Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250\times 6}{4} = \frac{1\,500}{4} = 375$ g de farine, $\frac{500\times 6}{4} = \frac{3\,000}{4} = 750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6\times 125 = 750$ g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai $\frac{750\times 2}{1\,000} = \frac{1\,500}{1\,000} = 1{,}5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes[1].

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra $\frac{60\times 45}{20} = \frac{\cancel{20}\times 3\times 45}{\cancel{20}} = 135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135 = 120+15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4\times 30\div 5 = 24$ pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7\times 24}{6} = \frac{7\times 4\times\cancel{6}}{\cancel{6}} = 28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

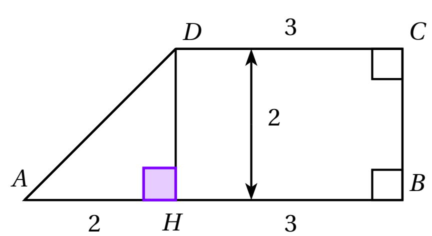
Stéphane nage $\frac{60\times 0{,}5}{3} = \frac{30}{3} = 10$ min, puis il court $\frac{60\times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5+0{,}5 = 5{,}5$ km, en $10+20 = 30$ min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60\times 5{,}5}{30} = \frac{\cancel{30}\times 2\times 5{,}5}{\cancel{30}} = 11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

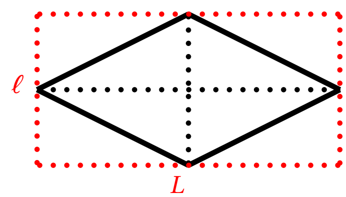
- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD, d'aire $\frac{B\times h}{2} = \frac{2\times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6+2=8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

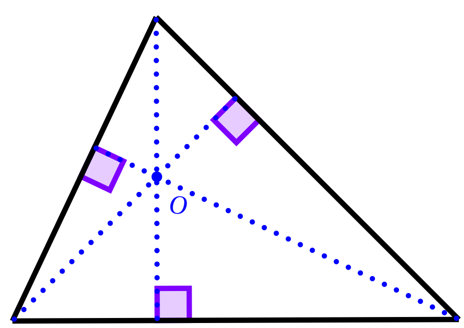
$$\mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(5+3)\times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L, donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

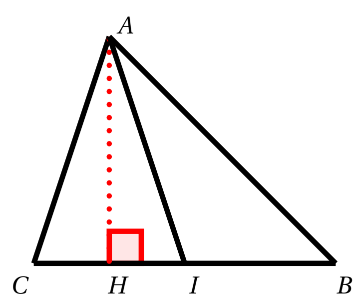


Exercice 5 **Rappels :**

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA, donc

$$\mathscr{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2} \qquad \mathscr{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I et le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7

1. La négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Il existe un homme immortel.

2. La négation de

Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

est

Tous les desserts sont sucrés à la cantine.

Remarque : Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe » , et réciproquement ; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

3. La négation de

Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

est

Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

est

Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni... ni... » est « ou ». Donc la négation de

Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

est

Chloé aime les fraises ou les framboises.

Exercice 8

1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par } 5}_{\text{A}}\text{, alors } \underbrace{\text{il est multiple de } 5}_{\text{B}}.$$

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b)
- L'implication contraposée est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de } 5}_{\text{non B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il ne se termine pas par } 5}_{\text{non A}}.$$

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

- L'implication réciproque est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de } 5}_{\text{B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il se termine par } 5}_{\text{A}}.$$

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par } 0}_{\text{A}}\text{, alors } \underbrace{\text{il est multiple de } 10}_{\text{B}}.$$

et sa réciproque

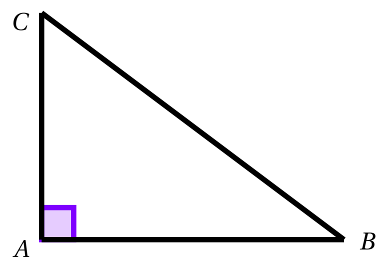
$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de } 10}_{\text{B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il se termine par } 0}_{\text{A}}.$$

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. **Théorème de Pythagore.**

$$\text{Si } ABC \text{ est rectangle en } A, \text{ alors } BC^2 = AB^2 + BC^2.$$



2. **Théorème contraposé de Pythagore.**

$$\text{Si } BC^2 \neq AB^2 + BC^2, \text{ alors } ABC \text{ n'est pas rectangle en } A.$$

3. **Théorème réciproque de Pythagore.**

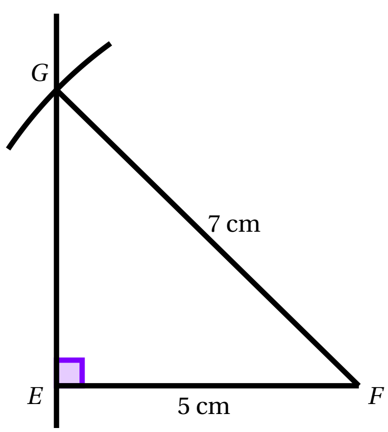
$$\text{Si } BC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ alors } ABC \text{ est rectangle en } A.$$

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E.
- Un arc de cercle de centre F, de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G.



D'après **le théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

$$\begin{aligned} FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\ 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\ 49 &= 25 + EG^2 \\ 49 - 25 &= EG^2 \\ \sqrt{24} &= EG \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

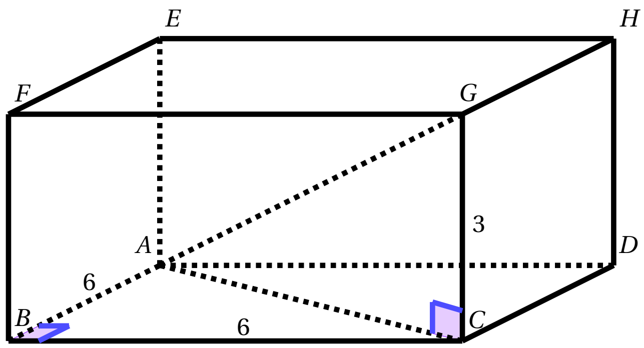
⚠Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A.
   On calcule :

$$\left.\begin{aligned} &BC^2 = 6^2 = 36 \\ &AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{aligned}\right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

   D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$
$$AC^2 = 36 + 36$$
$$AC^2 = 72$$

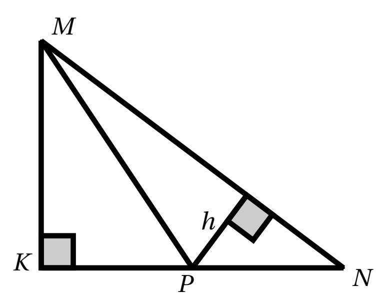
(Inutile de donner AC !)

Dans ACG rectangle en C,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$
$$AG^2 = 72 + 3^2$$
$$AG^2 = 72 + 9$$
$$AG^2 = 81$$
$$AG = \sqrt{81} = 9$$

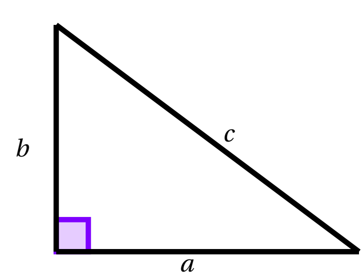
Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1,2$ cm.



