

# Corrigé du devoir surveillé n°5

## Exercice 1

1.  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$ , donc

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ll 1 - (+\infty) \gg = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ll 1 + (+\infty) \gg = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ll (-\infty) \times (+\infty) \gg = -\infty.$$

2. On met le terme de plus haut degré,  $x^2$ , en facteur :

$$x^2 - 4x - 1 = x^2 \left(1 - \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = x^2 \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

On a donc

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 4 \times 0 - 0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \ll (+\infty) \times 1 \gg = +\infty.$$

3.

$x$	$-\infty$	1 ◀	$+\infty$
$-x + 4$	+	0	-

Quand  $x$  se rapproche de 4 en étant supérieur à 4, donc par la droite (flèche ◀),  $-x + 4$  se rapproche de 0 en étant négatif, donc

$$\lim_{x \rightarrow 4, x > 4} \frac{x}{-x + 4} = \ll \frac{4}{0^-} \gg = \ll \frac{4}{0^-} \gg = -\infty.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} e^{1/x} = \ll e^{-\infty} \gg = 0.$$

## Exercice 2

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$ .

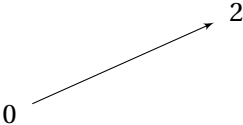
1. On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient avec

$$\begin{array}{ll} u(x) = 2e^x & , \\ u'(x) = 2e^x & , \end{array} \quad \begin{array}{l} v(x) = e^x + 1, \\ v'(x) = e^x. \end{array}$$

On obtient, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g'(x) = \frac{2e^x \times (e^x + 1) - 2e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x \times e^x + 2e^x \times 1 - 2e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Une exponentielle est strictement positive, donc on obtient le tableau :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , donc

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x) = 2 \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

On en déduit que la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .

3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par  $e^{-x}$ . Pour tout réel  $x$  :

$$\frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x \times e^{-x}}{(e^x + 1) \times e^{-x}} = \frac{2e^{x-x}}{e^{x-x} + e^{-x}} = \frac{2e^0}{e^0 + e^{-x}} = \frac{2}{1 + e^{-x}}.$$

On peut alors calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} = \frac{2}{1 + 0} = 2.$$

On en déduit que la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .