Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Le second degré : équations et paraboles **2**

2 Probabilités **11**

1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions des équations.

Exercice 1 1. On résout l'équation $x^2+2x=0$:

On factorise :

$$x(x+2)=0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{aligned} x=0 \qquad \text{ou} \qquad & x+2=0 \\ & x+\cancel{2}\cancel{-2}=0-2 \\ & x=-2 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=-2$. Autrement dit :

$$\mathscr{S}=\{0;-2\}.$$

2. On résout l'équation $x^2-16=0$:

On « isole » x^2 :

$$\begin{aligned} x^2-16&=0 \\ x^2-\cancel{16}\cancel{+16}&=0+16 \\ x^2&=16 \end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x=\sqrt{16}=4 \qquad \text{ou} \qquad x=-\sqrt{16}=-4.$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\{4;-4\}.$$

3. On résout l'équation $(2x-1)(x-5)=0$:

$$\begin{aligned} 2x-1&=0 & \text{ou} \qquad & x-5=0 \\ 2x-\cancel{1}\cancel{+1}&=0+1 & \text{ou} \qquad & x-\cancel{5}+\cancel{5}=0+5 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}&=\frac{1}{2} & \text{ou} \qquad & x=5 \\ x&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2};5\right\}.$$

4. On résout l'équation $x^2+7=0$:

$$\begin{aligned} x^2+7&=0 \\ x^2+\cancel{7}\cancel{-7}&=0-7 \\ x^2&=-7 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre x ne peut avoir un carré égal à -7).

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\emptyset.$$

(On rappelle que $\emptyset$ désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

Exercice 2 Dans chaque cas, on note Δ le discriminant.

1. On résout l'équation $x^2-3x-4=0$:
   - $a=1,\ b=-3\ ,c=-4$.
   - $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3-5}{2}=-1,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2}=\frac{3+5}{2}=4.$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S}=\{-1;4\}.$$

2. On résout l'équation $2x^2-12x=-18$:
   On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme $ax^2+bx+c=0$) en « transposant -18 » :

$$2x^2-12x+18=-\cancel{18}+\cancel{18}$$
$$2x^2-12x+18=0$$

   - $a=2,\ b=-12\ ,c=18$.
   - $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times2\times18=144-144=0$.
   - $\Delta=0$, donc il y a une seule solution :

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-12)}{2\times2}=\frac{12}{4}=3.$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S}=\{3\}.$$

3. On résout l'équation $x^2-4x+5=0$:
   - $a=1,\ b=-4\ ,c=5$.
   - $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times5=16-20=-4$.
   - $\Delta<0$, donc il n'y a pas de solution.

   Conclusion :

$$\mathscr{S}=\emptyset.$$

4. On résout l'équation $x^2+2x-4=0$:
   - $a=1,\ b=2\ ,c=-4$.
   - $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-4)=4+16=20$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{20}}{2\times1}=\frac{-2-\sqrt{20}}{2},$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{20}}{2\times1}=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}.$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{-2-\sqrt{20}}{2};\frac{-2+\sqrt{20}}{2}\right\}.$$

   Remarque : On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\times\sqrt{5},$$

   on trouve

$$x_2=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}=\frac{\cancel{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)}{\cancel{2}}=-1+\sqrt{5}.$$

   De même, $x_1=-1-\sqrt{5}$.

5. On résout l'équation $x^2 = -6x$:
   À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le « $-6x$ » dans le membre de gauche, qui devient « $+6x$ ».

$$x^2 = -6x$$
$$x^2 + 6x = 0.$$

   Ici, il y a deux méthodes possibles :
   - soit on utilise le discriminant, avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 0$ (puisque $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$) ;
   - soit on factorise.

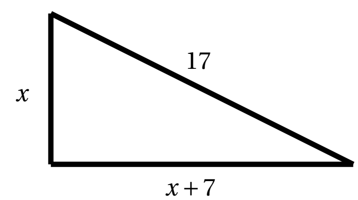
   On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide [1] :

$$x(x+6) = 0$$
$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + 6 = 0$$
$$x = -6.$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S} = \{0; -6\}.$$

Exercice 3 On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas x.