1. $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3 \text{ cm}^2$.
2. On a aussi $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN \times 3}{2}$, soit $\cancel{3} \times 2 = PN \times \cancel{3}$; et donc $PN = 2$ cm.
3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN, puis KP et MP.
   ⚠On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.
   - Pour KN, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN. On obtient $KN = 4$ cm.
   - $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
   - Enfin, pour calculer PM, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP. On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b, l'hypoténuse mesure c.



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

$$\text{Pour tous nombres positifs } a \text{ et } b,\ \sqrt{a^2 + b^2} = a + b.$$

est FAUSSE ! Voici deux justifications :

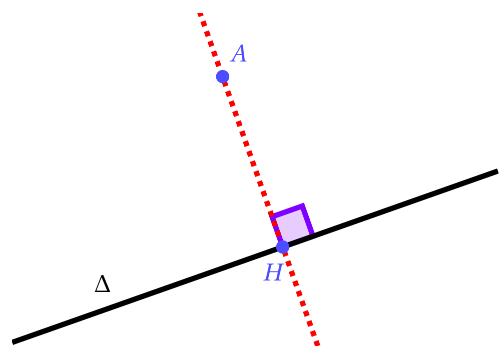
- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{est différent de} \qquad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2 + b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a + b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

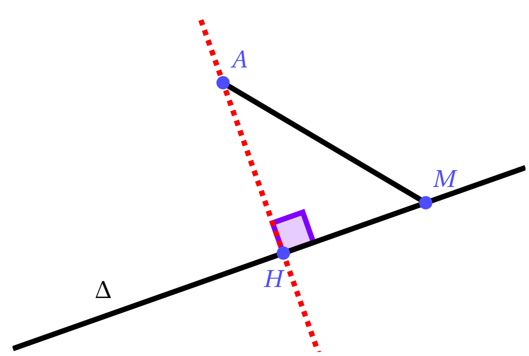
Exercice 14 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A. Elle coupe Δ en H.

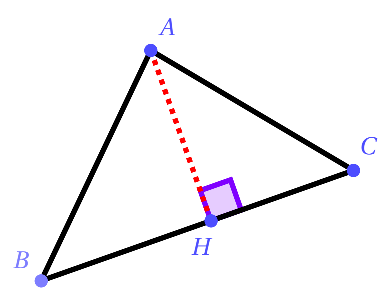


2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H, donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur[2] issue de A dans le triangle ABC.



2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur* ; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B \times h}{2}$ pour l'aire du triangle.

Exercice 15 On résout les équations :

$$\begin{aligned} x+7 &= 18 \\ x+\cancel{7}-\cancel{7} &= 18-7 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

La solution est $x=11$

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 19 \\ 3x+\cancel{4}-\cancel{4} &= 19-4 \\ 3x &= 15 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{15}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La solution est $x=5$.

$$\begin{aligned} 3,5x-9 &= 5 \\ 3,5x-\cancel{9}+\cancel{9} &= 5+9 \\ 3,5x &= 14 \\ \frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}} &= \frac{14}{3,5} \\ x &= \frac{14}{3,5} \end{aligned}$$

Or $\frac{14}{3,5}=\frac{14\times2}{3,5\times2}=\frac{28}{7}=4$, donc la solution est $x=4$.

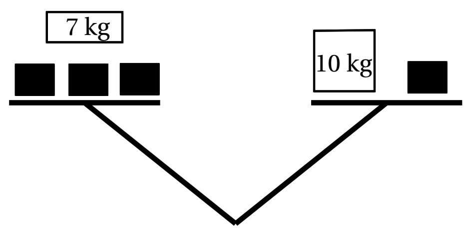
$$\begin{aligned} x+1 &= -2x-5 \\ x+1+2x &= \cancel{-2x}-5+\cancel{2x} \\ 3x+1 &= -5 \\ 3x+\cancel{1}-\cancel{1} &= -5-1 \\ 3x &= -6 \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{-6}{3} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

La solution est $x=-2$.

$$\begin{aligned} -2x+4 &= 3x-6 \\ -2x+4-3x &= \cancel{3x}-6-\cancel{3x} \\ -5x+4 &= -6 \\ -5x+\cancel{4}-\cancel{4} &= -6-4 \\ -5x &= -10 \\ \frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} &= \frac{-10}{-5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solution est $x=2$.

Exercice 16 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M+7=10+M.$$

On la résout :

$$\begin{aligned} 3M+7-M &= 10+\cancel{M}-\cancel{M} \\ 2M+7 &= 10 \\ 2M+\cancel{7}-\cancel{7} &= 10-7 \\ 2M &= 3 \\ \frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}} &= \frac{3}{2} \\ M &= 1,5 \end{aligned}$$

Conclusion : la solution est $M=1,5$.

Exercice 17 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15\,000-x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15\times x+25\times(15\,000-x).$$

   Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation

$$15x+25(15\,000-x)=295\,000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned}
15x + 25(15000 - x) &= 295000 \\
15x + 25 \times 15000 + 25 \times (-x) &= 295000 \\
15x + 375000 - 25x &= 295000 \\
-10x + 375000 &= 295000 \\
-10x + \cancel{375000} \cancel{-375000} &= 295000 - 375000 \\
-10x &= -80000 \\
\frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}} &= \frac{-80000}{-10} \\
x &= 8000.
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a $x = 8000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 18

$$\begin{aligned}
&A = \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3\times \cancel{3}}{2\times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\
&B = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3\times 3}{4\times 3} - \frac{1\times 2}{6\times 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12} \\
&C = 2 + \frac{1}{5} = \frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{2\times 5}{1\times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \\
&D = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3\times 5}{10\times 6} = \frac{15}{60} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{15}\times 4} = \frac{1}{4} \\
&E = 2\times\frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{2\times 5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{10\times 3}{6\times 3} - \frac{4\times 2}{9\times 2} = \frac{30}{18} - \frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11\times \cancel{2}}{9\times \cancel{2}} = \frac{11}{9} \\
&F = 4 - 3\times\frac{5}{6} = \frac{4}{1} - \frac{3\times 5}{6} = \frac{4\times 6}{1\times 6} - \frac{15}{6} = \frac{24}{6} - \frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3\times \cancel{3}}{2\times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\
&G = \frac{6}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{6\times 15}{10\times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9\times \cancel{10}}{8\times \cancel{10}} = \frac{9}{8} \\
&H = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\times 2}{3\times 3} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

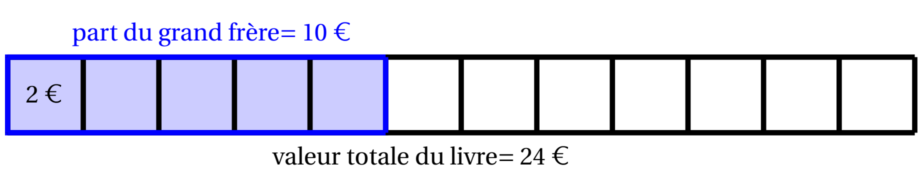
Exercice 19 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1\times 4}{3\times 4} + \frac{1\times 3}{4\times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à

$$\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12\times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24\text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5 \times 2 = 10$ € ; et la valeur totale du livre est $12 \times 2 = 24$ €.



Exercice 20

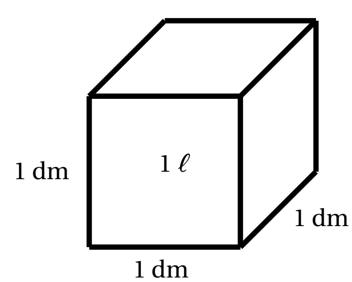
$$A = \frac{2^{15}\times 3^6}{2^{12}\times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}}\times\frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12}\times 3^{6-4} = 2^3\times 3^2 = 8\times 9 = 72$$
$$B = \frac{5^3\times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$
$$C = \frac{2^{18}}{8\times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3\times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$
$$D = \frac{6^6}{2^5\times 3^4} = \frac{(2\times 3)^6}{2^5\times 3^4} = \frac{2^6\times 3^6}{2^5\times 3^4} = \frac{2^6}{2^5}\times\frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5}\times 3^{6-4} = 2^1\times 3^2 = 2\times 9 = 18$$
$$E = \frac{\left(10^4\right)^3}{10^8} = \frac{10^{4\times 3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$
$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2\times 5}}{2^{3\times 3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$
$$G = \frac{10^{10}+10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7}+\frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7}+10^{8-7} = 10^3+10^1 = 1\,000+1 = 1\,001$$

Exercice 21 Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.
On rappelle avant cela que $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \underbrace{0,00}_{\text{3 zéros}}1$, donc multiplier un nombre par 10^{-3} revient à décaler la virgule de 3 rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour 10^{-2}).

$$A = 35,4\times 10^{-3} \qquad = 0,0354$$
$$B = 0,034 \qquad = 0,0340$$
$$C = 3,6\times 10^{-2} = 0,036 \qquad = 0,0360$$
$$D = \frac{355}{10^4} = \frac{355}{10\,000} \qquad = 0,0355$$
$$E = \frac{7}{60}\times\frac{3}{10} = \frac{7\times 3}{60\times 10} = \frac{7\times\cancel{3}}{20\times\cancel{3}\times 10} = \frac{7}{200} \qquad = 0,0350$$

Conclusion : $B < E < A < D < C$.

Exercice 22 Avant de commencer, il est utile de se rappeler que 10 cm=1 dm ; et que 1 ℓ = 1 dm^3. Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure 1 dm sur 1 dm sur 1 dm, ou encore 10 cm sur 10 cm sur 10 cm (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



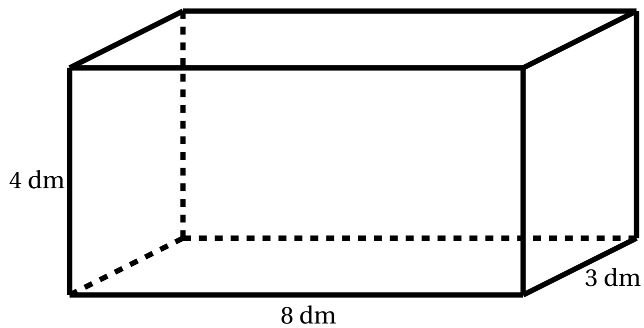
On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm, la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm. On dispose d'un robinet dont le débit est de 6 litres par minute.

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

$$\text{largeur} = 8 \text{ dm}, \qquad \text{profondeur} = 3 \text{ dm}, \qquad \text{hauteur} = 4 \text{ dm},$$

   donc son volume est

$$8\times 3\times 4 = 96\ \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de 6 ℓ/min, donc il faut $96 \div 6 = 16$ min pour remplir les 96 ℓ de l'aquarium.

Exercice 23 On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\times 100\times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801 \qquad \text{(IR n°2)}$$
$$103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2\times 100\times 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$71\times 69 = (70+1)(70-1) = 70^2 - 1^2 = 4\,900 - 1 = 4\,899 \qquad \text{(IR n°3)}$$
$$2{,}05^2 = (2+0{,}05)^2 = 2^2 + 2\times 2\times 0{,}05 + 0{,}05^2 = 4 + 0{,}2 + 0{,}0025 = 4{,}2025 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$4{,}3\times 3{,}7 = (4+0{,}3)(4-0{,}3) = 4^2 - 0{,}3^2 = 16 - 0{,}09 = 15{,}91 \qquad \text{(IR n°3)}$$

Remarque : Comment calculer $0{,}05^2$ de tête ? Comme $0{,}05^2 = 0{,}05\times 0{,}05$ et que $0{,}05$ a deux chiffres après la virgule, $0{,}05^2$ en aura $2+2=4$. Il ne reste alors plus qu'à calculer $5^2 = 25$ pour pouvoir conclure : $0{,}05^2 = 0{,}0025$.
Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0{,}05\times 0{,}0006 = 0{,}000030,$$

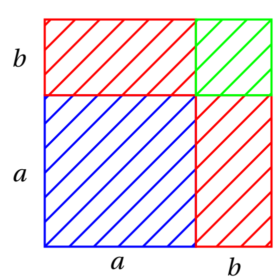
puisque $6\times 5 = 30$ et que le résultat doit avoir $2+4=6$ chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

Exercice 24 Le côté du grand carré mesure $a+b$, donc son aire est $(a+b)^2$.
D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté a, donc d'aire a^2 (hachuré en bleu), un carré de côté b, donc d'aire b^2 (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés a et b, donc d'aires $a\times b$ (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2\times a\times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exercice 25 1. Pour comparer les fractions $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$, on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4\times 6}{5\times 6} = \frac{24}{30} \qquad , \qquad b = \frac{5\times 5}{6\times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme $24 < 25$, on obtient $a < b$.

2. On compare à présent $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$. On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

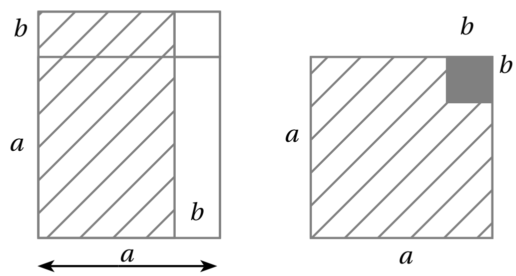
$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \qquad , \qquad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

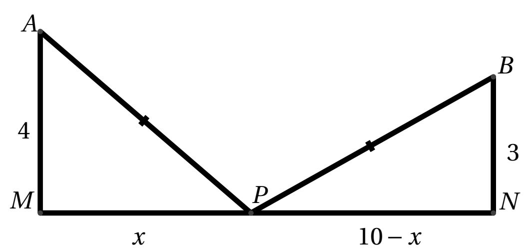
$$524 \times 526 = (525-1)(525+1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à $525 \times 525 = 525^2$, donc $c < d$.

