Corrigé du devoir surveillé n°6

1. Les coordonnées sont $I\left(0;\dfrac{1}{4};1\right)$, $J\left(\dfrac{1}{4};0;1\right)$ et $K\left(1;0;\dfrac{1}{4}\right)$.

2. On obtient facilement $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$. Par ailleurs $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\times 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\times 1 + 0\times 1 = 0,$$
$$\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{AG} = 1\times 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\times 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\times 1 = 0.$$

   Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ du plan (IJK), donc il est orthogonal au plan (IJK).

3. Comme $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$ est orthogonal au plan (IJK), ce dernier a pour équation

$$1x+1y+1z+d=0.$$

   Le point $I\left(0;\dfrac{1}{4};1\right)$ appartient à (IJK) donc

$$\begin{aligned}1\times 0+1\times\frac{1}{4}+1\times 1+d&=0\\ \frac{5}{4}+d&=0\\ d&=-\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

   Conclusion : $(IJK) : 1x+1y+1z-\dfrac{5}{4}=0$, soit en multipliant par 4 pour ne plus avoir de fraction :

$$(IJK) : 4x+4y+4z-5=0.$$

4. Comme $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de (BC) est

$$\begin{cases}x &= x_B+t\times 0\\ y &= y_B+t\times 1\\ z &= z_B+t\times 0\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\begin{cases}x &= 1\\ y &= t\\ z &= 0\end{cases}.$$

5. Pour obtenir les coordonnées de L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK), on « injecte » la représentation dans l'équation du plan et on résout :

$$\begin{aligned} 4x+4y+4z-5&=0\\ 4\times1+4\times t+4\times0-5&=0\\ -1+4t&=0\\ t&=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Enfin on remplace t par $\frac{1}{4}$ dans la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1\\ y &= t=\frac{1}{4}\\ z &= 0 \end{cases}.$$

Conclusion : $L\left(1;\frac{1}{4};0\right)$.

6. Le point L appartient au plan (IJK), donc pour prouver que les points I, J, L et M sont coplanaires, il suffit de prouver que les coordonnées de M vérifient l'équation du plan (IJK) :

$$4\times\frac{1}{4}+4\times1+4\times0-5=0,$$

donc $M\in(IJK)$ et les quatre points I, J, L, M sont bien coplanaires.

7. On place L et on construit la section du cube par le plan (IJK) (en traçant des parallèles). Il s'agit de l'hexagone $IJKLMN$.