



Exercices de Mathématiques

Table des matières

I.	Rappels de calcul et de géométrie	1
II.	Nombres réels	4
III.	Géométrie repérée	5
IV.	Études graphiques de fonctions	6
V.	Probabilités	9
VI.	Équations de droites	11
VII.	Pourcentages, taux d'évolution	13
VIII.	Opérations sur les vecteurs	14
IX.	Tableaux de signes	16
X.	Statistiques	17
XI.	Systèmes et équations de droites	19
XII.	Arithmétique et racines carrées	20
XIII.	Inégalités	21
XIV.	Fonctions de référence	22
XV.	Fractions et manipulation de formules	23
XVI.	Trigonométrie	24
XVII.	Calcul littéral	25
XVIII.	Problèmes	26

I. Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 (III)

1. Pour faire des crêpes pour 4 personnes, il faut 250 g de farine, $1/2$ L de lait et 4 œufs. Combien faut-il de chaque ingrédient si l'on fait des crêpes pour 6 personnes?
2. Combien payerai-je 6 yaourts de 125 g chacun, sachant que le prix au kg est de 2 €?
3. Combien de temps (en heures, minutes) mettrai-je pour parcourir 45 km à la vitesse de 20 km/h?
4. On a 7 florins en échange de 6 pistoles et 5 deniers en échange de 4 pistoles. Combien de florins aura-t-on en échange de 30 deniers?

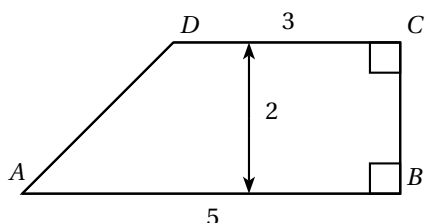
Exercice 2 (III)

Stéphane s'entraîne au triathlon. Il nage 500 m à la vitesse moyenne de 3 km/h, puis court 5 km à la vitesse moyenne de 15 km/h.

1. Combien de temps nage-t-il? Combien de temps court-il? On donnera les réponses en minutes.
2. Calculer la vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours.

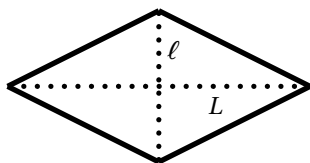
Exercice 3

Calculer l'aire du trapèze ci-dessous.



Exercice 4

Déterminer une formule pour l'aire du losange de diagonales ℓ et L .



Exercice 5

Illustrer par un schéma la propriété suivante :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 6 (III)

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Prouver que les triangles BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7

Écrire la négation des phrases ci-dessous :

1. Tous les hommes sont mortels.
2. Il existe un dessert sans sucre à la cantine.
3. Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.
4. Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne.
5. Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

Exercice 8

En mathématiques, une *implication* est un énoncé de la forme

Si A alors B.

L'implication réciproque est alors

Si B alors A.

Et l'implication contraposée est

Si (non B) alors (non A).

Lorsqu'une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi. En revanche, sa réciproque ne l'est pas forcément.

1. a. Qui sont A et B dans l'implication suivante?
Si un nombre se termine par 5, alors il est multiple de 5.
Cette implication est-elle vraie?
b. Écrire l'implication contraposée et l'implication réciproque. Sont-elles vraies?
2. Écrire une implication dont la réciproque soit vraie.

Exercice 9

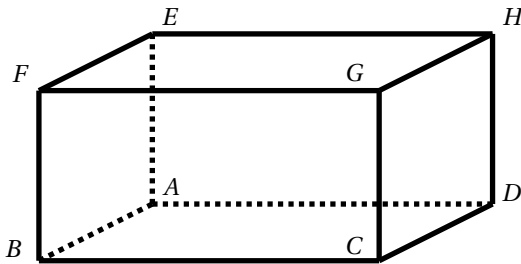
1. Énoncer le théorème de Pythagore.
2. Énoncer la contraposée.
3. Énoncer la réciproque. Est-elle vraie?

Exercice 10 (III)

1. EFG est un triangle rectangle en E tel que $EF = 5$ et $FG = 7$. Faire une figure en prenant le cm comme unité de longueur, puis calculer EG .
2. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Est-il rectangle?

Exercice 11

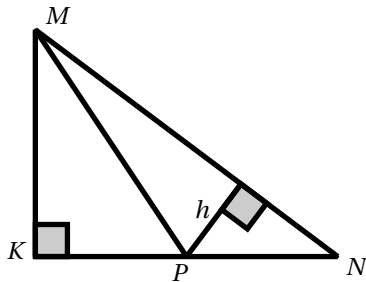
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



Calculer la longueur de la diagonale AG .

Exercice 12

Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1,2$ cm.



1. Calculer l'aire du triangle MNP .
2. En déduire la longueur PN .
3. Calculer enfin la longueur du segment $[MP]$.

Exercice 13

1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b , l'hypoténuse mesure c . Exprimer c en fonction de a et de b .
2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse?

Pour tous nombres positifs a et b ,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b.$$

Exercice 14

Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. Faire une figure pour illustrer la définition.
2. Prouver que pour tout point M sur Δ distinct de H , $AM > AH$.
3. Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC) . Que représente $[AH]$ pour le triangle ABC ?

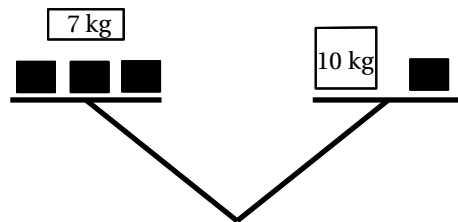
Exercice 15

Résoudre les équations :

1. $x + 7 = 18$.
2. $3x + 4 = 19$.
3. $3,5x - 9 = 5$.
4. $x + 1 = -2x - 5$.
5. $-2x + 4 = 3x - 6$.

Exercice 16

Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Déterminer la valeur de M .

Exercice 17

Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Traduire le problème par une équation.
2. Déterminer la valeur de x .

Exercice 18

Écrire sous forme de fractions irréductibles :

$$A = \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \quad B = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \quad C = 2 + \frac{1}{5} \quad D = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6}$$

$$E = 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9} \quad F = 4 - 3 \times \frac{5}{6} \quad G = \frac{6}{10} \times \frac{15}{8}, H = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Exercice 19

Son père et ses deux frères offrent un livre à Zoé. Le père donne le tiers de la somme nécessaire. Le petit-frère donne le quart de la somme. Et pour avoir la somme exacte, le grand-frère donne 10 euros. Combien coûte le livre?

Exercice 20 (III)

Calculer astucieusement :

$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4}, \quad B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7}, \quad C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}},$$

$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4}, \quad E = \frac{(10^4)^3}{10^8}, \quad F = \frac{4^5}{8^3},$$

$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7}.$$

Exercice 21

Ranger les nombres suivants par ordre croissant :

$$A = 35,4 \times 10^{-3}, \quad B = 0,034, \quad C = 3,6 \times 10^{-2},$$

$$D = \frac{355}{10^4}, \quad E = \frac{7}{60} \times \frac{3}{10}.$$

Exercice 22 (III)

On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm, la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm. On dispose d'un robinet dont le débit est de 6 litres par minute.

1. Faire un schéma, puis calculer le volume de l'aquarium, en litres.
2. Déterminer la durée du remplissage.

Exercice 23 (III)

Sans utiliser la calculatrice, calculer :

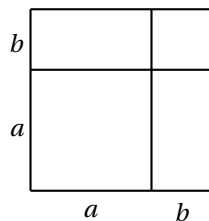
$$99^2 \quad ; \quad 103^2 \quad ; \quad 71 \times 69$$

$$2,05^2 \quad ; \quad 4,3 \times 3,7$$

Exercice 24

En calculant l'aire du grand carré de deux façons différentes, retrouver l'identité remarquable

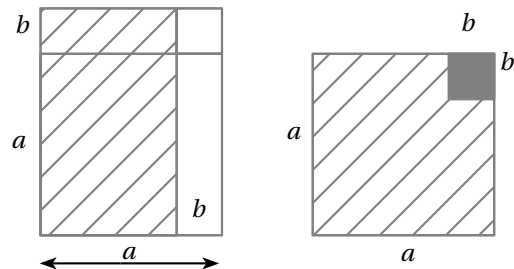
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

**Exercice 25 (III)**

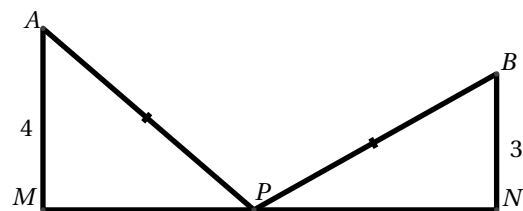
1. Comparer les nombres $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$.
2. Comparer les nombres $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$.

Exercice 26 (III)

Démontrer que les deux zones hachurées sur les figures ci-dessous ont la même aire.

**Exercice 27 (V)**

Sur la figure ci-dessous, les points M, P, N sont alignés dans cet ordre, les triangles MPA et NPB sont rectangles respectivement en M et en N et les longueurs AP et BP sont égales. On sait également que $MN = 10$.

Calculer la longueur MP .**Exercice 28 (V)**

L'hypoténuse d'un triangle rectangle vaut 13 et son aire est égale à 30. On note x et y la longueur des côtés de l'angle droit, y désignant le plus petit des deux côtés.

1. Calculer $x^2 + y^2$, puis $(x + y)^2$. En déduire que $x + y = 17$.
2. Calculer de même $x - y$, puis déterminer les valeurs de x et de y .

II. Nombres réels

Exercice 29 (III)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier les réponses.

1. $-7 \in \mathbb{Q}$
2. $-7 \in \mathbb{N}$
3. $-\frac{13}{4} \in \mathbb{Z}$
4. $-\frac{13}{4} \in \mathbb{D}$
5. $5,824 \in \mathbb{D}$
6. $5,824 \in \mathbb{Q}$
7. $\frac{10}{6} \in \mathbb{D}$
8. $\frac{17}{11} \in \mathbb{D}$

Exercice 30 (III)

1. Construire une droite graduée et représenter chaque intervalle d'une couleur différente :
 - a. $I_1 = [1; 4]$
 - b. $I_2 = [5; +\infty[$
 - c. $I_3 =]-2; 0[$
2. Construire une droite graduée et représenter chaque intervalle d'une couleur différente :
 - a. $I_1 = [-1; 1[$
 - b. $I_2 =]3; +\infty[$
 - c. $I_3 =]-\infty; -2]$

Exercice 31

Recopier et compléter les pointillés avec \in ou \notin .

