

Devoir surveillé n°2

- Le soin, la rédaction et l'orthographe seront pris en compte dans l'évaluation des copies.
- On demande aux élèves de rendre le sujet du devoir avec leur copie.

Exercice 1

5 points

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

On programme une machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes. On a donc en particulier $u_0 = 10$.

1. Justifier brièvement que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.
2. Recopier et compléter les pointillés dans la fonction suivante écrite en Python, de façon que l'instruction

```
suite(n)
```

renvoie la valeur de u_n .

```
def suite(n):  
    u=...  
    for i in range(...):  
        u=...  
    return u
```

3. On pose $z_n = u_n - 5$ pour tout entier naturel n .

Démontrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

5. En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que

$$u_n < 5,01.$$

Écrire sur votre copie les justifications utiles.

Exercice 2

3 points

On reprend la suite définie dans l'exercice 1 : $u_0 = 10$ et

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 1$$

pour tout entier naturel n .

Démontrer **par récurrence** que $u_n \geq 5$ pour tout entier naturel n .

Exercice 3

2 points

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$v_{n+1} = 2v_n - n.$$

Pour tout entier naturel n , on note \mathcal{P}_n la propriété

$$\ll v_n = 2^n + n + 1 \gg.$$

Démontrer que pour tout entier naturel k :

$$(\mathcal{P}_k \text{ vraie}) \implies (\mathcal{P}_{k+1} \text{ vraie}).$$

*Dit autrement, on vous demande de traiter uniquement la partie **hérédité** de la preuve par récurrence.*