dans tout ce document, u désigne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, v désigne $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Suites numériques

Raisonnement par récurrence

pour qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit que :

- $\mathcal{P}_0$ soit vraie
- $\forall k \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}_k \text{ vraie}) \implies (\mathcal{P}_{k+1} \text{ vraie})$.

la grande technique pour l'hérédité : manipuler des inégalités et/ou utiliser les variations d'une fonction

Suites arithmétiques et géométriques

Suites géo.

- v géométrique de raison $q \iff \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = q \times v_n$
- v géométrique de raison $q \implies \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n$
- $-1 < q < 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Calculs de sommes

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $q \neq 1 \implies 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Suites arithm.

- u arithmétique de raison $r \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$
- u arithmétique de raison $r \implies \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times r$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Limites de suites

Variations et limites

- u est majorée par M si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
- u est minorée par m si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$

- u est croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
- u est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$

- toute suite u croissante majorée (par M) converge
  $\to$ sa limite ℓ vérifie $u_0 \leq \ell \leq M$
- toute suite u décroissante minorée (par m) converge
  $\to$ sa limite ℓ vérifie $u_0 \geq \ell \geq m$

Opérations sur les limites

- passage à la limite dans la formule de récurrence :
  $$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ f \text{ continue en } \ell \end{array}\right\} \implies \ell = f(\ell)$$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = a\ell + b$
- des fonctions aux suites :
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \ell$

Limites par comparaison

- théorème des gendarmes :
  $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$$
- limite par comparaison :
  $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

Fonctions Python

Situation :
$u_0 = 4$
$u_{n+1} = 0,5u_n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Problème de seuil

? plus petit n tel que $u_n \geq 5,9$?

```
def seuil( ):
    u=4
    n=0
    while u<5.9:
        u=0.5*u+3
        n=n+1
    return n
```

autres méthodes :

- résolution avec le logarithme (sachant que $u_n = -2 \times 0,5^n + 6,\ \forall n \in \mathbb{N}$)
- par tâtonnement avec la calculatrice

Calcul de u_n

```
def terme(n):
    u=4
    for i in range(n):
        u=0.5*u+3
    return u
```

Liste des termes de u_0 à u_n

```
def liste(n):
    u=4
    ℓ=[4]
    for i in range(n):
        u=0.5*u+3
        ℓ.append(u)
    return ℓ
```