1. $5 \cdots [2; 6[$
2. $-2 \cdots]-2; 1]$
3. $\pi \cdots]3; 4[$

Exercice 32 (III)

Calculer :

1. $5 \times |-6| = \dots$
2. $|3| + |-3| = \dots$
3. $|5| - |-5| = \dots$
4. $|-4| \times |2| = \dots$
5. $|7 - 4| = \dots$
6. $|4 - 7| = \dots$
7. $|4 - 3| + |5 - 6| = \dots$
8. $|5 - 11| + 2 \times |7 - 8| = \dots$
9. $|8 - 5| \times |7 - 10| = \dots$
10. $|15 - 6| - 4 \times |1 - 4| = \dots$

Exercice 33 (III)

Résoudre les équations :

1. $|x - 2| = 3$
2. $|x - 1| = 4$
3. $|x + 2| = 2$
4. $|x - 2| = |x - 6|$ (indication : interpréter l'égalité en termes de distance).

Exercice 34

Recopier et compléter en utilisant la valeur absolue :
Pour tout nombre x ,

$$\sqrt{x^2} = \dots$$

Exercice 35 (V)

1. Représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres x tels que $|x - 2| < 3$. Écrire cet ensemble sous forme d'intervalle.
2. Caractériser les points de l'intervalle ci-dessous à l'aide de la valeur absolue.



Exercice 36 (V)

Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. Prouver que $2q^2 = p^2$.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2										

3. Construire un tableau similaire donnant le chiffre des unités de $2q^2$ en fonction du chiffre des unités de q .
4. En observant les deux tableaux, quels sont les chiffres possibles des unités de p et q ?
5. Aboutir à une absurdité et conclure.

III. Géométrie repérée



Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 37 (III)

- Construire un repère et placer les points $A(1;2)$ et $B(4;-2)$.
 - Placer le milieu I de $[AB]$ et calculer ses coordonnées.
 - Calculer la longueur AB .
- Dans le même repère, placer $C(-4;2)$ et $D(2;-3)$.
 - Placer le milieu J de $[CD]$ et calculer ses coordonnées.
 - Calculer la longueur CD .

Exercice 38

On considère les points $A(0;-2)$, $B(7;5)$, $C(2;3)$ et $D(5;0)$.

- Faire une figure.
- Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ et du milieu M' du segment $[CD]$.
- Que peut-on en déduire pour $ACBD$ et pour la longueur de ses côtés?
- Calculer les longueurs AC et CB . Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ACBD$?

Exercice 39 (III)

On donne les points $A(2;4)$, $B(-2;1)$ et $C(1;-3)$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en B .

Rappel

- Définition.** Le cercle circonscrit à un triangle est l'unique cercle qui passe par les trois sommets du triangle.
- Propriété.** Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

Exercice 40 (III)

Soient $A(6;0)$, $B(1;5)$ et $C(0;2)$. On fera une figure.

- Prouver que le triangle ABC est rectangle en C .
- Calculer les coordonnées de I , milieu du segment $[AB]$.
- On appelle Γ (gamma) le cercle circonscrit au triangle ABC . Qui est le centre de Γ ? Pourquoi? Calculer le rayon de Γ .
- Le point $H(3,5; 6)$ appartient-il à Γ ? Justifier votre réponse.

Exercice 41

On considère les points $A(0;4)$, $B(6;1)$, $C(4;-3)$ et $D(-2;0)$. On fera une figure.

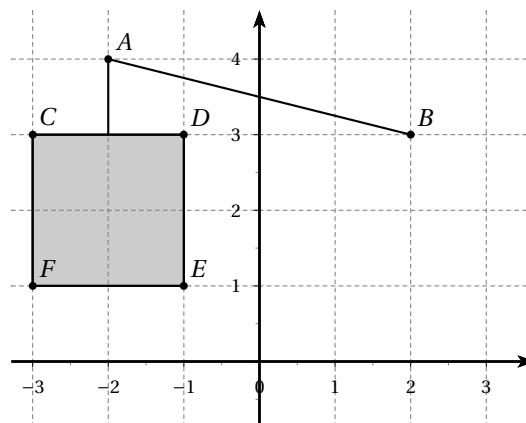
- Prouver que les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu. Que peut-on en déduire pour ce quadrilatère?
- Prouver que les diagonales de $ABCD$ sont de même longueur. Conclusion?

Exercice 42 (VI)

- Sur une droite graduée, donner sans justification le symétrique de 2 par rapport à 5,5.
- D'une manière générale, si a et b sont deux nombres réels, déterminer une formule pour le symétrique c de a par rapport à b .
- Placer dans un repère les points $A(1;2)$ et $B(3,25;-1,75)$, puis construire le point C , symétrique du point A par rapport à B . Calculer ses coordonnées.

Exercice 43

Une télécabine se déplace le long d'un câble de A vers B .



- Reproduire la figure et dessiner la télécabine lorsqu'elle sera arrivée au point B .
- Comment s'appelle le déplacement de la télécabine de A vers B ?

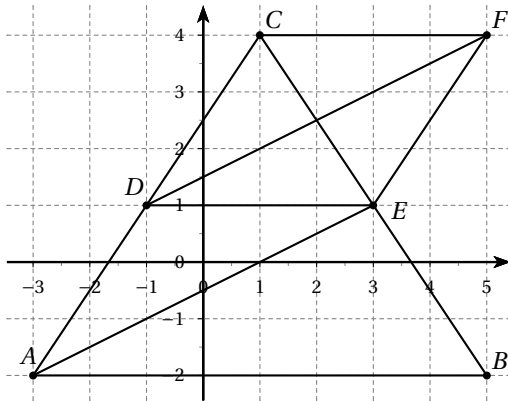
Exercice 44 (III)

- Construire un repère et placer les points $A(-3;0)$ et $B(1;2)$.
- Calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .
- Placer à présent les points $I(1;-2)$ et $J(5;0)$. Prouver que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}.$$

Exercice 45

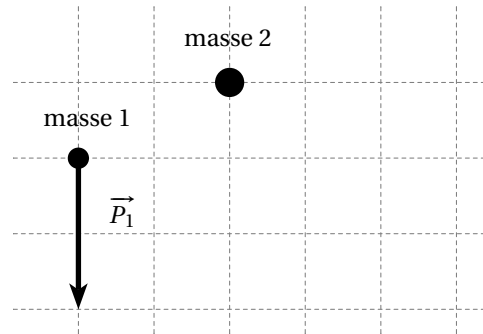
Dans un repère du plan on considère les points $A(-3;-2)$, $B(5;-2)$, $C(1;4)$, $D(-1;1)$, $E(3;1)$, $F(5;4)$.



Déterminer trois couples de vecteurs égaux. Justifier vos réponses.

Exercice 46

La figure ci-dessous représente deux masses en chute libre, soumises uniquement à leur poids. On a représenté le vecteur poids \vec{P}_1 pour la masse 1.



Reproduire la figure et représenter ce même vecteur poids pour la masse 2, sachant que $\|\vec{P}_2\| = 2 \|\vec{P}_1\|$.

Exercice 47 (III)

Placer dans un repère les points $A(-2;2)$, $B(0;-4)$, $C(1;3)$. Construire l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

IV. Études graphiques de fonctions

Fonctions affines

- Les fonctions affines sont les fonctions de la forme

$$f(x) = ax + b.$$

- La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Exercice 48

Un voyageur de commerce fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

- Quel est le montant de la note de frais du voyageur de commerce s'il fait 120 km dans la journée?
- On note x le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et $f(x)$ le montant de la note de frais. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
- Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan (on graduera en abscisse jusqu'à 200 km, de 20 en 20; et en ordonnée jusqu'à 130 €, de 10 en 10).
- Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Combien de km a-t-il effectués dans la journée?

Exercice 49

Un contrat d'abonnement téléphonique prévoit que les 100 premiers Mo téléchargés dans le mois seront facturés 3 €, puis que chaque Mo au-delà du 100^e sera facturé 0,04 €.

- Déterminer le prix à payer si on télécharge 50 Mo, puis si on télécharge 150 Mo.
- Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (les prix sont en €) :

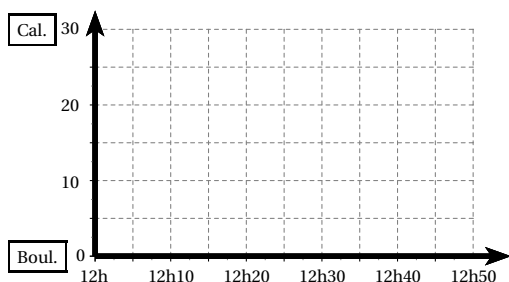
Nombre de Mo	0	50	100	150	200
Prix à payer					

- Construire une courbe qui donne le prix payé en fonction du nombre de Mo téléchargés.
- J'ai payé 4,60 €. Combien de Mo ai-je téléchargés?

Exercice 50

Les gares de Calais et de Boulogne-sur-Mer sont distantes de 30 km. Un train part à 12 h de Boulogne-sur-Mer en direction de Calais et roule à la vitesse de 40 km/h. Un train part de Calais à 12 h 15 et fait route en sens inverse à la vitesse de 60 km/h.

- Reproduire et compléter le graphique ci-après et représenter la position de chacun des deux trains en fonction du temps.
- Déterminer l'heure à laquelle les deux trains se croiseront.



Exercice 51 (V)

Un cycliste part à 9 h d'une ville A pour une ville B distante de 60 km. Il roule à 20 km/h mais s'arrête 40 min à mi-parcours. Une automobile part de B à 9h40, arrive en A une heure plus tard et repart à 11 h pour être de retour en B à midi. Déterminer l'heure exacte de chacune des rencontres du cycliste et de l'automobile.

Exercice 52 (III III)

Le taux d'anticorps (en g/l) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en mois), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 12 mois, est donné par la formule suivante :

$$f(x) = 0,1x^2 - 1,6x + 12.$$

1. Faire un tableau de valeurs pour f sur $[0; 12]$ avec un pas de 2.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique : 1 carreau ou 1 cm pour une unité en abscisse et en ordonnée).
3. Quel est le taux d'anticorps à la naissance?
4. Construire le tableau de variations de la fonction f . À quel âge le taux d'anticorps est-il minimal?
5. À l'aide du graphique, déterminer pendant combien de mois le taux d'anticorps est inférieur à 6,5 g/l. Coder la figure pour justifier votre réponse.

