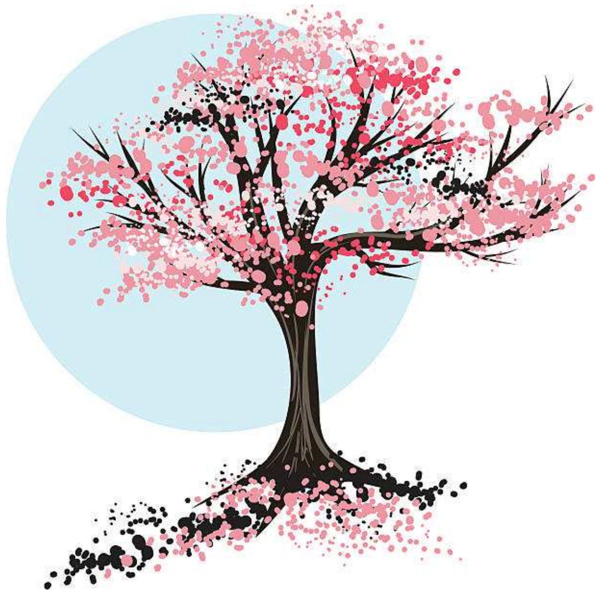
Lycée Mariette Boulogne-sur-Mer



Cours de Mathématiques

Mathématiques expertes Nicolas Perpète

Table des matières

CHAPITRE 1

Divisibilité, nombres premiers

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \cdots\}$

$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers (relatifs)

$\mathbb{Z} = \{\cdots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}$

Quand on ajoute une étoile, on "enlève 0"
Par exemple, $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \cdots\}$

I. Divisibilité, division euclidienne, PGCD

Définition 1

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$. On dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
On dit aussi que a est un diviseur de b, que b est divisible par a ou que b est un multiple de a. On note $a|b$.

Proposition 1

1. Si $a|b$, alors $a|ub$ pour tout $u \in \mathbb{Z}$.
2. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(ub + vc)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

Exemples 1

1. 4 divise 12, puisque $12 = 3 \times 4$.
2. 0 est un multiple de 3, puisque $0 = 0 \times 3$.
3. Si a et b sont multiples de 3, alors $a - b = 1a - 1b$ est multiple de 3.
4. On cherche tous les diviseurs de 90. Pour cela, on écrit tous les produits d'entiers qui donnent 90 :

   $$90 = 1\times90 = 2\times45 = 3\times30 = 5\times18 = 6\times15 = 9\times10.$$

   On en déduit que les diviseurs de 90 sont 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 et 90.

Remarque. On rappellera en exercice les critères de divisibilité usuels (par 2, 3, 5 et 9).

Exercices

Exercices 1 à 8

Théorème 1 (division euclidienne)

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tels que :

— $a = bq + r$,

— $0 \leq r < b$.

On dit que q est le quotient et r le reste dans la division euclidienne de a par b.

Remarque.
$r = 0 \iff b|a$.

Exemple 2

On effectue la division euclidienne de 384 par 11 :

$$\begin{array}{rr|l} & 3\,8\,4 & 1\,1 \\ - & 3\,3 & 3\,4 \\ \hline & 5\,4 & \\ - & 4\,4 & \\ \hline & 1\,0 & \end{array}$$

$$384 = 34 \times 11 + 10.$$

Dans cet exemple, $a = 384$, $b = 11$, $q = 34$ et $r = 10$.

Remarque.
D'une façon générale,

$$q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \quad \text{et} \quad r = a - bq = a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor,$$

où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière. Par exemple,

$$\lfloor \frac{384}{11} \rfloor = \lfloor 34,91\cdots \rfloor = 34$$

Exercices

Exercices 9 et 10

Déf. 2

Soient a, b deux entiers naturels non nuls. Le PGCD de a et b, noté $\text{PGCD}(a,b)$, est le plus grand nombre entier positif qui divise à la fois a et b.

Exemple 3

On calcule $\text{PGCD}(56,20)$.

- Les diviseurs (positifs) de 56 sont 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 et 56.
- Les diviseurs (positifs) de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.

Le plus grand nombre apparaissant dans les deux listes est 4, donc $\text{PGCD}(56,20) = 4$.

Déf. 3

Les entiers naturels non nuls a et b sont dits premiers entre eux si $\text{PGCD}(a,b) = 1$.

Pour terminer ce paragraphe, on présente l'algorithme d'Euclide. C'est une méthode originale pour déterminer le PGCD de deux entiers.

Proposition 2

Dans la situation de la division euclidienne $a = bq + r$, on a :

1. Si $r \neq 0$, $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r)$.
2. Si $r = 0$, $\text{PGCD}(a,b) = b$.

II. Nombres premiers

Déf. 4

Un entier naturel $p \geq 2$ est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même [a].

a. On ne s'occupe pas des diviseurs négatifs.

Exemple 5

Les nombre premiers inférieurs à 50 sont

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Proposition 3

Si un entier $n \geq 2$ n'admet aucun diviseur premier inférieur à $\sqrt{n}$, alors il est premier.

Exemple 6

157 est-il premier? $\sqrt{157} \approx 12{,}5$, donc il suffit de tester la divisibilité par les nombres premiers ≤ 11.
157 n'est divisible ni par 2 (il est pair), ni par 3 (car $1+5+7 = 13$ n'est pas multiple de 3), ni par 5 (il se termine par 7), ni par 7 (car $157 = 7 \times 22 + 3$), ni par 11 (car $157 = 11 \times 14 + 3$). Le nombre 157 est donc premier.

Exemple 4 (algorithme d'Euclide)

On cherche $\text{PGCD}(252,70)$. On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned} 252 &= 3 \times 70 + 42 \\ 70 &= 1 \times 42 + 28 \\ 42 &= 1 \times 28 + 14 \\ 28 &= 2 \times 14 + 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2 :

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(252,70) &= \text{PGCD}(70,42) \\ &= \text{PGCD}(42,28) \\ &= \text{PGCD}(28,14) \\ &= 14. \end{aligned}$$

Conclusion : $\text{PGCD}(252,70) = 14$.
Le PGCD est le dernier reste non nul trouvé dans les divisions successives.

Exercices

Exercices 11 à 16

Théorème 2 (Euclide)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Exercices

Exercices 17 à 19

Théorème 3 (théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout entier $n \geq 2$ se décompose de manière unique comme un produit de nombres premiers : n s'écrit de façon unique sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k},$$

où les p_i sont des nombres premiers et les α_i des entiers ≥ 1.

Exemple 7

On écrit 90 comme un produit de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5.$$

Proposition 4

Si n se décompose sous la forme

$$p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k},$$

les diviseurs (positifs) de n sont les nombres de la forme

$$p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k},$$

avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i.

Exemple 8

Les diviseurs de 90 sont :

1	$2 \times 5 = 10$
2	$3 \times 5 = 15$
3	$2 \times 3 \times 3 = 18$
5	$2 \times 3 \times 5 = 30$
$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 \times 5 = 45$
$3 \times 3 = 9$	$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Exemple 9

On cherche le PGCD et le PPCM [a] de 252 et 198. On décompose chacun des deux nombres en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7. \qquad 198 = 2 \times 3^2 \times 11.$$

D'après la proposition 4, pour obtenir le PGCD, on fait le produit des nombres qui apparaissent dans les deux décompositions à la fois, en prenant l'exposant le plus petit :

$$\text{PGCD}(252, 198) = 2 \times 3^2 = 18.$$

Pour le PPCM, on fait le produit des nombres qui apparaissent au moins une fois, avec l'exposant le plus grand :

$$\text{PPCM}(252, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 = 2772.$$

a. PPCM : plus petit commun multiple, c'est-à-dire plus petit entier strictement positif qui soit multiple à la fois de 252 et 198.

Remarque.
$252 \times 198 = 18 \times 2772$. D'une manière générale :

$$a \times b = \text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b).$$

Exercices

Exercices 20 à 25

III. Exercices

Exercice 1.

1. Donner les diviseurs de 20 et 36.
2. Le nombre 1 452 est-il divisible par 2 ? 3 ? 5 ? 9 ?

Exercice 2.
Déterminer les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $x^2 - 2xy = 14$.

Exercice 3.

1. Prouver que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
2. La somme de quatre entiers consécutifs peut-il être un multiple de 4 ?

Exercice 4.
Prouver que si l'entier n est multiple de 5, alors $n^2 - 2n$ l'est également.

Exercice 5.
Prouver que pour tout entier n, l'entier $n^2 + n$ est pair.

Exercice 6.
Démontrer la proposition 1.

Exercice 7.
Déterminer les entiers naturels n tels que $n+3$ divise $n+15$.

Exercice 8 ( ).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation

$$a^2 + 1 = 2^n, \tag{1.1}$$

d'inconnue $a \in \mathbb{Z}$.

1. Résoudre (1.1) dans le cas $n = 1$ et dans le cas $n = 2$.
2. On suppose à présent que $n \geq 3$.
   - **a.** Prouver que 2^n est multiple de 8.
   - **b.** Prouver que si a est solution de (1.1), alors a est impair.
   - **c.** On suppose que a est impair, donc de la forme $a = 2k + 1$. Prouver que $a^2 - 1$ est multiple de 8.
   - **d.** Que peut-on dire de (1.1) pour $n \geq 3$? Justifier votre réponse.
3. Résumer dans un tableau récapitulatif les solutions de (1.1) suivant la valeur de n.

Exercice 9.
Effectuer la division euclidienne :

- de 587 par 13.
- de 10000 par 11.

Exercice 10.

1. La différence entre a et b est 538. Le quotient de la division de a par b est 13, le reste est 34. Déterminer a et b.
2. Déterminer un entier naturel n, sachant que quand on le divise par 29 et par 27, les quotients sont les mêmes et les restes sont respectivement 1 et 25.

Exercice 11.
Déterminer les diviseurs de 48, puis les diviseurs de 84. En déduire leur PGCD.

Exercice 12.
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer :

- $\mathrm{PGCD}(144, 840)$;
- $\mathrm{PGCD}(215, 28)$.

Exercice 13.
On souhaite recouvrir par des dalles carrées dont le côté est un nombre entier de cm une pièce rectangulaire de 8,40 m sur 3,50 m.
Quelles sont les dimensions des plus grandes dalles permettant ce pavage ? Combien de dalles sont-elles nécessaires dans ce cas ?

Exercice 14.
On souhaite démontrer la proposition 2 :
Dans la division euclidienne

$$a = bq + r,$$

(i) si $r \neq 0$, $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, r)$;
(ii) si $r = 0$, $\mathrm{PGCD}(a, b) = b$.

1. Démontrer que si l'entier k divise a et b, alors il divise b et r. Étudier la réciproque.
2. En déduire le point (i).
3. Démontrer le point (ii).

Exercice 15.

1. Développer et réduire :

$$2(3n+2)-3(2n+1).$$

2. Prouver que pour tout entier naturel n, la fraction
$$\frac{3n+2}{2n+1}$$
est irréductible.

Exercice 16 (👤).

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = 3n+1$ et $b_n = 3n-1$.

1. Déterminer, pour les valeurs $n=1$, $n=2$, $n=3$ et $n=4$ si les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux ou non.
2. Prouver que si un entier naturel k divise a_n et b_n, alors cet entier ne peut être que 1 ou 2.
3. Démontrer que a_n et b_n sont premiers entre eux si, et seulement si, n est un nombre pair.

Exercice 17.

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

$$425\ ;\ 53\ ;\ 7777\ ;\ 97\ ;\ 143.$$

Exercice 18.

Dans le tableau suivant, barrer les multiples de 2 (sauf 2), puis les multiples de 3 (sauf 3), puis ceux de 5 (sauf 5) ; et enfin ceux de 7 (sauf 7). Quels nombres reste-t-il ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 19.

Soit $p>2$ un nombre premier. Prouver que l'équation

$$x^2 - y^2 = p \tag{1.2}$$

admet exactement quatre couples d'entiers solutions (x, y).

Exercice 20.

À l'aide de décompositions en produits de nombres premiers, déterminer le PGCD et le PPCM de :

1. 168 et 198.
2. 224 et 196.

Exercice 21.

L'objet A apparaît dans le ciel tous les 168 jours ; l'objet B tous les 90 jours. Si je les vois tous les deux dans le ciel aujourd'hui, dans combien de jours seront-ils de nouveau visibles en même temps ?

Exercice 22.

Une boîte à chaussures de dimensions intérieures 31,2 cm, 13 cm et 7,8 cm est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres.

Quel est le nombre minimal de cubes que peut contenir cette boîte ?

Exercice 23.

Combien le nombre

$$n = 2^6 \times 3^2 \times 7^4$$

possède-t-il de diviseurs positifs ?

Exercice 24.

1. Le nombre $2^6 \times 3^9 \times 5^2$ est-il un carré parfait ? (C'est-à-dire le carré d'un entier.)
2. Déterminer un multiple strictement positif de $A = 2^7 \times 3^8 \times 7^3$ qui soit un carré parfait.

Exercice 25 (👤).

Le but de l'exercice est de démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers strictement positifs.

1. Prouver que $p^2 = 2q^2$.
2. En utilisant l'exposant de 2 dans les décompositions en produits de nombres premiers de p^2 et de $2q^2$, aboutir à une absurdité.

CHAPITRE 2

Les nombres complexes

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé usuel $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I. Forme algébrique, plan complexe

Définition 1

On peut construire un sur-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés nombres complexes (ou imaginaires), possédant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition, d'une soustraction, d'une multiplication et d'une division qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ (mêmes règles de calcul).
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme
$$z = a + \mathrm{i}b,$$
où a et b sont deux réels. Cette écriture s'appelle écriture sous forme algébrique (ou cartésienne).
- $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}$:
$$\left(z \times z' = 0\right) \iff \left(z = 0 \text{ ou } z' = 0\right).$$

Remarque.
L'unicité de l'écriture signifie que
$$\left(a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b'\right) \iff \left(a = a' \text{ et } b = b'\right).$$

Exemples 1

1. $z = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z = 1 - \mathrm{i} = 1 + (-1)\mathrm{i}, \quad z = 3 = 3 + 0\mathrm{i}, \quad z = -5\mathrm{i} = 0 + (-5)\mathrm{i}.$
2. $z = 2\mathrm{i}(1 - 3\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} - 6 \times \underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1} = 6 + 2\mathrm{i}.$

Définition 2

Soit $z = a + \mathrm{i}b$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- Le nombre a est appelé partie réelle de z et noté $\mathrm{Re}(z)$.
- Le nombre b est appelé partie imaginaire de z et noté $\mathrm{Im}(z)$.
- z est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire s'il est de la forme $z = \mathrm{i}b$, avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercices

Exercices 26 à 27

Déf. 3

Le conjugué du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par
$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Remarque.
Grâce à la troisième identité remarquable :
$$z \times \overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - \underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1} \times b^2 = a^2 - (-1) \times b^2 = a^2 + b^2.$$

Exemple 2

On écrit $z = \dfrac{3-\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}$ sous forme algébrique. Pour cela, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur et on utilise la remarque précédente :

$$\frac{3-\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}} = \frac{(3-\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})}{(2-4\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})} = \frac{6+12\mathrm{i}-2\mathrm{i}-4\times\mathrm{i}^2}{2^2+4^2} = \frac{6+12\mathrm{i}-2\mathrm{i}+4}{20} = \frac{10+10\mathrm{i}}{20} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Proposition 1

Pour tous complexes z, w :

1. $\overline{\overline{z}} = z$ **2.** $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$. **3.** $\overline{z-w} = \overline{z}-\overline{w}$. **4.** $\overline{z\times w} = \overline{z}\times\overline{w}$.

Exercices

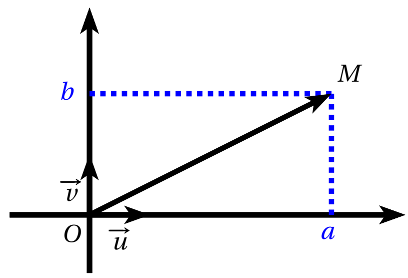
Exercices 28 à 32

Définition 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On dit que :

- le point $M(a; b)$ est l'image de z.
- z est l'affixe de M.

On identifie ainsi l'ensemble des nombres complexes aux points du plan (qualifié dès lors de « plan complexe »).



Exemples 3

1. On place le point M d'affixe $z = 4+2\mathrm{i}$, et le point M' d'affixe $\overline{z} = 4-2\mathrm{i}$. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

   Remarque. L'affixe d'un point M est souvent noté z_M.

2. Soient A d'affixe $z_A = 2-3\mathrm{i}$, B d'affixe $z_B = 5+\mathrm{i}$. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe

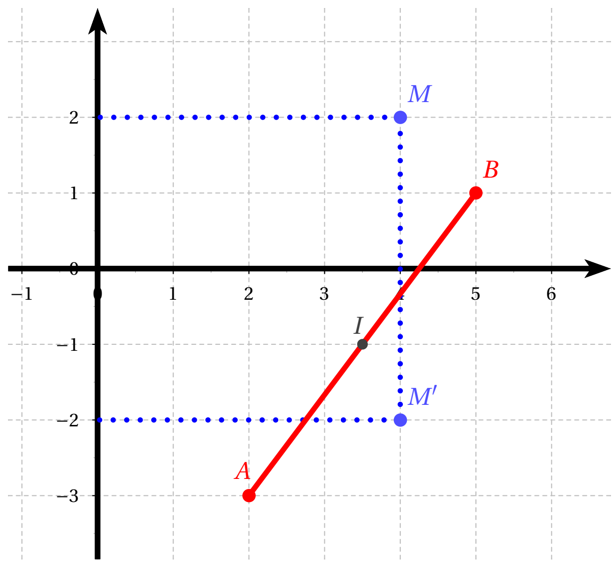
$$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2-3\mathrm{i}+5+\mathrm{i}}{2} = \frac{7}{2}-\mathrm{i}.$$

   Remarques.

   - La formule $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$ pour le milieu est à connaître.
   - On définit également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la formule :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (5+\mathrm{i})-(2-3\mathrm{i}) = 5+\mathrm{i}-2+3\mathrm{i} = 3+4\mathrm{i}.$$

Il y a bien sûr un lien avec les formules que vous connaissez pour les coordonnées d'un milieu et d'un vecteur (cours de 2$^{\text{de}}$).



Exercices

Exercices 33 à 39

II. Équations dans C

Théorème 1 (2nd degré à coefficients réels)

Soient a, b, c trois nombres réels, avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant). Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont :

— Si $\Delta > 0$: $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\quad z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

— Si $\Delta = 0$: $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

— Si $\Delta < 0$: $z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $\quad z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Remarque.
Il n'y a que dans le cas $\Delta < 0$ que le fait de travailler dans $\mathbb{C}$ offre de « nouvelles solutions » par rapport au cas réel.

Exemple 4

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $-2z^2 + 6z - 5 = 0$.

- $a = -2$, $b = 6$, $c = -5$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = -4$.
- $\Delta < 0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-6-\mathrm{i}\sqrt{|-4|}}{2\times(-2)} = \frac{-6-2\mathrm{i}}{-4} = \frac{3+\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{3-\mathrm{i}}{2}.$$

Exercices

Exercice 40

Définition 5

On définit :

- Le polynôme nul est la fonction constante égale à 0 : $P(z) = 0$.
- Les polynômes de degré 0 sont les fonctions de la forme $P(z) = a$, avec $a \in \mathbb{C}^*$.
- Les polynômes de degré 1 sont les fonctions de la forme $P(z) = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.
- Les polynômes de degré 2 sont les fonctions de la forme $P(z) = az^2 + bz + c$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$.
- Les polynômes de degré 3 sont les fonctions de la forme $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c, d \in \mathbb{C}$.
- Etc.

Proposition 2

Soient P un polynôme de degré $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P, c'est-à-dire que $P(\alpha) = 0$. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que
$$P(z) = (z-\alpha)Q(z).$$

Exemple 5

On factorise le polynôme de degré 3
$$P(z) = z^3 - 2z^2 + 5z - 4.$$

1 est une racine évidente de P, puisque $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 0$. Il existe donc un polynôme Q de degré 2 tel que

Exemple 5 – Suite

$$P(z)=(z-1)Q(z).$$

Pour déterminer Q, on pose la « division euclidienne » :

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^3-2z^2+5z-4 & z-1 \\ \cline{3-3}
- & z^3-z^2 & z^2-z+4 \\ \cline{2-2}
 & -z^2+5z-4 & \\
- & -z^2+z & \\ \cline{2-2}
 & 4z-4 & \\
- & 4z-4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc :

$$P(z)=(z-1)\underbrace{\left(z^2-z+4\right)}_{Q(z)}.$$

Remarques.

- z^3-2z^2+5z-4 est le dividende, $z-1$ le diviseur, z^2-z+4 le quotient et 0 le reste. Lorsqu'on pose une division, on s'arrête quand le reste est nul ou de degré strictement plus petit que celui du diviseur.
- Lorsque le dividende et le diviseur sont à coefficients réels, il en est de même du quotient et du reste.

Théorème 2

Un polynôme de degré $n \geq 1$ a au plus n racines dans $\mathbb{C}$.

Exercices

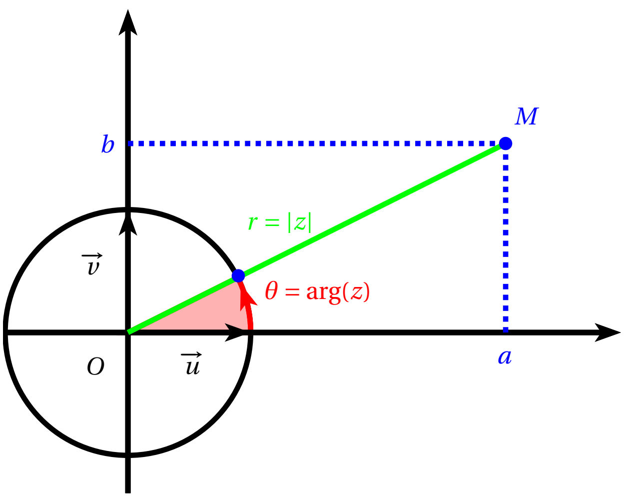
Exercices 41 à 46

III. Module et argument

Définition 6

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, et soit M le point du plan complexe d'affixe z.

