

# Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels de calcul et de géométrie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Nombres réels</b>	<b>13</b>

# 1 Rappels de calcul et de géométrie

**Exercice 1** Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut  $\frac{250 \times 6}{4} = \frac{1500}{4} = 375$  g de farine,  $\frac{500 \times 6}{4} = \frac{3000}{4} = 750$  mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent  $6 \times 125 = 750$  g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai  $\frac{750 \times 2}{1000} = \frac{1500}{1000} = 1,5$  €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes<sup>1</sup>.

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra  $\frac{60 \times 45}{20} = \frac{20 \times 3 \times 45}{20} = 135$  min, soit 2 h 15 min (puisque  $135 = 120 + 15$ ).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a  $4 \times 30 \div 5 = 24$  pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a  $\frac{7 \times 24}{6} = \frac{7 \times 4 \times 6}{6} = 28$  florins.

**Exercice 2** 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

Stéphane nage  $\frac{60 \times 0,5}{3} = \frac{30}{3} = 10$  min, puis il court  $\frac{60 \times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$  min.

2. Stéphane a parcouru un total de  $5 + 0,5 = 5,5$  km, en  $10 + 20 = 30$  min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc  $\frac{60 \times 5,5}{30} = \frac{30 \times 2 \times 5,5}{30} = 11$  km/h.

**Exercice 3**



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

- d'un rectangle  $BHDC$ , d'aire  $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$  ;
- d'un triangle  $AHD$ , d'aire  $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ .

Donc l'aire du trapèze est  $6 + 2 = 8$ .

**Remarque :** On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(5 + 3) \times 2}{2} = 8.$$

**Exercice 4** Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés  $\ell$  et  $L$ , donc son aire est  $\frac{\ell \times L}{2}$ .



**Exercice 5 Rappels :**

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé  $O$  sur la figure ci-dessous).



**Exercice 6** On note  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .



$[AH]$  est une hauteur dans les triangles  $BIA$  et  $CIA$ , donc

$$\mathcal{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2}$$

$$\mathcal{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or  $BI = CI$  puisque  $I$  est le milieu de  $[BC]$ , donc  $BIA$  et  $CIA$  ont la même aire.

### Exercice 7

1. La négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Il existe un homme immortel.

## 2. La négation de

Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

est

Tous les desserts **sont sucrés** à la cantine.

**Remarque :** Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe », et réciproquement; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

### 3. La négation de

Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

est

Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

est

Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni... ni... » est « ou ». Donc la négation de

Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

est

Chloé aime les fraises ou les framboises.

**Exercice 8** 1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

Si  $\underbrace{\text{un nombre se termine par 5}}_A$ , alors  $\underbrace{\text{il est multiple de 5}}_B$ .

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b) • L'implication contraposée est

Si  $\underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de 5}}_{\text{non B}}$ , alors  $\underbrace{\text{il ne se termine pas par 5}}_{\text{non A}}$ .

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

- L'implication réciproque est

Si  $\underbrace{\text{un nombre est multiple de 5}}_B$ , alors  $\underbrace{\text{il se termine par 5}}_A$ .

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

## 2. L'implication

Si  $\underbrace{\text{un nombre se termine par } 0}_{\text{A}}$ , alors  $\underbrace{\text{il est multiple de } 10}_{\text{B}}$ .

et sa réciproque

Si un nombre est multiple de 10, alors il se termine par 0.

B
A

sont vraies toutes les deux.

**Exercice 9** Soit  $ABC$  un triangle

**1. Théorème de Pythagore.**

Si  $ABC$  est rectangle en  $A$ , alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .



**2. Théorème contraposé de Pythagore.**

Si  $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ , alors  $ABC$  n'est pas rectangle en  $A$ .

**3. Théorème réciproque de Pythagore.**

Si  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , alors  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠ En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre!

**Exercice 10** 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment  $[EF]$ .
- La perpendiculaire à  $[EF]$  passant par  $E$ .
- Un arc de cercle de centre  $F$ , de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en  $G$ .