Exercice 53 (III III)

On considère la fonction f définie sur $[-1; 3]$ par

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

1. Faire un tableau de valeurs pour f sur $[-1; 3]$ avec un pas de 0,5.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Calculer l'image de $-0,8$ par f .
4. Déterminer graphiquement les antécédents de 1 par f .
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$.
6. Construire le tableau de variations de f .
7. Construire le tableau de signe de f .

Exercice 54 (III III)

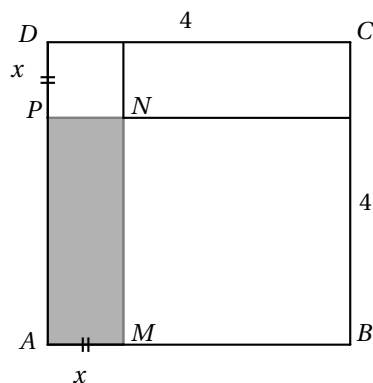
On considère la fonction g définie sur $[1; 4]$ par

$$g(x) = x - \frac{6}{x}.$$

1. Faire un tableau de valeurs pour g sur $[1; 4]$ avec un pas de 0,5 (on arrondira les résultats à 10^{-2} près par excès).
2. Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.
3. Déterminer graphiquement l'image de 3,2 par g .
4. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -1$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \geq -1$.
6. Construire le tableau de variations de g .
7. Construire le tableau de signe de g .

Exercice 55 (III III)

$ABCD$ est un carré de côté 4. M et P sont deux points mobiles des segments $[AB]$ et $[AD]$ tels que $AM = DP$, N est le point tel que $AMNP$ soit un rectangle.



On note x la longueur AM .

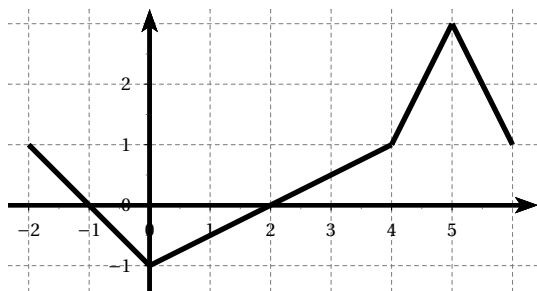
1. Donner un encadrement des valeurs possibles pour x .
2. Exprimer, en fonction de x :
 - la longueur AP ;
 - l'aire du rectangle $AMNP$.
3. La fonction f est définie pour $0 \leq x \leq 4$ par

$$f(x) = 4x - x^2.$$

- a. Faire un tableau de valeurs pour f puis construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
- b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- c. Comment placer M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du rectangle $AMNP$ soit la plus grande possible? Justifier votre réponse.

Exercice 56 (III)

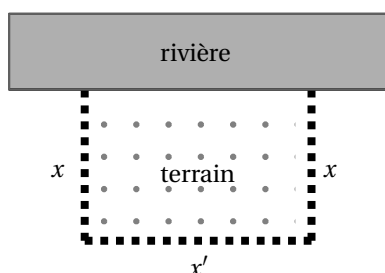
Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



1. Lire sur le graphique l'image de 3 par f .
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 2$.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Quels sont le maximum et le minimum de f ?
6. Construire le tableau de signe de f .

Exercice 57 (III, IIII)

On dispose d'une clôture de 100 mètres de long pour délimiter un terrain rectangulaire le long d'une rivière (la clôture est en pointillés — on ne met pas de clôture le long de la rivière). On note x et x' les longueurs des côtés du terrain.



1. **a.** Donner un encadrement des valeurs possibles pour x .
b. Montrer que $x' = 100 - 2x$.
c. Montrer que l'aire du terrain est égale à $100x - 2x^2$.
2. On définit à présent la fonction f sur $[0; 50]$ par

$$f(x) = 100x - 2x^2.$$
 - a.** Faire un tableau de valeurs pour f sur $[0; 50]$ avec un pas de 5.
 - b.** Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (on choisira soigneusement les unités).
 - c.** Pour quelle valeur de x l'aire du terrain est-elle maximale ?

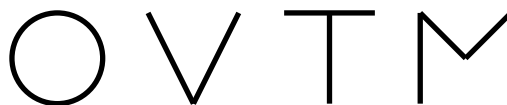
Exercice 58 (III)

Construire la courbe représentative d'une fonction f , définie sur $[-2; 3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

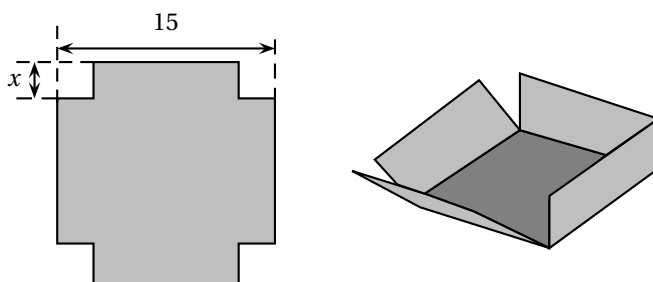
- f est croissante sur l'intervalle $[-2; 1]$;
- f est affine sur l'intervalle $[1; 3]$;
- $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$;
- les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2 .

Exercice 59

Parmi les dessins suivants, lesquels sont les courbes représentatives de fonctions ?

**Exercice 60** (VIII, IIII)

On dispose d'un carré de métal de 15 cm de côté. Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords par pliage.



1. **a.** Quelles sont les valeurs possibles de x ?
b. On donne $x = 3$. Dessiner le patron de la boîte sur votre cahier, puis montrer que son volume est égal à 243 cm^3 .
2. **a.** Le fond de la boîte est un carré. Exprimer, en fonction de x , la longueur de son côté.
b. En déduire que le volume $V(x)$ de la boîte (en cm^3) est égal à

$$4x^3 - 60x^2 + 225x.$$
 - c.** Faire un tableau de valeurs pour V sur $[0; 7,5]$ avec un pas de 0,5, puis construire la courbe de la fonction V dans un repère orthogonal.
 - d.** Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

V. Probabilités

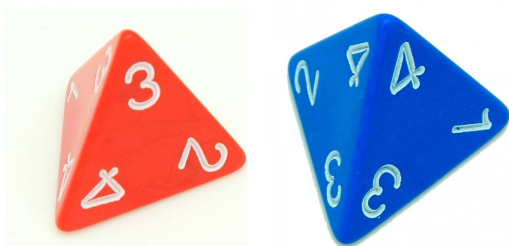
Exercice 61

Un sac contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On pioche successivement deux jetons au hasard, sans avoir remis le premier avant de tirer le deuxième. Si on tire le jeton 2 puis le 3, on note (2,3) ; si on tire le 3 puis le 1, on note (3,1). Etc.

1. Écrire l'univers U .
2. Écrire de façon mathématique l'événement A : « un des jetons porte le n°1 ». En déduire $P(A)$.
3. Écrire \bar{A} en français, puis déterminer $P(\bar{A})$.

Exercice 62

On lance deux dés équilibrés à 4 faces : un rouge et un bleu. On note les événements élémentaires sous la forme (x, y) , où x est le résultat du dé rouge et y le résultat du dé bleu.



1. Écrire l'univers U .
2. Écrire de façon mathématique l'événement B : « au moins l'un des deux dés tombe sur 4 ».
3. En déduire $P(B)$.

Exercice 63

Une tenue de footballeur est constituée d'un maillot, d'un short et d'une paire de chaussettes. Un footballeur possède :

- trois maillots : un rouge, un bleu, un vert ;
- deux shorts : un bleu, un rouge ;
- deux paires de chaussettes : une paire bleue, une paire rouge.

Pour s'habiller, le footballeur choisit au hasard un maillot, un short et une paire de chaussettes. Si le footballeur met un maillot vert, un short rouge et une paire de chaussettes rouges, on note VRR , etc.

1. Écrire l'univers U .
2. On considère l'événement A : « la tenue du footballeur comporte du bleu ». Écrire \bar{A} en français, puis calculer $P(\bar{A})$. En déduire $P(A)$.

Exercice 64 (8)

Déprimé par des pertes importantes, un turfiste parie au hasard sur le résultat d'une course à venir. Six chevaux, numérotés de 1 à 6, sont au départ ; et notre turfiste joue le tiercé, c'est-à-dire qu'il parie sur le podium de la course.

1. Expliquer pourquoi il y a 120 podiums différents possibles (en tenant compte de l'ordre d'arrivée).
2. Calculer la probabilité de l'événement T : « le turfiste a le tiercé dans le désordre ».

Exercice 65 (8)

Lors de la finale des mondiaux d'athlétisme huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont Américains.

1. Combien de podiums possibles y a-t-il ?
2. Combien de podiums y a-t-il comportant au moins un Américain ?

Exercice 66 (III)

On lance deux dés équilibrés à 4 faces.

1. Recopier le tableau ci-dessous, puis dessiner le symbole ♥ dans les cases favorables à l'événement

A : « la somme des deux faces est égale à 5 ».

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

En déduire $P(A)$.

2. Calculer de même les probabilités des événements

B : « exactement un des deux dés tombe sur 4 ».

C : « on tire deux numéros impairs ».

Exercice 67 (III)

Les enfants d'une école disposent d'un dé équilibré dont les 6 faces représentent chacune le drapeau d'un des pays fondateurs de l'UE : France, Allemagne, Italie, Belgique, Pays-Bas, Luxembourg.

Au début de la récréation, ils lancent le dé deux fois et décident que le match de football du jour opposera les deux pays dont les drapeaux sont apparus (si un même pays sort deux fois de suite, les enfants relancent le dé).

À l'aide d'un tableau, calculer la probabilité des événements :

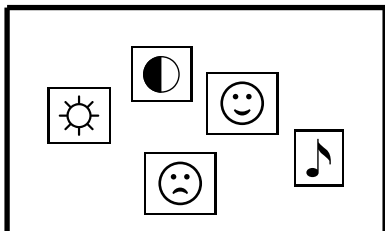
A : « la France joue ».

B : « le match oppose la France à l'Allemagne ».

C : « le match oppose deux pays du Benelux ».

Exercice 68 (III)

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher. Chacun d'eux porte un symbole différent : un visage content, un visage triste, un soleil, une demi-lune et une note de musique.



On choisit un jeton au hasard, on le replace dans l'urne, puis on en choisit un deuxième.

À l'aide d'un tableau, calculer la probabilité des événements :

A : « les deux jetons choisis sont identiques ».

B : « exactement un des deux jetons représente un visage ».

Exercice 69 (V)

Un candidat à un examen connaît trois questions d'histoire sur les six possibles et deux questions de géographie sur les cinq possibles. Un examinateur lui pose une question d'histoire et une question de géographie.