Exercice 26 La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés $(a-b)$ et $(a+b)$, donc son aire est égale à $(a-b)(a+b)$.
Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté a duquel on a retiré un carré de côté b. Son aire est donc égale à $a^2 - b^2$.
L'identité remarquable n°3 nous dit que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



Exercice 27



On pose $MP = x$, on a donc $PN = MN - MP = 10 - x$.
D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles AMP et NBP :

$$\begin{aligned} AP^2 &= MP^2 + MA^2 \\ AP^2 &= x^2 + 4^2 \\ AP^2 &= x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BP^2 &= PN^2 + BN^2 \\ BP^2 &= (10-x)^2 + 3^2 \\ BP^2 &= 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \qquad &\text{(on développe grâce à l'IR n°2)} \\ BP^2 &= 100 - 20x + x^2 + 9 \\ BP^2 &= x^2 - 20x + 109 \end{aligned}$$

On sait que $AP = BP$, donc $AP^2 = BP^2$; et d'après les deux calculs ci-dessus :

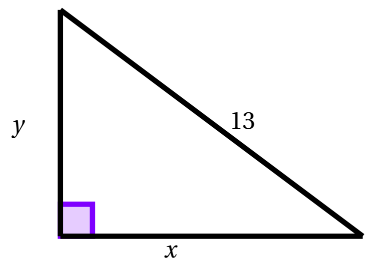
$$\cancel{x^2} + 16 = \cancel{x^2} - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned}
16 &= -20x+109 \\
16-109 &= -20x+\cancel{109}\cancel{-109} \\
\frac{-93}{-20} &= \frac{\cancel{-20}x}{\cancel{-20}} \\
4,65 &= x
\end{aligned}$$

Conclusion : $MP = 4,65$.

Exercice 28



1. D'après le théorème de Pythagore,
$$x^2+y^2 = 13^2 = 169.$$
D'après l'IR n°1, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$. Or $x^2+y^2 = 169$, et $\frac{x\times y}{2} = 30$, puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit $x\times y = 30\times 2 = 60$, puis
$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 169+2\times 60 = 169+120 = 289.$$
Finalement, comme $(x+y)^2 = 289$,
$$x+y = \sqrt{289} = 17.$$
2. On utilise cette fois l'IR n°2 :
$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = 169-2\times 60 = 169-120 = 49.$$
Or $x-y \geq 0$, puisque x est plus grand que y, donc
$$x-y = \sqrt{49} = 7.$$
⚠Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir $x-y = -7$!!!

On sait à présent que $x+y = 17$ et $x-y = 7$. On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit x :
$$\begin{aligned}
(x+y)+(x-y) &= 17+7 \\
x+\cancel{y}+x-\cancel{y} &= 24 \\
\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{24}{2} \\
x &= 12
\end{aligned}$$
Enfin, comme $x+y = 17$, on trouve $y = 17-x = 17-12 = 5$.
Conclusion : $x = 12$, $y = 5$.

2 Nombres réels

Exercice 29 1. $-7 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**

Justification : $-7 = \dfrac{-7}{1}$, donc $-7 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

2. $-7 \in \mathbb{N}$. **FAUX.**
Justification : -7 est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{Z}$. **FAUX.**

Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.

Remarque : Pour obtenir $\dfrac{13}{4} = 3,25$ sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ② Poser la division – ③ Remarquer que $\dfrac{13}{4} = \dfrac{12}{4} + \dfrac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$.

4. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{D}$. **VRAI.**

Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.

5. $5,824 \in \mathbb{D}$. **VRAI.**

Justification : $5,824$ a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal

6. $5,824 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**

Justification n°1 : $5,824$ est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$).

Justification n°2 : $5,824 = \dfrac{5\,824}{1\,000}$, donc $5,824 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

7. $\dfrac{10}{6} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**

Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0 & 6 \\ \cline{2-2} -\ \underline{\ \ 6} & 1,6 \\ 4\ 0 & \\ -\ \underline{3\ 6} & \\ 4 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{10}{6} = 1,666\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

8. $\dfrac{17}{11} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**

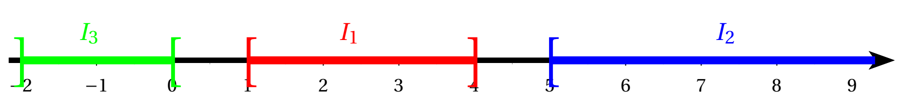
Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 1\ 7 & 1\ 1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{1\ 1} & 1,5\ 4 \\ 6\ 0 & \\ -\ \underline{5\ 5} & \\ 5\ 0 & \\ -\ \underline{4\ 4} & \\ 6 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{17}{11} = 1,5454\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

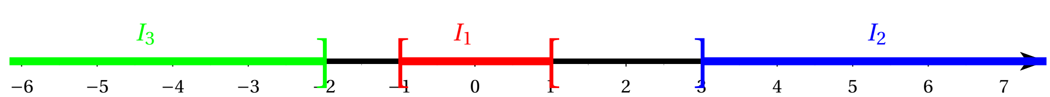
Exercice 30 1.

$$I_1 = [1;4] \qquad I_2 = [5;+\infty[\qquad I_3 =]-2;0[$$



2.

$$I_1 = [-1;1[\qquad I_2 =]3;+\infty[\qquad I_3 =]-\infty;-2]$$



Exercice 31 1. $5 \in [2;6[$

2. $-2 \notin]-2;1]$
3. $\pi \in]3;4[$ (on rappelle que $\pi \approx 3,14$)

Exercice 32 1. $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$

2. $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
3. $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
4. $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
5. $|7-4| = |3| = 3$
6. $|4-7| = |-3| = 3$
7. $|4-3| + |5-6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
8. $|5-11| + 2 \times |7-8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
9. $|8-5| \times |7-10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
10. $|15-6| - 4 \times |1-4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

Exercice 33 1. On résout l'équation $|x-2| = 3$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que

$$x-2=3 \qquad \text{ou que} \qquad x-2=-3$$

Donc

$$x-\cancel{2}+\cancel{2}=3+2 \qquad \text{ou} \qquad x-\cancel{2}+\cancel{2}=-3+2$$
$$x=5 \qquad \text{ou} \qquad x=-1$$

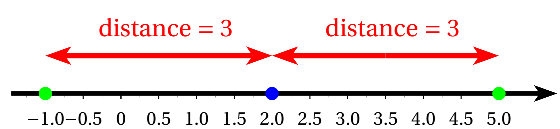
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=5$ et $x=-1$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que la distance entre x et 2 est égale à 3.



On voit qu'il y a deux solutions : $x=5$ et $x=-1$.

2. On résout l'équation $|x-1| = 4$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 4 sont 4 et -4.
Donc dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que

$$x-1=4 \qquad \text{ou que} \qquad x-1=-4$$

Donc

$$x-\cancel{1}+\cancel{1}=4+1 \qquad \text{ou} \qquad x-\cancel{1}+\cancel{1}=-4+1$$
$$x=5 \qquad \text{ou} \qquad x=-3$$

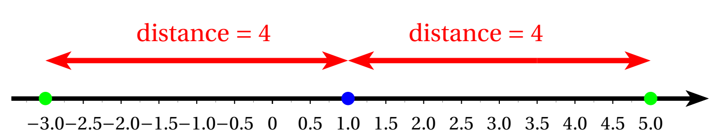
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=5$ et $x=-3$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que la distance entre x et 1 est égale à 4.