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe $(x+7)^2$ avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = 289$$
$$2x^2 + 14x + 49 - 289 = 0$$
$$2x^2 + 14x - 240 = 0.$$

- $a = 2$, $b = 14$, $c = -240$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1\,920 = 2\,116$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{2\,116}}{2 \times 2} = \frac{-14 - 46}{4} = -15,$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{2\,116}}{2 \times 2} = \frac{-14 + 46}{4} = 8.$$

Or x désigne une longueur, donc la première solution (x_1) est impossible. On a donc $x = 8$.

Remarque : Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

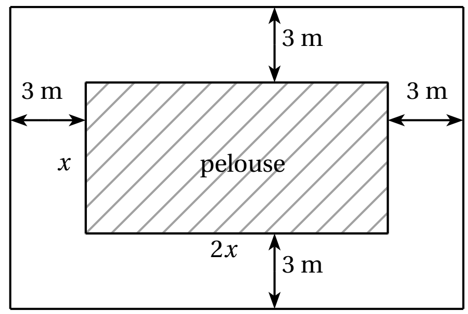
$$x = 8, \qquad x + 7 = 8 + 7 = 15 \qquad \text{et} \qquad 17.$$

On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec Δ dans le cas où b ou c valent 0.

Exercice 4 1. Voici un schéma du terrain en notant x la largeur de la pelouse (donc la longueur est $2x$) :



2. La longueur du terrain (en m) est

$$2x + 3 + 3 = 2x + 6,$$

sa largeur est

$$x + 3 + 3 = x + 6.$$

Donc la surface du terrain (en m^2) est

$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x + 6) \times (x + 6).$$

Or on sait que cette surface vaut 360 m^2, donc

$$(2x + 6) \times (x + 6) = 360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente[2] :

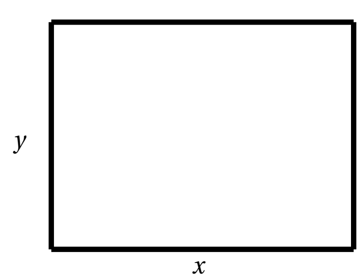
$$\begin{aligned} & (2x+6)\times(x+6) && = 360 \\ \iff & 2x \times x + 2x \times 6 + 6 \times x + 6 \times 6 && = 360 \\ \iff & 2x^2 + 12x + 6x + 36 && = 360 \\ \iff & 2x^2 + 18x + 36 - 360 && = 0 \\ \iff & 2x^2 + 18x - 324 && = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré.
- $a = 2$, $b = 18$, $c = -324$.
- $\Delta = 18^2 - 4 \times 2 \times (-324) = 2\,916$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18-\sqrt{2916}}{2\times 2} = \frac{-18-54}{4} = \frac{-72}{4} = -18,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18+\sqrt{2916}}{2\times 2} = \frac{-18+54}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$

Or x désigne une longueur, donc x ne peut pas être négatif et seule la solution $x_2 = 9$ est valable.
Conclusion : $x = 9$, donc la longueur du terrain (en m) est $2 \times 9 + 3 + 3 = 24$, sa largeur est $9 + 3 + 3 = 15$.

Exercice 5 On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note x et y les dimensions du champ.



2. Les « $\iff$ » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est

$$x + y = 27.$$

- L'aire est 180, donc

$$x \times y = 180.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x + y = 27 & L_1 \\ xy = 180 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie L_1 par x :

$$(x + y) \times x = 27 \times x, \qquad \text{soit} \qquad x^2 + xy = 27x.$$

Or d'après L_2, $xy = 180$, donc

$$x^2 + 180 = 27x, \qquad \text{et ainsi} \qquad x^2 - 27x + 180 = 0.$$

On aboutit à une équation du 2$^{\text{d}}$ degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) : $x_1 = 12$, $x_2 = 15$.