Quelle est la probabilité que le candidat connaisse les deux questions? Une seule des deux questions?

Exercice 70 (III)

Dans un lycée, deux options sport sont proposées aux élèves : une option escalade et une option VTT. Il est autorisé de pratiquer les deux options à la fois. Dans une classe de 32 élèves de ce lycée :

- 3 élèves font à la fois de l'escalade et du VTT ;
- au total, 10 élèves de la classe font de l'escalade ;
- il y a autant d'élèves qui pratiquent le VTT que d'élèves qui ne le pratiquent pas.

1. Traduire les données de l'énoncé par un tableau d'effectifs.

2. On interroge un élève au hasard dans la classe. Quelles sont les probabilités des événements :

A : « l'élève pratique à la fois l'escal. et le VTT ».

B : « l'élève ne pratique aucun sport ».

C : « l'élève pratique au moins un sport ».

Exercice 71 (III)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays (vaches, bœufs, etc.). Elle touche 5 % des animaux.

Un test permet de détecter systématiquement la maladie lorsqu'elle est présente chez un animal ; en revanche le test indique la présence de la maladie chez 4 % des animaux sains (on parle de « faux positifs »).

1. Construire un tableau d'effectifs en partant d'un total de 10 000 bêtes.

2. On choisit un animal au hasard. On considère les événements

M : « l'animal est malade »,

T : « le test est positif ».

a. Calculer $P(M)$ et $P(T)$.

b. Un animal a un test positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade?

c. Un animal est malade. Quelle est la probabilité qu'il ait un test positif?

Exercice 72 (III V)

Les 280 pensionnaires d'une maison de retraite peuvent s'abonner à deux journaux, *Le Soir* et *Le Matin*, qu'ils reçoivent chaque jour dans leur chambre. Le matin, la personne chargée de la distribution des journaux apporte *Le Matin* à 70 pensionnaires ; et le soir, elle distribue *Le Soir* à 100 pensionnaires. Par ailleurs, 160 pensionnaires de la maison de retraite ne sont abonnés à aucun journal.

1. Représenter la situation par un tableau d'effectifs.

2. On choisit un pensionnaire au hasard. On considère les événements :

S : « le pensionnaire est abonné au *Soir* »,

M : « le pensionnaire est abonné au *Matin* ».

a. Donner les valeurs de $P(S)$ et de $P(\overline{M})$.

b. Quelle est la probabilité que le pensionnaire soit abonné aux deux journaux?

c. On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. Quelle est la probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir*?

Exercice 73 (III)

Les joueurs de jeux de rôles utilisent parfois des dés équilibrés à 100 faces, numérotées de 1 à 100. On lance un tel dé et on considère les événements :

A : « le résultat obtenu est pair ».

B : « le résultat obtenu est multiple de 5 ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

2. Écrire en français, de façon claire et simple, l'événement $A \cap B$.

3. Déterminer $P(A \cap B)$ et en déduire $P(A \cup B)$.

Exercice 74

Pierre prend sa voiture chaque jour vers 8 h pour se rendre au travail. Il y a deux feux sur la route, qui ne sont jamais tous les deux rouges quand Pierre l'emprunte.

Pour un matin donné dans l'année, on considère les événements :

A : « le 1^{er} feu est vert ».

B : « le 2^e feu est vert ».

Pierre estime que $P(A) = 0,8$ et $P(B) = 0,5$.

1. Écrire en français l'événement $A \cup B$, puis déterminer $P(A \cup B)$.
2. Quelle est la probabilité que Pierre ait les deux feux verts ?

Exercice 75 (🦄)

Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

1. On suppose que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$ et $P(A \cup B) = 0,9$.
 - a. Calculer $P(A \cap B)$.
 - b. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. On tire une carte dans un jeu de 32 et on considère les événements :
 A : « la carte est rouge ».
 B : « la carte est un roi ».
 - a. Écrire l'événement $A \cap B$ en français – de façon claire et simple !
 - b. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Dans cette question, on suppose que $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,7$; et que les événements A et B sont indépendants. Déterminer la valeur de $P(B)$.

VI. Équations de droites



Attention

On fera toutes les figures dans des repères ortho-normés.

Exercice 76

1. Tracer la droite $d : y = 0,5x - 2$.
2. Les points suivants sont-ils sur la droite d ?
 $A(1; -1)$, $B(4; 0)$, $C(-2; -3)$, $E(5; 1)$.
3. Soit $\Delta : y = -x + 3$. Les points suivants sont-ils sur Δ ? $H(1; 2)$, $I(-2; 6)$, $J(1000; -997)$.

Exercice 78 (🏠)

Dans chacune des trois questions, on fera une figure et on déterminera les équations des droites (AB) et (CD) .

1. $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(5; -1)$, $D(1; 3)$.
2. $A(-2; -3)$, $B(6; 1)$, $C(1; 1)$, $D(-2; 2)$.
3. $A(2; -2)$, $B(-1; -2)$, $C(4; -3)$, $D(4; 4)$.

Exercice 77

1. Soit $D : y = 2x + 1$.
 - a. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et tracer D :

x	-1	0	1	2
y				

- b. Recopier et compléter les pointillés :

Quand x augmente de 1, y augmente de

2. Soit Δ une droite non verticale quelconque, d'équation $y = ax + b$; et soient A et B deux points distincts de Δ .
 - a. A est sur Δ , donc $y_A = a \times x_A + b$. De même, B est sur Δ , donc
(recopier et compléter les pointillés).
 - b. Démontrer l'égalité : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exercice 79 (🏠)

1. Tracer dans un même repère les droites $D_1 : y = x - 4$ et $D_2 : y = -2x + 3$.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_2 .

Exercice 80 (🏠)

1. Tracer la droite $D : y = 2x + 1$.
2. Placer les points $A(2; 2)$, $B(4; -2)$, tracer la droite (AB) et déterminer son équation.
3. Les droites D et (AB) se coupent en M . Calculer les coordonnées du point M .
4. La droite D coupe l'axe des abscisses en N . Calculer les coordonnées de ce point.

Exercice 81 (III)

On considère les points $A(-2; 1)$ et $B(1; 3)$.

1. Faire une figure – on la complétera dans la suite de l'exercice.
2. Déterminer l'équation de la droite (AB) .
3. Tracer la droite $\Delta : y = -2x + 3$.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection M de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection N des droites (AB) et Δ .

Exercice 82 (III)

1. Tracer les droites $\Delta : y = x - 3$ et $D : y = -2x + 1$.
2. Les droites Δ et D se coupent en un point M . Déterminer, par le calcul, les coordonnées de ce point.
3. Placer les points $A(-2; 1)$ et $B(3; 5)$. Tracer la droite (AB) et déterminer son équation.
4. La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point N . Déterminer les coordonnées de N .

Exercice 83 (III)

On prendra 1 cm comme unité graphique.

1. a. Tracer la droite $d : y = 1,5x - 2,4$.
b. Tracer la parallèle Δ à d passant par le point $A(1,4; 2,2)$, puis déterminer l'équation de Δ .
2. a. Placer dans un nouveau repère les points $A(1; 2)$ et $B(-1; 5,2)$, tracer la droite (AB) ainsi que la droite $D : y = -1,5x - 1$.
b. La droite D est-elle parallèle à la droite (AB) ?

Exercice 84 (III)

1. Soient $A(1; -2)$ et $B(5; 0)$. Tracer (AB) , puis déterminer son équation.
2. Tracer la droite $\Delta : y = -2x + 5$.
3. Déterminer les coordonnées de M , point d'intersection de (AB) et Δ .
4. Soit d la parallèle à Δ passant par $C(-2; 3)$. Tracer d et déterminer son équation.
5. La droite d coupe l'axe des abscisses en N . Placer N et calculer ses coordonnées.

Dans l'exercice suivant, on pourra admettre et utiliser le théorème :

Droites perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, on considère :

- une droite D de coefficient directeur a ,
- une droite D' de coefficient directeur a' .

Alors :

$$D \perp D' \iff a \times a' = -1.$$

Exercice 85 (V)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(0; -4)$, $B(3; 0,5)$, $C(-2; 2)$ et $D(1; 0)$.
Prouver que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
2. Soient $A(-1; 0)$, $B(2; 4)$ et $C(5; -2)$. Déterminer l'équation de la perpendiculaire Δ à (BC) passant par A .

Exercice 86 (III)

Le tableau suivant donne la part (en pourcentage) des voitures diesel dans les ventes de voitures neuves, en France, entre 2012 et 2017.

Rang de l'année	0	1	2	3	4	5
% des voitures diesel	73	67	64	58	52	48

1. Construire le nuage de points correspondant au tableau (en abscisse : rang des années ; en ordonnée : pourcentage de voitures diesel). Graduer l'axe des abscisses jusqu'à l'année 9.
2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite D réalisant un ajustement affine du nuage de points par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients a et b au dixième).
3. Tracer la droite D . Quelle devrait être la part des voitures diesel en 2021 selon ce modèle ?

Exercice 87

Au 18^e siècle, l'étude des distances entre les planètes et le soleil a conduit les astronomes Titius et Bode à imaginer l'existence d'une planète encore inconnue, Cérès, entre Mars et Jupiter.

Le graphique ci-dessous donne les distances des planètes au soleil, en unités astronomiques (1 UA = distance terre-soleil).

Nom	Vénus	Terre	Mars	Cérès	Jup.	Satur.
Rang	1	2	3	4	5	6
Distance	0,7	1	1,5	?	5,2	9,5

1. Construire le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal.
2. On définit une fonction par

$$f(x) = 0,4 + 0,15 \times 2^x.$$

Tracer, aussi précisément que possible, la courbe de cette fonction dans le repère déjà construit.

3. On admet que cette courbe réalise un bon ajustement de la série de données.
A quelle distance du soleil la planète Cérès devrait-elle se trouver ?

VII. Pourcentages, taux d'évolution



Attention

Quand les résultats ne tombent pas « juste », arrondir à 0,01 % près.

Exercice 88 (■ ■)

1. Il y a 80 % de filles dans une classe de 30 élèves. Combien y a-t-il de filles dans cette classe?
2. Sur le porte-avions Charles de Gaulle, 1 046 des 1 760 marins ont attrapé le Covid 19. Quel pourcentage des marins sont tombés malades?
3. Une bouteille de vin de 500 mL est titrée à 12 % vol. Calculer la quantité d'alcool pur dans cette bouteille.
4. Au deuxième tour des élections présidentielles de 2017, dans la ville de Boulogne-sur-Mer, 8 892 des 16 161 suffrages exprimés ont été en faveur de E. Macron. Quel pourcentage des suffrages cela représente-t-il?
5. Il y a 56 % d'hommes dans une entreprise, et 25 % d'entre eux fument. Quel pourcentage des employés les hommes fumeurs représentent-ils?