On voit qu'il y a deux solutions : $x=5$ et $x=-3$.

3. On résout l'équation $|x+2| = 2$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 2 sont 2 et -2.
Donc dire que

$$|x+2| = 2$$

revient à dire que

$$x+2 = 2 \qquad \text{ou que} \qquad x+2 = -2$$

Donc

$$\begin{array}{lll} x+\cancel{2}-\cancel{2} = 2-2 & \text{ou} & x+\cancel{2}-\cancel{2} = -2-2 \\ x = 0 & \text{ou} & x = -4 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

Méthode n°2 : avec la distance.

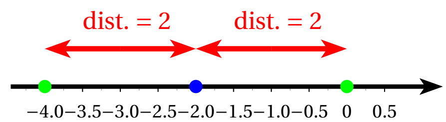
Il y a une vraie difficulté : l'égalité $|x+2| = 2$ se réécrit

$$|x-(-2)| = 2$$

(il faut absolument faire apparaître un « − » pour pouvoir interpréter en termes de distance). Donc dire que

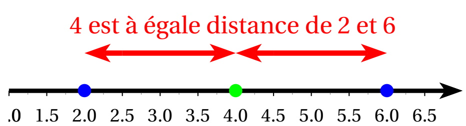
$$|x+2| = 2$$

revient à dire que la distance entre x et -2 est égale à 2.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

4. On résout l'équation $|x-2| = |x-6|$.
   Conformément à l'indication, on travaille avec la distance : dire que $|x-2| = |x-6|$, c'est dire que la distance entre x et 2 est la même que la distance entre x et 6. Autrement dit, x est à égale distance de 2 et de 6. Il y a un seul nombre x qui convienne : le milieu de l'intervalle $[2;6]$, c'est-à-dire $x = 4$.



   Conclusion : il y a une seule solution, $x = 4$.

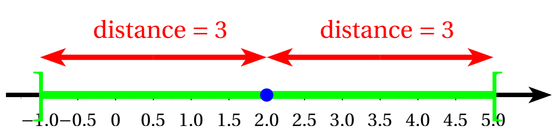
Exercice 34 Commençons par deux exemples :

- si $x = 3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$.
- si $x = -3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

On comprend que quand x est positif, on aura toujours $\sqrt{x^2} = x = |x|$; tandis que dans le cas où x est négatif, le signe − « disparaît » lorsqu'on élève au carré, ce qui donne finalement $\sqrt{x^2} = |x|$.
Autrement dit, quel que soit x (y compris si $x = 0$), on a l'égalité

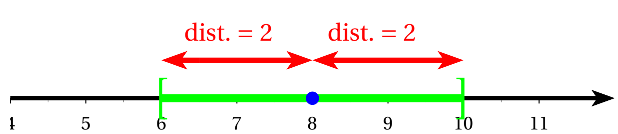
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 35 1. Dire que $|x-2| < 3$, c'est dire que la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 3. On voit que les x qui conviennent sont tous les nombres de l'intervalle $]-1;5[$ (extrémités exclues, puisque l'inégalité est stricte).



2. Les points de l'intervalle ci-dessous sont les nombres x dont la distance à 8 est inférieure ou égale à 2 (donc extrémités incluses) ; autrement dit, ce sont les nombres x tels que

$$|x-8| \leq 2.$$



Exercice 36 Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. On part de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on élève au carré et on multiplie par q^2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}^2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ 2 &= \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2 \times q^2 &= \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \times \cancel{q^2} \\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

2. Commençons par un exemple : prenons un nombre qui « se termine par 4 » (donc le chiffre des unités est 4). Le carré de ce nombre va « se terminer par 6 », puisque $4^2 = 16$. Autrement dit, le chiffre des unités du carré est 6.
   Avec la même technique, on voit que si le chiffre des unités est 9, celui du carré est 1 (puisque $9^2 = 81$) ; etc. On remplit ainsi le tableau :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

3. Pour avoir le chiffre des unités de $2q^2$, il suffit de reprendre la deuxième ligne du tableau précédent et de multiplier par 2. Par exemple, si le chiffre des unités de q est 7, alors celui de q^2 est 9 ; et celui de $2q^2$ est 8 (puisque $2 \times 9 = 18$). On remplit ainsi le nouveau tableau :

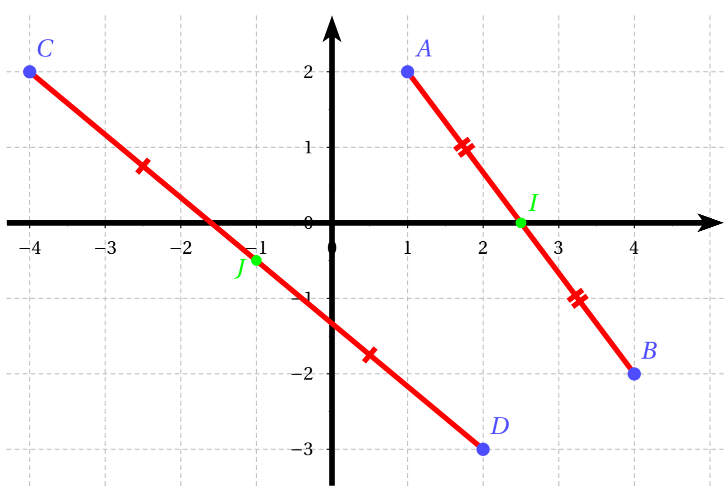
Chiffre des unités de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

4. D'après la question 1, $2q^2 = p^2$. Les nombres $2q^2$ et p^2 étant égaux, ils ont le même chiffre des unités. Or dans nos deux tableaux, le seul chiffre en commun des deuxièmes lignes est le 0 ; et on l'obtient lorsque le chiffre des unités de p est 0, et lorsque le chiffre des unités de q est 0 ou 5.
5. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : on peut donc l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. D'après la question précédente, p se termine par 0 et q se termine par 0 ou 5. Mais alors p et q sont tous deux multiples de 5, et donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite au départ.

   Conclusion : supposant que $\sqrt{2}$ était rationnel, on aboutit à une absurdité ; c'est donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3 Géométrie repérée

Exercice 37 1.



(a) On a $A(\underset{x_A}{1} ; \underset{y_A}{2})$ et $B(\underset{x_B}{4} ; \underset{y_B}{-2})$. On calcule les coordonnées de I :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) \qquad I\left(\frac{5}{2}; \frac{0}{2}\right) \qquad I\,(2,5;0)\,.$$

(b)

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

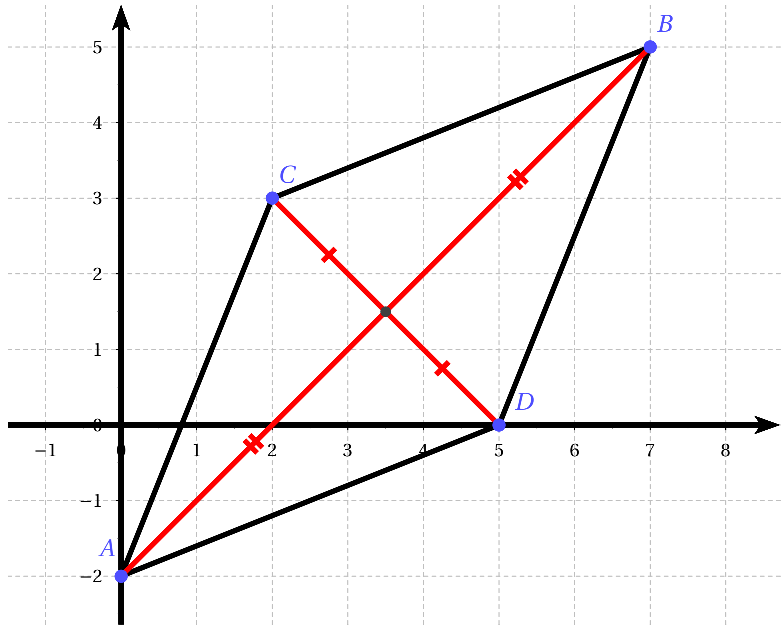
2. (a) On a $C(\underset{x_C}{-4}\,;\,\underset{y_C}{2})$ et $D(\underset{x_D}{2}\,;\,\underset{y_D}{-3})$. On calcule les coordonnées de J :

$$J\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)\qquad J\left(\frac{-4+2}{2};\frac{2+(-3)}{2}\right)\qquad J\left(\frac{-2}{2};\frac{-1}{2}\right)\qquad J(-1;-0,5)\,.$$

(b)

$$CD=\sqrt{(x_D-x_C)^2+\left(y_D-y_C\right)^2}=\sqrt{(2-(-4))^2+(-3-2)^2}=\sqrt{6^2+(-5)^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}.$$

Exercice 38 1.



2. On calcule les coordonnées de M :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)\qquad M\left(\frac{0+7}{2};\frac{-2+5}{2}\right)\qquad M\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)\qquad M(3,5;1,5)\,.$$

Puis celles de M' :

$$M'\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)\qquad M'\left(\frac{2+5}{2};\frac{3+0}{2}\right)\qquad M'\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)\qquad M'(3,5;1,5)\,.$$

3. On constate dans la question précédente que $M=M'$, les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ du quadrilatère $ACBD$ se coupent donc en leur milieu. D'après une propriété du collège, cela entraîne que $ACBD$ est un parallélogramme, puis que ses côtés opposés sont de même longueur : $BD=AC$, $CB=AD$.

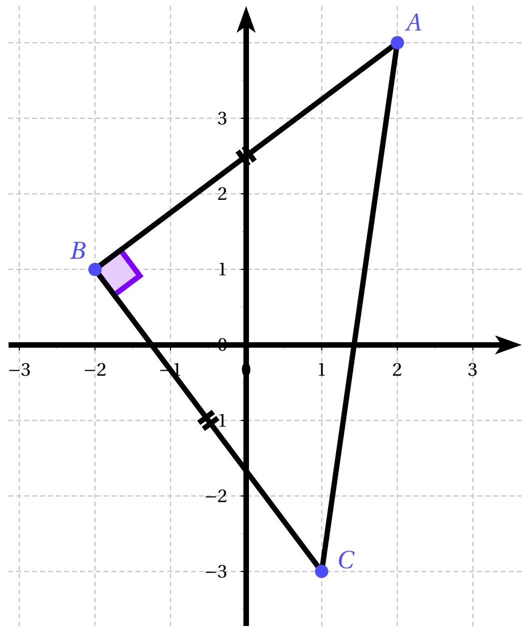
4. On calcule les longueurs AC et CB :
   - $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$
   - $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+\left(y_B-y_C\right)^2}=\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}.$

   On constate que $AC=CB$, donc d'après la question précédente :

$$BD=AC=CB=AD.$$

   Conclusion : le quadrilatère $ACBD$ a quatre côtés de même longueur, donc c'est un losange.

Exercice 39



On calcule la longueur des trois côtés :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$AB = BC$, donc ABC est isocèle en B. On utilise le théorème réciproque de Pythagore pour prouver qu'il est rectangle :

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Exercice 40 1. • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}.$

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AC^2 + BC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{10}^2 = 40 + 10 = 50 \end{array}\right\} AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en C.

2. D'après la formule du cours :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{6+1}{2}; \frac{0+5}{2}\right) \qquad I\,(3,5\,;\,2,5)\,.$$

3. Le triangle ABC étant rectangle en C, le milieu I de l'hypoténuse $[AB]$ est le centre de Γ (rappel de l'énoncé) ; et le rayon de Γ est

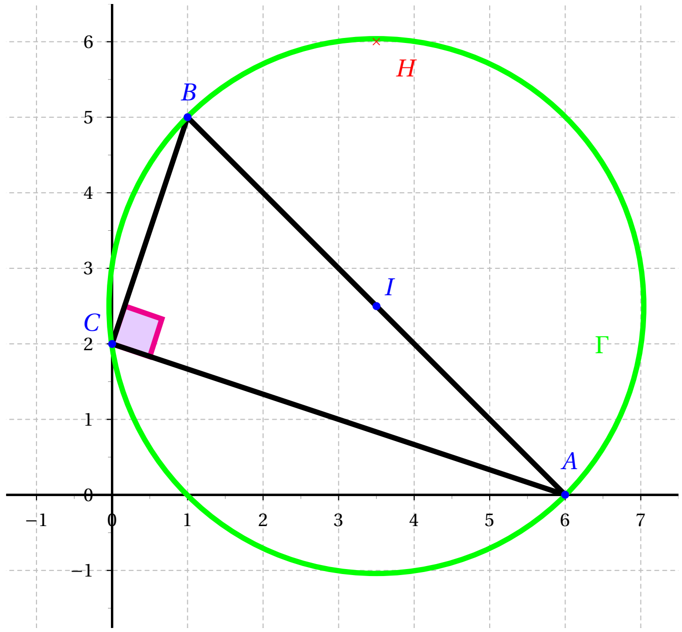
$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + \left(y_A - y_I\right)^2} = \sqrt{(6-3,5)^2 + (0-2,5)^2} = \sqrt{2,5^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{6,25+6,25} = \sqrt{12,5}.$$

4. Savoir si $H(3,5\,;\,6)$ appartient à Γ revient à savoir si la longueur IH est égale à r ou non. On calcule cette longueur avec la formule du cours :

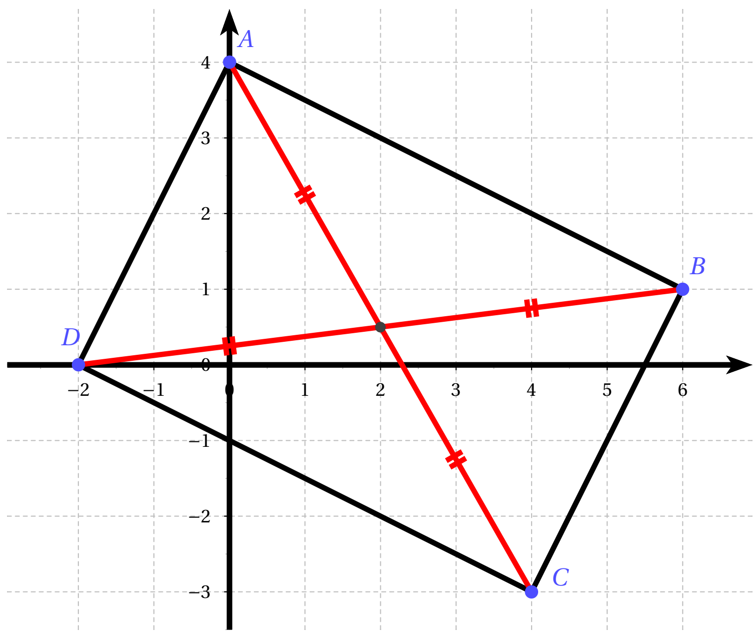
$$IH = \sqrt{(x_H - x_I)^2 + (y_H - y_I)^2} = \sqrt{(3,5-3,5)^2 + (6-2,5)^2} = \sqrt{0^2 + 3,5^2} = \sqrt{0+12,25} = \sqrt{12,25}.$$

Comme $\sqrt{12,25} \neq \sqrt{12,5}$, le point H n'appartient pas à Γ.