On sait que $x + y = 27$, donc si $x = 12$, alors $y = 27 - x = 27 - 12 = 15$; et si $x = 15$, alors $y = 27 - x = 27 - 15 = 12$.
Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

Exercice 6 On note n le nombre d'amis initialement présents, et p le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc

$$n \times p = 2400. \tag{1}$$

- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas $(n-2)$ amis, et chacun paye alors $(p + 40)$ €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit

$$(n - 2) \times (p + 40) = 2400.$$

  En développant, cela donne encore

$$np + 40n - 2p - 80 = 2400. \tag{2}$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2 400 dans les deux cas, on obtient l'égalité

$$\cancel{np} = \cancel{np} + 40n - 2p - 80,$$

soit

$$40n - 2p - 80 = 0.$$

Finalement, le couple (n, p) est solution du système

$$\begin{cases} n \times p = 2400 \\ 40n - 2p - 80 = 0. \end{cases}$$

On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient

$$n = 12 \qquad , \qquad p = 200.$$

Conclusion : comme $12 - 10 = 2$, ce sont 10 amis qui sont finalement partis.

Exercice 7 1. $P_1 : y = x^2 - 6x + 5$.

- $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$.
- a est $\oplus$, donc P_1 est vers le haut.
- On note S le sommet de P_1. D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

  On en déduit

$$y_S = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4.$$

  On a donc $S(3; -4)$.

Venons-en au tracé de la parabole. On fait un tableau de valeurs sur $[0;6]$, avec un pas de 1 [3]. Pour cela, on utilise la calculatrice :

3. Nous choisissons un intervalle symétrique par rapport à l'abscisse du sommet, et qui ne soit ni trop court, ni trop long. On choisit un pas de 1 par facilité, mais le graphique serait bien sûr plus précis avec un pas plus petit.

Calculatrices collège

- $\boxed{\text{MODE}}$ ou $\boxed{\text{MENU}}$
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=$\text{X}^2-6\text{X}+5$ $\boxed{\text{EXE}}$ (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- Fin ? 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas ? 1 $\boxed{\text{EXE}}$

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{x}}$

-
- Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$ puis choisir Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$
- f(x)=$\text{x}^2-6\text{x}+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Tableau $\boxed{\text{EXE}}$ puis Régler l'intervalle $\boxed{\text{EXE}}$
- X début 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- X fin 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas 1 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Valider

TI graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{x,t,\theta,n}$

- $\boxed{f(x)}$
- $\text{Y}_1=\text{X}^2-6\text{X}+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{déf table}}$
- DébTable=0 $\boxed{\text{EXE}}$
- PasTable=1 $\boxed{\text{EXE}}$ ou ΔTbl=1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{table}}$

CASIO graphiques

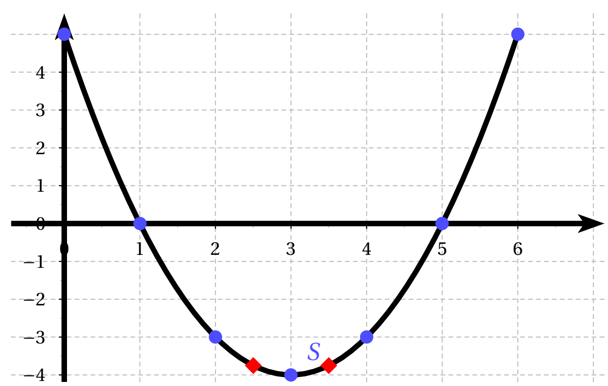
X s'obtient avec la touche $\boxed{\text{X},\theta,\text{T}}$

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis choisir TABLE $\boxed{\text{EXE}}$
- $\text{Y}_1:\text{X}^2-6\text{X}+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{F5}}$ (on choisit donc SET)
- Start :0 $\boxed{\text{EXE}}$
- End :6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Step :1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{EXIT}}$
- $\boxed{\text{F6}}$ (on choisit donc TABLE)

On obtient le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Enfin on construit le graphique (j'ai un peu « écrasé » l'axe des ordonnées pour gagner de la place) :



Remarque : On peut avoir intérêt à ajouter des points près du sommet pour obtenir un tracé plus précis. C'est ce que l'on a fait ci-dessus avec les deux losanges rouges, correspondant au tableau de valeurs ci-dessous.

x	2,5	3,5
y	$-3,75$	$-3,75$

2. $P_2 : y=-0,5x^2-x+4$.
   - $a=-0,5,\ \ b=-1\ ,\ c=4$.
   - a est $\ominus$, donc P_2 est vers le bas.
   - On note S le sommet de P_2. D'après le cours

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times(-0,5)}=\frac{1}{-1}=-1.$$

