Lycée Mariette Boulogne-sur-Mer 2023–2024

Cours de Mathématiques
Partie I

Terminale Spécialité

Nicolas Perpète

Table des matières

CHAPITRE 1

Compléments sur la dérivation

Plan de ce chapitre

I. Dérivation : les outils de la classe de 1re

Attention

Ce qui suit est le matériel de base pour la moitié des leçons de Tale. Il faut tout connaître par ♡!!!

Théorème 1 (signe du 1er degré)

Soient a et b deux nombres réels, avec $a \neq 0$.

1. Si $a > 0$, le tableau de signe de $ax + b$ est de la forme $\boxed{-\ \phi\ +}$
2. Si $a < 0$, le tableau de signe de $ax + b$ est de la forme $\boxed{+\ \phi\ -}$

Théorème 2 (équation du 2nd degré)

Soient a, b, c trois nombres réels, avec $a \neq 0$. On s'intéresse à l'équation

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions (ou racines) :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. Si $\Delta = 0$, (E) a une solution (ou racine) :
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$
3. Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution

Théorème 3 (signe du 2nd degré)

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a, sauf entre les racines, si elles existent.

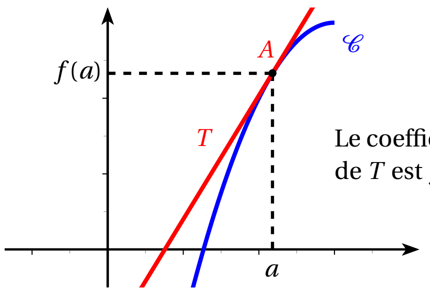
Définition 1

Le nombre dérivé d'une fonction f en a est :

1 Algébriquement :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

2 Graphiquement : le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point A d'abscisse a.



Le coefficient directeur de T est $f'(a)$.

Remarque. Pour le physicien, si $d(t)$ donne la distance parcourue au temps t, alors $d'(t_0)$ est la vitesse instantanée au temps $t = t_0$.

Théorème 4

1. Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$a\mathrm{e}^{ax+b}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Opérations sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables, k est un nombre réel.

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$
- $(k \times u)' = k \times u'$
- $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Théorème 5

I désigne un intervalle.

1. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en quelques points où on peut avoir $f'(x) = 0$), alors f est strictement croissante sur I.
2. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en quelques points où on peut avoir $f'(x) = 0$), alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

Théorème 6

Équation de la tangente au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

II. Trois nouvelles formules

On admet le théorème :

Théorème 7

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier supérieur ou égal à 1. Alors :

1. e^u est dérivable sur I et
$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u' \times \mathrm{e}^u.$$
2. u^n est dérivable sur I et
$$\left(u^n\right)' = n \times u' \times u^{n-1}.$$
3. Si u est strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

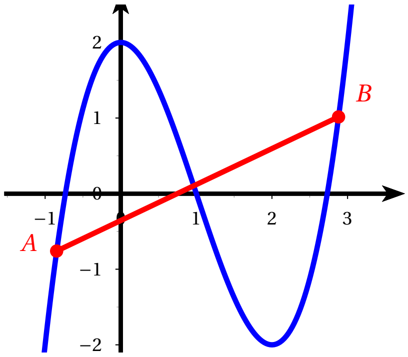
Exemples 1

1. On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+3x+5}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec
$$u(x) = -x^2 + 3x + 5, \qquad u'(x) = -2x + 3.$$
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = (-2x+3)\mathrm{e}^{-x^2+3x+5}.$$
2. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{4x-5}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est de la forme $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec
$$u(x) = 4x - 5, \qquad u'(x) = 4.$$
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = 4\mathrm{e}^{4x-5}.$$
3. On pose $h(x) = (2x+1)^4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction h est de la forme $h(x) = (u(x))^n$, avec
$$u(x) = 2x + 1, \qquad u'(x) = 2, \qquad n = 4.$$
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$h'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1} = 4 \times 2 \times (2x+1)^{4-1} = 8\,(2x+1)^3.$$

III. Convexité

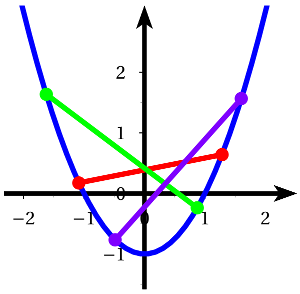
Définition 2

Étant donnée une fonction f, on appelle corde tout segment qui joint deux points A et B de sa courbe représentative.

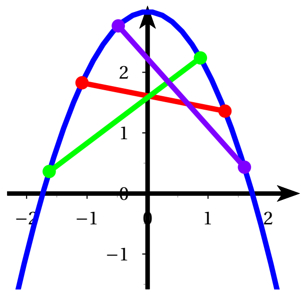


Définition 3

On dit qu'une fonction f est convexe (respectivement concave) sur un intervalle I si sa courbe représentative est en dessous (resp. au dessus) de ses cordes sur l'intervalle I.



Fonction convexe



Fonction concave

Théorème 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I.
2. f'' est positive sur I.
3. La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes sur l'intervalle I.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est concave sur I.
2. f'' est négative sur I.
3. La courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes sur l'intervalle I.

Exemple 2

On pose $f(x) = x^3 - 3x$ pour $x \in [-2;2]$.
On va d'abord calculer la dérivée, étudier les variations et construire la courbe représentative. Puis on calculera la dérivée seconde et on étudiera la convexité.

Pour tout $x \in [-2;2]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x+1)(x-1).$$

Exemple 2 – Suite

On résout :

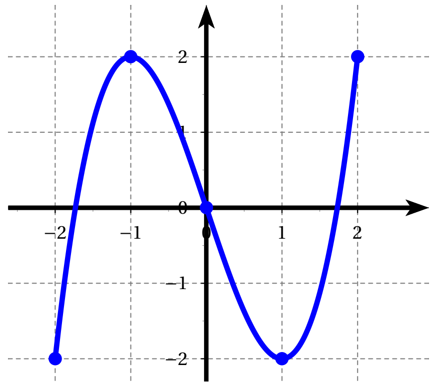
$$3x^2-3=0 \iff 3x^2=3 \iff x^2=\frac{3}{3} \iff x^2=1 \iff (x=1 \text{ ou } x=-1).$$

D'après le théorème 3, $f'(x)=3x^2-3$ (qui est du second degré) est du signe de a, donc positif ($a=3$), sauf entre les racines : $\boxed{f'(x) \mid + \;\phi\; - \;\phi\; +}$.

On a donc le tableau :

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

Remarque. On aurait pu calculer Δ pour trouver les racines de x^2-3x, mais ç'aurait été inutilement compliqué.



On calcule ensuite la dérivée seconde et on étudie son signe. Pour tout $x \in [-2;2]$:

$$f''(x)=6x.$$

x	-2		0		2
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

En utilisant le théorème 8, on peut donc dire que :

- f est concave sur l'intervalle $[-2;0]$;
- f est convexe sur l'intervalle $[0;2]$.

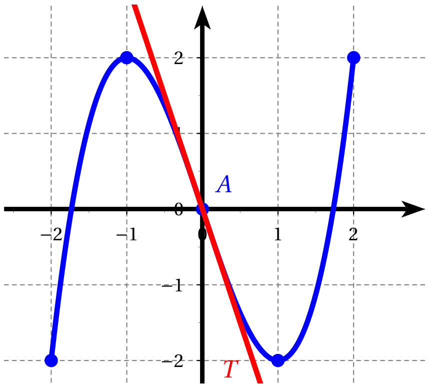
Déf.4 On dit qu'un point A d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f est un point d'inflexion si la dérivée seconde change de signe en a.

Exemple 3

Dans l'exemple précédent, le point $A(0;0)$ est un point d'inflexion. La tangente T passant par A traverse la courbe puisque :

- sur $[-2;0]$, f est concave, donc la courbe est en dessous de T ;
- sur $[0;2]$, f est convexe, donc la courbe est au dessus de T.

Exemple 3 – Suite



Notons enfin que la tangente T a pour équation $y=-3x$. En effet, on a

$$f(0)=0 \quad , \quad f'(0)=3\times 0^2-3=-3,$$

donc

$$\begin{aligned} T &: y=f'(a)(x-a)+f(a)\\ T &: y=f'(0)(x-0)+f(0)\\ T &: y=-3(x-0)+0\\ T &: y=-3x. \end{aligned}$$

Remarque. Pour un physicien, si $d(t)$ est la distance parcourue au temps t, alors $d''(t_0)$ est l'accélération instantanée au temps $t=t_0$. Une fonction convexe est une fonction qui « accélère » et une fonction concave une fonction qui « décélère » . Un point d'inflexion signe le passage d'une accélération à une décélération, ou l'inverse.

IV. Composée de deux fonctions

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de composée de deux fonctions, que nous avons utilisée sans le dire dans le paragraphe 2.

Exemples 4

1. Pour tout nombre réel x, on pose $h(x)=(2x+1)^4$ (on a déjà rencontré cette fonction dans l'exemple 2.3). On peut écrire $h=u^4$, avec $u(x)=2x+1$.
2. Pour tout nombre réel x, on pose $z(x)=\sqrt{x^2+5}$. On a alors $z=\sqrt{u}$, avec $u(x)=x^2+5$.
3. Revenons sur l'exemple 1 et posons $v(x)=x^4$. On a alors le schéma :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "h"] & 2x+1 \arrow[r, "v"'] & (2x+1)^4 \end{tikzcd}$$

Pour tout réel x :

$$h(x)=(2x+1)^4=v(2x+1)=v(u(x)).$$

On dit que h est la composée de v et u, on note $h=v\circ u$. On a donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$h(x)=(2x+1)^4=v(2x+1)=v(u(x))=v\circ u(x).$$

Exemple 5

Dans l'exemple 4.2, $z(x) = \sqrt{x^2+5} = v(u(x))$, avec $v(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "z"] & x^2+5 \arrow[r, "v"'] & \sqrt{x^2+5} \end{tikzcd}$$

À nouveau on peut écrire $z = v \circ u$.

Attention

Reprenons le point 3 des exemples 4 et calculons $u \circ v(x)$:

$$u \circ v(x) = u(v(x)) = u\left(x^4\right) = 2x^4 + 1.$$

En se rappelant que l'on a trouvé $v \circ u(x) = (2x+1)^4$, on voit que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont deux fonctions différentes !

Pour terminer ce paragraphe, on donne une définition plus rigoureuse de la composée, ainsi que la formule pour la dérivée d'une composée.

Définition 5

Soient $u : I \to J$ et $v : J \to K$ deux fonctions. La composée de v et u, notée $v \circ u$, est définie par

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

pour tout $x \in I$.

$$\begin{tikzcd} \underset{\in I}{x} \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & \underset{\in J}{u(x)} \arrow[r, "v"'] & \underset{\in K}{v(u(x))} \end{tikzcd}$$

Théorème 9 (dérivée d'une composée)

Soient $u : I \to J$ et $v : J \to K$ deux fonctions dérivables sur I et J respectivement. Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u.$$

Exemple 6

Reprenons $h(x) = (2x+1)^4 = v \circ u(x)$, avec $v(x) = x^4$ et $u(x) = 2x + 1$.[a] On a alors :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = 2x+1 & , & v(x) = x^4 \\ u'(x) = 2 & , & v'(x) = 4x^3 \end{array}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2 \times 4(2x+1)^3 = 8(2x+1)^3.$$

On retombe sur la formule de l'exemple 1.3 ; le calcul est d'ailleurs très ressemblant. C'est normal : l'exemple 1.3 utilise le théorème 7 ; et ce théorème 7 est un cas particulier du théorème 9[b].

a. Chacune des deux fonctions u et v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc on peut prendre $I = J = K = \mathbb{R}$ dans le théorème précédent.
b. On invite les élèves qui se destinent à des études mathématiques à s'interroger sur cette affirmation.

V. Une démonstration

Démonstration (implication $2 \Longrightarrow 3$ dans la 1re série d'équivalences du théorème 8)

On suppose que f est deux fois dérivable sur un intervalle $I = [a; b]$ et que la dérivée seconde est **strictement** positive sur I : pour tout $x \in I$, $f''(x) > 0$.

