Corrigé du bac blanc n°1

Exercice 1

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$u(x) = x^2 + 1 \quad , \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x},$$
$$u'(x) = 2x \quad , \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2x \times \mathrm{e}^{-x} + \left(x^2+1\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + 1 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 2x \times \mathrm{e}^{-x} - x^2 \times \mathrm{e}^{-x} - 1 \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(-x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Or $-(x-1)^2 = -\left(x^2-2x+1\right) = -x^2+2x-1$, donc on a bien

$$\boxed{f'(x) = -(x-1)^2\,\mathrm{e}^{-x}.}$$

2. On étudie le signe de f' et on en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-(x-1)^2$		$-$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘	1	↘	

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

3. $f(0) = \left(0^2+1\right)\mathrm{e}^{-0} = 1$ et $f'(0) = -(0-1)^2\,\mathrm{e}^{-0} = -1$, donc l'équation de (T) est

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ y &= -1(x-0) + 1 \\ y &= -x + 1. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{(T) : y = -x + 1.}$$

4. On admet que, pour tout réel x, on a
$$f''(x) = (x-1)(x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

(a) $(x-1)(x-3)$ est une expression du 2^{d} degré dont les racines sont $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. On peut donc construire le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$(x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :
- $\boxed{f'' \text{ est positive sur }]-\infty;1] \text{ et sur } [3;+\infty[\text{, donc } f \text{ est convexe sur ces intervalles ;}}$
- $\boxed{f'' \text{ est négative sur } [1;3]\text{, donc } f \text{ est concave sur cet intervalle.}}$

(b) La fonction f est convexe sur $[-1;1]$, donc elle est au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle. Elle est en particulier au-dessus de $(T) : y = -x + 1$, donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [-1;1], \text{ on a } f(x) \geq -x+1.}$$

Exercice 2

1. Il y a en tout 10 chaussures, et on en choisit 2 ; il y a donc

$$\boxed{\binom{10}{2} = 45 \text{ choix possibles.}}$$

2.
- Il y a 5 paires de chaussures, donc
$$\boxed{P(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}.}$$
- Obtenir un pied gauche et un pied droit, c'est choisir l'un des 5 pieds gauches et l'un des 5 pieds droits, donc
$$\boxed{P(B) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{5}{1}}{45} = \frac{5 \times 5}{45} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}.}$$
- L'événement C : "j'obtiens deux chaussures de la même couleur" peut s'écrire comme la réunion d'événements disjoints $C = C_1 \cup C_2$, où C_1 : "j'obtiens 2 chaussures noires" ($\binom{6}{2} = 15$ choix possibles, puisqu'il y a 6 chaussures noires en tout) ; et C_2 : "j'obtiens 2 chaussures blanches" ($\binom{4}{2} = 6$ choix possibles, puisqu'il y a 4 chaussures blanches). On a donc

$$\boxed{P(C) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{15}{45} + \frac{6}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.}$$

Exercice 3

1. - Entre 2023 et 2024, 15 % des adhérents du club A le quittent, donc il en reste 85 % ; par ailleurs, 10 % des adhérents du club B émigrent vers le club A. On a donc

$$\boxed{0,85\times 1\,700+0,10\times 1\,300=1\,575 \text{ adhérents dans le club A en 2024.}}$$

   - Comme le nombre total d'adhérents des deux clubs est stable (3 000 en tout), il y a

$$\boxed{3\,000-1\,575=1\,425 \text{ adhérents dans le club B en 2024.}}$$

2. Le nombre total d'adhérents des deux clubs est toujours égal à 3 000, donc pour tout entier naturel n :

$$\boxed{a_n+b_n=3\,000.}$$

3. On reprend le raisonnement de la question 1 : pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1}=0,85a_n+0,10b_n.$$

Or $a_n+b_n=3\,000$, donc

$$a_{n+1}=0,85a_n+0,10\,(3\,000-a_n)=0,85a_n+0,10\times 3\,000-0,10a_n=0,75a_n+300.$$

Conclusion :

$$\boxed{a_{n+1}=0,75a_n+300.}$$

4. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$1\,200\leq a_{n+1}\leq a_n\leq 1\,700.$$

   - **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1\,700 \\ a_1 &= 1\,575 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 1\,200\leq a_1\leq a_0\leq 1\,700 \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

   - **Hérédité.** Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$1\,200\leq a_{k+1}\leq a_k\leq 1\,700.$$

   On multiplie par $0,75$:

$$1\,200\times 0,75\leq a_{k+1}\times 0,75\leq a_k\times 0,75\leq 1\,700\times 0,75$$
$$900\leq 0,75a_{k+1}\leq 0,75a_k\leq 1\,275.$$

   Puis on ajoute 300 :

$$900+300\leq 0,75a_{k+1}+300\leq 0,75a_k+300\leq 1\,275+300$$
$$1\,200\leq a_{k+2}\leq a_{k+1}\leq 1\,575.$$

   La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
   - **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc

$$\boxed{\mathscr{P}_n \text{ est vraie pour tout } n\in\mathbb{N}.}$$

   (b) D'après la question précédente :
   - $a_{n+1}\leq a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - $a_n\geq 1\,200$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 200.

Or d'après le théorème de limite monotone, toute suite décroissante minorée converge, donc

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1\,200$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,200 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= (0,75a_n + 300) - 1\,200 && \text{(qu°3)}\\
&= 0,75a_n - 900 && \text{(calcul)}\\
&= 0,75\left(a_n - \frac{900}{0,75}\right) && \text{(factorisation)}\\
&= 0,75\,(a_n - 1\,200) && \text{(calcul)}\\
&= 0,75v_n && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}
\end{aligned}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,75v_n$, donc

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = 0,75.}$$

   (b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,75$, et $v_0 = a_0 - 1\,200 = 1\,700 - 1\,200 = 500$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n.}$$

   (c) Enfin $v_n = a_n - 1\,200$ donc

$$\boxed{a_n = v_n + 1\,200 = 500 \times 0,75^n + 1\,200.}$$

6. (a) $-1 < 0,75 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$; et donc, par opération sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(500 \times 0,75^n + 1\,200\right) = 500 \times 0 + 1\,200 = 1\,200.$$

   Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 1\,200.}$$

   (b) Sur le long terme, le nombre d'adhérents du club A devrait se rapprocher de 1 200.

7. (a) On complète le programme Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil():
    n=0
    A=1700
    while A>=1280:
        n=n+1
        A=0.75*A+300
    return n
```

   (b) On utilise la formule de la question 5.(c). On cherche par tâtonnement le plus petit entier naturel n tel que $a_n < 1\,280$. On obtient

$$a_6 \approx 1\,289 \qquad \text{et} \qquad a_7 \approx 1\,267.$$

   Conclusion :

   La fonction seuil renvoie la valeur 7.