   On en déduit

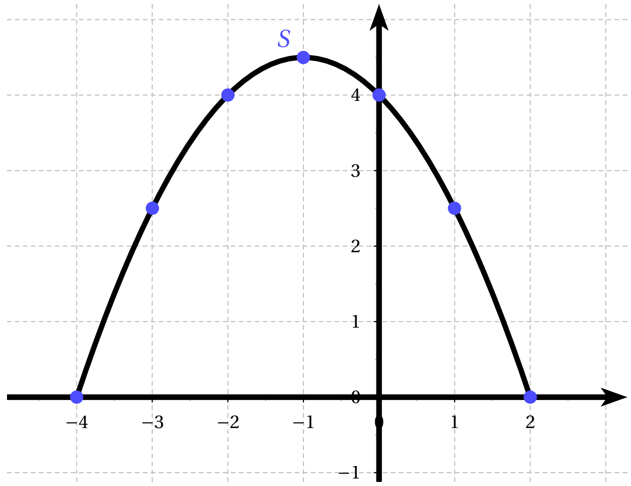
$$y_S=-0,5\times(-1)^2-(-1)+4=-0,5+1+4=4,5.$$

   On a donc $S(-1\ ;\ 4,5)$.

Tableau de valeurs :

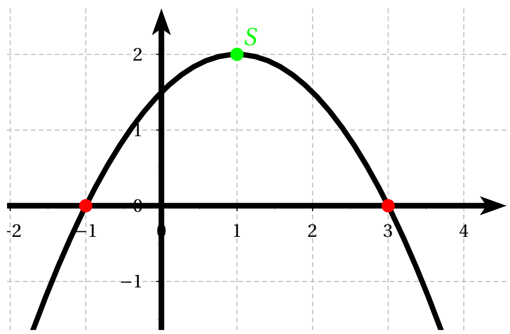
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

Tracé de la parabole :



Exercice 8 1. On trace la parabole P :

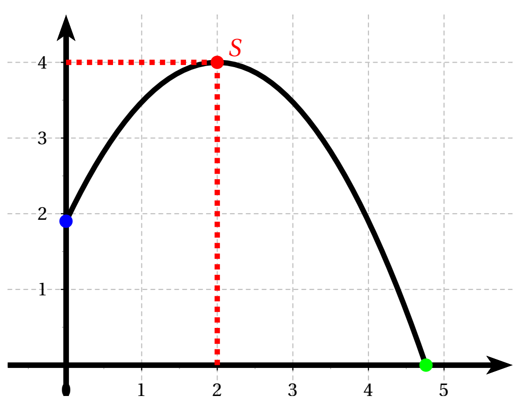
- qui coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -1$ et en $x_2 = 3$.
- dont le sommet est le point $S(1;2)$.



Remarque : Il est difficile de faire un tracé hyper précis avec si peu d'informations. L'élève intéressé peut essayer de prouver – en faisant un bel effort – que $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$. Auquel cas, il pourra faire un tableau de valeurs et obtenir une courbe presque aussi parfaite que celle dessinée ci-dessus avec l'ordinateur.

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Comme P est vers le bas, a est du signe ⊖.
   - Comme P coupe l'axe des abscisses en deux points, il y a deux racines et Δ est du signe ⊕.

Exercice 9 La trajectoire de la balle en fonction du temps est la parabole $P : y = -0,525t^2 + 2,1t + 1,9$, tracée ci-dessous :



1. Clément commence sa passe à la hauteur

$$h(0) = -0,525 \times 0 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9 \text{ mètres.}$$

   Cela correspond au point bleu sur la figure.

2. La hauteur maximale de la balle est l'ordonnée du sommet S de la parabole, en rouge sur la figure.

- $a = -0,525$, $b = 2,1$, $c = 1,9$.
- On calcule avec la formule :

  $$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2,1}{2\times(-0,525)} = \frac{-2,1}{-1,05} = 2.$$

  On en déduit

  $$y_S = -0,525\times 2^2 + 2,1\times 2 + 1,9 = 4,$$

  et donc la hauteur maximale de la balle est de 4 mètres.

