :

$$\begin{aligned} 6x+8y+(-6x-3y) &= -10+0 \\ \cancel{6x}+8y-\cancel{6x}-3y &= -10 \\ 5y &= -10 \\ \frac{\cancel{5}y}{\cancel{5}} &= \frac{-10}{5} \\ y &= -2. \end{aligned}$$

Exemple 1 – Suite

Étape 3. On sait que $y = -2$. On reprend la première ligne de $(\star)$ pour trouver x.

$$\begin{aligned} 3x+4y &= -5 \\ 3x+4\times(-2) &= -5 \\ 3x-8 &= -5 \\ 3x-8+8 &= -5+8 \\ 3x &= 3 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{3}{3} \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Étape 4. On vérifie que le couple $(x, y) = (1, -2)$ est bien solution de $(\star)$:

$$\begin{cases} 3\times1+4\times(-2) = -5 \\ -2\times1-(-2) = 0 \end{cases}$$

Conclusion. La solution de $(\star)$ est $(x, y) = (1, -2)$.

Remarque. A l'étape 1, on aurait aussi pu, par exemple, laisser la première ligne identique, et multiplier la deuxième par 4 :

$$\begin{cases} 3x+4y = -5 \\ -8x-4y = 0 \end{cases}.$$

En additionnant, on aurait éliminé les y (étape 2). Etc.

II. Équations cartésiennes de droites.

Exemple 2

Sur la figure ci-contre on a tracé les droites :

- $D_1 : y = 2x+1$.
- $D_2 : x = -3$.

Tableau pour le tracé de D_1 :

x	0	2
y	1	5

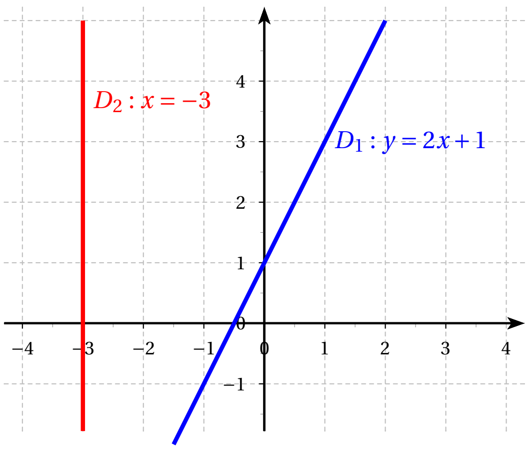
Calculs correspondants :

$2\times0+1 = 1$

$2\times2+1 = 5$

Les deux équations sont écrites « sous forme réduite ». En transposant, on peut écrire :

- $D_1 : -2x+1y-1 = 0$.
- $D_2 : 1x+0y+3 = 0$.



D'une manière générale :

Théorème 1

Toute droite a une équation, dite cartésienne, de la forme

$$ax + by + c = 0,$$

où a, b, c sont trois nombres réels et $(a, b) \neq (0, 0)$. [a]

[a]. $(a, b) \neq (0, 0)$ signifie qu'on ne peut pas avoir à la fois $a = 0$ et $b = 0$ – mais l'un des deux (a ou bien b) peut valoir 0.

Remarque. Dans l'exemple 1, on a résolu le système

$$\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ -2x - y = 0 \end{cases}.$$

La solution $(x, y) = (1, -2)$ donne les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $3x+4y+5 = 0$ et $-2x - y = 0$.

CHAPITRE 12

Arithmétique et racines carrées

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, on étudie des problèmes d'arithmétique en lien avec la décomposition en produit de nombres premiers. On apprend ensuite à simplifier des expressions avec des racines carrées.

I. Divisibilité, nombres premiers.

Déf.1 Soient a et b deux entiers naturels. On dit que a divise b s'il existe un entier naturel k tel que $b = k \times a$. On dit aussi a est un diviseur de b, que b est un multiple de a, ou encore que b est divisible par a.

Exemples 1

1. 4 divise 12, puisque $12 = 3 \times 4$.
2. 0 est un multiple de 3, puisque $0 = 0 \times 3$.

Exemple 2

On cherche tous les diviseurs de 90. Pour cela, on écrit tous les produits d'entiers qui donnent 90 :

$$\begin{aligned}1 \times 90 &= 90\\ 2 \times 45 &= 90\\ 3 \times 30 &= 90\\ 5 \times 18 &= 90\\ 6 \times 15 &= 90\\ 9 \times 10 &= 90.\end{aligned}$$

On en déduit que les diviseurs de 90 sont 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 et 90.

Déf.2 Un entier supérieur ou égal à 2 est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Exemple 3

Les nombres premiers inférieurs à 20 sont, par ordre croissant : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Exemple 4

On écrit 90 comme un produit de nombres premiers [a] :

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5.$$

On a déjà obtenu tous les diviseurs de 90 dans l'exemple 2. Une autre méthode consiste à faire tous les produits possibles de termes qui apparaissent dans la décomposition. Les diviseurs de 90 sont :

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2 \times 5 = 10 \\ 2 & 3 \times 5 = 15 \\ 3 & 2 \times 3 \times 3 = 18 \\ 5 & 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ 2 \times 3 = 6 & 3 \times 3 \times 5 = 45 \\ 3 \times 3 = 9 & 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90 \end{array}$$

a. On parle de décomposition en produit de nombres premiers.

Exemple 5

On cherche le PGCD de 252 et 198. [a] On décompose chacun des deux nombres en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7. \qquad 198 = 2 \times 3 \times 3 \times 11.$$

Pour obtenir le PGCD, on fait le produit des nombres qui apparaissent dans les deux décompositions à la fois (en couleur dans les décompositions ci-dessus) :

$$\text{PGCD}(252, 198) = 2 \times 3 \times 3 = 18.$$

a. PGCD signifie « plus grand diviseur commun ».