D'après le **théorème de Pythagore** dans  $EFG$  rectangle en  $E$  :

$$\begin{aligned}
 FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\
 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\
 49 &= 25 + EG^2 \\
 49 - 25 &= EG^2 \\
 \sqrt{24} &= EG
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $EG = \sqrt{24}$  cm.

⚠ Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

2. Le plus grand côté est  $[BC]$ , donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en  $A$ .

On calcule :

$$\left. \begin{aligned} BC^2 &= 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 &= 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{aligned} \right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

D'après la **contraposée du théorème de Pythagore**,  $ABC$  n'est pas rectangle en  $A$ .

**Exercice 11**  $ABCDEFGH$  est un parallépipède rectangle tel que  $AB = BC = 6$  et  $CG = 3$ .



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans  $ABC$  rectangle en  $B$ ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 6^2 + 3^2$$

$$AC^2 = 36 + 36$$

$$AC^2 = 72$$

(Inutile de donner  $AC$  !)

Dans  $ACG$  rectangle en  $C$ ,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$

$$AG^2 = 72 + 3^2$$

$$AG^2 = 72 + 9$$

$$AG^2 = 81$$

$$AG = \sqrt{81} = 9$$

Conclusion :  $AG = 9$ .

**Exercice 12** Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment  $[MK]$  mesure 3 cm, le segment  $[MN]$  mesure 5 cm et  $h = 1,2$  cm.



$$1. \mathcal{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3 \text{ cm}^2.$$

$$2. \text{ On a aussi } \mathcal{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}, \text{ donc } 3 = \frac{PN \times 3}{2}, \text{ soit } 3 \times 2 = PN \times 3; \text{ et donc } PN = 2 \text{ cm.}$$

3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement  $KN$ , puis  $KP$  et  $MP$ .

△ On ne sait pas, à ce stade, que  $P$  est le milieu de  $[KN]$ .

- Pour  $KN$ , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle  $KMN$ . On obtient  $KN = 4$  cm.
- $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$  cm.
- Enfin, pour calculer  $MP$ , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle  $KMP$ . On obtient  $MP = \sqrt{13}$  cm.

**Exercice 13** 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent  $a$  et  $b$ , l'hypoténuse mesure  $c$ .



D'après le théorème de Pythagore,  $c^2 = a^2 + b^2$ , donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

## 2. L'affirmation

Pour tous nombres positifs  $a$  et  $b$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ .

est FAUSSE! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit  $a = 4$  et  $b = 3$ . Dans ce cas

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{est différent de} \quad a + b = 4 + 3 = 7.$$

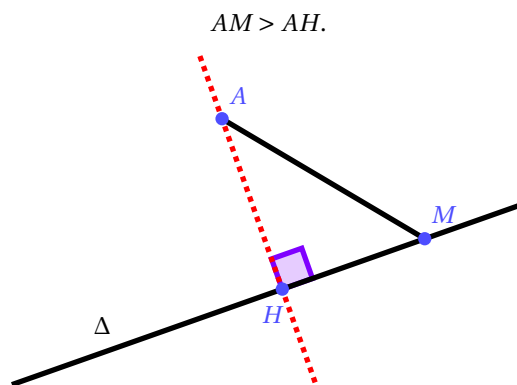
- **Géométriquement.**  $\sqrt{a^2 + b^2}$  est la longueur de l'hypoténuse  $c$  du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que  $a + b$  est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

**Exercice 14** Soit  $A$  un point et  $\Delta$  une droite du plan. Le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\Delta$  est le point  $H$  de  $\Delta$  tel que  $(AH) \perp \Delta$ .

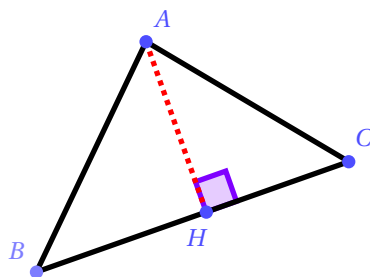
1. On trace la perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $A$ . Elle coupe  $\Delta$  en  $H$ .