3. Pour déterminer le temps de vol de la balle, on cherche à quel moment elle retombe au sol (point vert sur la figure). On résout donc l'équation

   $$-0,525t^2 + 2,1t + 1,9 = 0.$$

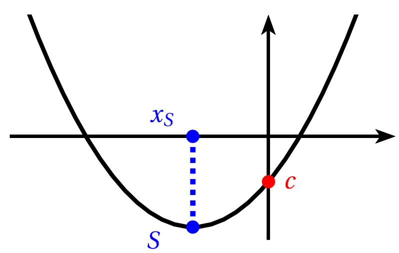
   - $\Delta = 2,1^2 - 4\times(-0,525)\times 1,9 = 8,4$.
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

   $$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1-\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)} \approx 4,76,$$
   $$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1+\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)} \approx -0,76.$$

   La deuxième solution est impossible, car le temps cherché est positif.

   Conclusion : la balle retombe au sol après 4,76 secondes environ.

Exercice 10 On a tracé une parabole $P : y = ax^2 + bx + c$.



1.
   - $a > 0$, car P est vers la haut.
   - Si $x = 0$, alors $y = a\times 0^2 + b\times 0 + c = c$, donc la P passe par le point de coordonnées $(0; c)$ – autrement dit, elle coupe l'axe des ordonnées en c.
     Par lecture graphique, on obtient donc $c < 0$.
   - Il y a deux racines, car P coupe l'axe des abscisses deux fois. On a donc $\Delta > 0$.
2. D'après le cours, $x_S = -\frac{b}{2a}$, donc

   $$x_S \times 2a = -\frac{b}{\cancel{2a}} \times \cancel{2a}$$
   $$x_S \times 2a = -b$$
   $$-x_S \times 2a = b.$$

   On sait que $x_S < 0$ et $a > 0$, donc $b = -\underbrace{x_S}_{\ominus} \times \underbrace{2a}_{\oplus}$ est du signe $\oplus$: $b > 0$.

Exercice 11 Soit $P : y = ax^2 + bx + c$ une parabole et S son sommet. On sait que $x_S = -\frac{b}{2a}$, donc

$$y_S = a\times\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\times\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \cancel{a}\times\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2\times 2}{2a\times 2} + \frac{c\times 4a}{1\times 4a}$$
$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Exercice 12

1. Le coût de fabrication des x objets est

   $$C(x) = x^2 + 230x + 325.$$

Chaque objet est vendu 300 €, donc la recette issue de la vente des x objets est

$$R(x) = 300x.$$

On en déduit que le bénéfice est

$$B(x) = \text{Recette} - \text{Coût} = R(x) - C(x) = 300x - \left(x^2 + 230x + 325\right) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325.$$

2. Le bénéfice est une expression du second degré, avec $a < 0$. Il est donc représenté par une parabole orientée vers le bas. Maximiser le bénéfice revient donc à trouver le (l'abscisse du) sommet de cette parabole :
   - $a = -1,\ b = 70$, $c = -325$.
   - $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2\times(-1)} = \frac{-70}{-2} = 35$.

   Conclusion : le bénéfice est maximal lorsqu'on produit et vend 35 objets.

   Remarque : Le bénéfice maximal est
   $$-35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900 \text{ €}.$$

Exercice 13 1. On résout l'équation :

$$\begin{aligned}
& & x^3 &= 2x \\
&\iff & x^3 - 2x &= 0 \\
&\iff & x\left(x^2 - 2\right) &= 0 \\
&\iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2 &= 0 \\
&\iff & x^2 &= 2 \\
&\iff & x &= \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a trois solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}.$$

2. (a) Pour démontrer l'égalité, on développe et on réduit le membre de droite : pour tout nombre x,

$$\begin{aligned}
(x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right) &= x \times x^2 + x \times 3x + x \times (-4) + 1 \times x^2 + 1 \times 3x + 1 \times (-4) \\
&= x^3 + 3x^2 - 4x + x^2 + 3x - 4 \\
&= x^3 + 4x^2 - x - 4.
\end{aligned}$$

Conclusion : on a bien
$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right).$$

(b) On utilise la factorisation de la question 2.(a) pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
& & x^3 + 4x^2 - x - 4 &= 0 \\
&\iff & (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right) &= 0 \\
&\iff & x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x - 4 &= 0
\end{aligned}$$

On résout chaque équation séparément :
$$x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

L'autre équation est du second degré, on utilise le discriminant :

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

- $a = 1,\ b = 3$, $c = -4$.
- $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.

- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-3-5}{2} = -4,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Conclusion : l'équation $x^3+4x^2-x-4=0$ a trois solutions :

$$\mathscr{S} = \{-1;-4;1\}.$$

2 Probabilités

Exercice 14 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectif :

	Abonnés au soir	Pas abonnés au soir	Total
Abonnés au matin	50	20	70
Pas abonnés au matin	50	160	210
Total	100	180	280

2. (a) $P(S) = \frac{100}{280} = \frac{5}{14}$ et $P\left(\overline{M}\right) = \frac{210}{280} = \frac{3}{7}$.

   (b) - L'événement « le pensionnaire est abonné aux deux journaux » s'écrit $S \cap M$[4]. On a

   $$P(S\cap M) = \frac{50}{280} = \frac{5}{28}.$$

   - L'événement « le pensionnaire est abonné à au moins un journal » s'écrit $S \cup M$[5]. Il y a plusieurs façons de dénombrer les cas favorables à cet événement :
     - ▶ ajouter les pensionnaires qui sont abonnés au *Soir* et ceux qui sont abonnés au *Matin*, puis retrancher ceux qui sont abonnés aux deux journaux (sinon ils sont comptés deux fois) : $100+70-50=120$.
     - ▶ ajouter ceux qui ne sont abonnés qu'au *Soir*, ceux qui ne sont abonnés qu'au *Matin*, et ceux qui sont abonnés aux deux journaux : $50+20+50=120$.
     - ▶ retrancher l'effectif de pensionnaires qui ne sont abonnés à aucun journal de l'effectif total : $280-160=120$.

   Quelle que soit la méthode de calcul, on obtient :

   $$P(S\cup M) = \frac{120}{280} = \frac{3}{7}.$$

   (c) On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. La probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* est[6]

   $$P_M(S) = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}.$$

Exercice 15 1. Le candidat connaît 3 des questions d'histoire, donc $P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; et il connaît 2 des 5 questions de géographie, donc $P(G) = \frac{2}{5}$.

2. Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

   On a colorié les cases de trois couleurs :
   - en vert : le candidat connaît les deux questions ;
   - en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
   - en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

4. On rappelle que $\cap$ se lit « inter » et correspond au mot français « ET ».
5. On rappelle que $\cup$ se lit « union » et correspond au mot français « OU ».
6. On utilise la notation des probabilités conditionnelles, qui sera vue dans le paragraphe 2 du cours.

Géo \ Hist	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

6 des 30 cases sont coloriées en vert, donc la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est

$$P(G \cap H) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

3. $6+15=21$ des 30 cases sont coloriées en vert ou en orange, donc la probabilité que le candidat connaisse au moins l'une des deux questions est

$$P(G \cup H) = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}.$$

Remarque : On peut aussi obtenir 21 avec le calcul $30-9$, ou utiliser la formule du cours de 2^{de} :

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

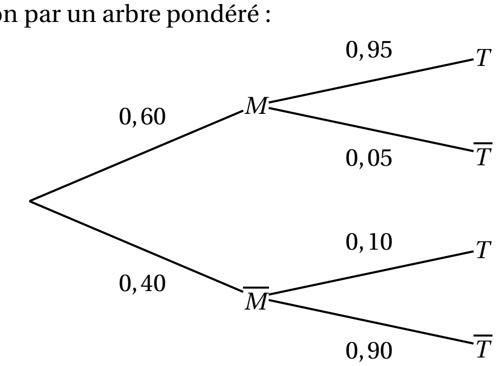
Exercice 16 On utilise un tableau à double entrée. On place un symbole dans chacune des cases favorable à l'événement

A : « les deux dés montrent la même couleur ».

Dé n°1 \ Dé n°2	■	■	■	■	□	□
■	★	★				
■	★	★				
■			★	★		
■			★	★		
□					★	★
□					★	★

Il y a 12 cases favorables à A sur 36, donc $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Exercice 17 1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. D'après l'arbre :
   - $P(M \cap T) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$;
   - D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) \\ &= 0,60 \times 0,95 + 0,40 \times 0,10 = 0,61. \end{aligned}$$