Corrigé du devoir surveillé n°8

Exercice 1

1. On calcule les coordonnées des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\-3-(-1)\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-2\\2-(-1)\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$

   On en déduit
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 3\times 4 + (-2)\times 3 = 6.$$

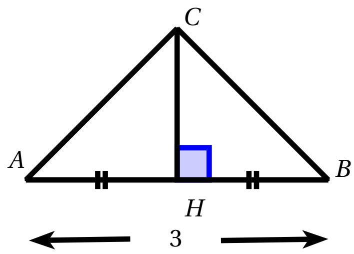
2. $AB = \sqrt{(5-2)^2+(-3-(-1))^2} = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$
3. On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6$.
   D'un autre côté,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}\\ &= \sqrt{13}\times 5\times\cos\widehat{BAC},\end{aligned}$$
   donc $\cos\widehat{BAC} = \frac{6}{\sqrt{13}\times 5}$.
   On en déduit : $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{13}\times 5}\right)$.

Exercice 2

1. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BE}$.
2. - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$, car $(AB)\perp(CB)$
   - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE} = AB\times BE = 2\times 4 = 8$, car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires et de même sens.
   - $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CB} = -BG\times CB = -4\times 2 = -8$ car $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraire.
   - $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$ car $(BG)\perp(BE)$.
3. D'après les questions précédentes :
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BE}\\ &= 0+8+(-8)+0\\ &= 0.\end{aligned}$$
   On en déduit que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

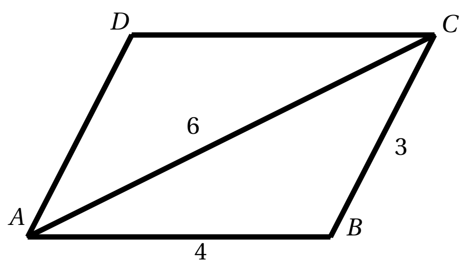
Exercice 3

1. ABC est isocèle en C et $AB = 3$.



   Le pied H de la hauteur issue de C dans le triangle ABC est le milieu de $[AB]$ (propriété des triangles isocèles), donc
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AH = 3\times 1,5 = 4,5.$$
   Remarque : On pouvait aussi utiliser la formulation avec les longueurs.

2. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AC = 6$, $AD = 3$.



   $ABCD$ étant un parallélogramme, $BC = AD = 3$, donc
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(4^2+6^2-3^2\right) = 21,5.$$