Corrigé du devoir surveillé n°5

Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \left(1-\frac{1}{x}\right) = & \text{« } 1-(+\infty) \text{ »} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \left(1+\frac{1}{x}\right) = & \text{« } 1+(+\infty) \text{ »} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) = \text{« } (-\infty)\times(+\infty) \text{ »} = -\infty.$$

2. On met le terme de plus haut degré, x^2, en facteur :

$$x^2-4x-1 = x^2\left(1-\frac{4x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right) & = 1-4\times 0-0 = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-4x-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \text{« } (+\infty)\times 1 \text{ »} = +\infty.$$

3.

x	$-\infty$		1 ◀		$+\infty$
$-x+4$		$+$	0	$-$	

Quand x se rapproche de 4 en étant supérieur à 4, donc par la droite (flèche ◀), $-x+4$ se rapproche de 0 en étant négatif, donc

$$\lim\limits_{x\to 4, x>4} \frac{x}{-x+4} = \text{« } \frac{4}{0^{-}} \text{ »} = \text{« } \frac{4}{0^-} \text{ »} = -\infty.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} = -\infty$, donc

$$\lim\limits_{x\to 0, x<0} \mathrm{e}^{1/x} = \text{« } \mathrm{e}^{-\infty} \text{ »} = 0.$$

Exercice 2

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient avec

$$\begin{array}{lcl} u(x) = 2\mathrm{e}^x & , & v(x) = \mathrm{e}^x + 1, \\ u'(x) = 2\mathrm{e}^x & , & v'(x) = \mathrm{e}^x. \end{array}$$

   On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x+1) - 2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x \times 1 - 2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\cancel{2\mathrm{e}^{2x}} + 2\mathrm{e}^x - \cancel{2\mathrm{e}^{2x}}}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

   Une exponentielle est strictement positive, donc on obtient le tableau :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 2$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to-\infty} (2\mathrm{e}^x) & = 2 \times 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + 1) & = 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

   On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{-x}. Pour tout réel x :

$$\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x+1) \times \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\mathrm{e}^{x-x}}{\mathrm{e}^{x-x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

   On peut alors calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{2}{1+0} = 2.$$

   On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.