- Le module de z, noté $|z|$, est défini par $|z|=OM$.
- Si $z\neq 0$, la demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique en un point associé à un réel θ. L'argument de z est ce réel θ, noté $\arg(z)$.



Remarque.
L'argument de z est défini « à $2k\pi$ près ». L'unique valeur dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est appelée valeur principale de l'argument.

On note r le module de z. D'après le théorème de Pythagore :

$$r=|z|=OM=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Par ailleurs, par définition du cos et du sin d'un nombre réel :

$$\cos\theta=\frac{a}{r} \quad , \quad \sin\theta=\frac{b}{r}.$$

Proposition 3

Soit $z = a + \mathrm{i}b$. On pose $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Alors :

1. $r = \sqrt{a^2+b^2}$.
2. $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$.
3. $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

Remarques.

- On sait que $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$ (cf la remarque qui suit la définition 3), donc
$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$
- Si $a = a + 0\mathrm{i}$ est un nombre réel, son module est $|a| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2}$. En se souvenant que $\sqrt{a^2}$ est égal à la valeur absolue de a, on obtient :
$$\text{module} \longrightarrow |a| = |a| \longleftarrow \text{valeur absolue.}$$

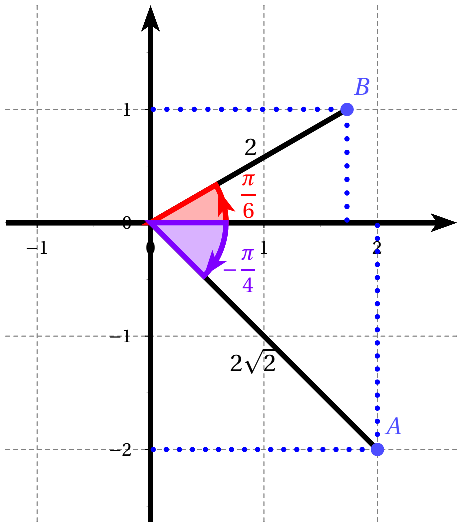
  Heureusement, les notations sont cohérentes !

Exemples 6

1. On note r le module et θ l'argument principal de $2 - 2\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$.
   - $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4}$

   Astuce de calcul : $\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. On note r le module et θ l'argument principal de $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
   - $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

On place dans le plan complexe les points A et B d'affixes $z_A = 2 - 2\mathrm{i}$, $z_B = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. Pour placer le point B, on trace un cercle de centre O de rayon 2 et on se place à l'ordonnée 1, côté droit du repère.



Exercices

Exercices 47 et 48

Étant donnés deux points A, B du plan complexe, on a $z_A = x_A + \mathrm{i}y_A$ et $z_B = x_B + \mathrm{i}y_B$, donc
$$\begin{aligned} |z_B - z_A| &= \left|\left(x_B + \mathrm{i}y_B\right) - \left(x_A + \mathrm{i}y_A\right)\right| \\ &= \left|\left(x_B - x_A\right) + \mathrm{i}\left(y_B - y_A\right)\right| \\ &= \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = AB. \end{aligned}$$

Proposition 4

Pour tous points A, B du plan complexe :
$$AB = |z_B - z_A|.$$

Exemple 7

Soient A d'affixe $z_A = 2 - 3\mathrm{i}$, B d'affixe $z_B = 5 + \mathrm{i}$ (cf exemple 3). Alors
$$AB = |z_B - z_A| = |(5 + \mathrm{i}) - (2 - 3\mathrm{i})| = |3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Exercices

Exercices 49 à 53

IV. Exercices

Exercice 26.
Écrire les nombres sous forme algébrique :

1. $(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$
2. $-(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$
3. $(3-2\mathrm{i})^2$
4. $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})(2+\mathrm{i}\sqrt{3})$
5. i^4
6. $(1+\mathrm{i})^2$.

Exercice 27.
Résoudre les équations :

1. $z^2 = 4\mathrm{i}z$
2. $z^2 = 9$
3. $z^2 = -4$
4. $\mathrm{i}z = 5$.

Exercice 28.
Écrire sous forme algébrique :

1. $\dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}$
2. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

Exercice 29.
Prouver que pour tout nombre complexe z :

1. $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
2. $z-\overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$

Exercice 30.
Résoudre les équations :

1. $z = 1-\mathrm{i}z$
2. $(2-\mathrm{i})z = 2+\mathrm{i}$

Exercice 31.
Démontrer la proposition du cours : pour tous complexes z, w :

1. $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$.
2. $\overline{z\times w} = \overline{z}\times\overline{w}$.

Exercice 32.
Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = a+\mathrm{i}b$. On pose
$$Z = z-2\overline{z}+2+3\mathrm{i}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Déterminer les complexes z pour lesquels Z est imaginaire pur, puis les complexes z pour lesquels Z est réel.

Exercice 33.

1. Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes $a = 1+2\mathrm{i}$ et $b = 3-4\mathrm{i}$.
2. Calculer l'affixe m du milieu M du segment $[AB]$.
3. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 34.
Soient A, B, C, D d'affixes $a = 4\mathrm{i}$, $b = 6+\mathrm{i}$, $c = 4-3\mathrm{i}$ et $d = -2$.

Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 35.
Dans chaque cas, s est une transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

1. Donner sans justification la nature de s lorsque
$$z' = \overline{z}.$$
2. Si
$$z' = 2\mathrm{i}-z,$$
prouver que s est une symétrie centrale.

Exercice 36.
Représenter dans le plan complexe :

- $\mathscr{D} = \{M(z) \mid \mathrm{Re}(z) = 2\}$.
- $\mathscr{E} = \{M(z) \mid \mathrm{Im}(z) = -1\}$.

Exercice 37.

1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x+\mathrm{i}y$. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe
$$\mathrm{i}z+2\overline{z}.$$
2. Déterminer et construire dans le plan complexe :
$$\mathscr{D} = \left\{M(z) \mid \left(\mathrm{i}z+2\overline{z}\right) \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 38.

1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x+\mathrm{i}y$. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe
$$(z+2)\times\overline{z}.$$
2. Déterminer et construire dans le plan complexe :
$$\mathscr{C} = \left\{M(z) \mid \left((z+2)\times\overline{z}\right) \text{ imaginaire pur}\right\}.$$

Exercice 39.
À tout point M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$, on associe le point M' d'affixe $z' = (z+\mathrm{i})\left(\overline{z}+2\mathrm{i}\right)$.

1. Écrire z' sous forme algébrique.
2. Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que M' soit sur l'axe des abscisses.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M tels que M' soit sur l'axe des ordonnées.

Exercice 40.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^2-2z+5=0$
2. $z^2-4z+3=0$
3. $z^2+z+1=0$

Exercice 41.
Effectuer la division euclidienne de :

1. $A(z)=2z^3-7z^2+13z-5$ par $B(z)=2z-1$.
2. $A(z)=z^4-4z^3-9z^2+27z+38$ par $B(z)=z^2-z-7$.

Exercice 42.
1. Résoudre les équations en cherchant d'abord une solution « évidente ».
   a. $z^3-4z^2+7z-4=0$.
   b. $z^3+8=0$.
2. Résoudre l'équation $z^4-1=0$.

Exercice 43.
Sans poser la division, démontrer que $z-1$ divise $P(z)=z^9+4z^7-z^6-5z^3+3z^2-2$.

Exercice 44.
Sans la poser, déterminer le reste dans la division euclidienne de z^4+6z-1 par $z+2$.

Exercice 45.
Sans la poser, déterminer le reste dans la division euclidienne de z^8+z^3+1 par z^2+1.

Exercice 46 (👤).
Démontrer la proposition 2 et le théorème 2.

Exercice 47.
Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants. Illustrer par une (ou des) figure(s).

1. $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
2. $-1+\mathrm{i}$
3. $-\sqrt{2}$
4. $2\mathrm{i}$
5. $2+2\mathrm{i}$
6. $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$

Exercice 48.
Représenter les ensembles dans le plan complexe :

1. $A=\left\{M(z)\mid |z|=2\right\}$.
2. $B=\left\{M(z)\mid \arg(z)=-\frac{\pi}{4} \text{ et } |z|\leq 2\right\}$
3. $C=\left\{M(z)\mid 0\leq\arg(z)\leq\frac{\pi}{2} \text{ et } |z|\geq 1\right\}$

Exercice 49.
Soit A d'affixe $a=1-\mathrm{i}$, K d'affixe $k=3+2\mathrm{i}$. À l'aide du module, calculer la longueur AK.

Exercice 50.
On reprend l'énoncé de l'exercice 34. En utilisant le module, prouver que $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 51.
Déterminer l'ensemble Γ des points $M(z)$ du plan complexe tels que

$$|z-2i|=2.$$

Exercice 52.
Déterminer l'ensemble Δ des points $M(z)$ du plan complexe tels que

$$|z+1|=|z-\mathrm{i}|.$$

Exercice 53 (👤).
Démontrer que pour tous complexes z, z' :

$$\left|z\times z'\right|=|z|\times\left|z'\right|.$$

CHAPITRE 3

Matrices

I. Calcul matriciel

Définition 1

Une matrice est un tableau de nombres.
Si elle a n lignes et p colonnes, on dit qu'elle est de format (n, p).
Le terme situé à l'intersection de la i−ème ligne et de la j−ème colonne d'une matrice A s'appelle terme d'indice i, j. Il est généralement noté $a_{i,j}$.

Exemple 1

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ est de format $(2, 3)$.
On a par exemple :

$$m_{1,1} = 2, \qquad m_{2,3} = 6.$$

Notations

- Les coordonnées des vecteurs sont des matrices. Par exemple, $V = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de format $(2, 1)$.
- Une matrice qui n'a qu'une seule colonne s'appelle matrice colonne (comme V ci-dessus). Une matrice qui n'a qu'une seule ligne s'appelle matrice ligne – comme par exemple $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- Une matrice ayant n lignes et n colonnes s'appelle matrice carrée de taille n. Par exemple, la matrice $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2.
- La matrice nulle de taille n, notée O_n (ou simplement O quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de n) est la matrice carrée de taille n dont tous les termes sont égaux à 0. Par exemple, la matrice nulle de taille 2 est $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- La matrice identité de taille n, notée I_n (ou simplement I quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de n) est la matrice carrée de taille n dont tous les termes diagonaux valent 1 et dont tous les autres termes valent 0. Par exemple, la matrice identité de taille 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 2

Étant données deux matrices A et B de même format (n, p) et un nombre réel k :

1 La matrice $S = A + B$ est la matrice de format (n, p) dont les termes sont définis par

$$s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

2 La matrice $D = kA$ est la matrice de format (n, p) dont les termes sont définis par

$$d_{i,j} = k \times a_{i,j}.$$

Exemple 2

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Alors on a

$$M + N = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 13 \end{pmatrix}, \qquad 2M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1

Pour toutes matrices A, B, C, pour tous réels k, k' (et sous réserve de compatibilité des formats) :

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $k(A + B) = kA + kB$
4. $(k + k')A = kA + k'A$

Exercices

Exercices 54 à 57

Définition 3

Soient A une matrice de format (n,p), B une matrice de format (p,q).
Le produit de A et B, noté $A \times B$, est la matrice P de format (n,q) dont le terme général est

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Attention

On ne peut calculer $A \times B$ que quand le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Pour calculer le produit $A \times B$, il est agréable de présenter le calcul sous forme de croix :

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 2 & 5 \\
 & & & -1 & 0 \\
 & & & 3 & 6 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 2\times 2+0\times(-1)+1\times 3 & 2\times 5+0\times 0+1\times 6 \\
-4 & 3 & 5 & -4\times 2+3\times(-1)+5\times 3 & -4\times 5+3\times 0+5\times 6
\end{array}$$

On obtient $A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Déf. 4

On dit que deux matrices carrées A et B de même taille commutent si $A \times B = B \times A$.