II. Simplification des racines carrées.

On rappelle d'abord que la racine carrée d'un nombre positif a est l'unique nombre positif dont le carré vaut a. On la note $\sqrt{a}$. Par exemple $4^2 = 16$, donc $\sqrt{16} = 4$.

Le théorème ci-dessous est démontré en exercices :

Théorème 1

Pour tous nombres positifs a et b :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Exemple 6

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Exemple 7

On souhaite écrire chacun des nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers et b est le plus petit possible :

$$H = \sqrt{50} + \sqrt{18}$$
$$I = 8\sqrt{3} - \sqrt{12}$$

Pour résoudre ce type de problème, il faut écrire chaque radical[a] comme le produit d'un entier naturel par le carré d'un entier naturel, ce carré étant le plus grand possible. Il convient donc de connaître les premiers carrés :

$$1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ 7^2 = 49,\ 8^2 = 64,\ 9^2 = 81,\ 10^2 = 100.$$

Par exemple, en prenant la liste ci-dessus, on voit que 50 peut s'écrire $50 = 2 \times 25$, et qu'aucun carré plus grand que 25 ne divise 50. On écrit donc :

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

On applique la méthode pour H et I :

$$H = \sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} + \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5+3)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$
$$I = 8\sqrt{3} - \sqrt{12} = 8\sqrt{3} - \sqrt{4 \times 3} = 8\sqrt{3} - \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (8-2)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

a. Le radical est le nombre sous la racine.

CHAPITRE 13

Inégalités

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, on explique les règles de maniement des inégalités. On évoque le lien avec les variations des fonctions.

Théorème 1

1. On ne change pas le sens d'une ou plusieurs inégalités quand :
   - on ajoute ou on retranche à tous les membres un même nombre ;
   - on multiplie tous les membres par un nombre strictement positif.
2. On change le sens d'une ou plusieurs inégalités quand on multiplie tous les membres par un nombre strictement négatif.

Exemple 1

Soit $1 \leq x \leq 3$. On souhaite donner un encadrement de $-2x+4$.
On part de $1 \leq x \leq 3$. On multiplie tous les membres par -2 :

$$\begin{aligned} -2\times 1 &\geq -2\times x \geq -2\times 3 \\ -2 &\geq -2x \geq -6 \end{aligned}$$

(comme $-2<0$, tous les $\leq$ sont devenus des $\geq$). On ajoute 4 :

$$-2+4 \geq -2x+4 \geq -6+4,$$

soit

$$2 \geq -2x+4 \geq -2.$$

On peut aussi écrire : $-2 \leq -2x+4 \leq 2$.

Exemple 2

Prenons deux nombres strictement positifs a et b tels que $a<b$. Alors :

- en multipliant par a on obtient :

  $$a\times a < b\times a,$$

  soit

  $$a^2 < ab.$$

- en multipliant par b on obtient :

  $$a\times b < b\times b,$$

  soit

  $$ab < b^2.$$

Exemple 2 – Suite

Donc en regroupant les inégalités :
$$a^2 < ab < b^2.$$

Conclusion de ce travail :
$$(a < b) \implies (a^2 < b^2).$$

Dans cet exemple, on a démontré :

Théorème 2

Deux nombres strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Exemple 3

On compare sans calculatrice les nombres $A = \sqrt{6+\sqrt{21}}$ et $B = 1+\sqrt{5}$.

D'une part
$$A^2 = \sqrt{6+\sqrt{21}}^2 = 6+\sqrt{21}.$$

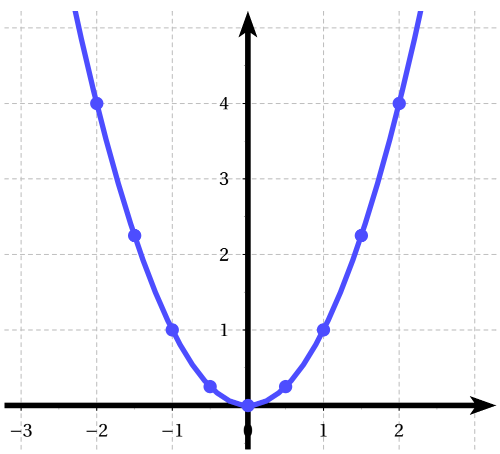
D'autre part
$$B^2 = \left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 + 2\times 1\times\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 1+2\times\sqrt{5}+5 = 6+\sqrt{4}\times\sqrt{5} = 6+\sqrt{4\times 5} = 6+\sqrt{20}.$$

Conclusion : $A^2 > B^2$. Or deux nombres strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc $A > B$.

Remarque.
Il y a un lien (que nous ne creuserons pas) entre ce qui précède et les tableaux de variations. Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

On construit la courbe à partir d'un tableau de valeurs :

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$f(x)$	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4



On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a vu plus haut que deux nombres strictement positifs étaient rangés dans le même ordre que leurs carrés : si $0 < a < b$, alors $0 < a^2 < b^2$.
Cela se traduit par la flèche montante dans le tableau :

x	$-\infty$		0		a		b		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	a^2	$\nearrow$	b^2	$\nearrow$	

Plus généralement, une fonction est :

- strictement croissante sur un intervalle lorsqu'elle conserve le sens des inégalités (plus un nombre est grand, plus son image est grande) ;
- strictement décroissante lorsqu'elle renverse le sens des inégalités (plus un nombre est grand, plus son image est petite).