Corrigé du devoir surveillé n°8

Exercice 1

1. (a) On calcule le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour savoir si A, B, C sont alignés ou non :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1,5\\14\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-0,5\\-4,5\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

donc

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = xy' - x'y = 1,5\times(-4,5)-(-0,5)\times 14 = -6,75+7 = 0,25.$$

Leur déterminant est non nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent A, B, C ne sont pas alignés.

(b) On calcule le déterminant de $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AD}$ pour savoir si (OC) et (AD) sont parallèles ou non :

$$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\-3,5\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1,5\\-5,25\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$$

donc

$$\det\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AD}\right) = xy' - x'y = 1\times(-5,25)-1,5\times(-3,5) = -5,25+5,25 = 0.$$

Leur déterminant est nul, donc $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires. Par conséquent (OC) est parallèle à (AD).

2. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

(a) La figure est facile et je ne la fais pas.

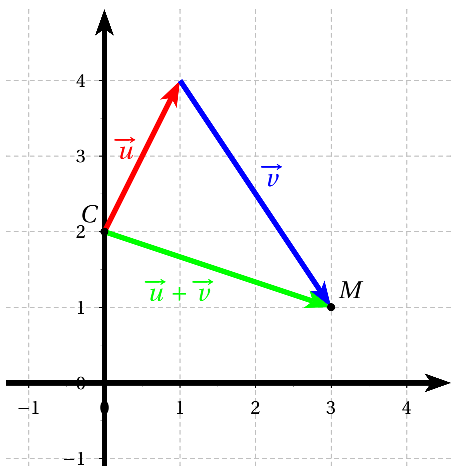
(b) On réduit les sommes vectorielles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} && \text{(on peut intervertir l'ordre)}\\ &= \overrightarrow{AD}. && \text{(relation de Chasles).}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ puisque $ABCD$ est un parallélogramme, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO} &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}\\ &= \overrightarrow{DO}. && \text{(relation de Chasles).}\end{aligned}$$

3. Soient $C(0;2)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.



4. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}9\\m\end{pmatrix}$, donc

$$\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right) = m\times m - 9\times 4 = m^2-36.$$

On en déduit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$m^2-36=0.$$

Cette équation se réécrit $m^2 = 36$, donc il y a deux solutions : $m=\sqrt{36}=6$ et $m=-\sqrt{36}=-6$.
Conclusion : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $m=6$ ou $m=-6$.