Attention

En général, on n'a pas $A \times B = B \times A$.

Proposition 2

Pour toutes matrices A, B, C, pour tout réel k (et sous réserve de compatibilité des formats) :

1. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
2. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
3. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
4. $(kA) \times B = A \times (kB) = k(A \times B)$.
5. $I_n \times A = A \times I_n = A$.

Remarques.

- On peut noter le produit AB au lieu de $A \times B$.
- La matrice nulle joue le rôle de 0 dans les calculs, la matrice identité joue le rôle de 1.
- On notera que I_n commute avec toute matrice carrée de taille n.

Exercices

Exercices 58 à 61

Définition 5

Si A est une matrice carrée de taille k et n un entier naturel non nul, on pose

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}.$$

On pose également $A^0 = I_k$.

Remarque. Le calcul de la puissance d'une matrice diagonale (i.e. telle que tous les termes autres que ceux sur la diagonale sont nuls) est immédiat. Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel n :

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice identité de taille k mise à n'importe quelle puissance donne toujours la matrice identité.

Proposition 3

Soient A une matrice carrée de taille k, V_0 une matrice colonne à k lignes. On définit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = A \times V_n.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = A^n \times V_0.$$

Exercices

Exercices 62 à 65

II. Inverse d'une matrice carrée

Définition 6

Soit A une matrice carrée de taille n. On dit que A est inversible et a pour inverse B (également matrice carrée de taille n) si $AB = I_n$.
On admet que l'on a alors aussi $BA = I_n$. On note $B = A^{-1}$.

Proposition 4

Une matrice carrée de taille 2 est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le nombre $\det(A) = ad - bc$.

1. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.
2. Dans le cas où A est inversible, son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 4

La matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible, car son déterminant est non nul :

$$\det(A) = 7 \times (-2) - (-4) \times 3 = -14 + 12 = -2 \neq 0.$$

Son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1,5 & -3,5 \end{pmatrix}.$$

Exercices

Exercices 66 à 70

Exemple 5

On considère le système d'équations d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 6 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \qquad (E)$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'inconnue du problème est le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le système (E) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} ;$$

autrement dit :

$$AX = B.$$

Or A est inversible (cf exemple 4), donc

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Conclusion : le système a une unique solution, définie par

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1,5 & -3,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 6 - 2 \times (-2) \\ 1,5 \times 6 - 3,5 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Le calcul de l'inverse d'une matrice équivaut à la résolution d'un système d'équations. Pour une matrice carrée de taille $n \geq 3$, on le fait généralement avec la calculatrice (ou l'ordinateur).

Exercices

Exercices 71 à 73

III. Exercices

Exercice 54.
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs des coefficients a_{12}, a_{23}, b_{22}.
2. Calculer $A + B$ et $2A - 3B$.

Exercice 55.
Écrire la matrice A, sachant qu'elle est carrée de taille 2 et de terme général

$$a_{ij} = \frac{2i}{i + j}.$$

Exercice 56.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles et des garçons par filière dans un lycée. En supprimant les intitulés, on obtient la matrice A :

	Filles	Garçons
Général	124	96
Techno	45	112
Pro	13	84

$$A = \begin{pmatrix} 124 & 96 \\ 45 & 112 \\ 13 & 84 \end{pmatrix}$$

Écrire sous forme de somme, en utilisant les coefficients de la matrice A :

1. Le nombre total de filles du lycée.
2. Le nombre total d'élèves en série technologique.

Exercice 57.

À la cantine, Marie a mangé 120 g de poisson et 100 g de riz, Mathéo a mangé 180 g de poisson et 150 g de riz.

Le tableau ci-dessous indique la teneur en glucides, protides, lipides (mesurée en grammes) d'une portion de 100 g de poisson et d'une portion de 100 g de riz.

	Poisson	Riz
Glucides	0	29
Lipides	16	3
Protides	1	0

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 29 \\ 16 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1,2 & 1,8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Calculer, à l'aide des matrices A et B, la consommation de Marie et de Mathéo en glucides, lipides et protides.

Exercice 58.

On considère les matrices

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ K' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Parmi les produits suivants, dire ceux qui ont un sens. Lorsque c'est le cas, effectuer le calcul :

$$KK' \quad , \quad K'K \quad , \quad KL \quad , \quad KV \quad , \quad LV \quad , \quad VL.$$

Exercice 59.

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $J^2 = J \times J$.

Exercice 60.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice X telle que AX soit la 2e colonne de A.
2. Déterminer une matrice Y telle que YA soit la 3e ligne de A.

Exercice 61.

On identifiera chaque point du plan de coordonnées $(x; y)$ à la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Donner sans justification la nature géométrique de la transformation s du plan qui, à tout point M de coordonnées $(x; y)$, associe le point $s(M)$ de coordonnées $(y; x)$.
2. Écrire la matrice S de la transformation s.
3. Quelle transformation a pour matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 62.

Soit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Exprimer D^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 63.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Conjecturer une formule pour A^n, puis démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 64.

On définit une suite de matrices par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = AU_n,$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer U_n en fonction de n et de a.

Exercice 65.

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit une suite de matrices par $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = MX_n + R.$$

1. Calculer X_1.
2. On note $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S = MS + R$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$$X_{n+1} - S = M(X_n - S).$$
4. Soit n un entier naturel. Exprimer $X_n - S$, puis X_n, en fonction de M, X_0 et n.
5. On admet que $M^4 = \begin{pmatrix} 206 & 115 \\ 575 & 321 \end{pmatrix}$.
Utiliser ce résultat pour calculer X_4.

Exercice 66.

Dans chaque cas, dire si la matrice est inversible. Le cas échéant, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 67.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 68.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2 et N^3.
2. Exprimer A en fonction de I_3 et N, puis prouver que
$$N^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3.$$
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 69.

Soient $A = \begin{pmatrix} 11 & -15 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
3. Exprimer A^n en fonction de n.

Exercice 70.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = A \times C_n$.
   Déterminer A et exprimer C_n en fonction de A, C_0 et n.
3. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   Prouver que P est inversible et justifier l'égalité
$$A = PDP^{-1}.$$
4. Prouver que, pour tout entier naturel n,
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
5. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
6. Exprimer enfin u_n en fonction de n.

Exercice 71.

1. On considère le système
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}.$$
   Traduire ce système sous forme matricielle, puis le résoudre en utilisant l'inverse d'une matrice.
2. Reprendre la question 1 avec le système
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = -1 \end{cases}.$$

Exercice 72.

Une tirelire contient des pièces de 1 € et de 2 €, ainsi que des billets de 5 €. On suppose que :

- la somme totale dans la tirelire est 77 € ;
- il y a en tout 34 pièces dans la tirelire ;
- si l'on remplaçait les pièces de 2 € par des billets de 5 €, la somme dans la tirelire monterait à 146 €.

1. On note x le nombre de pièces de 1 €, y le nombre de pièces de 2 €, z le nombre de billets de 5 €. Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 77 \\ 34 \\ 146 \end{pmatrix}$.
   Donner une équation matricielle équivalente au système de la question 1.
3. En utilisant la calculatrice, déterminer les valeurs de x, y et z.

Exercice 73 ().

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Déterminer la matrice M^2.

   b. On donne
$$M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$
   Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I_3$.

   c. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.
2. Déterminer trois nombres a, b, c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1\,;\,1)$, $B(-1\,;\,-1)$ et $C(2\,;\,5)$.

CHAPITRE

4 Congruences, applications

I. Congruences

Exemple 1

Il est 15 h. Quelle heure sera-t-il dans 18 h ?
Sur une montre, toutes les 24 h, on repart de 0. On a donc, "à 24 h près" : $15+18=33=9$. Pour être rigoureux, on écrit

$$15+18 \equiv 9\,[24]$$

(en français on lit « 15+18 est congru à 9 modulo 24 ») ou

$$15+18 \equiv 9\,(\text{modulo } 24)\,.$$

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient a, b deux entiers. On dit que b est congru à a modulo n et on écrit

$$a \equiv b\,[n]$$

si $a-b$ est divisible par n.
De façon plus intuitive, a et b sont égaux « à un certain nombre de fois n près » : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

Exemples 2

1. On a $56 \equiv 8\,[24]$, puisque $56-8=48$ est divisible par 24.
2. On a $14 \not\equiv 5\,[6]$, puisque $14-5=9$ n'est pas divisible par 6.
3. On a $9 \equiv -1\,[10]$, puisque $9-(-1)=10$ est divisible par 10.
4. Quels sont les entiers a tels que $a \equiv 0\,[2]$?

$$a \equiv 0\,[2] \Leftrightarrow 2|(a-0) \Leftrightarrow 2|a \Leftrightarrow a \text{ pair.}$$

Conclusion : les entiers a tels que $a \equiv 0\,[2]$ sont les entiers pairs.

Remarques.

- Dans la situation de la division euclidienne $a = nq + r$, on a $a \equiv r\,[n]$.
- Dire que $a \equiv 0\,[n]$ revient à dire que n divise a.

Exercices

Exercice 74

On peut manipuler le symbole $\equiv$ comme on manipule le symbole $=$, à condition de se limiter à des sommes, des différences, des produits et des mises à la puissance [1]. Ceci est précisé par les deux propositions suivantes :

Proposition 1

1. $a \equiv a\,[n]$.
2. Si $a \equiv b\,[n]$, alors $b \equiv a\,[n]$.
3. Si $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]$, alors $a \equiv c\,[n]$.

Proposition 2

Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$, alors :

1. $a+c \equiv b+d\,[n]$.
2. $a-c \equiv b-d\,[n]$.
3. $a \times c \equiv b \times d\,[n]$.
4. $ka \equiv kb\,[n]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
5. $a^p \equiv b^p\,[n]$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Exemple 3

$14 \equiv 2\,[12]$ et $15 \equiv 3\,[12]$, donc $14 \times 15 \equiv 2 \times 3\,[12]$; soit $210 \equiv 6\,[12]$.

