Corrigé du devoir surveillé n°10

1. Le nombre $645\,312$:
   - est divisible par 2, car il est pair ;
   - est divisible par 3, car la somme de ses chiffres $6+5+4+3+1+2=21$ est divisible par 3 ($21=7\times 3$) ;
   - n'est pas divisible par 5, car il ne se termine ni par 0, ni par 5.
2. On décompose 60 en produit de nombres premiers et on en déduit tous ses diviseurs :

   $$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

   Les diviseurs de 60 sont :

   1

   2

   3

   5

   $2\times 2=4$

   $2\times 3=6$

   $2\times 5=10$

   $3\times 5=15$

   $2\times 2\times 3=12$

   $2\times 2\times 5=20$

   $2\times 3\times 5=30$

   $2\times 2\times 3\times 5=60$

   Remarque : On pouvait aussi écrire tous les produits qui donnent 60 :

   $$60=1\times 60=2\times 30=3\times 20=[\cdots]$$

3. Le côté de chaque carreau doit être un diviseur de 210 et de 135 ; et on veut que ce côté soit le plus grand possible. On cherche donc le PGCD de 210 et 135.

   On décompose en produits de nombres premiers :

   $$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

   $210=2\times 3\times 5\times 7.$ $\qquad$ $135=3\times 3\times 3\times 5.$

   Conclusion : $\text{PGCD}(210,135)=3\times 5=15$, donc chaque carreau mesure 15 cm de longueur.

De plus, il y a $210 \div 15 = 14$ carreaux en hauteur ; et $135 \div 15 = 9$ carreaux en largeur, soit un total de

$$14 \times 9 = 126 \text{ carreaux.}$$

4. Le nombre $2^{6} \times 3^{4} \times 5^{2}$ est un carré parfait, car tous les exposants dans sa décomposition (en rouge) sont pairs. C'est le carré de $2^{3} \times 3^{2} \times 5^{1}$ (il suffit de diviser chaque exposant par 2).

   Remarque : Il n'était pas utile de faire le calcul (assez difficile) pour justifier. Mais juste pour information, le nombre de l'énoncé vaut 129 600 ; et c'est le carré de 360.

5. (a) $\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 1\sqrt{5}$.

   (b) $2\sqrt{12} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27} = 2\sqrt{4 \times 3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{9 \times 3} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 2 \times 2 \times \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

6. Pour démontrer l'égalité de l'énoncé, on fait le produit en croix et on utilise l'identité remarquable n°3 :

$$\left(2 - \sqrt{2}\right)\left(2 + \sqrt{2}\right) = 2^2 - \sqrt{2}^2 = 4 - 2 = 2,$$

   donc $\dfrac{2}{2 - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$.