Exercice 89 (■ ■)

1. Il y a 120 inscrits dans un club de sport en décembre. Quel sera l'effectif si le nombre d'inscrits augmente de 12,5 % en janvier?
2. Il y avait 5 812 logements à Outreau en 2007, et 6 065 en 2015. Quel a été le taux d'évolution du nombre de logements entre ces deux dates?
3. Le montant hors taxe d'une montre est de 80 €. Déterminer le montant TTC, sachant que le taux de TVA sur les montres est de 20 %.

Exercice 90 (■ ■)

1. Une voiture coûte 12 000 €. Le vendeur accepte de faire une remise de 15 %. Quel est le prix de vente?
2. Un industriel prévoit de faire passer ses émissions d'oxyde de soufre de 240 tonnes à 228 tonnes en un an. Quel sera le taux d'évolution s'il respecte son engagement?
3. Après une remise de 25 %, j'achète un article 63 €. Quel était le prix initial?

Exercice 91 (■ ■)

Le taux de TVA sur les médicaments non remboursés par la sécurité sociale est de 10 %. Sur une boîte de Dolirhume affichée 4,95 € en magasin, quelle somme revient à l'état?

Exercice 92 (■)

Le tableau ci-dessous traduit l'évolution du SMIC horaire brut en euro entre 2011 et 2014. Il indique également les taux d'évolution annuels.

Année	2011	2012	2013	2014
SMIC hor. brut	9	9,31	9,43	
Taux d'évolution				+1,06%

Recopier et compléter le tableau.

Exercice 93 (■ ■)

En 2016, un article est affiché en magasin à 70 €. Il y a une hausse de 60 % des prix entre 2016 et 2017, puis une baisse de 10 % entre 2017 et 2018.

1. Calculer le prix en 2017 et en 2018.
2. Calculer le taux d'évolution global entre 2016 et 2018.

Exercice 94 (■ ■)

1. Un vendeur augmente un prix de 16 %. De quel pourcentage doit-il le baisser pour revenir au prix de départ?
2. Dans un magasin, un article a subi une baisse de 36 %. Quelle hausse (en %) faut-il appliquer pour retomber sur le prix de départ?
3. Quel sont les taux d'évolution réciproques de +60 %, -15 %, -50 % ?

Exercice 95 (🔗 ■)

1. Dix augmentations successives de 5 % font une augmentation de
2. Deux augmentations successives de t % font une augmentation de 44 %. Combien vaut t ?
3. Deux augmentations successives de t % font une augmentation de 26 %. Combien vaut t ?

VIII. Opérations sur les vecteurs



Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 96 (III)

- On donne les points $A(1;3)$ et $B(4;-1)$. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$, les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} , puis la longueur du segment $[AB]$.
- Représenter sur une même figure les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1,5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 97

Prenons le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs définis ci-dessous. Représenter ces vecteurs sur une figure.

$$\vec{v} = 3\vec{u}, \quad \vec{w} = -2\vec{u}, \quad \vec{y} = 1,5\vec{u}, \quad \vec{z} = -\vec{u}.$$

Exercice 98

Soient $A(0;1)$ et $B(3;-1)$.

- Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} , puis celles de $-\overrightarrow{AB}$.
- Calculer les coordonnées de \overrightarrow{BA} . Conclusion?

Exercice 99

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2,5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -3 \\ 3,75 \end{pmatrix}$.

- Représenter ces vecteurs dans un repère orthonormé.
- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires? Et les vecteurs \vec{u} et \vec{w} ?

Exercice 100 (III)

Soient $O(0;0)$, $A(3;2)$, $B(4,5;3)$, $C(3;-2,5)$ et $D(7;-1,5)$.

- Les points O , A , B sont-ils alignés?
- Les droites (OC) et (AD) sont-elles parallèles?

Exercice 101 (III)

On donne les points $A(-3;-1)$, $B(-1;2)$, $C(4;3)$ et $D(7;1)$.

- Faire une figure.
- Prouver que $ABCD$ est un trapèze.
- Le point $E(2,5;0)$ appartient-il à la droite (AD) ?

Exercice 102 (III)

Dans chaque cas, construire la somme $\vec{u} + \vec{v}$ et calculer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.

- $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 103 (III)

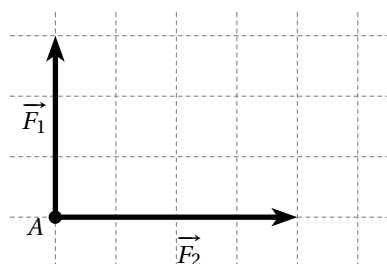
Soient $C(0;2)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faire une figure et, sans faire aucun calcul, construire les points M et N définis par les égalités

$$\overrightarrow{CM} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \overrightarrow{CN} = \vec{w} + \vec{u}$$

Exercice 104

Un objet A subit les deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 à angle droit représentées sur la figure ci-dessous, dont les intensités respectives sont $\|\vec{F}_1\| = 3 \text{ N}$, $\|\vec{F}_2\| = 4 \text{ N}$.



Reproduire la figure, puis représenter la force résultante et calculer son intensité.

Exercice 105 (V)

Soient $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ trois points du plan.

- Rappeler la formule pour les coordonnées de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{BC} .
- En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- Quelle égalité vectorielle obtient-on en conséquence?

Exercice 106 (🏠)

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . En justifiant chaque étape des calculs, réduire les sommes vectorielles :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$.
2. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$.
3. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$.
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO}$.
5. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 107 (🦋)

ABC est un triangle, I est le milieu du segment $[BC]$.

1. Compléter grâce à la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \dots \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \dots$$

2. Justifier brièvement l'égalité :

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

3. En décomposant les vecteurs comme dans la question 1, prouver que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}.$$

Exercice 108 (🦋)

ABC est un triangle, I est le milieu de $[BC]$ et G est le point défini par

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

1. Faire une figure.
2. En utilisant l'exercice précédent, prouver que

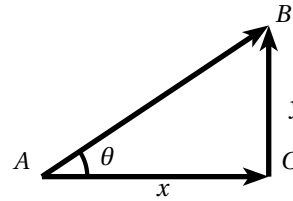
$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

3. En déduire que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Exercice 109

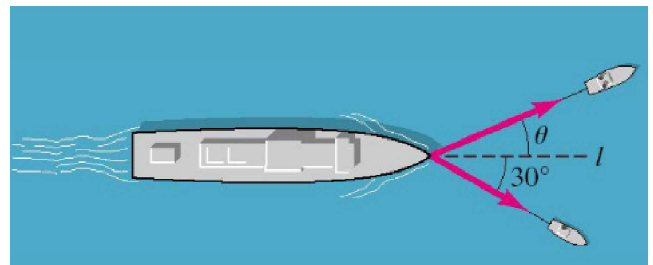
On décompose un vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ selon une composante horizontale et une composante verticale.



Exprimer x et y en fonction de la longueur AB et de l'angle θ .

Exercice 110 (🦋 🚢)

La figure ci-dessous montre deux remorqueurs qui ramènent un navire vers un port.



Le remorqueur le plus puissant (en haut) génère une force de 20 kN sur son câble, le plus petit (en bas) une force de 16 kN. Le navire suit une ligne droite l .

On n'attend pas ici toute la rigueur habituellement requise dans la résolution d'un exercice de mathématiques.

1. Sachant que $\sin 30^\circ = 0,5$ et en utilisant les idées de l'exercice précédent, prouver que

$$20 \sin \theta = 8.$$

2. Calculer l'angle θ (arrondir au degré).

IX. Tableaux de signes

Exercice 111

1. Tracer les droites $D : y = 2x - 3$ et $\Delta : y = -2x + 5$ dans un même repère.
2. Utiliser le graphique pour construire les tableaux de signes de $2x - 3$ et de $-2x + 5$.
3. Soit a un réel non nul, soit b un réel. Dans quel cas le tableau de signe de $ax + b$ est-il de la forme suivante?

x	$-\infty$	\cdots	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

Et dans quel cas est-il de la forme suivante?

x	$-\infty$	\cdots	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$

Exercice 112 (III)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $4x - 3$.
2. $-3x + 6$.
3. $x + 5$.
4. $-2x - 1$.

Exercice 113 (III)

1. Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.
 - a. $(x + 4)(-2x + 6)$.
 - b. $(4x - 3)(-3x + 2)$.
 - c. $x^2 - 3x$.
 - d. $x^2 - 4$.
 - e. $2t(t + 1)$.
 - f. $x^2 + 1$.
2. Étudier le signe de $x^2 - 4$ sur l'intervalle $[0; 5]$.

Exercice 114

1. Construire les tableaux de signes de x , x^2 et x^3 .
2. Déterminer, suivant la valeur de l'entier $n \geq 1$, le signe de x^n sur \mathbb{R} .

Exercice 115 (III)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $\frac{-2x + 1}{x + 5}$.
2. $\frac{3t - 6}{4t}$.
3. $\frac{-x + 4}{x^2}$.
4. $\frac{x}{|x| + 3}$.

Exercice 116 (III)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $(-3x + 4)(4x - 5)$.
2. $3x^2 + 6x$.
3. $x^2 - 16$.
4. $\frac{2x}{-x + 1}$.
5. $\frac{-2x + 5}{3x - 3}$.
6. $|x| + 3$.
7. $\frac{x}{x^2 + 2}$.

Exercice 117 (V)

Dans chaque cas, construire le tableau de signe de l'expression.

1. $(x - 1)^2$.
2. $|x| - 3$.
3. $x - \frac{1}{x}$.

Exercice 118 (V)

Déterminer une fonction f ayant le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

X. Statistiques

Exercice 119 (III)

15 amis ont déjeuné dans un restaurant pour fêter la fin de l'année scolaire : 6 ont pris le menu à 16 €, 5 le menu à 19 € et les autres le menu à 22 €.

1. Calculer la dépense moyenne par personne.
2. Que devient cette dépense moyenne si les 15 amis commandent en plus 3 bouteilles de vin à 17 € l'unité?

Exercice 120 (III)

Le concours EGC est composé de trois épreuves écrites : logique, anglais et français. Pour chaque candidat, le jury utilise la formule ci-dessous pour calculer la moyenne :

$$\overline{X} = \frac{2L + 3A + 5F}{10},$$

où L , A , F désignent respectivement les notes en logique, anglais et français.