1. En revanche, on évite « d'enchaîner des congruences » : on n'écrit pas $\cdots \equiv \cdots \equiv \cdots$

Exemple 4

$3^{2025}-1$ est-il divisible par 4 ?
On a $3 \equiv -1\,[4]$, donc

$$3^{2025} \equiv (-1)^{2025}\,[4].$$

Mais $(-1)^{2025} = -1$ (cette égalité est vraie dans $\mathbb{Z}$ et ne fait pas appel aux congruences), donc

$$3^{2025} \equiv -1\,[4].$$

Enfin $-1 \equiv -1\,[4]$, donc par somme

$$3^{2025}-1 \equiv -1-1\,[4],$$

soit

$$3^{2025}-1 \equiv -2\,[4].$$

On peut dès lors conclure : $-2 \equiv 2\,[4]$, donc

$$3^{2025}-1 \equiv 2\,[4].$$

Finalement, le reste dans la division euclidienne de $3^{2025}-1$ par 4 est 2, donc $3^{2025}-1$ n'est pas divisible par 4.

Enfin, on admet le petit théorème de Fermat :

Théorème 1 (petit théorème de Fermat)

Si p est un nombre premier et si $\mathrm{PGCD}(a,p)=1$, alors

$$a^{p-1} \equiv 1\,[p].$$

Exercices

Exercices 75 à 83

II. Équations diophantiennes

Une équation diophantienne est une équation (à une ou plusieurs inconnues) dont on cherche les solutions en nombres entiers. On présente dans ce cours deux types d'équations : celles que l'on peut résoudre à l'aide d'un tableau de congruences ; celles de la forme $ax+by=c$ (a, b, c sont fixés, l'inconnue est le couple (x,y)).

Exemple 5

On prouve que l'équation

$$x^2+1=3y^2$$

n'a aucun couple solution (x,y) dans $\mathbb{Z}$.

Pour cela, on complète un tableau de congruences modulo 3 :

modulo 3, x est congru à	0	1	2
modulo 3, x^2+1 est congru à	1	2	2

Voici comment on remplit ce tableau : par exemple, lorsque $x \equiv 2\,[3]$, on a $x^2 \equiv 2^2\,[3]$, soit $x^2 \equiv 4\,[3]$. Puis $x^2+1 \equiv 4+1\,[3]$. Autrement dit :

$$x^2+1 \equiv 2\,[3]$$

(car $5 \equiv 2\,[3]$).

Tout entier x est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, donc d'après le tableau, x^2+1 est congru à 1 ou 2 modulo 3. Par conséquent, x^2+1 n'est jamais un multiple de 3, et donc il ne peut pas être égal à $3y^2$. L'équation $x^2+1=3y^2$ n'a donc aucun couple solution.

Exercices

Exercices 84 à 86

Exemple 6

On considère l'équation

$$(E) \qquad 4u+7v=9$$

d'inconnue $(u,v) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

On fait un raisonnement par analyse-synthèse.

Exemple 6 – Suite

- **Analyse.** Supposons que (u,v) soit une solution de (E). On a donc

$$4u+7v=9. \tag{4.1}$$

L'idée est de travailler « modulo 7 » (à cause du $7v$) :

Comme $7v \equiv 0\,[7]$ et $9 \equiv 2\,[7]$, l'égalité (4.1) entraîne

$$4u+0 \equiv 2\,[7]\,,$$

soit

$$4u \equiv 2\,[7]\,.$$

On multiplie par 2 :

$$4u \times 2 \equiv 2 \times 2\,[7]\,,$$

soit

$$8u \equiv 4\,[7]\,.$$

Enfin, $8 \equiv 1\,[7]$. donc

$$u \equiv 4\,[7]\,.$$

Par conséquent, il existe un entier k tel que $u = 4+7k$.

On remplace dans (4.1) :

$$\begin{aligned} &4(4+7k)+7v=9\\ &16+28k+7v=9\\ v=\ &\frac{9-16-28k}{7}=\frac{-7-28k}{7}=-1-4k. \end{aligned}$$

Conclusion : si (u,v) est un couple solution, alors

$$u=4+7k \qquad , \qquad v=-1-4k.$$

- **Synthèse.** Réciproquement, si on prend $u=4+7k$ et $v=-1-4k$, on a bien

$$4u+7v=4(4+7k)+7(-1-4k)=16+28k-7-28k=9,$$

donc (u,v) est solution.

- **Conclusion.** Les solutions de (E) sont les couples de la forme

$$u=4+7k \qquad , \qquad v=-1-4k,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarques.

- L'équation (E) a une infinité de solutions. On les obtient facilement avec un tableur, en faisant varier la valeur de k :

k	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$u=4+7k$	$\cdots$	-10	-3	4	11	18	$\cdots$
$v=-1-4k$	$\cdots$	7	3	-1	-5	-9	$\cdots$

- Il y a deux « trucs » qui permettent de mener à bien l'analyse :
  - Le fait de travailler modulo 7, qui correspond au « $7v$ » de l'équation. On aurait également pu travailler modulo 4.
  - Le fait que 4 et 7 soient premiers entre eux, qui permet « d'inverser 4 » en le multipliant par 2 :

$$4 \times 2 \equiv 1\,[7]\,.$$

  C'est une idée que nous retrouverons lorsque nous étudierons le théorème de Bézout dans une prochaine leçon.

Exercices

Exercices 87 et 88

III. Exercices

Exercice 74.

1. Pour chacune des congruences suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
   - $14 \equiv 2\,[3]$
   - $37 \equiv 19\,[10]$
   - $5 \equiv -2\,[7]$
2. Compléter les pointillés avec des entiers naturels les plus petits possibles :
   - $23 \equiv \cdots\,[5]$
   - $-12 \equiv \cdots\,[8]$
   - $234 \equiv \cdots\,[10]$
   - $1\,209 \equiv \cdots\,[2]$

Exercice 75.
Compléter, sans utiliser la calculatrice, avec dans chaque cas un entier naturel le plus petit possible :

- $23 \times 37 \equiv \ldots\,[7]$
- $23 \times 37 \equiv \ldots\,[5]$
- $2^2 \equiv \ldots\,[3]$
- $2^{100} \equiv \ldots\,[3]$

Exercice 76.
On considère le nombre $N = 2^{2026} - 1$ et on cherche à savoir s'il est divisible par 2, 3, 5 et 7.

1. Pourquoi N n'est-il pas divisible par 2 ?
2. En utilisant l'égalité $2 \equiv -1\,[3]$, prouver que N est divisible par 3.
3. **a.** En remarquant que $2^3 \equiv 1\,[7]$, prouver que $2^{2025} \equiv 1\,[7]$.
   b. N est-il divisible par 7 ?
4. Étudier de même la divisibilité par 5.

Exercice 77.
Déterminer dans chaque cas les entiers m vérifiant la ou les conditions données :

1. $0 \leq m < 13$ et $41 \equiv m\,[13]$.
2. $m \equiv 1\,[2]$.
3. $m \in \mathbb{N}$ et $m \equiv 3\,[10]$.

Exercice 78.
Quel est le chiffre des unités de 3^{2026} ?

Exercice 79 ().
Soit n un entier impair.

1. Prouver que n est nécessairement congru à 1, 3, 5 ou 7 modulo 8.
2. En déduire que $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 80.
En utilisant le petit théorème de Fermat, déterminer le reste dans la division de 39^{60} par 7.

Exercice 81.
En utilisant le petit théorème de Fermat, prouver que $6^{30} - 6^{20}$ est divisible par 11.

Exercice 82.
Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2. **a.** Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
   Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.
   b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Exercice 83.
On associe à chaque lettre de l'alphabet un nombre entre 0 et 25, le A étant associé à 0, le B à 1, $\cdots$, le Z à 25 comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On considère l'application ϕ, qui à chaque nombre n, associe le reste dans la division euclidienne de $3n + 2$ par 26.
Chaque lettre de l'alphabet est codée par la lettre associée à $\phi(n)$ et un mot est codé en codant chacune de ses lettres.

1. Coder le mot "ROSE".
2. Prouver que l'application ψ, qui à chaque nombre p, associe le reste dans la division euclidienne de $9p + 8$ par 26, permet le décodage des mots.
3. Décoder le mot "MCHX".

Exercice 84.

1. Compléter les tableaux de congruence ci-dessous, avec les entiers de 0 à 4 :

modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, $7x^2$ est congru à					

modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, y^2 est congru à					

2. On considère l'équation (E) $7x^2 = 5 + y^2$.
Prouver que si (x, y) est une solution, alors x et y sont multiples de 5.

3. En déduire que (E) n'a pas de solution.

Exercice 85.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier n, le reste dans la division euclidienne de $n^2 - n$ par 6.

2. Déterminer, suivant la valeur de l'entier n, le reste dans la division euclidienne de $n^4 - 1$ par 5.

Exercice 86 ().

1. Compléter le tableau de congruences, avec les entiers de 0 à 3 :

modulo 4, x est congru à	0	1	2	3
modulo 4, x^2 est congru à				

2. Soit n un nombre entier congru à 3 modulo 4. Montrer que n ne peut pas s'écrire comme la somme de deux carrés.

Exercice 87.

1. En travaillant modulo 5, résoudre l'équation

$$5u + 3v = 1.$$

2. En travaillant modulo 13, résoudre l'équation

$$13u - 9v = 3.$$

Exercice 88.

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, $(J_0 + 6)$, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

1. Soient p et q le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation d'inconnue (u, v) :

$$35u - 27v = 2. \qquad (E)$$

2. Vérifier que $35 \times 17 \equiv 1\,[27]$, puis résoudre (E).

3. Déterminer la solution (u, v) permettant de déterminer J_1.

4. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

CHAPITRE 5

Appl. des nombres complexes

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé usuel $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I. Formules de trigonométrie

Proposition 1 (formules d'addition)

Pour tous réels a, b :

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Remarque.
On rappelle aussi la formule

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1.$$

Exemple 1

On calcule $\cos \frac{\pi}{12}$. Pour cela, on remarque que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. Donc d'après la 1re formule d'addition :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Proposition 2 (formules de duplication)

Pour tout réel a :

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
2. $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.

Exercices

Exercices 89 à 92

II. Complexes de module 1

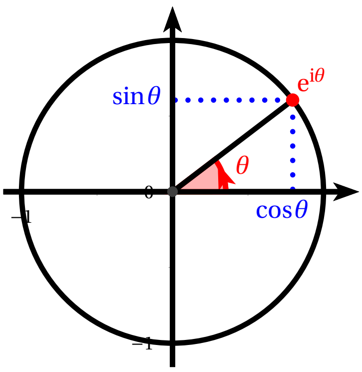
Définition 1

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

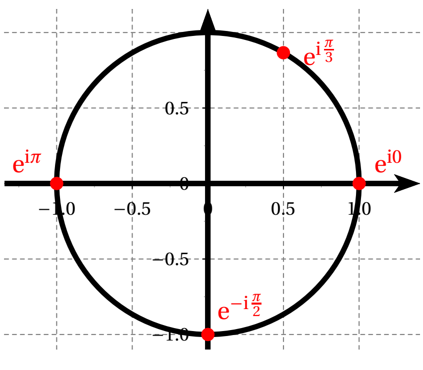
Le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel θ.

- $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1, donc l'ensemble des $e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.



Exemples 2

1. $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \times 0 = -1$.
3. $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \times (-1) = -i$.
4. $e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \times 0 = 1$.



Proposition 3

Soient θ_1, θ_2 deux réels. On a l'équivalence :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\right) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi).$$

Proposition 4

1. Pour tous réels θ_1, θ_2 :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \qquad , \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

2. Pour tout réel θ, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.
   Autrement dit :

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) \qquad \text{(formule de Moivre).}$$

Exercices

Exercices 93 à 97

Proposition 5 (formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

1. $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$.

2. $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

Exemple 3 (linéarisation)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et la 1re formule d'Euler pour « linéariser » $\cos^2 x$:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x = (\cos x)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2 &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^2 + 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x)} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4} + \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}}{2}\right) + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On retrouve la formule de la proposition 2 : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Exercices

Exercices 98 à 100

III. Écriture sous forme exponentielle

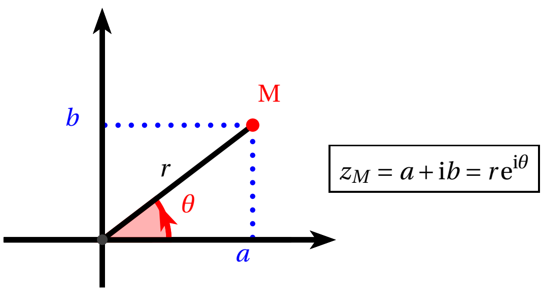
Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe non nul, r son module, θ son argument. On sait que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, donc

$$z = a + \mathrm{i}b = r\left(\frac{a}{r} + \mathrm{i}\frac{b}{r}\right) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Théorème 1 (forme exponentielle)

Tout complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où r est le module de z et θ son argument (unique « à $2k\pi$ près »).

L'écriture $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ s'appelle écriture sous forme exponentielle (ou trigonométrique).

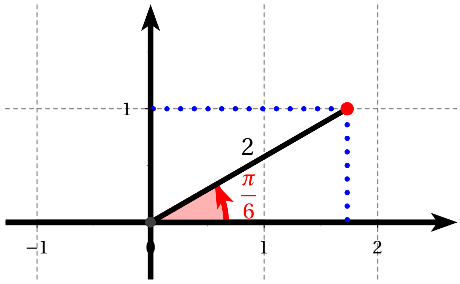


Exemple 4

On écrit $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle. On pose $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et on utilise les formules habituelles pour le module et l'argument :

- $r=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2.$
- $\left.\begin{array}{ll}\cos\theta=\dfrac{a}{r} & =\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r} & =\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\implies \theta=\dfrac{\pi}{6}$

Conclusion : $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.



Remarque.
L'unicité de l'écriture sous forme exponentielle (avec un argument défini « à $2k\pi$ près ») signifie que

$$\left(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\right)\iff (r_1=r_2 \text{ et } \exists k\in\mathbb{Z}, \theta_1=\theta_2+2k\pi).$$

L'écriture sous forme exponentielle permet de démontrer la propriété ci-dessous, qui elle-même est utile pour résoudre des problèmes de géométrie.

Proposition 6

Pour tous nombres complexes z, z', pour tout entier $n\geq 1$ (et si les formules ont un sens, donc sans diviser par 0, ni prendre l'argument de 0) :

1. $|z\times z'|=|z|\times|z'|$.
2. $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$.
3. $|z^n|=|z|^n$.
4. $\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')$.
5. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.
6. $\arg(z^n)=n\times\arg z$.

Exemple 5

Soient $z_1=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$ et $z_2=2+2\mathrm{i}$. Il est facile de calculer :

$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{8}\quad,\quad \arg(z_1)=\frac{\pi}{3}\quad,\quad \arg(z_2)=\frac{\pi}{4}.$$

On pose $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$. On a alors

$$|Z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=1,$$
$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}.$$

On en déduit

$$Z=1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right). \tag{5.1}$$

D'un autre côté,

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}}{2+2\mathrm{i}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}\right)(2-2\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\mathrm{i}+2\sqrt{6}\mathrm{i}+2\sqrt{6}}{2^2+2^2}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8}+\frac{-2\sqrt{2}\mathrm{i}+2\sqrt{6}\mathrm{i}}{8},$$

soit

$$Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \tag{5.2}$$

En comparant (5.1) et (5.2), on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad,\quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercices

Exercices 101 à 105

IV. Racines de l'unité

Théorème 2 (racines de l'unité)

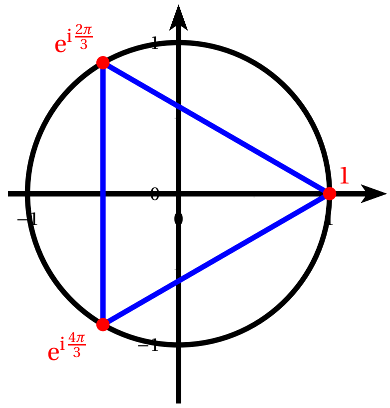
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0;n-1]\!]$. Ces solutions sont appelées racines n-ièmes de 1, ou racines n-ièmes de l'unité.

Remarques.

- $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre a et b. Donc $[\![0;n-1]\!]$ désigne les entiers $0,\ 1,\ \dots,\ n-1$.
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exemples 6

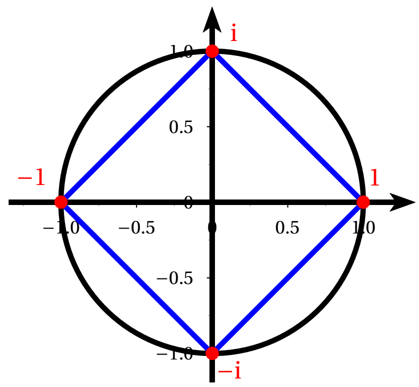
1. Les racines 3-ièmes (ou cubiques) de l'unité sont :



$$e^{i\frac{0\pi}{3}} = e^{i0\pi} = 1,$$
$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Leurs images forment un triangle équilatéral.

2. Les racines 4-ièmes de l'unité sont :



$$e^{i\frac{0\pi}{4}} = e^{i0\pi} = 1,$$
$$e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$
$$e^{i\frac{4\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1,$$
$$e^{i\frac{6\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Leurs images forment un carré.

Exercices

Exercices 106 à 109

V. Nature d'un triangle

Proposition 7

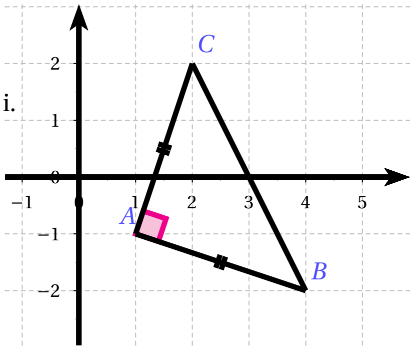
Soient A, B, C trois points distincts du plan complexe d'affixes a, b, c. On pose $Z = \frac{c-a}{b-a}$. Alors

$$\frac{AC}{AB} = |Z| \qquad \text{(module)} \qquad , \qquad \widehat{BAC} = \left|\arg(Z)\right| \qquad \text{(valeur absolue).}$$

Exemple 7

Avec $a = 1 - \mathrm{i}$, $b = 4 - 2\mathrm{i}$ et $c = 2 + 2\mathrm{i}$:

$$Z = \frac{c-a}{b-a} = \frac{(2+2\mathrm{i}) - (1-\mathrm{i})}{(4-2\mathrm{i}) - (1-\mathrm{i})} = \frac{2+2\mathrm{i}-1+\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}-1+\mathrm{i}} = \frac{1+3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}+3)}{3-\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$



On en déduit

$$\frac{AC}{AB} = |Z| = |\mathrm{i}| = 1 \qquad \text{et} \qquad \widehat{BAC} = \left|\arg(Z)\right| = \left|\arg(\mathrm{i})\right| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}.$$

Donc ABC est rectangle isocèle en A.

Exercices

Exercices 110 et 111

VI. Exercices

Exercice 89.
Calculer $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, puis donner les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

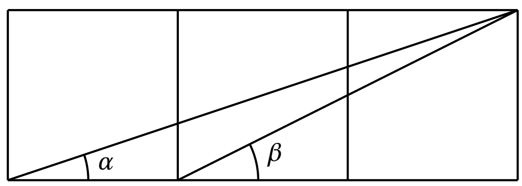
Exercice 90.

1. Calculer $\cos(2x)$ dans chacun des cas suivants :
   - $\cos x = \frac{3}{5}$,
   - $\sin x = \frac{2}{3}$.
2. Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{4}$. Calculer $\sin(2x)$

Exercice 91.

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis donner la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. En prenant $a = \frac{\pi}{12}$ dans la formule
$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a,$$
calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$ d'une autre manière.
3. Dans les questions 1 et 2, on a trouvé deux résultats différents pour $\sin \frac{\pi}{12}$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 92.
Trois carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Calculer $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ et $\sin\beta$.
2. Prouver que $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Donner un encadrement de $\alpha+\beta$.
4. En déduire $\alpha+\beta$.

Exercice 93.
Écrire chacun des nombres suivants sous forme algébrique, et placer l'image correspondante sur le cercle trigonométrique :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}.$$

Exercice 94.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soient M_1, M_2, M_3, M_4 les points d'affixes respectives

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

1. Dessiner un repère orthonormé, choisir librement θ et placer les points M_1, M_2, M_3, M_4.
2. On note $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Exprimer $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ en fonction de z.

Exercice 95.

Démontrer la proposition 4.

Exercice 96.

En utilisant la formule de Moivre et en calculant de deux façons différentes $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2$, démontrer la proposition 2.

Exercice 97.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer les formules d'Euler :

1. $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$.
2. $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

Exercice 98.

En utilisant les formules d'Euler, redémontrer la formule :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Exercice 99.

Démontrer que pour tout réel θ :

1. $\sin^3\theta = -\dfrac{1}{4}\sin(3\theta) + \dfrac{3}{4}\sin\theta$.
2. $\cos^3\theta = \dfrac{1}{4}\cos(3\theta) + \dfrac{3}{4}\cos\theta$.

Exercice 100 (👤).

Démontrer que $\sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ est racine du polynôme $8X^3 - 6X + \sqrt{3}$.

Exercice 101.

Écrire les nombres sous forme exponentielle. Illustrer par une (ou des) figure(s).

1. $2\mathrm{i}$
2. $2 + 2\mathrm{i}$
3. $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$
4. -3

Exercice 102.

Soit $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. Prouver que z^{15} est un réel.

Exercice 103.

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres :
   - **a.** $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$
   - **b.** $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$
   - **c.** $Z = z_1 \times z_2$
2. Écrire Z sous forme algébrique, en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 104.

En utilisant la forme exponentielle, démontrer la propriété du cours : pour tous complexes z, z',

1. $\left|z \times z'\right| = |z| \times \left|z'\right|$.
2. $\arg\left(z \times z'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right)$.

Exercice 105 (👤).

On travaille dans le plan complexe où l'on considère les points O et I d'affixes respectives 0 et 1.

