Corrigé du devoir surveillé n°7

Exercice 1

1. $\mathrm{e}^{2x} - 2 = 7 \iff \mathrm{e}^{2x} = 9 \iff \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = \ln 9 \iff 2x = \ln 9 \iff x = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln\left(\sqrt{9}\right) = \ln 3$.
   Conclusion : l'unique solution est $x = \ln 3$.
2. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} & 0,95^n \leq 0,01 \\ \iff & \ln\left(0,95^n\right) \leq \ln\left(0,01\right) \qquad \text{(par stricte croissance de la fonction ln)} \\ \iff & n \ln 0,95 \leq \ln 0,01 \\ \iff & n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,95} \qquad \text{(car } \ln 0,95 < 0\text{, donc } \leq \text{ devient } \geq\text{).} \end{aligned}$$

   Avec la calculatrice on trouve $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,95} \approx 89,78$, donc l'ensemble des solutions est $[\![90; +\infty[\![$.
3. (a) Les solutions de l'équation différentielle
$$(E) \qquad y' = 4y$$
   sont les fonctions de la forme
$$y(x) = C\mathrm{e}^{4x},$$
   où C est une constante.

   (b) $y(1) = 5 \iff C\mathrm{e}^{4\times 1} = 5 \iff C\mathrm{e}^4 = 5 \iff C\cancel{\mathrm{e}^4} \times \cancel{\mathrm{e}^{-4}} = 5 \times \mathrm{e}^{-4} \iff C = 5\mathrm{e}^{-4}$.
   Conclusion : l'unique solution de (E) vérifiant $y(1) = 5$ est définie par
$$y(x) = 5\mathrm{e}^{-4} \times \mathrm{e}^{4x} = 5\mathrm{e}^{4x-4}.$$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par C.C., donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right) = \ln(1+0) = 0$, par continuité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0.
5. On résout dans $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \ln x &\leq 2 \\ \mathrm{e}^{\ln x} &\leq \mathrm{e}^2 \qquad \text{(car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{)} \\ x &\leq \mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

   Les solutions sont les nombres de l'intervalle $]0; \mathrm{e}^2]$.

   Attention : les solutions ne sont pas les nombres de l'intervalle $]-\infty; \mathrm{e}^2]$, car on résout dans $]0; +\infty[$.

Exercice 2

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+2\ln x}{x}.$$

1. $f\left(\mathrm{e}^{1/2}\right)=\frac{1+2\ln\left(\mathrm{e}^{1/2}\right)}{\mathrm{e}^{1/2}}=\frac{1+2\times\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{1/2}}=2\mathrm{e}^{-1/2}$.
2. La fonction f s'écrit comme un quotient : $f=\frac{u}{v}$, avec $u(x)=1+2\ln x$ et $v(x)=x$.
   Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x\in\,]0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{array}{lcl} u(x)=1+2\ln x & , & v(x)=x \\ u'(x)=2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x} & , & v'(x)=1 \end{array}$$

   Donc en appliquant la formule pour la dérivée d'un quotient, pour tout $x\in\,]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{\frac{2}{x}\times x-(1+2\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{2-1-2\ln x}{x^2}=\frac{1-2\ln x}{x^2}.$$

3. On résout l'équation :

$$1-2\ln x=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=\mathrm{e}^{1/2}.$$

   On en déduit le signe de f' et les variations de f :

x	0		$\mathrm{e}^{1/2}$		$+\infty$
$1-2\ln x$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$	0

4. Limite en $+\infty$: on écrit $f(x)=\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} & =0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} & =0 \text{ (par croiss. comp.)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

   Limite en 0 : on écrit $f(x)=(1+2\ln x)\times\frac{1}{x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\ln x=-\infty$, donc :

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0,\ x>0}(1+2\ln x) & =-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\frac{1}{x} & =+\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0,\ x>0} f(x)=-\infty.$$

Exercice 3

1. La fonction g est solution de l'équation différentielle $y' = -0,04y + 0,8$, donc g est définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(t) = C\mathrm{e}^{-0,04t} - \frac{0,8}{-0,04} = C\mathrm{e}^{-0,04t} + 20,$$

   où C est une constante.
   On sait de plus que $g(0) = 100$, donc $C\mathrm{e}^{-0,04\times 0} + 20 = 100$, et ainsi $C = 100 - 20 = 80$.
   Conclusion :

$$g(t) = 80\mathrm{e}^{-0,04t} + 20.$$

2. La température après 30 minutes est

$$g(30) = 80\mathrm{e}^{-0,04\times 30} + 20 \approx 44°\mathrm{C}.$$

3. On résout l'équation $g(t) = 36$:

$$80\mathrm{e}^{-0,04t} + 20 = 36 \iff \mathrm{e}^{-0,04t} = \frac{36-20}{80} \iff \ln\left(\mathrm{e}^{-0,04t}\right) = \ln(0,2)$$
$$\iff -0,04t = \ln(0,2) \iff t = -\frac{\ln(0,2)}{-0,04}.$$

   On calcule une valeur approchée avec la calculatrice et on trouve que la température est de 36°C après 40 minutes environ.