N.B. La figure est trompeuse, puisqu'on a l'impression que H est sur Γ. En réalité, si vous avez pris 1 cm comme unité graphique, le point H est à environ trois cheveux (au sens propre) du cercle.



Exercice 41



1. • Le milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \qquad \left(\frac{0+4}{2} ; \frac{4+(-3)}{2}\right) \qquad (2 ; 0,5).$$

   • Le milieu du segment $[BD]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_D}{2} ; \frac{y_B + y_D}{2}\right) \qquad \left(\frac{6+(-2)}{2} ; \frac{1+0}{2}\right) \qquad (2 ; 0,5).$$

   Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme (propriété du collège).

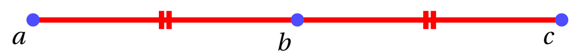
   ⚠Si vous donnez un nom aux milieux des diagonales **avant de faire les calculs**, donnez-leur des noms différents : avant de faire les calculs, on n'a pas encore prouvé que les milieux étaient les mêmes.

2. On calcule la longueur des diagonales :
   - $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$.
   - $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-2-6)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont de même longueur, donc c'est un rectangle (propriété du collège).

Exercice 42 1. Le symétrique de 2 par rapport à 5,5 est 9.

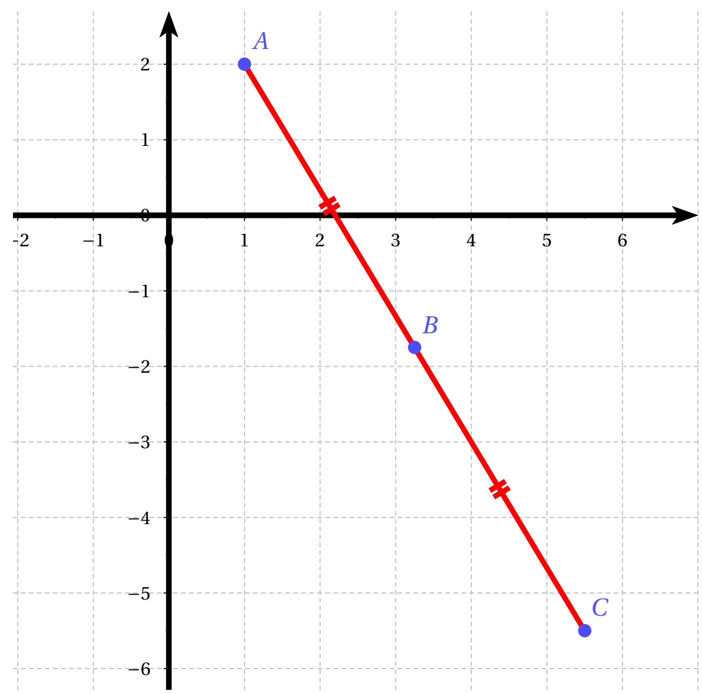
2. On généralise le travail de la question précédente : c est le symétrique de a par rapport à b lorsque b est le milieu du segment qui va de a à c.



Autrement dit $b = \frac{a+c}{2}$, ce qui donne $b\times 2 = \frac{a+c}{\cancel{2}}\times\cancel{2}$, soit $2b = a + c$; et donc

$$c = 2b - a.$$

3. On place C, symétrique du point A par rapport au point B.



Par définition d'une symétrie centrale, B est le milieu du segment $[AC]$, donc d'après la formule du cours pour le milieu d'un segment :

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad , \qquad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Autrement dit, en remplaçant avec les données de l'énoncé :

$$3,25 = \frac{1 + x_C}{2} \qquad , \qquad -1,75 = \frac{2 + y_C}{2}.$$

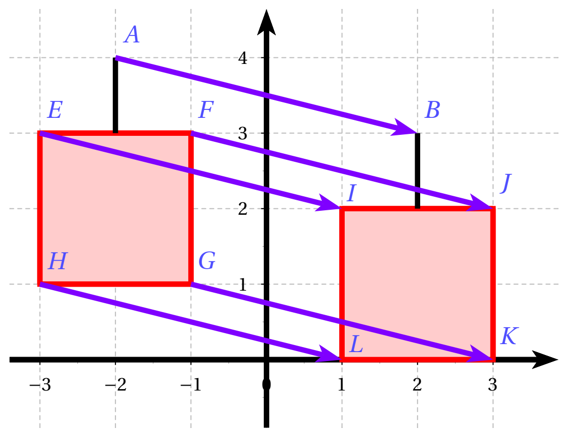
En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient

$$x_C = 2 \times 3,25 - 1 = 5,5 \qquad , \qquad y_C = 2 \times (-1,75) - 2 = -5,5.$$

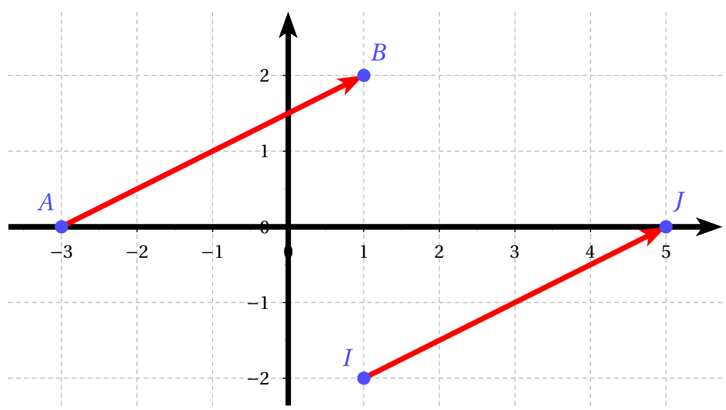
Conclusion : $C(5,5\ ;\ -5,5)$.