1. Représenter dans le plan complexe l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M d'affixe z telle que
$$|z-1| = 1.$$
Justifier la construction.
2. Pour tout point M de $\mathscr{C}$ d'affixe z non nulle, on désigne par M' le point d'affixe z' telle que
$$z' = \frac{1}{\overline{z}}.$$
   - **a.** Prouver que $\arg(z') = \arg(z)$. Que peut-on en déduire pour les points O, M, M' ?
   - **b.** Prouver que $\left|z'-1\right| = \left|z'\right|$. Interpréter géométriquement.
   - **c.** Si M est un point de $\mathscr{C}$ distinct de O, décrire et réaliser la construction de M'.

Exercice 106.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^6 = 1.$$
Représenter l'ensemble des solutions dans le plan complexe.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^8 = 1.$$
Représenter l'ensemble des solutions dans le plan complexe.

Exercice 107.

Résoudre l'équation $z^3 = 1$ en déterminant d'abord une racine évidente. Quel théorème du cours retrouvez-vous ?

Exercice 108 ().
On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. **a.** Calculer ω^5.

   b. Prouver que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$.
2. Calculer $\left(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\right)(1-\omega)$ et en déduire la valeur de la somme $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.
3. En utilisant la question 1.b et la question 2, prouver que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation
$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0,$$
puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 109.
Dans cet exercice, on démontre le théorème 2. On fixe un entier naturel n non nul et on considère l'équation
$$z^n = 1. \qquad (E)$$

1. Prouver que les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0; n-1]\!]$, sont solutions de (E).
2. Majorer le nombre de solutions de (E). Conclure.

Exercice 110.
Soient A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives $a = 4-3i$, $b = 1-i$, $c = 5+5i$.

1. Écrire sous forme algébrique $Z = \frac{c-b}{a-b}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 111.
On note A, B, C les points d'affixes respectives $a = -\sqrt{3}+i$, $b = \sqrt{3}+i$, $c = -2i$.

1. Écrire sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle :
$$Z = \frac{a-c}{b-c}$$
2. En déduire la nature du triangle ABC.

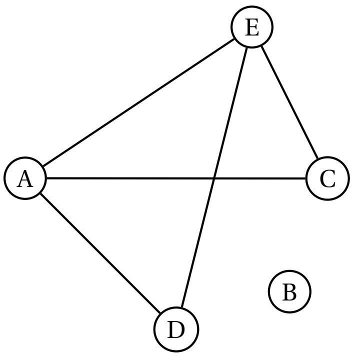
CHAPITRE

6 Graphes, applications

Déf. 1 (graphes non orientés)

- Un graphe non orienté d'ordre n est un ensemble de n points : les sommets, reliés (ou non) entre eux par des lignes : les arêtes.
- Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui le relient aux autres sommets.
- Dans un graphe non orienté, une chaîne de longueur n est une succession de n arêtes. Si l'origine de la première arête coïncide avec l'extrémité de la dernière, on dit que la chaîne est fermée.
- Si les arêtes d'une chaîne fermée sont toutes distinctes, on dit que c'est un cycle.
- La longueur d'une chaîne est son nombre d'arêtes, comptées autant de fois qu'elles sont parcourues.
- Un graphe non orienté est dit connexe s'il est d'un seul tenant : n'importe qu'elle paire de sommets peut être reliée par une chaîne.

Exemple 1



Graphe Δ

Le graphe Δ est un graphe non orienté d'ordre 5 avec les degrés suivants :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	3	0	2	2	3

- B est un sommet isolé (donc Δ n'est pas connexe) ;
- A–D–E–A–C est une chaîne de longueur 4 reliant A à C ;
- A–C–E–A est une chaîne fermée de longueur 3 dont toutes les arêtes sont distinctes : c'est un cycle.

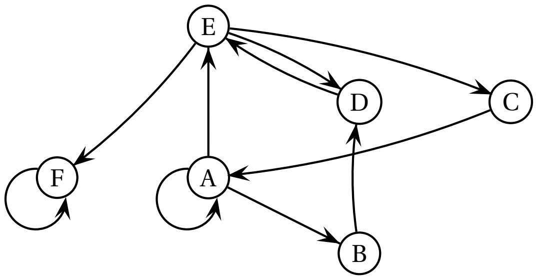
Exercices

Exercices 112 à 118

Définition 2 (graphes orientés)

- Un graphe orienté d'ordre n est un ensemble de n points : les sommets, reliés (ou non) entre eux par des flèches : les arcs. Un sommet peut être relié à lui-même par une boucle.
- Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par un arc.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs qui le relient aux autres sommets, sans tenir compte du sens des flèches. De plus, les boucles sont comptées deux fois.
- Dans un graphe orienté, un chemin de longueur n est une succession de n arcs, parcourus dans le sens des flèches. Si l'origine du premier arc coïncide avec l'extrémité du dernier, on dit que le chemin est fermé.
- Si les arcs d'un chemin fermé sont tous distincts, on dit c'est un circuit.
- La longueur d'un chemin est son nombre d'arcs, comptés autant de fois qu'ils sont parcourus.
- Un graphe orienté est dit fortement connexe si pour tous sommets A, B, il existe un chemin allant de A à B et un chemin allant de B à A.

Exemple 2



Graphe Γ

Le graphe Γ est un graphe orienté d'ordre 6 avec les degrés suivants :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	5	2	2	3	5	3

- Γ n'est pas fortement connexe, car (par exemple) on ne peut pas aller de F à E ;
- A et F contiennent une boucle, qui compte pour chacun d'eux (deux fois !) dans leur degré ;
- E→C→A→A→B est un chemin de longueur 4 reliant E à B ;
- E→C→A→E est un chemin fermé de longueur 3 dont tous les arcs sont distincts : c'est un circuit.

Définition 3

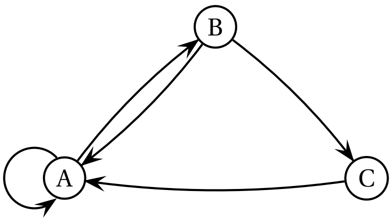
À tout graphe G (orienté ou non) d'ordre n, on associe une matrice carrée M d'ordre n définie par

$$m_{i,j} = \text{nombre d'arêtes (ou d'arcs) reliant les sommets } i \text{ et } j.$$

Attention

Pour un graphe orienté, on peut avoir en même temps $m_{i,j} = 1$ et $m_{j,i} = 0$ s'il existe un arc allant de i à j, mais aucun allant de j à i. Le sens des flèches compte !

Exemple 3



Graphe G

On convient que A est le sommet n°1, B le n°2 et C le n°3. La matrice d'adjacence du graphe G est donc

$$\text{départ}\quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \boxed{\text{arrivée}} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Proposition 1

Si M est la matrice associée à un graphe G et si k est un entier naturel non nul, le terme d'indice (i, j) de la matrice M^k est :

- si G n'est pas orienté, le nombre de chaînes de longueur k allant de i à j ;
- si G est orienté, le nombre de chemins de longueur k allant de i à j.

Exemple 4

On reprend l'exemple 3 et on note M la matrice associée à G. Le calcul avec la calculatrice donne

$$M^5 = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 4 \\ 11 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le terme d'indice $(1,3)$ est égal à 4, donc il existe 4 chemins de longueur 5 reliant A à C. Il s'agit des chemins :

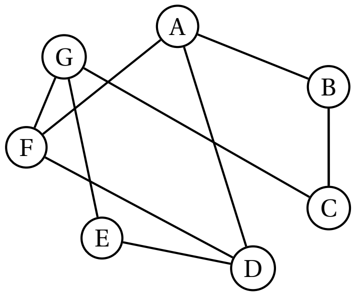
A-B-C-A-B-C , A-B-A-A-B-C , A-A-B-A-B-C , A-A-A-A-B-C.

Exercices

Exercices 119 à 124

Exercices

Exercice 112.
On considère le graphe non orienté Δ suivant.



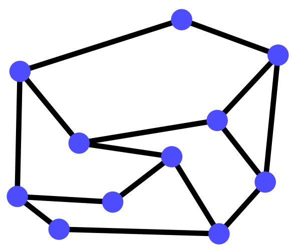
1. Déterminer l'ordre de Δ et le degré de chaque sommet.
2. Déterminer le nombre d'arêtes de Δ.
3. Déterminer une chaîne de longueur 8 reliant F à D.
4. Déterminer un cycle d'origine A.
5. Le graphe Δ est-il connexe ?

Exercice 113.

1. Dans un graphe non orienté, déterminer une relation entre la somme des degrés de chaque sommet et le nombre d'arêtes.
2. Est-il possible de relier 7 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice 114.
Montrer que, dans une classe, deux élèves au moins ont le même nombre d'amis.

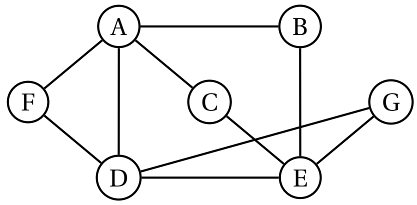
Exercice 115.
Le graphe ci-dessous représente le plan des couloirs d'un musée. Un gardien placé dans un couloir peut surveiller les deux carrefours placés à ses extrémités.



1. Quel est le nombre minimum de gardiens nécessaires (et comment les placer) afin que tous les carrefours soient surveillés ?
2. Prouver qu'avec ce nombre de gardiens, un carrefour au moins sera surveillé 2 fois. Un carrefour peut-il être surveillé 3 fois ?

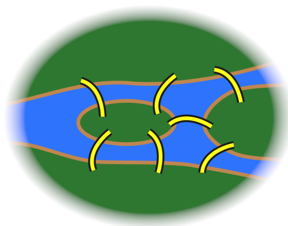
Exercice 116.
Dans un graphe non orienté, un cycle est dit eulérien s'il passe une fois et une seule par toutes les arêtes.

1. Déterminer un cycle eulérien pour le graphe ci-dessous.



2. Prouver que s'il existe un cycle eulérien dans un graphe non orienté G, alors les sommets sont tous de degré pair.

   La réciproque est également vraie lorsque G est connexe. On l'admet.
3. La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad, en Russie) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel. Les deux rives de la rivière et les îles sont reliées par les ponts représentés sur le plan ci-dessous.



   Existe-t-il une promenade permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, puis de revenir au point de départ ?

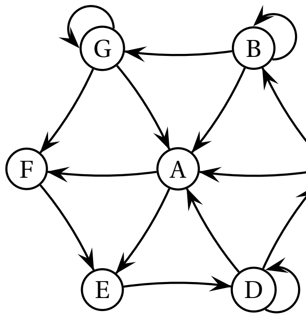
Exercice 117.
On dit qu'un graphe non orienté est complet si ses sommets sont deux à deux reliés par une seule arête. Représenter les graphes complets d'ordres 2, 3, 4 et 5. Combien chacun a-t-il d'arêtes ? Généraliser.

Exercice 118.
Un jeu de dominos utilise des pièces de la forme (n,p), où n et p sont des entiers entre 0 et 6.

4	3	1	6	0	0

1. En excluant les dominos doubles, prouver que l'on dispose de 21 dominos.
2. Montrer que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
3. Le problème admet-il une solution si l'on inclut les numéros doubles ?

Exercice 119.
On considère le graphe orienté Γ suivant.

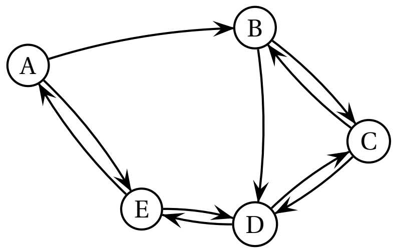


1. Déterminer l'ordre de Γ et le degré de chaque sommet.
2. En déduire le nombre d'arcs de Γ.
3. Déterminer un chemin de longueur 5 reliant G à C.
4. Déterminer un circuit d'origine A.
5. Le graphe Γ est-il fortement connexe ?

Exercice 120.
Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 10 et tel qu'un arc $i \to j$ signifie « i divise j ».
On impose de plus la condition que les arcs ne doivent pas se croiser.

☞ **Indication**
Dans tous les exercices qui suivent, on pourra recourir à l'outil informatique pour calculer les puissances de matrices.

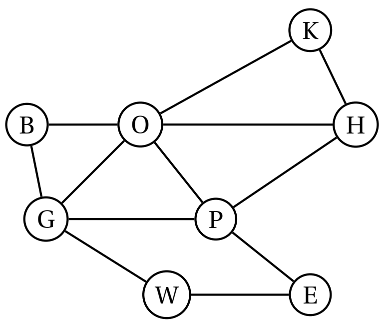
Exercice 121.
Une exposition est organisée dans un parc. On décide d'y instaurer un plan de circulation : certaines allées sont à sens unique, d'autres sont à double sens. Le graphe ci-dessous modélise la situation.



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe (dans l'ordre alphabétique).
2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre de A à D ? Les donner tous.
3. Montrer qu'il n'existe qu'un seul circuit de longueur 5 partant de A. Quel est ce circuit ? En est-il de même pour B ?

Exercice 122.

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. Trouver une chaîne qui emprunte toutes les lignes une seule fois.
2. Déterminer le nombre de trajets possibles pour se rendre de Embankment à Piccadilly Circus en passant par 3 stations intermédiaires. Les donner tous.
3. Déterminer le nombre de trajets possibles pour se rendre de Green Park à Westminster en passant par 4 stations intermédiaires.

Indication

Les deux derniers exercices sont consacrés à l'étude des marches aléatoires. On y rencontre des graphes pondérés, qui n'ont pas été étudiés dans le cours. Ces notions ne seront pas évaluées en devoir.

Exercice 123.

Une compagnie d'assurance automobile a mis en place le système de bonus-malus suivant.
Il existe trois niveaux de cotisation annuelle :

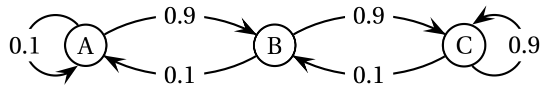
A 455 €   B 364 €   C 273 €

La première année, l'assuré paye le tarif B.

- S'il n'a pas été responsable d'un accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante, sauf s'il est déjà au tarif le plus bas ; auquel cas il y reste.
- S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante, sauf s'il est déjà au tarif le plus haut ; auquel cas il y reste.

La compagnie estime à 10 % la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'un accident au cours d'une année.
Par ailleurs, elle évalue en moyenne à 280 € par assuré ses dépenses de remboursement lors des accidents.

On peut représenter l'évolution de la situation d'une année à la suivante à l'aide du **graphe orienté pondéré** suivant.



On choisit un assuré au hasard dans la catégorie B. On note A_n (respectivement B_n, C_n) les événements « l'assuré paye le tarif A (respectivement B, C) la n-ième année » et $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ leurs probabilités. On note également $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer P_0 et calculer P_1 et P_2.
2. Déterminer une matrice T telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n T.$$
On dit que T est **la matrice de transition** associée au problème.
3. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de P_n en fonction de T et P_0.
4. On estime que la valeur de P_{20} donne une bonne indication de la répartition des assurés dans les différentes catégories sur le long terme. Le barème mis en place par la compagnie d'assurance est-il viable ?

Exercice 124.

Vers 1910, le mathématicien russe Andreï Markov étudie l'alternance des voyelles et des consonnes dans l'œuvre en vers de Pouchkine *Eugénie Onéguine*. En observant la suite des 20 000 premières lettres, il constate que :

- quand la lettre est une consonne, il y a 2 chances sur 3 que la suivante soit une voyelle ;
- quand la lettre est une voyelle, il y a 7 chances sur 8 que la suivante soit une consonne.

1. Représenter la situation par un graphe orienté pondéré.
2. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice $P_n = \begin{pmatrix} c_n & v_n \end{pmatrix}$, où c_n est la probabilité de l'événement « la n-ième lettre est une consonne », v_n celle de l'événement « la n-ième lettre est une voyelle ».
Écrire la matrice de transition T associée au problème, c'est-à-dire la matrice T telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n T.$$
3. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de P_n en fonction de T et P_0.
4. On estime que la valeur de P_{20} donne une bonne indication de la répartition des voyelles et des consonnes dans *Eugénie Onéguine*. Sachant que la première lettre de l'ouvrage est une voyelle, calculer P_{20}, puis interpréter le résultat.

CHAPITRE 7

Algo. d'Euclide, applications

I. Algorithme d'Euclide

On commence par un rappel sur l'algorithme d'Euclide, que l'on a déjà étudié dans le 1er chapitre.

Proposition 1

Dans la situation de la division euclidienne $a = bq + r$, on a :

1. Si $r \neq 0$, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$.
2. Si $r = 0$, $\text{PGCD}(a, b) = b$.

Exemple 1 (algorithme d'Euclide)

On cherche $\text{PGCD}(96, 28)$.
On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned} 96 &= 3 \times 28 + 12 && (L_1) \\ 28 &= 2 \times 12 + 4 && (L_2) \\ 12 &= 3 \times 4 + 0 && (L_3) \end{aligned}$$

D'après la proposition 1,

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(96, 28) &= \text{PGCD}(28, 12) \\ &= \text{PGCD}(12, 4) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion : $\text{PGCD}(96, 28) = 4$.

Le PGCD est le dernier reste non nul trouvé dans les divisions successives.

Exercices

Exercices 125 et 126

II. Théorèmes de Bézout et de Gauss

Proposition 2 (identité de de Bézout)

Soient a, b deux entiers naturels non nuls et soit d leur PGCD. Il existe un couple d'entiers (u, v) tels que

$$au + bv = d.$$

Exemple 2

On reprend l'exemple 1. On cherche deux entiers u et v tels que $96u + 28v = 4$.
Pour cela on « remonte l'algorithme d'Euclide » : on part de l'avant-dernière ligne (L_2) :

$$28 = 2 \times 12 + 4,$$

on en déduit

$$4 = 28 - 2 \times 12. \tag{7.1}$$

On vient d'écrire 4 en fonction de 28 et 12; on va maintenant prendre la ligne (L_1) pour avoir 4 en fonction de 96 et 28 :

$$96 = 3 \times 28 + 12,$$

donc en reprenant (7.1) :

$$\begin{aligned} 4 &= 28 - 2 \times 12 \\ &= 28 - 2 \times (96 - 3 \times 28) \\ &= -2 \times 96 + 7 \times 28. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$4 = -2 \times 96 + 7 \times 28.$$

Théorème 1 (Bézout)

Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = 1.$$

Exemple 3

Pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{n+1}{2n+1}$ est irréductible. En effet :

$$(n+1)\times 2 - (2n+1)\times 1 = 1,$$

donc $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

Exercices

Exercices 127 à 133

Théorème 2 (Gauss)

Soient a, b deux entiers naturels non nuls, c un entier. Si a divise bc et si $\text{PGCD}(a,b) = 1$, alors a divise c.

Exemple 4

Que dire d'un entier n tel que $3n$ est pair ?

On sait que $3n$ est pair, donc 2 divise $3n$. Or $\text{PGCD}(2,3) = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, 2 divise n – qui est donc pair.

Le théorème de Gauss admet le corollaire :

Corollaire 1 (du théorème de Gauss)

Soient a, b deux entiers naturels non nuls, c un entier. Si a et b divisent c et si $\text{PGCD}(a,b) = 1$, alors ab divise c.

Exemple 5

Que peut-on dire d'un nombre multiple à la fois de 3 et de 5 ?
Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, le nombre est multiple de $3\times 5 = 15$.

Exercices

Exercices 134 à 137

III. Exercices

Exercice 125.
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer :

1. $\text{PGCD}(144, 840)$.
2. $\text{PGCD}(215, 28)$.

Exercice 126.
Un terrain rectangulaire a pour dimensions 966 m sur 1008 m. Sur ses côtés, on veut planter des arbres régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres. Il doit y avoir un arbre à chaque coin du terrain.

Déterminer le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter.

Exercice 127.
Remonter l'algorithme d'Euclide avec :

1. $a = 21$, $b = 12$.
2. $a = 26$, $b = 7$.

Exercice 128.
Prouver en une ligne que :

1. 23 et 8 sont premiers entre eux.
2. 104 et 105 sont premiers entre eux.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, les entiers n et $3n+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 129.

1. Existe-t-il un point à coordonnées entières sur la droite d'équation $4x + 6y = 1$?
2. Déterminer un point à coordonnées entières sur la droite d'équation $7x - 16y = 1$.

Exercice 130.
Soit n un entier naturel non nul.

1. Développer $(2n+1)^2 - 4\left(n^2+n\right)$.
2. Que peut-on en déduire pour la fraction $\frac{2n+1}{n^2+n}$?

Exercice 131.
Comment mesurer 1 minute avec un sablier mesurant 7 minutes et un sablier mesurant 5 minutes ?

Exercice 132.
Soient a, b, c trois entiers naturels non nuls.

1. Prouver que si a est premier avec b et avec c, alors il est premier avec leur produit $b \times c$.
2. Prouver que si a est premier avec b, alors il est premier avec b^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 133 ().
Pour tout entier naturel n, on définit le $n-$ième nombre de Fermat par

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1.$$

1. Vérifier que $F_0 = 3$, $F_1 = 5$ et calculer F_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$:

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2.$$

3. En déduire que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 134.

1. Que peut-on dire d'un entier divisible à la fois par 4 et par 7 ?
2. Que peut-on dire d'un nombre pair multiple de 5 ?

Exercice 135.
Prouver que pour tout entier naturel n, le produit

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

est un multiple de 12.

Exercice 136.
Soit p un nombre premier distinct de 2 et de 3.

1. Prouver que $p \equiv 1\,[3]$ ou $p \equiv 2\,[3]$. En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 3.
2. Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 137 ().
On considère l'équation

$$3x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0 \qquad (E).$$

1. Prouver que (E) a une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que cette solution appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.
2. Montrer que si α est rationnel, donc $\alpha = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers positifs premiers entre eux, alors

$$3p^3 + 4p^2q + 2pq^2 - 4q^3 = 0.$$

En déduire que p divise 4 et que q divise 3.

3. Déterminer α, sachant qu'il est rationnel.