1. Quels sont les coefficients pour chaque épreuve?
2. On examine les résultats de trois candidats pris au hasard.

	L	A	F	\overline{X}
Candidat 1	5	12	10	
Candidat 2	5	15	6	
Candidat 3		4	13	10,9

Recopier et compléter le tableau.

Exercice 121 (V)

Une série statistique à 7 éléments, qui sont tous des nombres positifs, est connue de façon partielle :

$$5 - 8 - 10 - 4 - 7 - \dots - \dots$$

Déterminer les deux nombres qui ont été remplacés par des pointillés sachant que :

- l'étendue de la série^a est égale à 8;
- la moyenne de la série est égale à 6.

^a. On rappelle que l'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite modalité.

Exercice 122

Les notes d'un devoir de mathématiques sont mauvaises et la moyenne est de 7,5/20. Le professeur transforme toutes les notes avec la formule suivante :

$$\text{Note} \mapsto 0,8 \times \text{Note} + 4.$$

1. Quelle est la nouvelle note d'un élève ayant eu 5/20?
2. Quelles sont les notes maximale et minimale possibles avec cette transformation?
3. Quelle est la nouvelle moyenne de classe?

Exercice 123 (III)

Calculer sans calculatrice la moyenne des nombres :

$$100,4 - 100,7 - 99,8 - 99,6 - 100$$

Exercice 124 (III)

Déterminer la médiane de la série de nombres :

$$3 - 12 - 5 - 7 - 10 - 18 - 25$$

Exercice 125 (III)

La série ci-dessous indique l'âge des vainqueurs successifs du tour de France entre 2006 et 2015.

$$28 - 24 - 33 - 26 - 25 - 34 - 32 - 28 - 29 - 30$$

Déterminer la médiane de la série.

Exercice 126 (III)

On considère les temps réalisés par les concurrents ayant fini la course dans la classe Class40 à la Route du Rhum 2014.

Temps (en j)	17	18	19	20	21	22	24	25	30
Nb conc.	4	5	5	5	5	2	3	1	1

Déterminer la médiane de la série.

Exercice 127 (III)

On a réalisé un sondage auprès de 51 personnes sur le nombre de téléviseurs dans leur foyer. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Nombre de TV	0	1	2	3	4	5
Effectif	4	19	15	9	3	1

Déterminer la médiane de la série.

Exercice 128 (III)

Le directeur d'une école de journalisme cherche à comparer les promotions 2017 et 2018 avec leurs notes en histoire.

	2017	2018
Q_1	10	10
m_e	12	11
Q_3	14	12

1. Quelle année les candidats ont-ils été les meilleurs?
2. Calculer la distance interquartile pour les notes en 2017 et en 2018.
3. Quelle année le niveau des candidats a-t-il été le plus homogène?

Exercice 129 (III)

On a compté le nombre de jours fériés dans les 50 états des USA et dans les 28 pays de l'Union Européenne.

	USA	UE
Q_1	11	9,75
m_e	11	11
Q_3	13	13

1. Calculer la distance interquartile pour les USA et pour l'UE.
2. Le nombre de jours fériés est-il plus variable dans les états des USA ou dans ceux de l'UE?

Exercice 130

On obtient les quartiles d'une série statistique en coupant la série en 4 parties égales. De la même manière, on obtient les déciles D_1, D_2, \dots, D_9 en coupant la série en 10 parties égales.

On s'intéresse au revenu mensuel (en €) pour une personne vivant seule en France.

1. Sachant que $D_3 = 1270$ €, compléter la phrase :

..... des personnes seules vivent avec moins de par mois.
2. Interpréter la phrase suivante en termes de déciles :

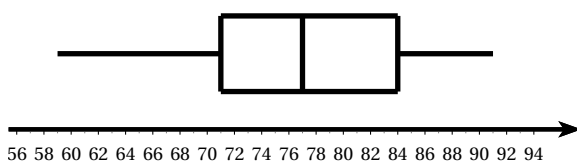
20 % des personnes seules vivent avec plus de 2297 € par mois.

Exercice 131

On a relevé le rythme cardiaque au repos (noté R.C. ci-dessous) dans deux classes d'un lycée.

Stat.	min	Q_1	m_e	Q_3	max
R.C. en 1 ^{re}	59	71	77	84	91
R.C. en 2 ^{de}	56	69	74	85	94

Le « diagramme en boîtes » ci-dessous représente la série de la classe de 1^{re}. Construire un diagramme similaire pour la classe de 2^{de}.

**Exercice 132 (III)**

Un professeur compare les résultats de deux classes à un devoir :

	\bar{X}	σ
Classe 1	10	4,1
Classe 2	11,5	3,8

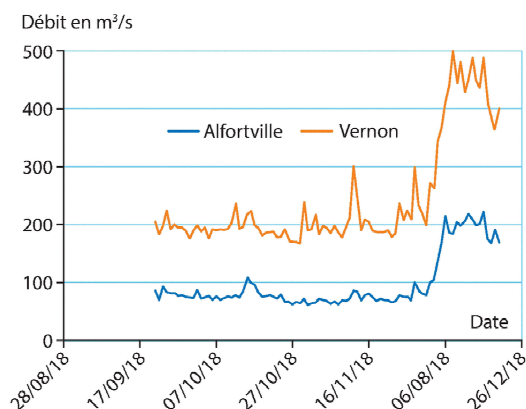
1. Laquelle des deux classes a-t-elle le mieux réussi le devoir?
2. Dans laquelle des deux classes les notes sont-elles les plus homogènes?

Exercice 133 (III)

Les températures moyennes à Quimper et à Grenoble sont relativement similaires, mais le climat y est très différent. D'après vous, laquelle des deux villes a le plus grand écart-type sur ses températures?

Exercice 134

Le graphique ci-dessous montre le débit de la Seine à Alfortville et à Vernon.



1. Dans laquelle des deux villes le débit moyen est-il le plus important?
2. Dans laquelle des deux villes l'écart-type du débit est-il le plus important?

Exercice 135

On reprend l'énoncé de l'exercice 122, où le professeur transforme toutes les notes avec la formule

$$\text{Note} \mapsto 0,8 \times \text{Note} + 4.$$

Si l'écart-type des notes avant transformation est 5, quel est l'écart-type après transformation?

XI. Systèmes et équations de droites

Exercice 136 (III)

Résoudre les systèmes d'équations :

- $$\begin{cases} 8x + 6y = 26 \\ 5x - 3y = -31 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 9x + 2y = 17 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$$

Exercice 137 (III)

Une entreprise artisanale fabrique deux types d'objets en bois, notés A et B.

Un objet de type A nécessite 3 kg de bois et un objet de type B nécessite 5 kg de bois.

Pendant une journée, l'entreprise a utilisé 163 kg de bois pour fabriquer 45 objets.

Déterminer le nombre d'objets A et le nombre d'objets B fabriqués.

Exercice 138 (V)

Les mairies de deux villages sont distantes de 3 km, leurs carillons sont parfaitement synchronisés. Situé sur la route en ligne droite qui les relie, un auto-stoppeur entend le carillon d'une des deux mairies sonner 1 heure, puis une seconde plus tard, le carillon de l'autre.

A quelle distance de chaque mairie notre auto-stoppeur se trouve-t-il ?

N.B. On prendra comme vitesse du son dans l'air $v_{\text{son}} = 340 \text{ m/s}$.

Exercice 139 (III)

Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives et de dix wagons-citernes du même modèle. Ce train mesure alors 152 m de long.

Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes.

Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160 m de long.

On cherche la longueur x d'une locomotive et la longueur y d'un wagon-citerne.

- Traduire le problème par un système d'équations.
- En déduire les valeurs de x et y .

Exercice 140 (V)

Je fais un aller-retour sur un tapis roulant long de 15 m en marchant à vitesse constante. À l'aller, j'avance dans le sens du tapis ; et au retour, en sens contraire. Sachant que je mets 5 s à faire l'aller et 15 s à faire le retour, quelle est la vitesse du tapis roulant ?

Exercice 141 (III)

- Écrire les équations sous forme cartésienne :

$$D : y = 2x - 4, \quad D' : x = 3.$$

- Écrire les équations sous forme réduite :

$$\Delta : -5x + y + 3 = 0, \quad \Delta' : 3x + 4y = 0.$$

Exercice 142 (III)

- Tracer les droites $D_1 : 3x + 2y - 5 = 0$ et $D_2 : -x + y + 3 = 0$.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2 .

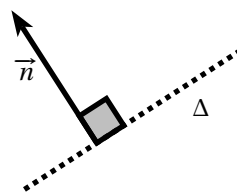
Dans l'exercice suivant, on pourra admettre et utiliser le théorème :

Vecteur perpendiculaire à une droite

Dans un repère orthonormé, si le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la droite Δ , alors Δ a une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + c = 0,$$

pour un certain réel c .



Exercice 143 (V)

Les deux questions sont indépendantes.

- Soient $A(-1;0)$, $B(2;4)$ et $C(5;-2)$. Déterminer l'équation cartésienne de la perpendiculaire Δ à (BC) passant par A .
- Soient $A(0;-2)$ et $B(4;4)$. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

XII. Arithmétique et racines carrées

Exercice 144 (III)

Les nombres suivants sont-ils divisibles par 2, 3, 5 ou 9?

84 ; 495 ; 9545 ; 8052.

Exercice 145 (III)

1. Déterminer les diviseurs de 48, puis les diviseurs de 84.
2. En déduire leur plus grand diviseur commun, que l'on note $\text{PGCD}(48, 84)$.

Exercice 146

Les nombres suivants sont-ils premiers?

425 ; 53 ; 7777 ; 97 ; 143.

Exercice 147 (III)

Déterminer $\text{PGCD}(840, 756)$.

Exercice 148 (III)

Une association organise une compétition sportive, 144 filles et 252 garçons se sont inscrits. L'association désire répartir les inscrits en équipes mixtes, de telle manière que le nombre de filles et le nombre de garçons soit le même dans chaque équipe.

Quel est le nombre maximal d'équipes que l'association peut former? Combien chacune des équipes compte-t-elle de filles et de garçons dans ce cas?

Exercice 149 (III)

Manon a ramassé 60 pêches, 84 abricots et 120 cerises. En utilisant tous les fruits, elle prépare des cageots tous identiques. Quel est le plus grand nombre de cageots qu'elle peut faire?

Exercice 150 (III)

1. Décomposer 126 et 420 en produits de nombres premiers.
2. En déduire leur plus petit multiple commun strictement positif, que l'on note $\text{PPCM}(126, 420)$.