2. Par construction, le triangle  $AMH$  est rectangle en  $H$ , donc son hypoténuse  $AM$  est strictement plus grande que le côté de l'angle droit  $AH$  (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :



3. Le segment  $[AH]$  est la hauteur<sup>2</sup> issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .



2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment  $[AH]$  peut être appelé *hauteur*, la droite  $(AH)$  peut également être appelée *hauteur*; enfin la longueur  $AH$  peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule  $\frac{B \times h}{2}$  pour l'aire du triangle.

**Exercice 15** On résout les équations :

$x + 7 = 18$ $x + \cancel{7} - \cancel{7} = 18 - 7$ $x = 11$  La solution est $x = 11$	$3x + 4 = 19$ $3x + \cancel{4} - \cancel{4} = 19 - 4$ $3x = 15$ $\cancel{3}x = \frac{15}{3}$ $x = 5$  La solution est $x = 5$ .	$3,5x - 9 = 5$ $3,5x - \cancel{9} + \cancel{9} = 5 + 9$ $3,5x = 14$ $\frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}} = \frac{14}{3,5}$ $x = \frac{14}{3,5}$ Or $\frac{14}{3,5} = \frac{14 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{28}{7} = 4$ , donc la solution est $x = 4$ .	$x + 1 = -2x - 5$ $x + 1 + \cancel{2x} = -2\cancel{x} - 5 + \cancel{2x}$ $3x + 1 = -5$ $3x + \cancel{1} - \cancel{1} = -5 - 1$ $3x = -6$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{-6}{3}$ $x = -2$  La solution est $x = -2$ .	$-2x + 4 = 3x - 6$ $-2x + 4 - \cancel{3x} = 3\cancel{x} - 6 - \cancel{3x}$ $-5x + 4 = -6$ $-5x + \cancel{4} - \cancel{4} = -6 - 4$ $-5x = -10$ $\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{-10}{-5}$ $x = 2$  La solution est $x = 2$ .
--	---	---	---	---

**Exercice 16** Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse  $M$  kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M + 7 = 10 + M.$$

On la résout :

$$\begin{aligned}
 3M + 7 - \cancel{M} &= 10 + \cancel{M} - \cancel{M} \\
 2M + 7 &= 10 \\
 2M + \cancel{7} - \cancel{7} &= 10 - 7 \\
 2M &= 3 \\
 \frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}} &= \frac{3}{2} \\
 M &= 1,5
 \end{aligned}$$

Conclusion : la solution est  $M = 1,5$ .

**Exercice 17** Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a  $x$  places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a  $x$  places dans les virages, donc  $(15000 - x)$  places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15 \times x + 25 \times (15000 - x).$$

Comme cette recette est 295 000 €,  $x$  est solution de l'équation

$$15x + 25(15000 - x) = 295000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :



$$\begin{aligned}
15x + 25(15000 - x) &= 295000 \\
15x + 25 \times 15000 + 25 \times (-x) &= 295000 \\
15x + 375000 - 25x &= 295000 \\
-10x + 375000 &= 295000 \\
-10x + 375000 - 375000 &= 295000 - 375000 \\
-10x &= -80000 \\
\frac{-10x}{-10} &= \frac{-80000}{-10} \\
x &= 8000.
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a  $x = 8000$  places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

### Exercice 18

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{2} \\
B &= \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12} \\
C &= 2 + \frac{1}{5} = \frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \\
D &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{10 \times 6} = \frac{15}{60} = \frac{15}{15 \times 4} = \frac{1}{4} \\
E &= 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{10 \times 3}{6 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{30}{18} - \frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11 \times 2}{9 \times 2} = \frac{11}{9} \\
F &= 4 - 3 \times \frac{5}{6} = \frac{4}{1} - \frac{3 \times 5}{6} = \frac{4 \times 6}{1 \times 6} - \frac{15}{6} = \frac{24}{6} - \frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{2} \\
G &= \frac{6}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{6 \times 15}{10 \times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9 \times 10}{8 \times 10} = \frac{9}{8} \\
H &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

**Exercice 19** Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste  $\frac{5}{12}$  du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit  $\frac{12}{12}$  du prix) est égal à

$$\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12 \times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ €}.$$

**Remarque :** Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente  $\frac{1}{12}$  du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les  $\frac{5}{12}$  du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent  $5 \times 2 = 10$  € ; et la valeur totale du livre est  $12 \times 2 = 24$  €.



## Exercice 20

$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12} \times 3^{6-4} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

$$B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$

$$C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$

$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{(2 \times 3)^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6}{2^5} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5} \times 3^{6-4} = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$E = \frac{(10^4)^3}{10^8} = \frac{10^{4 \times 3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$

$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2 \times 5}}{2^{3 \times 3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$

$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7} + \frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7} + 10^{8-7} = 10^3 + 10^1 = 1\,000 + 1 = 1\,001$$

**Exercice 21** Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.

On rappelle avant cela que  $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \underbrace{0,00}_\text{3 zéros} 1$ , donc multiplier un nombre par  $10^{-3}$  revient à décaler la virgule de 3

rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour  $10^{-2}$ ).

$$A = 35,4 \times 10^{-3} = 0,0354$$

$$B = 0,034 = 0,0340$$

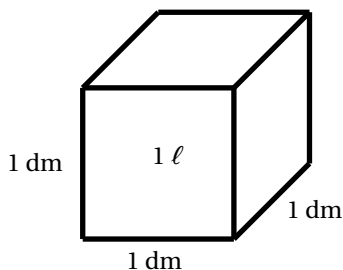
$$C = 3,6 \times 10^{-2} = 0,036 = 0,0360$$

$$D = \frac{355}{10^4} = \frac{355}{10\,000} = 0,0355$$

$$E = \frac{7}{60} \times \frac{3}{10} = \frac{7 \times 3}{60 \times 10} = \frac{7 \times \cancel{3}}{20 \times \cancel{3} \times 10} = \frac{7}{200} = 0,0350$$

Conclusion :  $B < E < A < D < C$ .

**Exercice 22** Avant de commencer, il est utile de se rappeler que  $10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}$ ; et que  $1 \ell = 1 \text{ dm}^3$ . Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure  $1 \text{ dm}$  sur  $1 \text{ dm}$  sur  $1 \text{ dm}$ , ou encore  $10 \text{ cm}$  sur  $10 \text{ cm}$  sur  $10 \text{ cm}$  (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est  $80 \text{ cm}$ , la profondeur  $30 \text{ cm}$  et la hauteur  $40 \text{ cm}$ . On dispose d'un robinet dont le débit est de  $6$  litres par minute.

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

largeur =  $8 \text{ dm}$ ,      profondeur =  $3 \text{ dm}$ ,      hauteur =  $4 \text{ dm}$ ,

donc son volume est

$$8 \times 3 \times 4 = 96 \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de  $6 \ell/\text{min}$ , donc il faut  $96 \div 6 = 16 \text{ min}$  pour remplir les  $96 \ell$  de l'aquarium.

**Exercice 23** On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801 \quad (\text{IR n}^\circ 2)$$

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609 \quad (\text{IR n}^\circ 1)$$

$$71 \times 69 = (70 + 1)(70 - 1) = 70^2 - 1^2 = 4900 - 1 = 4899 \quad (\text{IR n}^\circ 3)$$

$$2,05^2 = (2 + 0,05)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 0,05 + 0,05^2 = 4 + 0,2 + 0,0025 = 4,2025 \quad (\text{IR n}^\circ 1)$$

$$4,3 \times 3,7 = (4 + 0,3)(4 - 0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91 \quad (\text{IR n}^\circ 3)$$

**Remarque :** Comment calculer  $0,05^2$  de tête? Comme  $0,05^2 = 0,05 \times 0,05$  et que  $0,05$  a deux chiffres après la virgule,  $0,05^2$  en aura  $2 + 2 = 4$ . Il ne reste alors plus qu'à calculer  $5^2 = 25$  pour pouvoir conclure :  $0,05^2 = 0,0025$ .

Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0,05 \times 0,0006 = 0,000030,$$

puisque  $6 \times 5 = 30$  et que le résultat doit avoir  $2 + 4 = 6$  chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

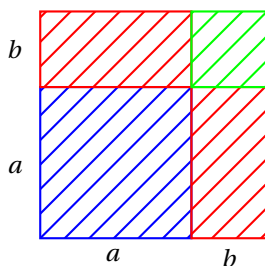
**Exercice 24** Le côté du grand carré mesure  $a + b$ , donc son aire est  $(a + b)^2$ .

D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté  $a$ , donc d'aire  $a^2$  (hachuré en bleu), un carré de côté  $b$ , donc d'aire  $b^2$  (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés  $a$  et  $b$ , donc d'aires  $a \times b$  (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2 \times a \times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



**Exercice 25** 1. Pour comparer les fractions  $a = \frac{4}{5}$  et  $b = \frac{5}{6}$ , on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30} \quad , \quad b = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme  $24 < 25$ , on obtient  $a < b$ .

2. On compare à présent  $c = \frac{524}{525}$  et  $d = \frac{525}{526}$ . On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \quad , \quad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

$$524 \times 526 = (525 - 1)(525 + 1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à  $525 \times 525 = 525^2$ , donc  $c < d$ .

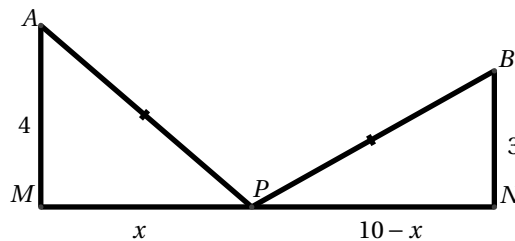
**Exercice 26** La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés  $(a - b)$  et  $(a + b)$ , donc son aire est égale à  $(a - b)(a + b)$ .

Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté  $a$  duquel on a retiré un carré de côté  $b$ . Son aire est donc égale à  $a^2 - b^2$ .

L'identité remarquable n°3 nous dit que  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ , donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



### Exercice 27



On pose  $MP = x$ , on a donc  $PN = MN - MP = 10 - x$ .

D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles  $AMP$  et  $BNP$  :

$$AP^2 = MP^2 + MA^2$$

$$AP^2 = x^2 + 4^2$$

$$AP^2 = x^2 + 16$$

$$BP^2 = PN^2 + BN^2$$

$$BP^2 = (10 - x)^2 + 3^2$$

$$BP^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \quad (\text{on développe grâce à l'IR n°2})$$

$$BP^2 = 100 - 20x + x^2 + 9$$

$$BP^2 = x^2 - 20x + 109$$

On sait que  $AP = BP$ , donc  $AP^2 = BP^2$  ; et d'après les deux calculs ci-dessus :

$$x^2 + 16 = x^2 - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned}
 16 &= -20x + 109 \\
 16 - 109 &= -20x + 109 - 109 \\
 \frac{-93}{-20} &= \frac{-20x}{-20} \\
 4,65 &= x
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $MP = 4,65$ .

### Exercice 28



1. D'après le théorème de Pythagore,

$$x^2 + y^2 = 13^2 = 169.$$

D'après l'IR n°1,  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ . Or  $x^2 + y^2 = 169$ , et  $\frac{x \times y}{2} = 30$ , puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit  $x \times y = 30 \times 2 = 60$ , puis

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 169 + 2 \times 60 = 169 + 120 = 289.$$

Finalement, comme  $(x + y)^2 = 289$ ,

$$x + y = \sqrt{289} = 17.$$

2. On utilise cette fois l'IR n°2 :

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 169 - 2 \times 60 = 169 - 120 = 49.$$

Or  $x - y \geq 0$ , puisque  $x$  est plus grand que  $y$ , donc

$$x - y = \sqrt{49} = 7.$$

△ Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir  $x - y = -7$  !!!

On sait à présent que  $x + y = 17$  et  $x - y = 7$ . On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit  $x$  :

$$\begin{aligned}
 (x + y) + (x - y) &= 17 + 7 \\
 x + \cancel{y} + x - \cancel{y} &= 24 \\
 \frac{2x}{2} &= \frac{24}{2} \\
 x &= 12
 \end{aligned}$$

Enfin, comme  $x + y = 17$ , on trouve  $y = 17 - x = 17 - 12 = 5$ .