Exercice 43 Cet exercice d'introduction à la notion de vecteur appelle quelques commentaires :

1. La télécabine $EFGH$ glisse pour aboutir à la position $IJKL$. Ce déplacement est appelé « translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ».
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a été représenté en violet sur la figure, il est égal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{HL}$. On peut donc écrire
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{HL}.$$
3. Pour aller de A à B, on avance de 4 carreaux en abscisse et on descend de 1 carreau en ordonnée ; on dit que $\overrightarrow{AB}$ a pour abscisse 4 et pour ordonnée -1. On note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

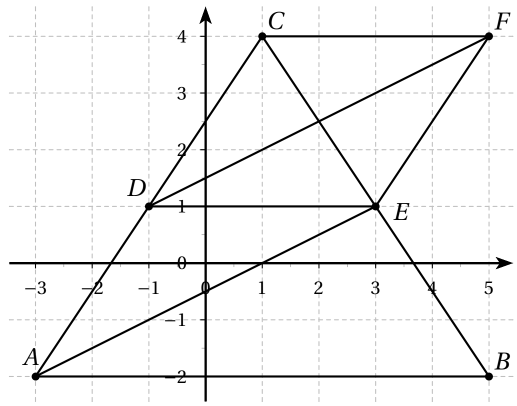


Exercice 44 1.



2. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\2-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$
3. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$:
$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}x_J - x_I\\y_J - y_I\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}5-1\\0-(-2)\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$
Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 45 On considère les points $A(-3;-2)$, $B(5;-2)$, $C(1;4)$, $D(-1;1)$, $E(3;1)$, $F(5;4)$.

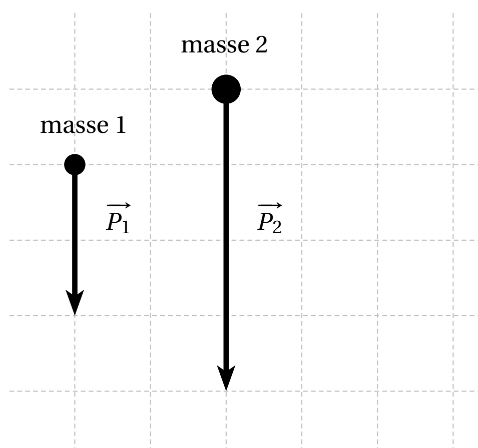


Il y a trop de possibilités pour que les justifie toutes. Je vais me contenter de donner un couple de vecteurs égaux, avec la justification; puis donner toutes les autres égalités possibles, mais sans les justifier :

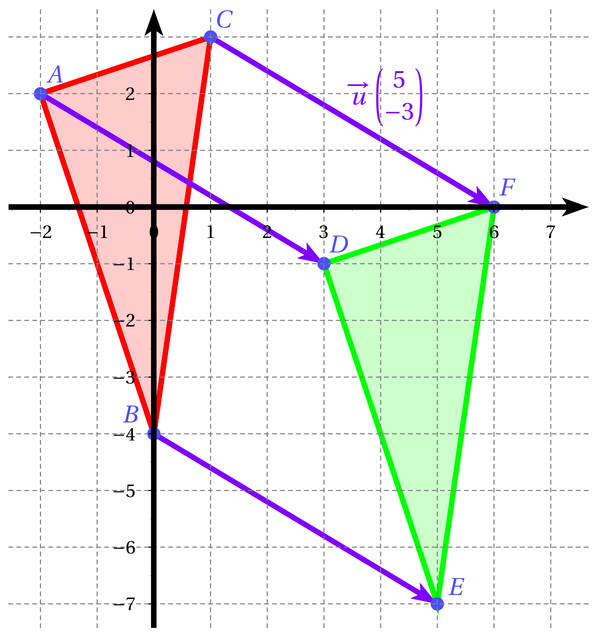
1. **Une égalité et sa justification.**
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$. En effet, ces vecteurs ont les mêmes coordonnées :
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. **Toutes les autres égalités.**
   $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ $\quad \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF}$ $\quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FD}$ $\quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB}$ $\quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BE}$

   ⚠Attention à l'ordre des lettres! Par exemple, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, mais $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{FE}$ (il y a un problème de sens : le vecteur $\overrightarrow{DC}$ « monte vers le haut et la droite »; tandis que $\overrightarrow{FE}$ « descend vers le bas et la gauche » – l'erreur se détecte aussi bien sûr en calculant les coordonnées).

Exercice 46 En physique, un vecteur représente une force, et la longueur (ou norme) du vecteur correspond à l'intensité de la force. L'égalité $\left\|\overrightarrow{P_2}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{P_1}\right\|$ signifie que la masse 2 a un poids deux fois plus important que celui de la masse 1.



Exercice 47 L'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ est le triangle DEF.



Exercice 48 Un voyageur de commerce (= un représentant) fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

Remarque : On peut penser que l'indemnité kilométrique sert à rembourser les frais de déplacement (par exemple si le représentant utilise sa propre voiture) ; et que la part fixe sert à payer les repas.

1. S'il fait 120 km dans la journée, le montant de la note de frais est de

$$30 + 120 \times 0,5 = 30 + 60 = 90 \text{ €}.$$

2. On note x le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et $f(x)$ le montant de la note de frais. On a alors

$$f(x) = 30 + x \times 0,5 = 0,5x + 30.$$

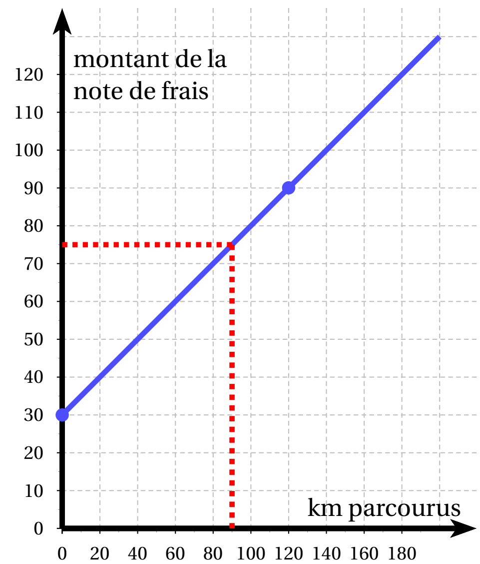
3. La fonction f est affine, puisque $f(x) = 0,5x+30$ (c'est bien une fonction de la forme $f(x) = ax+b$, avec $a = 0,5$ et $b = 30$). Sa courbe représentative est donc une droite, que l'on trace à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs ; par exemple :

x	0	120
$f(x)$	30	90

$$f(0) = 0,5 \times 0 + 30 = 30$$
$$f(120) = 0,5 \times 120 + 30 = 90$$

On place les points de coordonnées $(0;30)$ et $(120;90)$, puis on trace la droite – en réalité un segment, puisqu'on va de 0 à 200 en abscisses.

Remarque : On a choisi les valeurs 0 et 120, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs – l'avantage de 0, c'est que le calcul est facile ; et l'avantage de 120, c'est qu'on a déjà fait le calcul dans la question 1.



4. Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Pour déterminer le nombre de km parcourus dans la journée, il y a deux méthodes :
   - **Graphiquement.** On voit qu'il a parcouru 90 km (pointillés rouges) [3].
   - **Par le calcul.** On retire les frais fixes : $90 - 30 = 60$ € d'indemnité kilométrique. Puis, comme chaque km compte pour $0,5$ €, on divise : $45 \div 0,5 = 45 \times 2 = 90$ km. [4]

3. La méthode graphique est simple, mais la réponse pourrait être imprécise.
4. On peut aussi résoudre l'équation $0,5x + 30 = 75$.