Exercice 151 (III)

L'objet A apparaît dans le ciel tous les 168 jours; l'objet B tous les 90 jours. Si je les vois tous les deux dans le ciel aujourd'hui, dans combien de jours seront-ils de nouveau visibles en même temps?

Exercice 152 (III)

1. Décomposer 60 en produit de nombres premiers. En déduire la décomposition de $60^2 = 3600$ en produit de nombres premiers.
2. Le nombre $2^4 \times 3^6 \times 7^8$ est-il un carré parfait? Et le nombre $2^{10} \times 3^5 \times 7^4$?
Le terme «carré parfait» désigne le carré d'un entier.
3. Déterminer le plus petit entier strictement positif n vérifiant les deux conditions :
 - n est divisible par 792;
 - n est un carré parfait.

Exercice 153

1. Rappeler la définition de $\sqrt{6}$.
2. Prouver que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.
3. Généraliser : si a et b sont deux réels positifs, alors
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \dots$$
4. Prouver que $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Exercice 154 (III)

Exprimer chaque expression sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers naturels et b est le plus petit possible.

1. $\sqrt{45} - \sqrt{20}$.
2. $\sqrt{50} + 3\sqrt{2} - \sqrt{32}$.
3. $2\sqrt{12} - 5\sqrt{3} + \sqrt{27}$.
4. $6\sqrt{10} + 2\sqrt{40} - 3\sqrt{90}$.
5. $\sqrt{200} - 2\sqrt{18} + \sqrt{2}$.

Exercice 155 (III)

Démontrer les égalités :

1. $\frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$.
2. $(\sqrt{18} - \sqrt{2})^2 = 8$.
3. $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 1$.

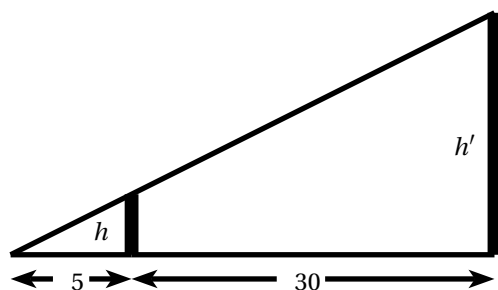
XIII. Inégalités

Exercice 156 (III)

- Soit $1 \leq x \leq 2$. Donner un encadrement de :
 - $2x$.
 - $2x - 1$.
 - $-3x + 4$.
- Soit $-2 < x \leq 5$. Donner un encadrement de :
 - $x - 3$.
 - $-4x$.
 - $-x + 2$.

Exercice 157

Sur la figure ci-dessous, on sait que les deux segments en traits gras sont parallèles et que $2 \leq h \leq 3$. Déterminer un encadrement de h' .



Exercice 158

Soient $a \leq b$ et $c \leq d$.

- Prouver que :
 - $a + c \leq b + c$.
 - $b + c \leq b + d$.
- Que peut-on en déduire pour $a + c$ et $b + d$?

Exercice 159 (III)

Soient $A = \sqrt{7} + \sqrt{47}$ et $B = 2 + \sqrt{3}$.

- Calculer A^2 et prouver que $B^2 = 7 + \sqrt{48}$.
- Comparer A et B .

Exercice 160 (III)

Comparer les nombres $A = \sqrt{7} + \sqrt{8}$ et $B = 3 + \sqrt{6}$.

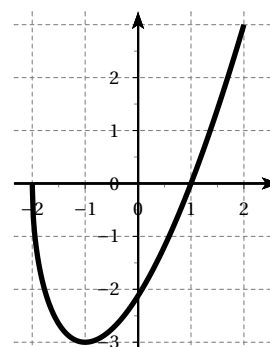
Exercice 161 (V)

Montrer que pour tous nombres $a > 0$, $b > 0$:

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Exercice 162

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f .



- Construire le tableau de variations de f .
- Combien l'équation $f(x) = -1$ admet-elle de solutions ?

Exercice 163 (III)

Soit g une fonction définie sur $[-3; 3]$, dont voici le tableau de variations :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	5	4	2	4	5	4	0

Par lecture du tableau de variations :

- Résoudre l'équation $g(x) = 4$.
- Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 4$.

Exercice 164 (III)

On pose $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ pour $x \in [0; 7]$. On admet que f est strictement croissante sur $[0; 3]$ et strictement décroissante sur $[3; 7]$.

- Construire le tableau de variations de f .
- Combien l'équation $f(x) = 2$ admet-elle de solutions ? Compléter le tableau de variations pour expliquer la réponse.

Exercice 165 (III)

On pose $f(x) = x + \frac{4}{x}$ pour $x \in [1; 10]$. On admet que f est strictement décroissante sur $[1; 2]$ et strictement croissante sur $[2; 10]$.

- Construire le tableau de variations de f .
- Combien l'équation $f(x) = 8$ admet-elle de solutions ?

XIV. Fonctions de référence

Exercice 166

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$							

2. Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.
3. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de f .

Exercice 167 (🏠)

Tracer dans un même repère, de trois couleurs différentes, les courbes d'équations $y = x^2$, $y = x^2 - 2$ et $y = (x - 2)^2$.

Exercice 168

La fonction r est définie sur $[0; +\infty[$ par $r(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	0	1	4	9
$r(x)$				

2. Construire la courbe de la fonction r dans un repère orthonormé.

Exercice 169

La fonction h est définie sur \mathbb{R} par $h(x) = |x|$.
Construire la courbe de la fonction h dans un repère orthonormé.

Exercice 170 (🏠)

Tracer dans un même repère, de deux couleurs différentes, les courbes d'équations $y = |x|$ et $y = |x - 2|$.

Exercice 171 (🏠)

La fonction g est définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$g(x)$							

2. Construire la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé.
3. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de g .

Exercice 172

On pose $i(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.^a

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0,25	0,5	1	2	4
$i(x)$					
x	-0,25	-0,5	-1	-2	-4
$i(x)$					

2. Construire la courbe de la fonction i .
3. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de i .

a. $\mathbb{R} - \{0\}$ désigne l'ensemble de tous les nombres, sauf 0.

Exercice 173 (🏠 🏠)

La fonction f est définie par

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs (arrondir les résultats au centième) :

x	-4,5	-2,5	-1,5	-1	-0,75
$f(x)$					
x	-0,25	0	0,5	1,5	3,5
$f(x)$					

3. Tracer dans un même repère :
 - en pointillés les droites $d_1 : y = \frac{3}{2}$ et $d_2 : x = -\frac{1}{2}$;
 - en traits continus la courbe représentative de la fonction f .
4. Construire le tableau de signe et le tableau de variations de f .

XV. Fractions et manipulation de formules

Exercice 174 (III)

Calculer et exprimer chacun des nombres suivants sous forme de fraction irréductible :

1. $A = \frac{1}{8} + \frac{5}{8}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$
3. $C = \frac{5}{6} - \frac{3}{4}$
4. $D = \frac{4}{15} \times \frac{5}{6}$
5. $E = \frac{5}{6} \times 4$
6. $F = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
7. $G = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$
8. $H = 3 \div \frac{15}{4}$
9. $I = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \times 3$
10. $J = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$
11. $K = \frac{35}{56} \times \frac{72}{45}$
12. $L = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{7}}{\frac{4}{3} \times \frac{2}{7}}$
13. $M = \frac{2 - \frac{10}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{7}}$
14. $N = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{2}{3}\right)$
15. $O = \frac{5}{7} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{4}$
16. $P = \frac{2}{24} + \frac{5}{2} - \frac{50}{60}$
17. $Q = \frac{\frac{5}{6} + \frac{9}{12}}{\frac{3}{4} + \frac{10}{12}}$
18. $R = \frac{11}{6} \times \frac{14}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{11}$

Exercice 175

Quels termes faut-il enlever de la somme

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$$

pour que la somme des termes restants soit égale à 1 ?

Exercice 176 (V)

On appelle fraction égyptienne une fraction de la forme $\frac{1}{a}$, où a est un nombre entier strictement positif.

Il est possible d'écrire n'importe quelle fraction comme une somme de fractions égyptiennes distinctes. Par exemple

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$$

1. Écrire $\frac{3}{4}$ comme la somme de deux fractions égyptiennes.
2. Déterminer l'entier n tel que

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Justifier la réponse.

3. a. Prouver que pour tout entier a supérieur à 1 :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}.$$

- b. En déduire une écriture de $\frac{1}{6}$ comme somme de deux fractions égyptiennes distinctes.

Exercice 177 (V)

La moyenne harmonique de deux nombres strictement positifs a et b est le nombre h défini par :

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

1. a. Montrer que la moyenne harmonique de 2 et 6 est 3.
b. Calculer la moyenne harmonique de 4 et 16.
2. Un cycliste monte une côte de 7 km à la vitesse moyenne de 14 km/h. Arrivé en haut, il fait demi-tour et redescend la côte à la vitesse moyenne de 35 km/h.
a. Combien de temps le cycliste met-il pour monter la côte? Pour la descendre? (Répondre en heures.)
b. Calculer la vitesse moyenne du cycliste sur l'ensemble de son parcours.
c. Montrer que cette vitesse moyenne est la moyenne harmonique de 14 et 35.
3. Généraliser le résultat de la question 2 : si le cycliste monte à la vitesse v_1 puis descend à la vitesse v_2 , sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est la moyenne harmonique de v_1 et v_2 .

Exercice 178 (V)

Écrire sous forme de fractions irréductibles :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

Exercice 179 (III V)

Compléter :

1. $v = \frac{d}{t}$ donc $d = \dots$ et $t = \dots$
2. $U = RI$ donc $I = \dots$
3. $P = UI$ et $U = RI$ donc $P = \dots$ (répondre avec R et I).
4. $v = \sqrt{2gh}$ donc $h = \dots$
5. $E = mc^2$ donc $c = \dots$

XVI. Trigonométrie

Exercice 180

$KLMN$ est un carré. On construit le triangle équilatéral KOM tel que le sommet L soit à l'intérieur du triangle.

1. Faire une figure.
2. Prouver que les points O, L, N sont alignés.

Indication : Utiliser la médiatrice du segment $[KM]$.

3. Combien mesure l'angle \widehat{MLO} ?

Exercice 181

\mathcal{C} est un cercle de centre I et de diamètre $[AB]$, M est un point de \mathcal{C} distinct de A et de B .

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\widehat{IAM} = \widehat{AMI}$ et que $\widehat{IMB} = \widehat{MBI}$.
3. Sans utiliser la question précédente, prouver que

$$\widehat{IAM} + \widehat{AMI} + \widehat{IMB} + \widehat{MBI} = 180^\circ.$$

4. En déduire que

$$2\widehat{AMI} + 2\widehat{MBI} = 180^\circ,$$

puis que

$$\widehat{AMB} = 90^\circ.$$

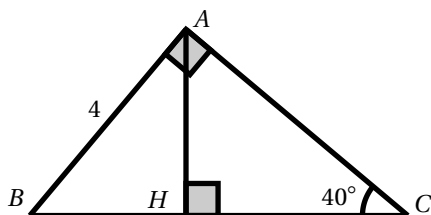
Exercice 182

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. On pose $\theta = \widehat{ACB}$.

1. Prouver que ABC est un triangle rectangle et faire une figure.
2. Calculer $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$. Écrire les réponses sous forme de fractions.
3. Vérifier que :
 - $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$;
 - $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Exercice 183

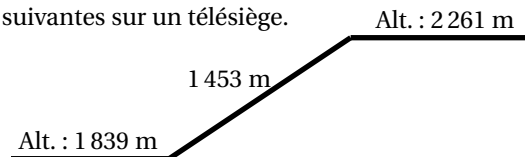
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $\widehat{BCA} = 40^\circ$. On note H le pied de la hauteur issue de A .



Calculer la longueur AC , puis la longueur AH , arrondies au centième.

Exercice 184

Dans une station de ski, on peut lire les informations suivantes sur un télésiège.



Calculer l'angle formé par le télésiège avec l'horizontale. On arrondira au dixième de degré.

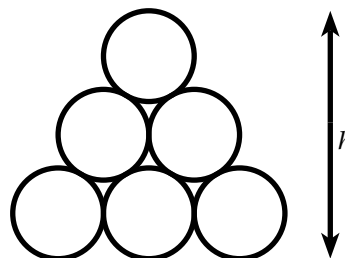
Exercice 185

ABC est un triangle équilatéral de côté 4, H est le pied de la hauteur issue de B .

1. Faire une figure et calculer les longueurs AH et BH .
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ$ et $\tan 60^\circ$.

Exercice 186

Les six cercles de rayon 1 ci-dessous sont tangents. Calculer la hauteur h .



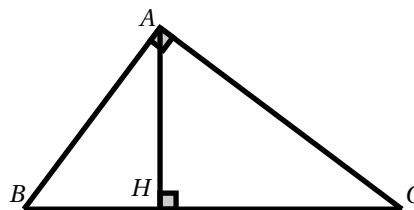
Exercice 187

Quelle distance parcourt-on lorsqu'on fait le tour de la terre en restant à 60° de latitude nord ?

Exercice 188

AHC est un triangle rectangle en H . La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B .

On sait que $AH = 4,8$ et que $HC = 6,4$.



1. Prouver que $\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$.
2. Montrer que $\tan \widehat{ACH} = \frac{3}{4}$.
3. En déduire la longueur BH .

XVII. Calcul littéral

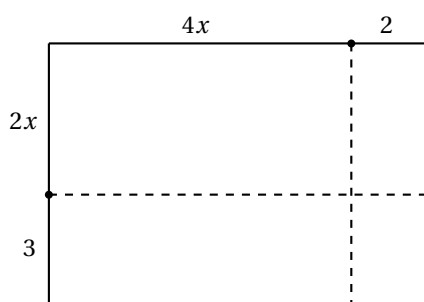
Exercice 189 (III)

x, y sont des nombres réels. Développer et réduire chacune des expressions :

1. $2(x+3) + 3(x-5)$
2. $x(x+8)$
3. $(4x+5)(2x+6)$
4. $x(2x-3)$
5. $(12y-5) - 2(5y+3)$
6. $(2x+4)(4x-2)$
7. $3(2y+3) + 2(y-1)$
8. $3(a+b) - 3(a-b)$
9. $(x-4)(2x+1)$

Exercice 190 (III)

Écrire le périmètre et l'aire du rectangle en fonction du réel x .



Exercice 191 (III)

Soit x un nombre réel. Développer et réduire :

- $(x-4)^2$
- $(2x+1)^2$
- $(x+5)(x-5)$
- $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
- $x^2 - (x+3)(x-3)$

Exercice 192 (III)

Soit x un nombre réel. Démontrer les égalités :

- $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5$
- $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$

Exercice 193 (V)

1. Démontrer que pour tous nombres a, b :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Déterminer de même une formule pour $(a-b)^3$.

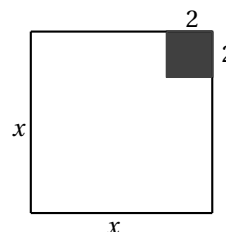
Exercice 194 (III)

Résoudre les équations :

1. $x^2 - 8x = 0$
2. $5x^2 = 3x$
3. $x^2 - 16 = 0$
4. $x^2 = 10$
5. $x^2 + 7 = 0$
6. $2x^2 + x = 0$
7. $4x^2 - 9 = 0$

Exercice 195 (III)

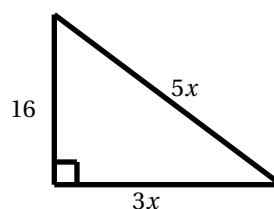
Sur la figure ci-dessous, on a enlevé à l'intérieur d'un grand carré de côté x un petit carré de côté 2. On sait que l'aire de la zone blanche est égale à 20.



Déterminer la valeur de x .

Exercice 196 (III, III)

Déterminer la valeur de x .



Exercice 197 (V)

1. a. Démontrer que pour tout nombre x :

$$x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4.$$

- b. Résoudre l'équation

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

2. a. Démontrer que pour tout nombre x :

$$x^2 - 8x - 9 = (x-4)^2 - 25.$$

- b. Résoudre l'équation

$$x^2 = 8x + 9.$$

3. a. Démontrer que pour tout nombre x :

$$x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5.$$

- b. Résoudre l'équation

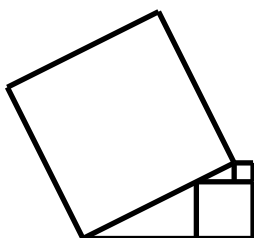
$$x^2 + 4x - 1 = 0.$$

4. Résoudre l'équation $x^2 + 6x + 5 = 0$.
5. Résoudre l'équation $x^2 - 10x + 23 = 0$.
6. Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

XVIII. Problèmes

Exercice 198 (🐼)

Un grand carré s'appuie sur deux autres carrés comme le montre la figure. Les aires des deux carrés les plus petits sont 1 et 9. Quelle est l'aire du grand carré ?



Exercice 199 (🐼)

Soit x le plus petit entier positif dont la somme des chiffres est 2022. Quelle est la somme des chiffres de $x + 2023$?

Exercice 200 (🐼)

On dispose de deux bidons de contenances 7 ℓ et 4 ℓ et d'un robinet d'eau. Déterminer une méthode pour mettre exactement 2 ℓ d'eau dans l'un des deux bidons.

Exercice 201 (🐼)

David mettrait une heure pour couper seul un tas de bois, et Rémy en mettrait deux.

Combien de temps David et Rémy mettront-ils s'ils se partagent le travail ?

Exercice 202 (🐼)

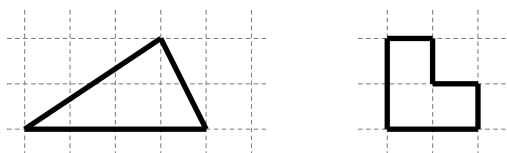
Par combien de 0 se termine l'écriture décimale du nombre $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$?

Exercice 203 (🐼)

Le nombre $18^{2018} + 18^{2019}$ est-il divisible par 8 ? Par 18 ? Par 28 ? Par 38 ? Par 48 ?

Exercice 204 (🐼)

Découper chaque figure en 4 figures identiques.



Exercice 205 (🐼)

Vers la fin du XVI^e siècle, on a accusé Marie Stuart, reine d'Écosse, de comploter contre sa cousine Elizabeth, reine d'Angleterre. Experte dans l'art du chiffre, Marie Stuart communiquait avec ses partisans depuis sa prison à l'aide de messages codés.

Le texte ci-dessous est la traduction en français d'une lettre que lui aurait envoyée l'un d'entre eux, Anthony Babbington. Il utilise un chiffrement par substitution : chaque lettre de l'alphabet est remplacée par une autre (par exemple le A devient K, le B devient M, le C devient A, etc.).

En traduisant le message, vous comprendrez pourquoi il a valu à Marie Stuart une condamnation à mort.

HMC-HJHJ WRRCRXJ GJ GCP EJNXCURIMHHJR JX G'DNJ SJNXWCNJ GJ NMR SMHYWENMNR
JNXTJYTJNGTMNR GJ GJUCKTJT KMXTJ YJTRMNNJ TMQWUJ GJR HWCNR GJ RJR JNNJHCR.
YMDT U'JUCHCNWXC MN GJ U'DRDTYWXTCSJ, JNKJTR LDC NMDR NMDR SMNRCGJTMNR TJUJKJR
GD GJKMCT G'MBJCRRWNSJ YWT RMN JPSMHHDNCSWXC MN, CU Q W RCP
NMBUJR VJDNJR EJNR, XMDR HJR WHCR CNXCHJR, LDC, WKJS UJ AJUJ LD'CUR
YMTXJNX W UW SWDRJ SWXIMUCLDJ, JX YMDT UJ RJTKCSJ GJ KMXTJ HWVJRXJ,
RJ SIWTEJTMNX GJ UW XJTTCBUJ JPJSDXC MN. HMC-HJHJ WRRCRXJ GJ GCP EJNXCURIMHHJR
JX G'DNJ SJNXWCNJ GJ NMR SMHYWENMNR JNXTJYTJNGTMNR GJ GJUCKTJT KMXTJ YJTRMNNJ
TMQWUJ GJR HWCNR GJ RJR JNNJHCR. YMDT U'JUCHCNWXC MN GJ U'DRDTYWXTCSJ,
JNKJTR LDC NMDR NMDR SMNRCGJTMNR TJUJKJR GD GJKMCT G'MBJCRRWNSJ
YWT RMN JPSMHHDNCSWXC MN, CU Q W RCP NMBUJR VJDNJR EJNR, XMDR
HJR WHCR CNXCHJR, LDC, WKJS UJ AJUJ LD'CUR YMTXJNX W UW SWDRJ
SWXIMUCLDJ, JX YMDT UJ RJTKCSJ GJ KMXTJ HWVJRXJ, RJ SIWTEJTMNX GJ
UW XJTTCBUJ JPJSDXC MN.