Conclusion :  $x = 12$ ,  $y = 5$ .

## 2 Nombres réels

**Exercice 29** 1.  $-7 \in \mathbb{Q}$ . **VRAI**.

Justification :  $-7 = \frac{-7}{1}$ , donc  $-7 \in \mathbb{Q}$  (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

2.  $-7 \in \mathbb{N}$ . **FAUX**.

Justification :  $-7$  est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3.  $-\frac{13}{4} \in \mathbb{Z}$ . **FAUX.**

Justification :  $-\frac{13}{4} = -3,25$  a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.

**Remarque :** Pour obtenir  $\frac{13}{4} = 3,25$  sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ②

Poser la division – ③ Remarquer que  $\frac{13}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$ .

4.  $-\frac{13}{4} \in \mathbb{D}$ . **VRAI.**

Justification :  $-\frac{13}{4} = -3,25$  a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.

5.  $5,824 \in \mathbb{D}$ . **VRAI.**

Justification : 5,824 a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal

6.  $5,824 \in \mathbb{Q}$ . **VRAI.**

Justification n°1 : 5,824 est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ( $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ ).

Justification n°2 :  $5,824 = \frac{5824}{1000}$ , donc  $5,824 \in \mathbb{Q}$  (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

7.  $\frac{10}{6} \in \mathbb{D}$ . **FAUX.**

Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ -6 & 1,6 \\ \hline 40 & \\ -36 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion :  $\frac{10}{6} = 1,666\ldots$  n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

8.  $\frac{17}{11} \in \mathbb{D}$ . **FAUX.**

Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 17 & 11 \\ -11 & 1,54 \\ \hline 60 & \\ -55 & \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion :  $\frac{17}{11} = 1,5454\ldots$  n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

### Exercice 30 1.

$$I_1 = [1; 4] \quad I_2 = [5; +\infty[ \quad I_3 = ]-2; 0[$$



2.

$$I_1 = [-1; 1[ \quad I_2 = ]3; +\infty[ \quad I_3 = ]-\infty; -2]$$



- Exercice 31**
1.  $5 \in [2;6[$
  2.  $-2 \notin ]-2;1]$
  3.  $\pi \in ]3;4[$  (on rappelle que  $\pi \approx 3,14$ )

- Exercice 32**
1.  $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$
  2.  $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
  3.  $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
  4.  $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
  5.  $|7 - 4| = |3| = 3$
  6.  $|4 - 7| = |-3| = 3$
  7.  $|4 - 3| + |5 - 6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
  8.  $|5 - 11| + 2 \times |7 - 8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
  9.  $|8 - 5| \times |7 - 10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
  10.  $|15 - 6| - 4 \times |1 - 4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

- Exercice 33**
1. On résout l'équation  $|x - 2| = 3$ .

**Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.**

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.

Donc dire que

$$|x - 2| = 3$$

revient à dire que

$$x - 2 = 3 \quad \text{ou que} \quad x - 2 = -3$$

Donc

$$\begin{array}{ll} x - \cancel{2} + \cancel{2} = 3 + 2 & \text{ou} \quad x - \cancel{2} + \cancel{2} = -3 + 2 \\ x = 5 & \text{ou} \quad x = -1 \end{array}$$

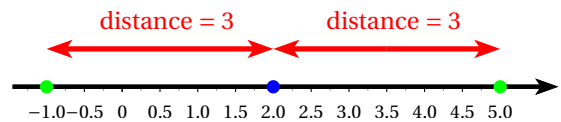
Conclusion : l'équation a deux solutions :  $x = 5$  et  $x = -1$ .

**Méthode n°2 : avec la distance.**

Dire que

$$|x - 2| = 3$$

revient à dire que la distance entre  $x$  et 2 est égale à 3.



On voit qu'il y a deux solutions :  $x = 5$  et  $x = -1$ .