> **Remarque.** Dans l'énoncé du théorème, f'' est simplement supposée positive. Le fait d'ajouter « strictement » permet de simplifier un peu la démonstration.

Soit $c \in I$. Pour tout $x \in I$, on pose

$$g(x) = f(x) - \big(f'(c)(x-c) + f(c)\big) = f(x) - f'(c)x + cf'(c) - f(c).$$

On sait que $T : y = f'(c)(x-c) + f(c)$ est la tangente à la courbe représentative de f au point C d'abscisse c. On va prouver que g est positive sur I ; par conséquent la courbe d'équation $y = f(x)$ sera au-dessus de la tangente T sur l'intervalle I.

Pour mener à bien notre projet, on calcule les dérivées première et seconde : pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = f'(x) - f'(c),$$
$$g''(x) = f''(x)$$

(on a utilisé le fait que c est une constante, donc les termes $cf'(c)$, $f(c)$ et $f'(c)$ « disparaissent » quand on dérive, tandis que le terme $f'(c)x$ « devient » $f'(c)$).

Par hypothèse $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$, donc g'' est strictement positive sur I. On en déduit que g' est strictement croissante sur I et on a donc le tableau :

x	a	c	b
$g''(x)$		$+$	
$g'(x)$	$\times$ ↗	0	↗ $\times$

La valeur obtenue en $x = c$ est

$$g'(c) = f'(c) - f'(c) = 0.$$

Les deux valeurs aux extrémités (signalées par une croix) ne nous intéressent pas.

On en déduit le tableau de signe de g' et le tableau de variations de g :

x	a		c		b
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\times$	↘	0	↗	$\times$

Pour compléter en $x = c$, on calcule :

$$g(c) = f(c) - f'(c)c + cf'(c) - f(c) = 0.$$

Conclusion : le minimum de g est 0, donc la fonction g est positive sur I. Par conséquent, $f(x) - \big(f'(c)(x-c) + f(c)\big) \geq 0$ pour tout $x \in I$; et donc la courbe d'équation $y = f(x)$ est au-dessus de la tangente $T : y = f'(x)(x-c) + f(x)$ sur l'intervalle I.

CHAPITRE 2

Raisonnement par récurrence

Plan de ce chapitre

I. Rappel sur les suites géométriques

Déf. 1

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison q si tout terme se déduit du précédent en le multipliant par q : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = q \times v_n.$$

Théorème 1

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n.$$

Exemple 1

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$. On a

$$v_0 = 3,\ v_1 = 3\times 2 = 6,\ v_2 = 6\times 2 = 12,\ v_3 = 12\times 2 = 24,\ \ldots$$

Puis (par exemple)

$$v_{10} = v_0 \times q^{10} = 3 \times 2^{10} = 3\,072.$$

Exemple 2

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = 0{,}5\,w_n + 1.$$

On pose également $v_n = w_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On va prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, puis en déduire une formule générale pour v_n et pour w_n en fonction de n.

Exemple 2 – Suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= w_{n+1} - 2 && (\text{déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}})\\
&= (0{,}5w_n + 1) - 2 && (\text{rel. réc. pour } (w_n)_{n\in\mathbb{N}})\\
&= 0{,}5w_n - 1 && (\text{calcul})\\
&= 0{,}5\left(w_n - \frac{1}{0{,}5}\right) && (\text{factorisation!})\\
&= 0{,}5(w_n - 2) && (\text{calcul})\\
&= 0{,}5v_n. && (\text{déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}})
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0{,}5$. Et comme $v_0 = w_0 - 2 = 6 - 2 = 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0{,}5^n.$$

Enfin $v_n = w_n - 2$ donc

$$w_n = v_n + 2 = 4 \times 0{,}5^n + 2.$$

À retenir

Dans l'exemple précédent, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme $w_{n+1} = aw_n + b$, avec $a = 0{,}5$ et $b = 1$. Dans cette situation (si $a \neq 1$), l'étude de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ramène à celle d'une suite géométrique de raison a – cette suite géométrique vous sera toujours donnée, comme ça a été le cas pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il y a trois étapes :

❶ On prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
❷ On en déduit une formule pour v_n.
❸ Puis une formule pour w_n.

On dit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique [a].

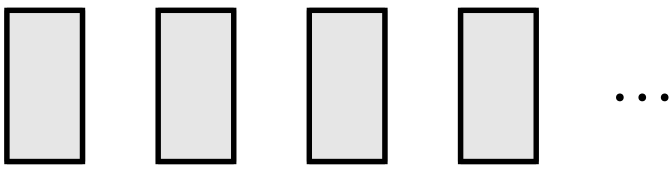
[a] C'est un peu un mélange de suite géométrique, avec le $0{,}5\times$, et de suite arithmétique, avec le $+1$.

II. Démonstration par récurrence

Exemple 3

Imaginons des dominos (en nombre infini) numérotés à partir de 0. On suppose que :

- le domino numéro 0 va tomber;
- les dominos sont positionnés de telle sorte que la chute du domino numéro k entraînera celle du numéro $k+1$, et ce pour tout entier naturel k.



0 1 2 3

Dans ce cas, le domino numéro 0 tombe, ce qui entraîne la chute du numéro 1, ce qui entraîne la chute du numéro 2, ce qui entraîne la chute du numéro 3, etc. De proche en proche, tous les dominos tombent.

La propriété $\mathscr{P}_n$: « le domino numéro n tombe » est donc vraie pour tout entier naturel n.

Théorème 2 (principe de récurrence)

Pour qu'une propriété $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit que :

1. **Initialisation.** $\mathscr{P}_0$ soit vraie.
2. **Hérédité.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$(\mathscr{P}_k \text{ vraie}) \implies (\mathscr{P}_{k+1} \text{ vraie}).$$

Remarque.
Si on doit prouver que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on initialise à $n = 1$.

Exemple 4

On reprend la suite de l'exemple 2 : $w_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$w_{n+1} = 0,5 w_n + 1.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété
$$w_n = 4 \times 0,5^n + 2.$$
Dans l'exemple 2, nous avons démontré cette formule à l'aide d'une suite récurrente annexe ; ici, on fait une démonstration par récurrence.

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
$$\left.\begin{array}{ll} w_0 & = 6 \\ 4 \times 0,5^0 + 2 & = 4 \times 1 + 2 = 6 \end{array}\right\} \implies \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc
$$w_k = 4 \times 0,5^k + 2.$$

  Objectif

  Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que
  $$w_{k+1} = 4 \times 0,5^{k+1} + 2,$$
  ou encore
  $$0,5 w_k + 1 = 4 \times 0,5^{k+1} + 2.$$

  On part de
  $$w_k = 4 \times 0,5^k + 2.$$
  On multiplie par $0,5$:
  $$\begin{aligned} w_k \times 0,5 &= \left(4 \times 0,5^k + 2\right) \times 0,5 \\ 0,5 w_k &= 4 \times 0,5^k \times 0,5 + 2 \times 0,5 \\ 0,5 w_k &= 4 \times 0,5^{k+1} + 1. \end{aligned}$$
  Puis on ajoute 1 :
  $$\begin{aligned} 0,5 w_k + 1 &= 4 \times 0,5^{k+1} + 1 + 1 \\ w_{k+1} &= 4 \times 0,5^{k+1} + 2. \end{aligned}$$
  La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque.
Il n'est pas obligatoire d'écrire la partie en vert. On conseille toutefois fortement de le faire pour fixer l'objectif de l'hérédité.

Exemple 5

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 4.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n \leq 10.$$

On démontre que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
  $u_0 = 3 \leq 10$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

  $$u_k \leq 10.$$

  Objectif

  Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

  $$u_{k+1} \leq 10,$$

  ou encore

  $$0,6u_k + 4 \leq 10.$$

  On part donc de

  $$u_k \leq 10.$$

  On multiplie par $0,6$ et on ajoute 4 :

  $$\begin{aligned} u_k &\leq 10 \\ 0,6 \times u_k &\leq 0,6 \times 10 \\ 0,6u_k &\leq 6 \\ 0,6u_k + 4 &\leq 6 + 4 \\ u_{k+1} &\leq 10. \end{aligned}$$

  La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À retenir
On a manipulé des inégalités au cours de l'hérédité. On renvoie à l'appendice pour les règles de calcul à ce sujet.

III. Quelques programmes en Python

On prend encore une fois la suite de l'exemple 2 : $w_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = 0,5w_n + 1.$$

On écrit quatre programmes en Python :

Affichage de tous les termes de u_1 à u_{10}	Calcul de u_{10} avec une fonction	Calcul de u_n avec une fonction	Liste des termes jusqu'à u_n, avec une fonction

w = 6
for i in range(10) :
    w = 0.5*w+1
    print(w)
	def terme( ) :
	    w = 6
	    for i in range(10) :
	        w = 0.5*w+1
	    return w
		def terme(n) :
		    w = 6
		    for i in range(n) :
		        w = 0.5*w+1
		    return w
			def liste(n) :
			    w = 6
			    ℓ=[6]
			    for i in range(n) :
			        w = 0.5*w+1
			        ℓ.append(w)
			    return ℓ

On renvoie aux exercices pour les explications. Faisons tout de même quelques remarques :

Remarques.

- La commande

  for i in range(10)

  signifie que i va de 0 à 9. Elle est équivalente à

  for i in range(0,10).

- On a écrit ℓ au lieu de l, pour ne pas confondre avec le chiffre 1 (un).
- Quelle est la différence entre *return* et *print*?

  La commande *return*, qui s'utilise uniquement à la dernière ligne d'une fonction, indique la valeur renvoyée par celle-ci. À l'inverse, *print* peut être utilisé autant de fois que l'on veut, dans une fonction ou ailleurs. La commande *print* est donc plus souple, mais elle permet seulement de faire un affichage à l'écran et elle est donc très limitée : en effet, la plupart des programmes informatiques utilisent des dizaines de fonctions, qui sont liées les unes aux autres par les valeurs qu'elles renvoient – via la commande *return*.

IV. Appendice : règles de manipulation des inégalités

Théorème 3

1. On ne change pas le sens d'une ou plusieurs inégalités quand :
   - on ajoute ou on retranche à tous les membres un même nombre ;
   - on multiplie tous les membres par un nombre strictement positif.
2. On change le sens d'une ou plusieurs inégalités quand on multiplie tous les membres par un nombre strictement négatif.
3. Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés ($\iff$ la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$).
4. Deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses ($\iff$ la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$).

Exemple 6

Prenons un nombre $x \geq 4$. Que dire de $\frac{1}{x^2+4}$?

On part de $x \geq 4$. Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc $x^2 \geq 4^2$, soit $x^2 \geq 16$. On ajoute 4 : $x^2+4 \geq 16+4$, soit $x^2+4 \geq 20$. Enfin, deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses, donc $\frac{1}{x^2+4} \leq \frac{1}{20}$.

CHAPITRE 3
Dénombrement

Plan de ce chapitre

I. Listes et permutations

Définition 1

On pose, pour tout entier naturel n :

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{si } n \geq 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

$n!$ se lit « factorielle n », ou « n factorielle ».

Exemples 1

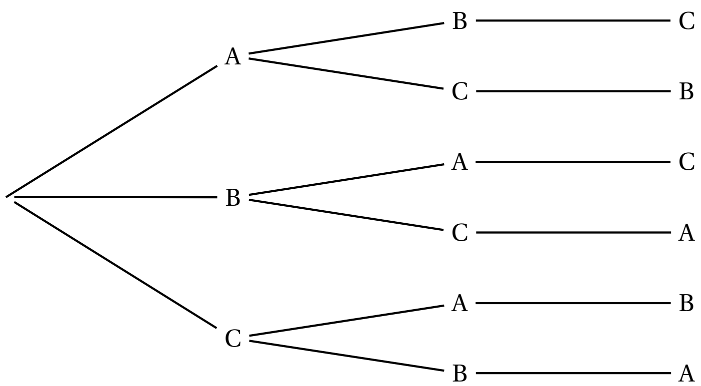
1. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
2. $$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

   Les mots de 3 lettres (ayant un sens ou non) que l'on peut former en utilisant chacune des lettres A, B, C une fois sont :

   ABC – ACB – BAC – BCA – CAB – CBA

   On dit qu'il y a 6 permutations possibles des lettres.

   On peut représenter la situation par un arbre :



Déf.2

Soit E un ensemble non vide. On appelle permutation de E tout « mélange » des éléments de E (l'opération qui consiste à ne rien faire est considérée comme un mélange).

Exemple 2

Soit $E = \{1;2;3\}$. Les permutations de E sont

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

C'est la même situation que celle de l'exemple 1.2, où 1, 2, 3 remplacent A, B, C.

Théorème 1

Si E a n éléments, il y a $n!$ permutations possibles des éléments de E.

Déf.3 Soit E un ensemble non vide. On appelle k-liste (ou k-uplet) d'éléments de E une liste de k éléments de E, éventuellement répétés.

Exemples 3

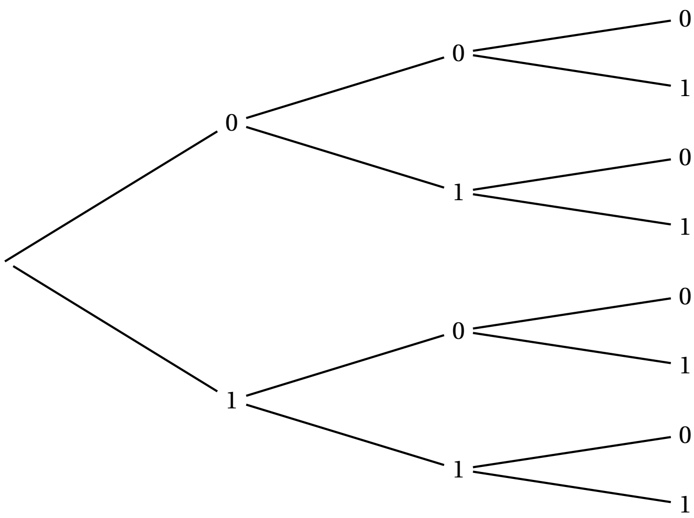
1. On prend $E = \{0;1;2\}$. Une 5-liste d'éléments de E est (par exemple)

$$(0,1,0,2,1).$$

2. On prend $E = \{0;1\}$. Les 3-listes (ou triplets) d'éléments de E sont

$$(0,0,0) \quad (0,0,1) \quad (0,1,0) \quad (0,1,1) \quad (1,0,0) \quad (1,0,1) \quad (1,1,0) \quad (1,1,1).$$

Ces triplets sont représentés par les chemins de l'arbre ci-dessous :



On notera qu'il y a $2^3 = 8$ chemins (ou triplets) possibles.

Théorème 2

Si E a n éléments, il y a n^k k-listes possibles d'éléments de E.

Exemple 4

Quatre amis en vacances choisissent tous les jours au hasard celui des quatre qui fera la vaisselle (une personne donnée peut donc faire la vaisselle plusieurs fois; mais aussi ne jamais la faire). S'ils partent 7 jours, il y a $4^7 = 4\,096$ plannings possibles pour la vaisselle.

On en vient à présent aux listes sans répétition, qu'on appelle arrangements :

Exemple 5

Dans une classe de 30 élèves, le professeur désigne chaque jour un élève différent pour venir au tableau. Si l'on prend 3 cours consécutifs, le nombre de choix d'élèves est

$$30 \times 29 \times 28 = 24\,360.$$

On remarque que

$$30 \times 29 \times 28 = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times \cdots \times 1}{27 \times 26 \times \cdots \times 1} = \frac{30!}{27!} = \frac{30!}{(30-3)!}.$$

On dit qu'il y a 24 360 arrangements de 3 élèves.

Plus généralement, on a la définition et le théorème :

Déf.4 Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) et soit $1 \leq k \leq n$. On appelle arrangement de k éléments de E une k-liste d'éléments distincts de E. On note A_n^k le nombre d'arrangements possibles.

Théorème 3

Soit E un ensemble à n éléments et soit $1 \leq k \leq n$. Alors le nombre d'arrangements de k éléments de E est

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Déf.5 Soit U un ensemble non vide fini (appelé univers). La probabilité uniforme P est l'application qui, à tout sous-ensemble E de U (aussi appelé événement) associe le nombre

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de } E}{\text{nombre d'éléments de } U}.$$

Remarque.
Dire que P est la probabilité uniforme revient à dire que tous les événements élémentaires[a] sont équiprobables : si l'univers a n éléments, chaque événement élémentaire a pour probabilité $\frac{1}{n}$. C'est toujours cette probabilité qu'on utilisera dans cette leçon, sans le répéter à chaque fois.

a. On appelle événement élémentaire un événement ayant un seul élément.

Exemple 6

On lance un dé équilibré à 6 faces. L'ensemble des cas possibles est

$$U = \{1;2;3;4;5;6\}.$$

On s'intéresse à l'événement

$$A = \text{« obtenir un n° impair »} = \{1;3;5\}.$$

On munit U de la probabilité uniforme P[a]. On a donc

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

a. Ce qui signifie que chaque face a une chance sur six de sortir, et est sous-entendu dans l'énoncé par l'expression « dé équilibré ».

Exemple 7

On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On s'intéresse à l'événement

$$B = \text{« la somme des n° vaut 4 »}.$$

On utilise un tableau :

SOMME		1^er^ dé			
		1	2	3	4
2^e^ dé	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

Il y a $4 \times 4 = 16$ cas possibles et 3 cas favorables à B donc $P(B) = \frac{3}{16}$.

Exemple 8

On lance 3 dés équilibrés à 6 faces : un rouge, un bleu et un vert. On s'intéresse à l'événement :

$$A : \text{« obtenir 421 »},$$

c'est-à-dire que l'un des dés tombe sur 4, un autre sur 2 et le dernier sur 1.

On note les éléments de l'univers sous la forme

$$\big(\text{résultat du dé bleu}, \text{résultat du dé rouge}, \text{résultat du dé vert}\big).$$

- L'univers est l'ensemble des 3-listes d'éléments de $\{1;2;3;4;5;6\}$. Il contient $6^3 = 216$ éléments.
- Les cas favorables à A correspondent aux permutations de 1, 2, 4 :

  $$(1,2,4) \qquad (1,4,2) \qquad (2,1,4) \qquad (2,4,1) \qquad (4,1,2) \qquad (4,2,1).$$

  Il y en a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Conclusion : $P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

Exemple 9

Dans une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que tous les élèves aient des dates d'anniversaire différentes ? [a]

On note A : « les dates d'anniversaires sont toutes différentes ».

- les cas possibles sont les 30-listes d'un ensemble à 365 éléments (les dates de l'année). Il y en a 365^{30}.
- les cas favorables à A sont les arrangements de 30 éléments d'un ensemble à 365 éléments. Il y en a $\frac{365!}{(365-30)!} = \frac{365!}{335!}$.

On a donc

$$P(A) = \frac{\frac{365!}{335!}}{365^{30}} = \frac{365!}{335! \times 365^{30}} \approx 0{,}27.$$

[a] On considérera que personne n'est né le 29 février et que les listes de dates d'anniversaires sont équiprobables (probabilité uniforme).

Remarque.

Les calculatrices ne sont pas assez performantes pour calculer $\frac{365!}{335! \times 365^{30}}$ – les nombres en jeu sont trop grands. Pour obtenir la réponse, il faut remarquer que $\frac{365!}{335! \times 365^{30}} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365}$ et faire les multiplications étape par étape – on peut accélérer les calculs en faisant un programme en Python ou en utilisant un tableur.

Remarque.
Si $A = \{1,2\}$ et $B = \{1,2,3\}$, l'ensemble des couples possibles d'éléments de A et de B est noté $A \times B$. On l'appelle produit cartésien de A par B. On a donc

$$A \times B = \{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(2,3)\}.$$

Ce produit cartésien contient $2 \times 3 = 6$ éléments.

On retrouve les produits cartésiens dans de nombreux problèmes de probabilités, comme les exemples 7, 8 et 9, pour lesquels on peut écrire les univers comme des produits cartésiens [a].

a. Dans la situation de l'exemple 7, on a $U = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$; et dans l'exemple 8, $U = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$. Pour l'exemple 9, c'est trop long à écrire!

II. Combinaisons

Définition 6

1. Soient $1 \leq k \leq n$ deux entiers. Le nombre $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons que l'on a de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments, l'ordre dans lequel le choix a été fait n'ayant pas d'importance.
$\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ».
2. Par convention $\binom{n}{0} = 1$.

Remarque.
On dit aussi que $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments.

Exemple 10

Par exemple $\binom{4}{2} = 6$, puisque les choix possibles de 2 éléments parmi 4 éléments A, B, C, D sont :

AB – AC – AD – BC – BD – CD

Remarque.
La différence avec les arrangements, c'est qu'on ne distingue pas les listes même si l'ordre est différent. Par exemple, lorsqu'on calcule $\binom{4}{2} = 6$, les deux listes AB et BA comptent pour une seule.

Exemple 11

Un sachet contient 5 lettres A, B, C, D, E. On tire 3 lettres du sachet, on compte le nombre de tirages possibles [a].

Si l'ordre de sortie avait de l'importance, cela reviendrait à compter le nombre d'arrangements de 3 éléments : il y en aurait $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Mais l'ordre de sortie n'a pas d'importance, donc chaque tirage de 3 lettres est compté $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ fois.
Par exemple, les tirages

ABC – ACB – BAC – BCA – CAB – CBA

ne doivent compter que pour un seul. Finalement, il n'y a que $\frac{60}{6} = 10$ tirages possibles.
On peut d'ailleurs les énumérer :

ABC – ABD – ABE – ACD – ACE – ADE – BCD – BCE – BDE – CDE

Notons pour finir que $10 = \frac{60}{6} = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3! \times 2!}$, ce que généralise le théorème suivant.

a. On décide que l'ordre dans lequel les lettres sortent n'a pas d'importance.

Théorème 4

Soient $0 \leq k \leq n$ deux entiers. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

Exemple 12

On tire au sort 4 personnes dans un groupe de 12 pour partir en voyage. Il y a

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \times (12-4)!} = \frac{12!}{4! \times 8!} = 495$$

quatuors possibles.

Remarques.

- Pour obtenir $\binom{12}{4}$ avec la calculatrice :

Calculatrices collège	NUMWORKS	TI graphiques	CASIO graphiques
Il faut écrire le calcul (le symbole ! est sur le clavier) : $\frac{12!}{4! \times 8!}$	• $\boxed{}$ • Calculs $\boxed{\text{EXE}}$ puis $\boxed{}$ (boîte à outils) • choisir Dénombrement $\boxed{\text{EXE}}$ • choisir binomial(n,k) $\boxed{\text{EXE}}$ • compléter $\binom{12}{4}$ $\boxed{\text{EXE}}$	• $\boxed{\text{math}}$ puis $\boxed{\text{PROB}}$ • 3 :Combinaison $\boxed{\text{EXE}}$ • $_{12}\text{C}_4$ $\boxed{\text{EXE}}$	• $\boxed{\text{MENU}}$ puis $\boxed{\text{RUN}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ • 12 $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\triangleright}$ • $\boxed{\text{F3}}$ (on choisit donc PROB) • $\boxed{\text{F3}}$ (on choisit donc nCr) • 4 $\boxed{\text{EXE}}$ (on affiche 12**C**4 à l'écran avant d'exécuter)

- Le théorème 4 fonctionne encore quand $k = 0$:

$$\frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1 = \binom{n}{0},$$

conformément à la définition 6.

- Lorsque $k = 1$ ou $k = 2$, le calcul de $\binom{n}{k}$ peut se faire par un simple dénombrement ou en utilisant le théorème 4. Par exemple, pour $\binom{n}{1}$:
  - avec la définition 6 : lorsqu'on choisit 1 élément dans un ensemble à n éléments, il y a n choix possibles, donc $\binom{n}{1} = n$;
  - avec le théorème 4 : $\frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{(n-1)! \times n}{(n-1)!} = n$.

  Le lecteur pourra voir de même que $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Si $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Là aussi, on peut démontrer cette formule par le calcul ou par un dénombrement. La deuxième méthode est plus rapide : il suffit de dire que prendre k éléments parmi n revient à choisir les $n-k$ éléments qu'on ne prend pas.

On obtient également les $\binom{n}{k}$ avec le triangle de Pascal[1]. Par exemple, pour $\binom{4}{2} = 6$:

	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
$\boxed{4}$	1	4	$\boxed{6}$	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Exemple 13

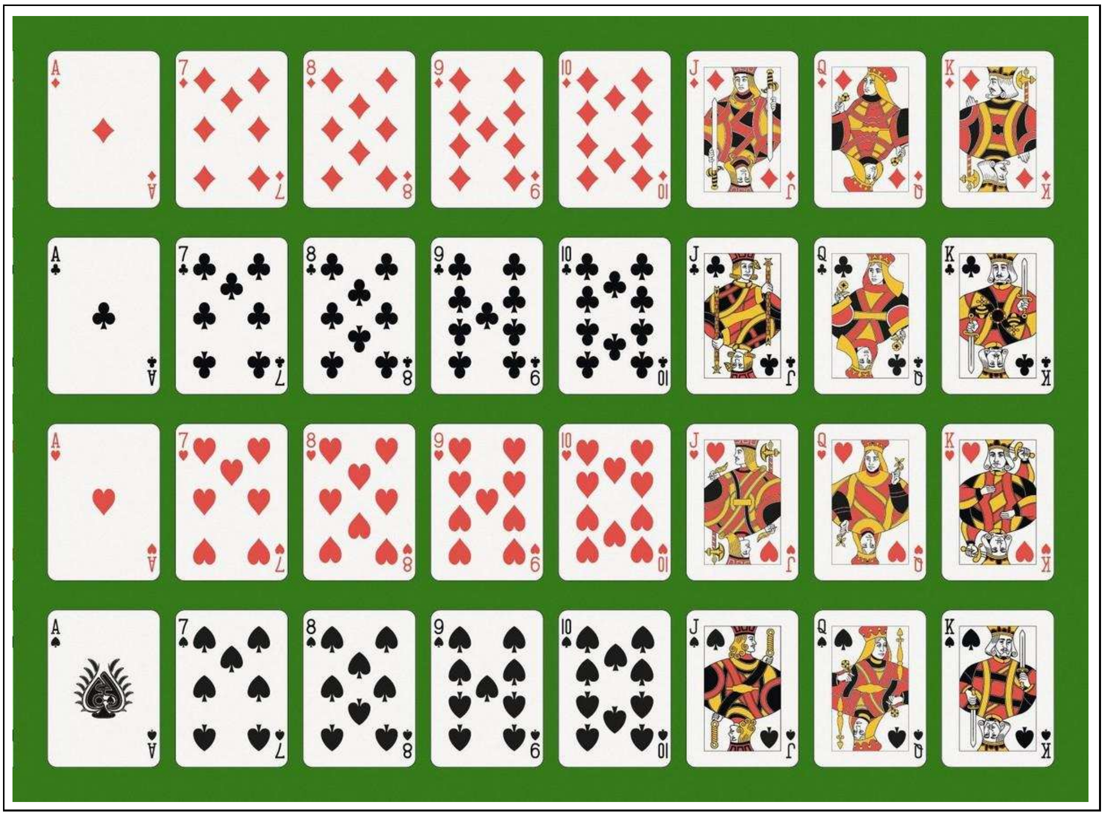
On choisit 5 cartes dans un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire de rois (événement E) ?

- Il y a $\binom{32}{5}$ tirages (ou mains) possibles.
- Il y a $\binom{4}{2}$ façons possibles de choisir les rois, puis $\binom{28}{3}$ façons de choisir trois autres cartes parmi les 28 « non-rois », donc au total $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$ cas favorables à E.[a]

Conclusion :

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{\frac{4!}{2!2!} \times \frac{28!}{3!25!}}{\frac{32!}{5!27!}} = \frac{6 \times 3\,276}{201\,376} \approx 0,10.$$

a. Il faut bien multiplier. En effet, si A désigne l'ensemble des couples de rois possibles (il y en a donc $\binom{4}{2} = 6$: cœur-carreau, cœur-pique, cœur-trèfle, carreau-pique, carreau-trèfle, pique-trèfle), et B l'ensemble des triplets de cartes possibles à choisir parmi les 28 non-rois (il y en $\binom{28}{3} = 3276$), alors l'ensemble des mains favorables à E s'identifie à $A \times B$: on écrit successivement les deux rois, puis les trois autres cartes – une main est de la forme $\underbrace{\text{Roi–Roi}}_{6\text{ possibilités}} - \underbrace{\text{Non-roi–Non-roi–Non-roi}}_{3\,276\text{ possibilités}}$, comme par exemple R$\diamondsuit$–R$\clubsuit$–V$\spadesuit$–10$\heartsuit$–V$\clubsuit$.



1. Voir exercices pour l'explication du lien entre les $\binom{n}{k}$ et le triangle de Pascal.

III. Bilan

Un sachet contient 5 jetons marqués A, B, C, D, E. Dans les exemples ci-dessous, on examine les trois situations standards.

Exemples 14

1. On tire 3 jetons **avec remise**. **On tient compte de l'ordre** du tirage. On parle de 3-liste d'un ensemble à 5 éléments.

   Exemples de tirages : ABE – BEA – BBD

   Il y a $5^3 = 125$ tirages possibles.

2. On tire 3 jetons **sans remise**. **On tient compte de l'ordre** du tirage. On parle d'arrangement de 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments.

   Exemples de tirages : ABE – BEA – DCA – ~~BBD~~

   Il y a $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages possibles.

3. On tire 3 jetons **sans remise**. **On ne tient pas compte de l'ordre** du tirage. On parle de combinaison de 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments.

   Exemples de tirages : ABE – ~~BEA~~ – DCA – ~~BBD~~

   Il y a $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ tirages possibles.

CHAPITRE 4

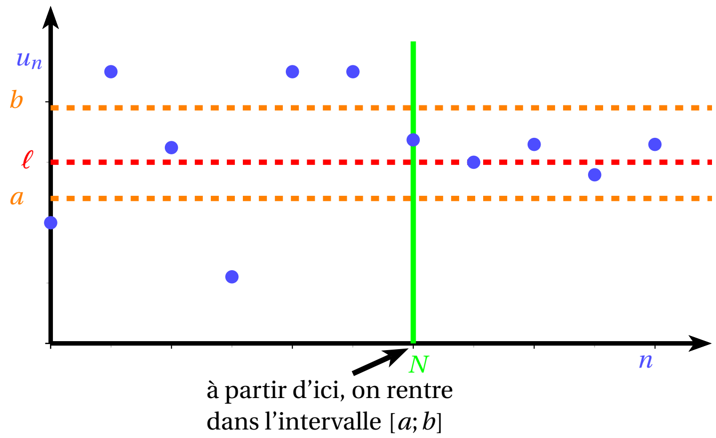
Limites de suites

Plan de ce chapitre

I. Suite convergente

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ si tout intervalle $[a;b]$ tel que $a<\ell<b$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Déf. 2

1. On dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. Quand une suite a une limite finie ℓ, on dit qu'elle converge (ou qu'elle est convergente). Dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge (ou qu'elle est divergente).

Exemple 1

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour avoir une idée de sa limite, on complète un petit tableau de valeurs :

n	1	10	100	1 000	10 000
u_n	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1

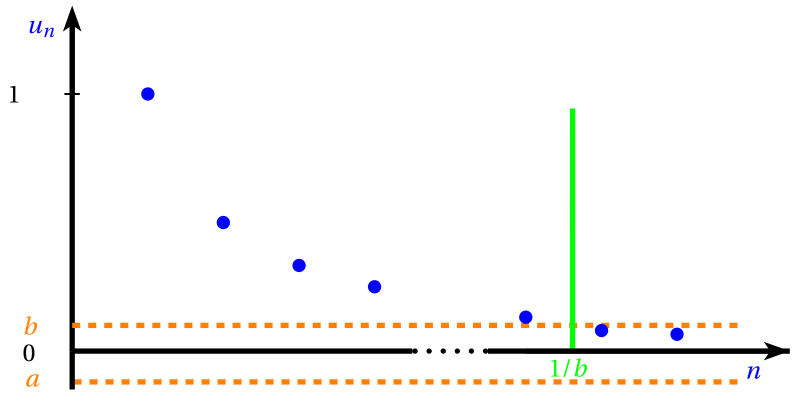
Quand n grandit, u_n se rapproche de 0. De façon plus précise, il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. C'est ce que l'on prouve maintenant de façon rigoureuse :
Soit $[a;b]$ un intervalle tel que $a<0<b$. On a les équivalences :

Exemple 1 – Suite

$$\begin{aligned} u_n \leq b &\iff \frac{1}{n} \leq b \\ &\iff \frac{1}{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{b} \quad \text{(car deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses)} \\ &\iff n \geq \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Conclusion : quand n dépasse $\frac{1}{b}$, u_n est inférieur à b. Comme par ailleurs $a < 0 < u_n$, on a

$$a \leq u_n \leq b.$$



Conclusion : à partir d'un certain rang (quand n dépasse $\frac{1}{b}$), u_n est dans l'intervalle $[a;b]$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On a donc démontré :

Théorème 1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Théorème 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante égale à c : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = c$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.

Théorème 3

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Le théorème suivant recense les règles de calcul avec les limites pour les suites convergentes.

Théorème 4 (opérations sur les limites)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour tout réel c, $\lim\limits_{n\to+\infty} (c \times u_n) = c \times \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + c) = \ell + c$.

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell',$$
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \ell - \ell',$$
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'.$$

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, avec $\ell' \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ pour n assez grand et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Exemple 2

On pose $u_n = 3 + \frac{2}{n^2}$ pour tout entier $n \geq 1$. On peut écrire

$$u_n = 3 + 2 \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}.$$

- D'après le théorème 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- D'après le théorème 2, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 = 3$.

Donc d'après les points 1 et 2 du théorème 4 :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3 + 2 \times 0 \times 0 = 3.$$

Théorème 5 (conservation des inégalités)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et soit M un nombre réel.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq M$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq M$.
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq M$.

Théorème 6 (théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites ayant la même limite ℓ et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une troisième suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

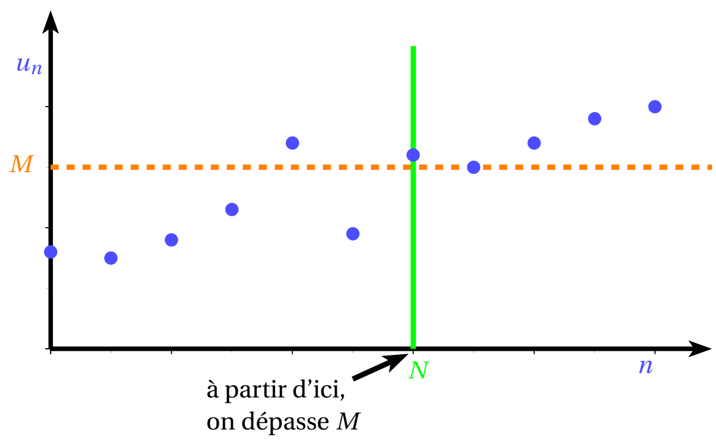
$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

II. Suite de limite infinie

Définition 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle de la forme $[M; +\infty[$, avec $M > 0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Exemple 3

On pose $u_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Soit $M > 0$. On a les équivalences :

Exemple 3 – Suite

$$\begin{aligned} u_n \geq M &\iff \sqrt{n} \geq M \\ &\iff \sqrt{n}^2 \geq M^2 \quad \text{(car deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés)} \\ &\iff n \geq M^2. \end{aligned}$$

Conclusion : quand n dépasse M^2, u_n dépasse M. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 7

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Théorème 8 (limite par comparaison)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Remarque. On a des définitions et des théorèmes analogues pour des suites qui tendent vers $-\infty$.

III. Limites des suites monotones

Définition 4

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

1. majorée par le réel M si $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. minorée par le réel m si $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
3. bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1. croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (ou de façon équivalente $u_{n+1} - u_n \geq 0$)) ;
2. décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (ou de façon équivalente $u_{n+1} - u_n \leq 0$)).

Lorsqu'une suite est croissante ou lorsqu'elle est décroissante, on dit qu'elle est monotone.

Théorème 9

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$.

Exemple 4

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 0{,}6$. On a donc $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 0{,}6^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis

Exemple 4 – Suite

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= 5\times 0,6^{n+1}-5\times 0,6^n \\ &= 5\times 0,6^n\times 0,6-5\times 0,6^n \\ &= 3\times 0,6^n-5\times 0,6^n \\ &= \underbrace{-2}_{\ominus}\times\underbrace{0,6^n}_{\oplus}. \end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n\leq 0$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus, elle est clairement minorée par 0 puisque $v_n=\underbrace{5}_{\oplus}\times\underbrace{0,6^n}_{\oplus}$.

Théorème 10 (limites des suites monotones)

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par M, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\leq M$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par m, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\geq m$.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante non minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Exemple 5

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0=6$ et la relation de récurrence : $w_{n+1}=0,5w_n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Dans l'exemple 2 de la leçon n°2, on a ramené l'étude de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à celle d'une suite géométrique. Ici, on va déterminer la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une méthode complètement différente.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$2\leq w_{n+1}\leq w_n.$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$:

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= 6 \\ w_1 &= 0,5w_0+1=0,5\times 6+1=4 \\ 2 &\leq 4\leq 6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2\leq w_1\leq w_0 \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$2\leq w_{k+1}\leq w_k.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$2\leq w_{k+2}\leq w_{k+1}.$$

On part de

$$2\leq w_{k+1}\leq w_k.$$

On multiplie par 0,5 :

$$\begin{aligned} 0,5\times 2 &\leq 0,5\times w_{k+1}\leq 0,5\times w_k \\ 1 &\leq 0,5\times w_{k+1}\leq 0,5\times w_k. \end{aligned}$$

Exemple 5 – Suite

Puis on ajoute 1 :

$$\begin{aligned} 1+1 &\leq 0,5 \times w_{k+1}+1 \leq 0,5 \times w_k+1 \\ 2 &\leq w_{k+2} \leq w_{k+1}. \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $w_{n+1} \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Et comme $2 \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2.

Or toute suite décroissante minorée converge (point 3 du théorème 10), donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

Pour trouver la valeur de ℓ, il faut mener un raisonnement astucieux : les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_0, w_1, w_2, \cdots)$ et $(w_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (w_1, w_2, w_3, \cdots)$ ont la même limite, puisque les indices sont simplement décalés. On peut donc « passer à la limite » dans la relation de récurrence :

$$w_{n+1} = 0,5 w_n + 1 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc par opération sur les limites,

$$\ell = 0,5\ell + 1.$$

On résout :

$$\ell = 0,5\ell+1 \iff \ell - 0,5\ell = 1 \iff 0,5\ell = 1 \iff \ell = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Conclusion : $\ell = 2$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.

À retenir

L'astuce qui consiste à passer à la limite dans la relation de récurrence est à retenir, il faudra l'utiliser dans plusieurs exercices.

Théorème 11

1. Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $q = 1$, $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
3. Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
4. Si $q \leq -1$, $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple 6

On reprend l'exemple 5. On a vu dans l'exemple 2 de la leçon n°2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = 4 \times 0,5^n + 2.$$

$-1 < 0,5 < 1$, donc d'après le théorème 11,

$$\lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0.$$

Et donc, par opération sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 4 \times 0 + 2 = 2.$$

On obtient ainsi la limite par une méthode alternative à celle de l'exemple 5. Cette méthode semble plus rapide, mais elle repose sur la formule pour w_n, qui demande du travail (utilisation d'une suite géométrique annexe).

IV. Un programme en Python

On prend encore une fois la suite définie par $w_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = 0,5w_n + 1.$$

On a vu que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était décroissante et que sa limite était égale à 2. On écrit ci-dessous une fonction qui détermine le plus petit entier naturel n tel que $w_n \leq 2,05$.

```
def seuil( ) :
    w = 6
    n=0
    while w > 2.05 :
        w = 0.5*w+1
        n = n+1
    return n
```

On renvoie aux exercices pour les explications.

V. Des démonstrations

Seule une partie des théorèmes est démontrée, d'abord parce que certaines démonstrations sont proches les unes des autres et qu'il ne nous a pas paru utile de reproduire plusieurs fois d'affilée les mêmes arguments; ensuite parce que plusieurs démonstrations sont trop difficiles au niveau de la classe de terminale.

Démonstration (du théorème 2)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à c : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = c$.
Soient a et b deux réels tels que $a < c < b$. Tous les termes de la suite sont égaux à c, donc ils sont dans l'intervalle $[a;b]$.
Conclusion : les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $[a;b]$ à partir du rang $n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.

Démonstration (point 2 du théorème 4, pour la somme)

Pour simplifier la rédaction, on se place dans la situation où $\ell = \ell' = 0$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Soit $[a;b]$ un intervalle tel que $a < 0 < b$. L'intervalle $\left[\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right]$ contient 0, et 0 n'en est pas une extrémité, donc :

- pour n assez grand, disons $n \geq N_1$,
$$\frac{a}{2} \leq u_n \leq \frac{b}{2}\,; \tag{4.1}$$
- pour n assez grand, disons $n \geq N_2$,
$$\frac{a}{2} \leq v_n \leq \frac{b}{2}. \tag{4.2}$$

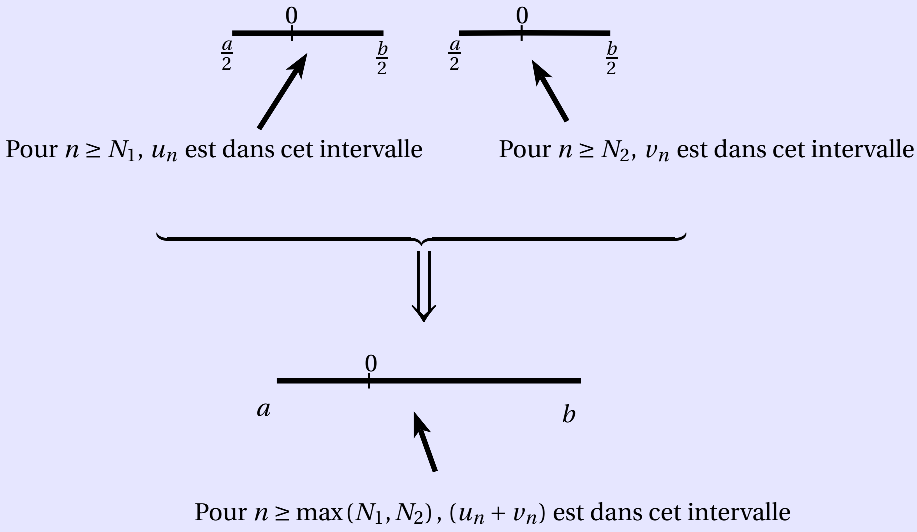
On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geq N$, alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc les deux lignes (4.1) et (4.2) ci-dessus sont vraies et en additionnant membre à membre on obtient :

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \leq u_n + v_n \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$
$$a \leq u_n + v_n \leq b.$$

Cela prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.

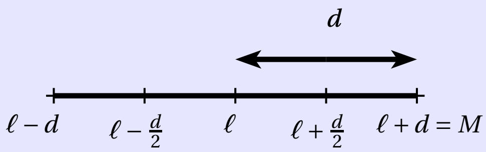
Démonstration (point 2 du théorème 4, pour la somme) – Suite

Illustration :



Démonstration (point 1 du théorème 5)

Nous raisonnons par l'absurde. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et supposons que $\ell < M$. Soit d la distance entre ℓ et M.
Par définition de la limite d'une suite, à partir d'un certain rang, u_n est dans l'intervalle $\left[\ell - \frac{d}{2} ; \ell + \frac{d}{2}\right]$.
En particulier $u_n \leq \ell + \frac{d}{2} < \ell + d = M$, ce qui est absurde puisque par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq M$.



Démonstration (du théorème 6)

Soit $[a; b]$ un intervalle tel que $a < \ell < b$.
Par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc pour n assez grand, disons $n \geq N_1$, $a \leq u_n \leq b$.
De même $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ donc pour n assez grand, disons $n \geq N_2$, $a \leq w_n \leq b$.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour $n \geq N$:

$$a \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq b.$$

On a donc $a \leq v_n \leq b$, et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration (du théorème 8)

Soit $M > 0$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $u_n \geq M$ à partir d'un certain rang N. On a donc $v_n \geq u_n \geq M$ à partir du rang N. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration (point 1 du théorème 9)

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \geq u_0$.
On fait une démonstration par récurrence abrégée :

- $\mathscr{P}_0$ est vraie car $u_0 \geq u_0$.
- Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie ; on a donc $u_k \geq u_0$. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $u_{k+1} \geq u_k$; et ainsi $u_{k+1} \geq u_k \geq u_0$. La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
- $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Démonstration (point 2 du théorème 10)

Soit $M>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_N \geq M$. Et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout entier $n\geq N$: $u_n \geq u_N \geq M$. Cela prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque.
Les premier et troisième points du théorème 10 sont les seules choses du programme que l'on ne puisse pas démontrer de façon rigoureuse en terminale : il faudrait introduire la notion de borne supérieure, qu'il semble raisonnable de laisser pour le niveau bac+1.

Démonstration (point 3 du théorème 11)

Commençons par le cas $0\leq q<1$ et posons $v_n = q^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On a

$$v_{n+1}-v_n = q^{n+1}-q^n = q^n\left(q-1\right).$$

Or $q^n \geq 0$ et $q-1\leq 0$, puisque $0\leq q<1$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. De plus, elle est clairement minorée par 0, donc elle converge d'après le point 3 du théorème 10.
On note ℓ sa limite et on reprend le raisonnement de l'exemple 5 :

$$v_{n+1} = q\times v_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N},$$

donc en passant la limite :

$$\ell = q\times\ell.$$

On a donc $\ell - q\ell = 0$, soit $\ell(1-q)=0$. Et puisque $1-q\neq 0$, nécessairement $\ell = 0$.

Pour le cas $-1<q<0$, on se contente d'une explication en prenant l'exemple $q=-0,6$.
Dans ce cas, $q^0 = (-0,6)^0 = 1$, $q^1 = (-0,6)^1 = -0,6$, $q^2 = (-0,6)^2 = 0,36$, $q^3 = (-0,6)^3 = -0,216$, etc. On remarque que le résultat est alternativement positif et négatif. On peut alors écrire :

$$(-0,6)^n = \begin{cases} 0,6^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -0,6^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc, dans tous les cas (que n soit pair ou impair) :

$$-0,6^n \leq (-0,6)^n \leq 0,6^n. \tag{4.3}$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$ d'après la première partie de la démonstration ($0\leq 0,6<1$), donc aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,6^n) = -0 = 0$; et donc, d'après le théorème des gendarmes et l'encadrement (4.3) :

$$\lim_{n\to+\infty} (-0,6)^n = 0.$$

Démonstration (point 1 du théorème 11)

On donne seulement l'idée, les ingrédients techniques étant proches de ceux de la démonstration précédente : on prouve d'abord que la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ensuite, si elle était majorée, elle convergerait d'après le point 3 du théorème 10. Mais alors sa limite serait égale à 0, en raisonnant comme dans la démonstration précédente. C'est absurde, puisqu'elle est croissante, donc minorée par son premier terme $q^0=1$; et sa limite devrait alors être supérieure à 1.
Conclusion : la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée ; et donc sa limite est $+\infty$ d'après le point 2 du théorème 10.

CHAPITRE 5

Géométrie repérée dans l'espace

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, nous étendons à l'espace plusieurs concepts de géométrie du plan : repères et coordonnées, vecteurs, colinéarité et produit scalaire. Ces nouveaux outils nous permettent d'étudier les problèmes d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité.

I. Repères et vecteurs de l'espace

Définition 1

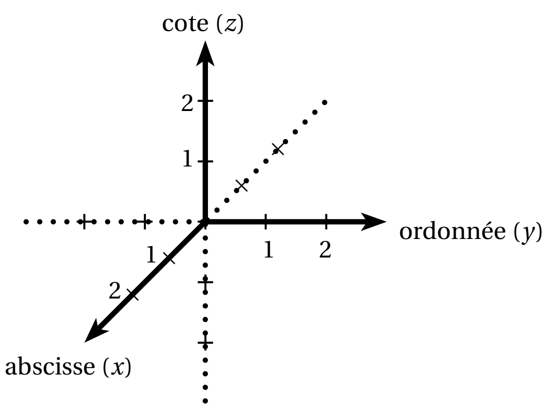
Un repère orthonormé de l'espace est la donnée de trois droites :

- graduées avec la même unité de longueur ;
- deux à deux perpendiculaires.

Ces droites sont appelées axe des abscisses, axe des ordonnées et axe des cotes. Elles permettent de repérer chaque point de l'espace par un triplet de nombres $(x; y; z)$.

Attention

Dans toute la leçon, tous les repères utilisés sont des repères orthonormés.



Exemple 1

$ABCDEFGH$ est un cube. Ce cube permet de définir un repère de l'espace, noté $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, dans lequel

$$A(0;0;0) \qquad B(1;0;0) \qquad C(1;1;0) \qquad D(0;1;0) \qquad E(0;0;1) \qquad F(1;0;1) \qquad G(1;1;1) \qquad H(0;1;1).$$

Soit I le milieu de $[CG]$. Les coordonnées de ce point peuvent être :

- soit directement « lues » graphiquement : $I(1;1;0,5)$;
- soit obtenues avec la formule (voir théorème 1) :

$$I\left(\frac{x_C+x_G}{2}; \frac{y_C+y_G}{2}; \frac{z_C+z_G}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \qquad I(1;1;0,5).$$

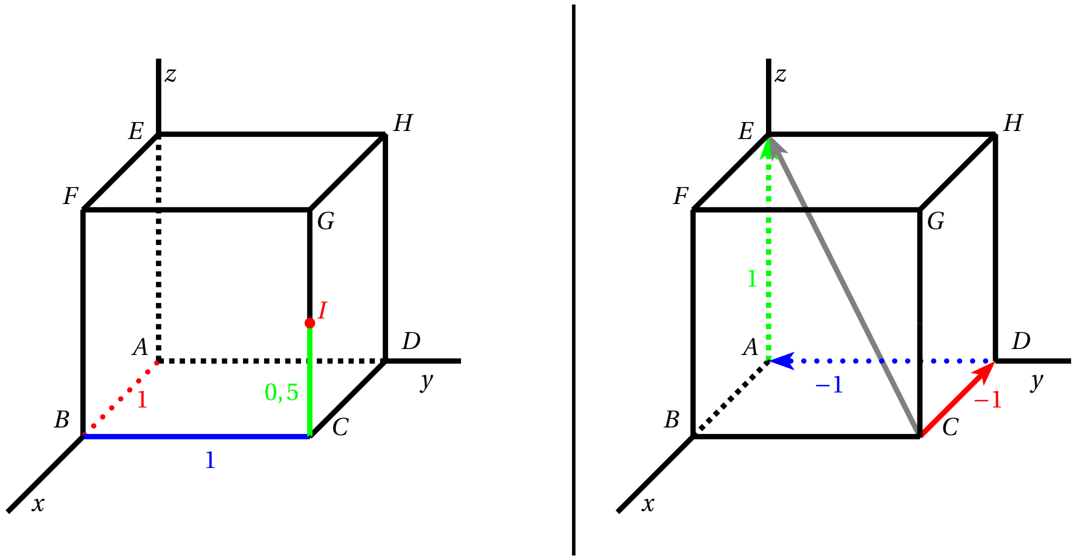
Exemple 1 – Suite

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ (voir définition 2) sont

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-x_C\\y_E-y_C\\z_E-z_C\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}0-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

La longueur du segment $[CE]$ est (voir théorème 1) :

$$CE=\sqrt{(x_E-x_C)^2+\left(y_E-y_C\right)^2+(z_E-z_C)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}.$$



Théorème 1

Soient $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ deux points de l'espace.

1. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right).$$

2. La longueur du segment $[AB]$ est

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Remarque.
Pour démontrer le point 2 du théorème 1, il faut utiliser deux fois de suite le théorème de Pythagore (demandez-vous comment un collégien pourrait calculer la longueur $[CE]$ sur la figure de droite de l'exemple 1).

Définition 2

Soient $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ deux points de l'espace. On définit :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le couple de points (A,B) ;
- les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow \text{abscisse}\\\leftarrow \text{ordonnée}\\\leftarrow \text{cote}\end{matrix}$$

- deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

Définition 3

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et soit $k\in\mathbb{R}$.

1 Le vecteur $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$.

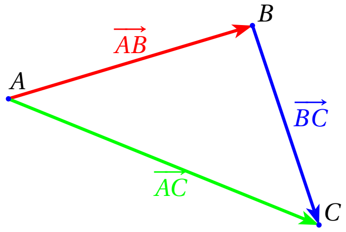
2 La somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$.

3 Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Théorème 2

1. **Relation de Chasles :** pour tous points A, B, C :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



2. **Géométrie vectorielle :** On peut manipuler des combinaisons linéaires de vecteurs comme on manipule des nombres. Par exemple :

$$5\overrightarrow{v}+3\left(\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}\right)=5\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{u}-6\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}.$$

II. Règles d'incidence, parallélisme

Théorème 3

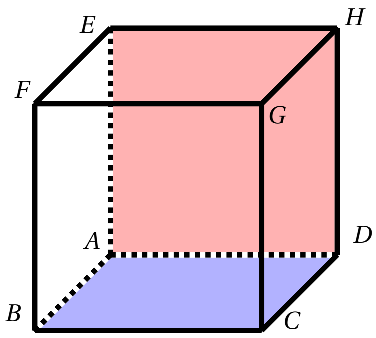
1. Par trois points non alignés passe un unique plan.
2. Si deux plans distincts sont sécants [a] et non confondus, leur intersection est une droite.

a. C'est-à-dire qu'ils se coupent.

Exemple 2

Sur la figure ci-contre :

- A, B et C ne sont pas alignés. Ils déterminent un plan, noté (ABC). Ce plan, représenté en bleu, est en fait « illimité dans toutes les directions ». Il contient notamment le point D.
- E, A et D déterminent également le plan (EAD) – représenté en rouge.
- Ces deux plans (ABC) et (EAD) sont sécants suivant la droite (AD) [a].



a. C'est-à-dire que (AD) est la droite à l'intersection des plans (ABC) et (EAD).

Définition 4

1. Des objets de l'espace sont dits coplanaires lorsqu'ils sont dans un même plan.
2. Deux droites de l'espace sont dites parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et parallèles dans ce plan [a].
3. Deux plans sont dits parallèles lorsqu'ils sont confondus ou lorsqu'ils n'ont aucun point commun.
4. Une droite et un plan sont dits parallèles lorsque la droite est incluse dans le plan ou lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

a. Autrement dit, il faut déjà qu'elles soient dans un même plan. Ensuite, il faut qu'elles soient parallèles dans ce plan – on se ramène donc à un problème de géométrie du plan.

Exemple 3

Sur la figure de l'exemple 2 :

- Les droites (AB) et (CD) sont coplanaires (dans le plan bleu) et parallèles.
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
- La droite (EF) est parallèle au plan (ABC).

Théorème 4

Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.

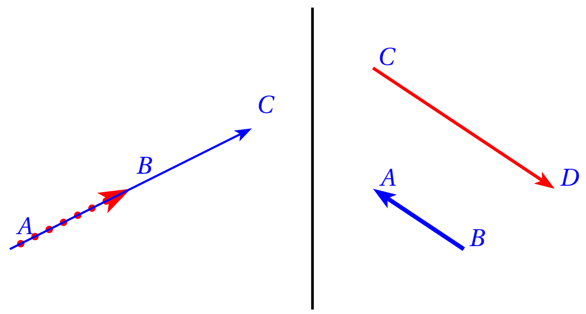
Comme dans le plan, l'outil usuel pour étudier les problèmes de parallélisme est la colinéarité :

Déf.5

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Théorème 5

1. Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Exemple 4

Les points $A(0;1;2)$, $B(2;4;5)$ et $C(-3;0;6)$ déterminent un plan.
En effet, on calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\4-1\\5-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-0\\0-1\\6-2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Exemple 4 – Suite

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, parce que le tableau avec leurs coordonnées

2	-3
3	-1
3	4

n'est pas un tableau de proportionnalité.

On en déduit que A, B, C ne sont pas alignés, et donc qu'ils déterminent un plan.

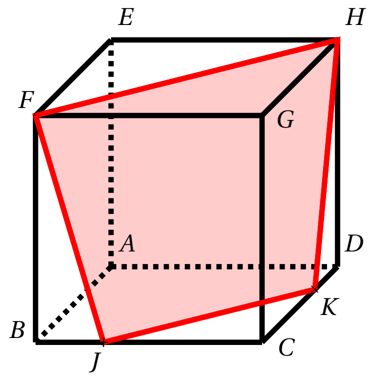
On termine ce paragraphe avec le théorème utile pour étudier les problèmes de sections [1].

Théorème 6

Si un plan coupe deux faces parallèles d'un solide, alors il les coupe suivant des segments parallèles.

Exemple 5

$ABCDEFGH$ est un cube. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, le point J a pour coordonnées $(1;0,3;0)$. Le plan (FHJ) coupe le segment $[CD]$ en un point K, dont on cherche les coordonnées.



Le point K est sur le segment $[CD]$, donc il a des coordonnées de la forme $(x;1;0)$. Il faut trouver x.

Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles, donc d'après le théorème 6, le plan (FHJ) les coupe suivant deux segments parallèles. Les segments $[FH]$ et $[JK]$ sont donc parallèles, et les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires. Or $F(1;0;1)$ et $H(0;1;1)$, donc

$$\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} x_H - x_F \\ y_H - y_F \\ z_H - z_F \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_K - z_J \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x-1 \\ 1-0,3 \\ 0-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x-1 \\ 0,7 \\ 0-0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs étant colinéaires, le tableau

-1	$x-1$
1	0,7
0	0

est un tableau de proportionnalité. On a donc $-1 \times 0,7 = 1 \times (x-1)$. On développe et on résout :

$$-0,7 = x - 1 \iff x = -0,7 + 1 = 0,3.$$

Conclusion : $K(0,3;1;0)$.

1. Une section est l'intersection d'un solide avec un plan.

III. Orthogonalité, produit scalaire

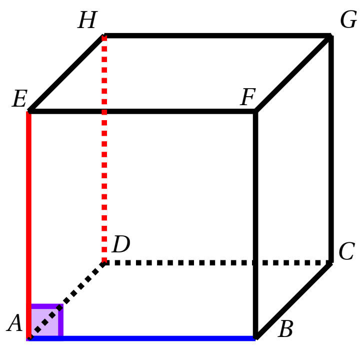
Déf.6 Deux droites (AB) et (CD) sont dites orthogonales (notation $(AB) \perp (CD)$) si la parallèle à (CD) passant par A est perpendiculaire à (AB).

Déf.7 On dit qu'une droite Δ est orthogonale à un plan P (notation $\Delta \perp P$) si elle est orthogonale à deux droites non parallèles du plan P.

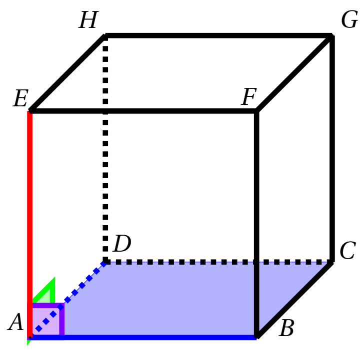
On illustre ces définitions en travaillant dans un cube $ABCDEFGH$.

Exemple 6

Les droites (AB) et (DH) sont orthogonales puisque la parallèle (AE) à (DH) passant par A est perpendiculaire à (AB).



La droite (AE) est orthogonale au plan (ABC) puisqu'elle est orthogonale aux droites (AB) et (AD).



Remarque.
Lorsque des droites se coupent, dire qu'elles sont orthogonales ou qu'elles sont perpendiculaires revient au même.

Théorème 7

Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Exemple 7

Dans le cube de l'exemple 6, (AE) est orthogonale au plan (ABC), donc elle est orthogonale à la droite (BD) (qui est incluse dans ce plan).

Définition 8

1. On dit que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux (notation $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$) quand les droites (AB) et (CD) sont orthogonales. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.
2. On dit qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à un plan P (notation $\overrightarrow{AB} \perp P$) quand (AB) est orthogonale à P. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout plan.

Théorème 8

1. Pour qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ soit orthogonal à un plan (ABC), il suffit qu'il soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.
2. Si un vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à un plan P et si A et B sont deux points de P, alors $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Le grand outil pour étudier les problèmes d'orthogonalité est le produit scalaire :

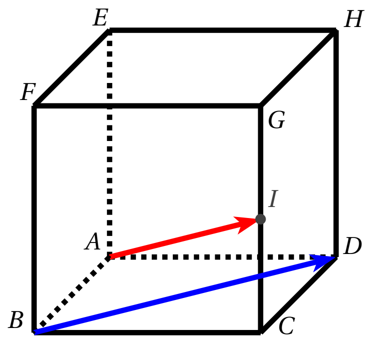
Définition 9

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre défini par

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Exemple 8

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1, I est le milieu de $[CG]$.



On travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Dans ce repère $A(0;0;0)$, $I(1;1;0,5)$, $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$, donc

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\1\\0,5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD} = 1\times(-1) + 1\times 1 + 0,5\times 0 = 0.$$

On en déduit que (AI) et (BD) sont orthogonales grâce au théorème 10 (ci-dessous).

De façon heureuse, on retrouve dans l'espace les propriétés importantes du produit scalaire du plan (bilinéarité et symétrie, caractérisation de l'orthogonalité).

Théorème 9 (symétrie et bilinéarité du produit scalaire)

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$, pour tous réels k, j :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
2. $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.
3. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.
4. $\left(k\vec{u}\right)\cdot\left(j\vec{v}\right) = k\times j\times\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.

Théorème 10

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

On termine avec la dernière formulation du produit scalaire, utile pour calculer des angles (et donc aussi des longueurs d'arcs sur des sphères – voir exercices) :

Théorème 11

Soient A, B, C trois points distincts de l'espace. Alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}.$$

CHAPITRE 6

Continuité et limites de suites

Plan de ce chapitre

I. Continuité

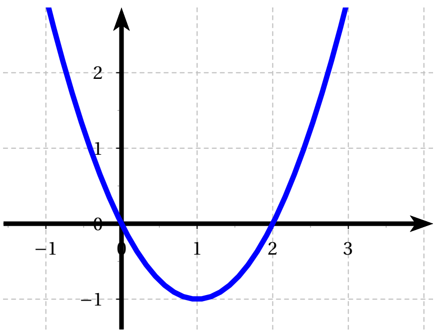
Définition 1

1 Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans son ensemble de définition et soit $a \in I$.
On dit que f est continue en a si

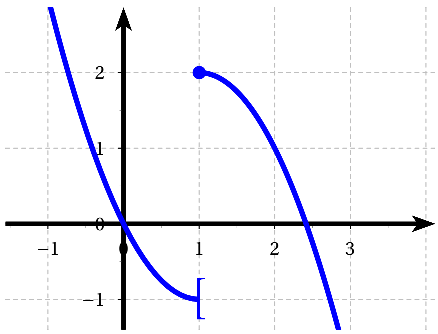
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

2 On dit que f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point a de I.

Remarque. Graphiquement, le fait qu'une fonction f soit continue sur un intervalle I se reconnaît à ce qu'il n'y ait pas de « saut » dans sa courbe représentative.



Fonction continue



Fonction discontinue en 1

Théorème 1

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur l'intervalle I.

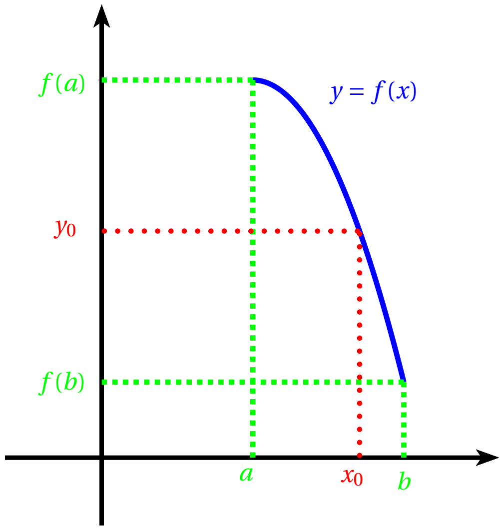
Remarques.

- Toutes les fonctions étudiées au lycée sont dérivables sur leur ensemble de définition [a]. Elles sont donc continues en vertu du théorème ci-dessus.
- Il ne vous sera pas demandé en terminale de justifier la continuité des fonctions : l'affirmer suffira.

a. Mis à part la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, qui n'est pas dérivable en 0.

Théorème 2 (de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone[a] sur un intervalle $[a;b]$. Alors tout nombre y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet exactement un antécédent x_0 dans $[a;b]$.



a. Donc strictement croissante, ou bien strictement décroissante.

Exemple 1

On pose $f(x) = x^3 + x + 2$ pour $x \in [-1;1]$. On cherche le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Pour cela, on étudie les variations de f. On calcule la dérivée : pour tout $x \in [-1;1]$,

$$f'(x) = 3x^2 + 1.$$

La dérivée est strictement positive sur $[-1;1]$, donc on a le tableau de variations :

x	-1	x_0	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	3	4

La fonction « monte » strictement de 0 à 4, donc elle prend une fois et une seule la valeur 3, pour un certain $x_0 \in [-1;1]$.
Conclusion : l'équation $f(x) = 3$ a une seule solution x_0 dans l'intervalle $[-1;1]$.

À retenir (rédaction rigoureuse)

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1;1]$;
- $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$;
- $3 \in [0;4]$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 3$ a exactement une solution x_0 dans $[-1;1]$.

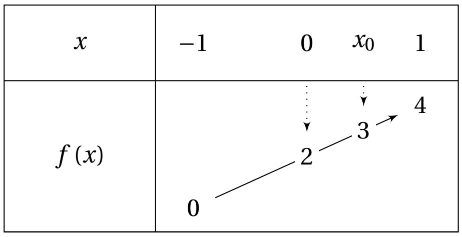
Le théorème de la bijection donne l'existence de x_0, mais ne dit rien sur sa valeur. Il est d'ailleurs difficile de la déterminer : il faudrait résoudre l'équation $x^3 + x + 2 = 3$, ce qui dépasse le niveau de la classe de terminale et demande d'être astucieux (méthode de Cardan). On peut néanmoins donner une valeur approchée de x_0 grâce à un algorithme de balayage, comme on l'explique ci-dessous.

Exemple 2 (algorithme de balayage)

On reprend l'exemple 1 et on cherche un encadrement de x_0 d'amplitude $0,01$.

Étape 1 : encadrement à l'unité. On complète un tableau de valeurs avec toutes les valeurs entières de x dans l'intervalle d'étude $[-1;1]$:

x	-1	0	1
$f(x)$	0	2	4

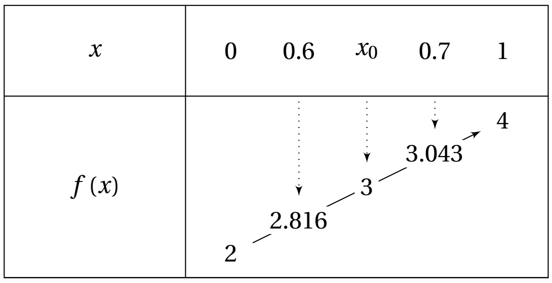


D'après le tableau de valeurs (ou le tableau de variations à côté), la fonction f prend la valeur 3 pour une valeur de x comprise entre 0 et 1 :

$$0 < x_0 < 1.$$

Étape 2 : encadrement au dixième. Sachant que x_0 est entre 0 et 1, on fait un tableau de valeurs sur l'intervalle $[0;1]$, avec un pas 10 fois plus petit – donc un pas de $0,1$. Pour aller plus vite, on programme le tableau avec la calculatrice (voir appendice).

x	0	$0,1$	$0,2$	$\ldots$	$0,6$	$0,7$	$\ldots$	1
$f(x)$	2	$2,101$	$2,208$	$\ldots$	$2,816$	$3,043$	$\ldots$	4

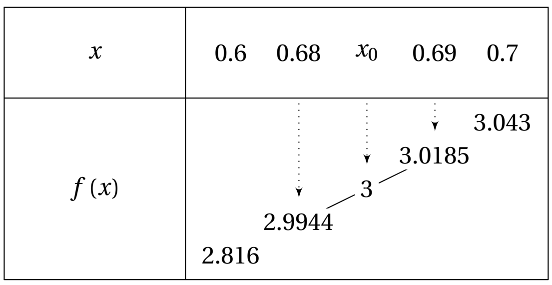


La valeur 3 est prise pour un x compris entre $0,6$ et $0,7$:

$$0,6 < x_0 < 0,7.$$

Étape 3 : encadrement au centième. On fait un nouveau tableau de valeurs, cette fois sur l'intervalle $[0,6;0,7]$, et avec un pas 10 fois plus petit – donc un pas de $0,01$.

x	$0,60$	$0,61$	$\ldots$	$0,68$	$0,69$	$0,70$
$f(x)$	$2,816$	$2,837$	$\ldots$	$2,9944$	$3,0185$	$3,043$



On obtient finalement l'encadrement d'amplitude $0,01$:

$$0,68 < x_0 < 0,69.$$

Remarques.

- Lorsqu'on programme l'algorithme de balayage sur machine, il est plus simple de couper les intervalles en deux plutôt qu'en dix à chaque étape (on parle alors aussi d'*algorithme de dichotomie*).
- On a des versions analogues du théorème de la bijection pour des fonctions f définies sur des intervalles ouverts ou semi-ouverts, y compris si une extrémité vaut $\pm\infty$. On en reparlera plus tard au cours de l'année.

x	0	x_0	$+\infty$
$g(x)$	2 ↘	0 ↘	$-\infty$

Ici l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution x_0.

II. Application aux limites de suites

Exemple 3

On définit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} w_0 & = 6 \\ w_{n+1} & = 0{,}5w_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} w_0 &= 6\,; \\ w_1 &= 0{,}5 \times w_0 + 1 = 0{,}5 \times 6 + 1 = 4\,; \\ w_2 &= 0{,}5 \times w_1 + 1 = 0{,}5 \times 4 + 1 = 3\,; \\ w_3 &= 0{,}5 \times w_2 + 1 = 0{,}5 \times 3 + 1 = 2{,}5. \end{aligned}$$

On a déjà cherché la limite de cette suite dans les exemples 5 et 6 de la leçon n°4. Ici, on va obtenir cette limite graphiquement [a].

Pour commencer, on définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière équivalente par

$$\begin{cases} w_0 & = 6 \\ w_{n+1} & = f(w_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec $f(x) = 0{,}5x + 1$.

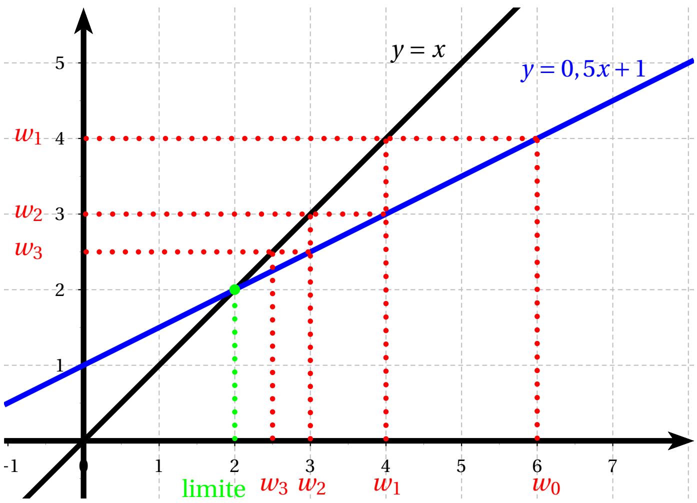
On trace dans un même repère :

- en bleu, la droite d'équation $y = 0{,}5x + 1$ (c'est-à-dire la courbe de la fonction f) ;
- en noir, la droite d'équation $y = x$.

Prenons le terme $w_0 = 6$ de la suite et plaçons-le sur l'axe des abscisses. Son image par f est

$$f(w_0) = w_1 = 0{,}5 \times 6 + 1 = 4,$$

donc on l'obtient à partir de w_0 en montant jusqu'à la courbe de f, puis en allant jusqu'à l'axe des ordonnées. On retrouve alors w_1 en abscisse grâce à la droite d'équation $y = x$. Finalement, sachant placer le terme w_0 sur l'axe des abscisses, on peut placer le terme suivant, w_1, également sur l'axe des abscisses. On recommence pour placer w_2, w_3, etc.



On voit se dessiner un « escalier » qui descend et qui se rapproche du point de coordonnées $(2;2)$, à l'intersection des deux droites. On peut donc penser que :

- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 2.

a. On va faire un raisonnement graphique, donc non rigoureux, mais qui permet de trouver la limite de façon très rapide.

Remarque.
D'autres constructions sont proposées en exercice.

Dans l'exemple précédent, la limite de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$. C'est une situation générale, conséquence du théorème ci-dessous[1] :

Théorème 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite finie ℓ. Si une fonction f est continue en ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Ce théorème justifie le fait que sous les hypothèses

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$,
- f fonction continue en ℓ,

on peut « passer à la limite » dans la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On obtient :

$$\ell = f(\ell).$$

La résolution de cette équation permet de déterminer la valeur de ℓ après avoir prouvé son existence (voir exercices).

Exemple 4

Revenons sur l'exemple 3 : $w_0 = 6$ et $w_{n+1} = 0,5w_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a constaté graphiquement que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était décroissante et minorée, donc convergente. On avait en fait déjà prouvé rigoureusement ce résultat dans l'exemple 5 du chapitre 4. En notant ℓ sa limite, comme la fonction $f : x \mapsto 0,5x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\ell = 0,5\ell + 1.$$

On trouve ℓ en résolvant cette équation :

$$\ell - 0,5\ell = 1 \qquad 0,5\ell = 1 \qquad \ell = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Cela ressemble beaucoup à la méthode de l'exemple 5 du chapitre 4, mais l'argumentation est différente : dans le chapitre 4, on a raisonné à partir d'opérations sur les limites ; ici, on utilise la continuité d'une fonction.

À retenir

Cette suite de l'exemple 3 nous a servi de fil conducteur dans l'étude des suites et de leurs limites : exemples 2 et 4, puis exemples de programmes (paragraphe 3) dans le chapitre 2 ; exemples 5 et 6, puis programme de seuil (paragraphe 4) dans le chapitre 4 ; exemples 3 et 4 dans la présente leçon. On y a vu quatre méthodes pour étudier la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- Méthode graphique (construction d'un « escalier ») : c'est l'exemple 3 de cette leçon[a].
- Utilisation d'une suite géométrique annexe ($v_n = w_n - 2$) pour obtenir la formule $w_n = 4 \times 0,5^n + 2$, puis utilisation de la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$. C'est le travail des exemples 2 et 4 du chapitre 2, et de l'exemple 6 du chapitre 4.
- Preuve du fait que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente, via une preuve par récurrence : $2 \leq w_{n+1} \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis « passage à la limite » dans la formule $w_{n+1} = 0,5w_n + 1$, grâce aux opérations sur les limites. On obtient alors $\ell = 0,5\ell + 1$, et on résout pour trouver ℓ. Ce raisonnement a été mené dans l'exemple 5 du chapitre 4.
- Même méthode que la précédente, avec l'utilisation d'une fonction continue pour « passer à la limite » dans la formule de récurrence. C'est ce que nous venons de faire dans l'exemple 4.

a. Cette méthode n'est pas rigoureuse, puisqu'elle repose sur une lecture graphique.

1. Comme le théorème de la bijection, ce théorème sera démontré en L1.

III. Appendice : tableau de valeurs avec la calculatrice

La fonction f est celle des exemples 1 et 2 : elle est définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par

$$f(x) = x^3 + x + 2.$$

Pour obtenir un tableau de valeurs pour f sur $[0;1]$ avec un pas de $0,1$ (étape 2 de l'exemple 2) :

Calculatrices collège

- $\boxed{\text{MODE}}$
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=$\text{X}^3+\text{X}+2$ $\boxed{\text{EXE}}$

  (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- Fin ? 1 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas ? 0, 1 $\boxed{\text{EXE}}$

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{x}}$

- 
- Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$ puis choisir Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$
- f(x)=$\text{x}^3+\text{x}+2$ $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Tableau $\boxed{\text{EXE}}$ puis Régler l'intervalle $\boxed{\text{EXE}}$
- X début 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- X fin 1 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas 0.1 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Valider

TI graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{x,t,\theta,n}$

- $\boxed{f(x)}$
- $\text{Y}_1=\text{X}^3+\text{X}+2$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{déf table}}$
- DébTable=0 $\boxed{\text{EXE}}$
- PasTable=0.1 $\boxed{\text{EXE}}$

  ou

  ΔTbl=0.1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{table}}$

CASIO graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{\text{X},\theta,\text{T}}$

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis choisir TABLE $\boxed{\text{EXE}}$
- $\text{Y}_1:\text{X}^3+\text{X}+2$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{F5}}$ (on choisit donc SET)
- Start :0 $\boxed{\text{EXE}}$
- End :1 $\boxed{\text{EXE}}$
- Step :0.1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{EXIT}}$
- $\boxed{\text{F6}}$ (on choisit donc TABLE)

CHAPITRE 7

Variables aléatoires, loi binomiale

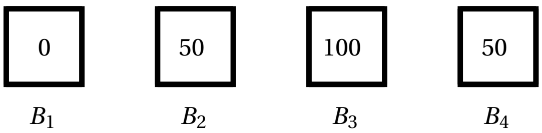
Plan de ce chapitre

I. Variables aléatoires et arbres pondérés

On rappelle d'abord avec un exemple ce qu'est une variable aléatoire, sa loi et son espérance.

Exemple 1

Un joueur choisit une boîte au hasard et gagne son contenu (en euros).



On note X le gain (aléatoire) du joueur [a]. X est ce que l'on appelle une variable aléatoire. Sa loi est donnée par le tableau :

k	0	50	100
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de X est

$$E(X) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{2}{4} \times 50 + \frac{1}{4} \times 100 = 50.$$

a. On note X le gain **avant** la partie, parce qu'après avoir joué, il n'y aura plus rien d'aléatoire.

On rappelle à présent comment on utilise un arbre pondéré, ainsi que la notion de probabilité conditionnelle.

Exemple 2

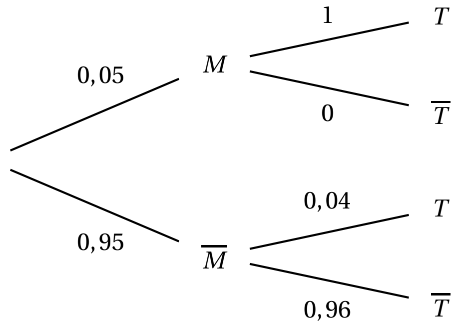
Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays (vaches, bœufs, etc.). Elle touche 5 % des 10 000 bêtes.
Un test permet de détecter systématiquement la maladie lorsqu'elle est présente chez un animal ; en revanche le test indique la présence de la maladie chez 4 % des animaux sains (on parle de « faux positifs »).

On choisit un animal au hasard. On considère les événements
M : « l'animal est malade »,
T : « le test est positif ».

Exemple 2 – Suite

On peut représenter la situation par un tableau d'effectif ou par un arbre pondéré (U désigne l'univers) :

	M	$\overline{M}$	U
T	500	380	880
$\overline{T}$	0	9 120	9 120
U	500	9 500	10 000



Détails des calculs :

- $\frac{10\,000\times 5}{100} = 500$.
- $10\,000 - 500 = 9\,500$.
- $\frac{9\,500\times 4}{100} = 380$.

On étudie trois problèmes :

Problème n°1. La probabilité qu'un animal ait un test positif est :

- En utilisant le tableau : $P(T) = \frac{880}{10\,000} = 0,088$.
- En utilisant l'arbre :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M\cap T) + P\left(\overline{M}\cap T\right) \qquad \text{(formule des probabilités totales)} \\ &= 0,05\times 1 + 0,95\times 0,04 = 0,088. \end{aligned}$$

Problème n°2. Sachant qu'un animal est malade, la probabilité qu'il ait un test positif est $P_M(T) = 1$.

Problème n°3. Sachant qu'un animal a un test positif, la probabilité qu'il soit malade est :

- En utilisant le tableau : $P_T(M) = \frac{500}{880} \approx 0,57$.
- En utilisant la formule vue en 1re et l'arbre : $P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{0,05\times 1}{0,088} \approx 0,57$.

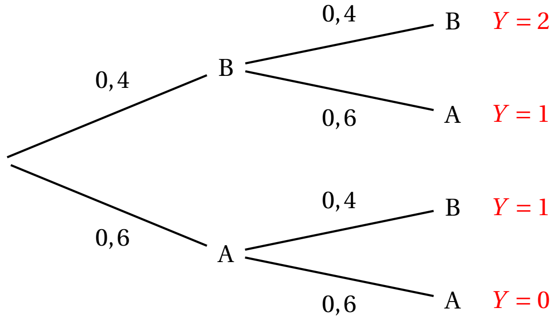
À retenir

La formule $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Exemple 3

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité que Benjamin gagne une rencontre est 0,4. Les deux amis font deux parties. On note Y le nombre de victoires de Benjamin.

On construit ci-contre un arbre pondéré, avec de gauche à droite le vainqueur du 1er match, puis du 2e. On indique à l'extrémité droite (en rouge) le nombre Y de victoires de Benjamin.



On détermine la loi de Y grâce à l'arbre :

- $P(Y=2) = 0,4\times 0,4 = 0,16$.
- $P(Y=1) = 0,4\times 0,6 + 0,6\times 0,4 = 0,48$.
- $P(Y=0) = 0,6\times 0,6 = 0,36$.

On peut aussi présenter la loi avec un tableau :

k	0	1	2
$P(Y=k)$	0,36	0,48	0,16

Exemple 3 – Suite

L'espérance de Y est

$$E(Y) = 0,36 \times 0 + 0,48 \times 1 + 0,16 \times 2 = 0,80.$$

La variance de Y est

$$V(Y) = 0,36 \times (0-0,80)^2 + 0,48 \times (1-0,80)^2 + 0,16 \times (2-0,80)^2 = 0,48,$$

et l'écart-type est $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0,48} \approx 0,69$.

Remarques.

- Chaque match est ce que l'on appelle une épreuve de Bernoulli : soit Benjamin gagne, soit il perd.
- Si on veut rentrer dans les détails, il y a plusieurs modélisations possibles du problème, c'est-à-dire plusieurs choix possibles pour l'univers U et pour la probabilité P. On peut choisir par exemple $U = \{BB; BA; AB; AA\}$, où BA correspond à une victoire de Benjamin à la première partie et à une victoire d'Alain à la deuxième [...] ; puis définir P par

élément	BB	BA	AB	AA
probabilité	0,16	0,24	0,24	0,36

  P n'est donc plus la probabilité uniforme [a] !
- Pour prolonger le point précédent, une définition rigoureuse de Y serait

$$Y(BB) = 2, \; Y(BA) = 1, \; Y(AB) = 1, \; Y(AA) = 0.$$

  Autrement dit, Y associe à chaque élément de l'univers le nombre de victoires de Benjamin.
- Dans le paragraphe suivant, on travaillera dans des situations analogues à celle de l'exemple 3, mais avec éventuellement davantage d'épreuves de Bernoulli (donc des arbres plus étendus). Pour simplifier la présentation, on passera sous silence les problèmes d'univers et de probabilités sous-jacents.

a. Contrairement à tous les exemples qu'on a donnés jusque là en probabilités.

II. La loi binomiale

Exemple 4

On lance un dé à 6 faces quatre fois de suite. On note X le nombre de 6. On calcule la probabilité des deux événements :

C : « on obtient exactement deux 6 » ;
D : « on obtient exactement trois 6 ».

Sur la page suivante, on a représenté la situation par un arbre pondéré et on a placé :

- un trèfle à l'extrémité des 6 branches qui conduisent à l'événement C ;
- un cœur à l'extrémité des 4 branches qui conduisent à l'événement D.

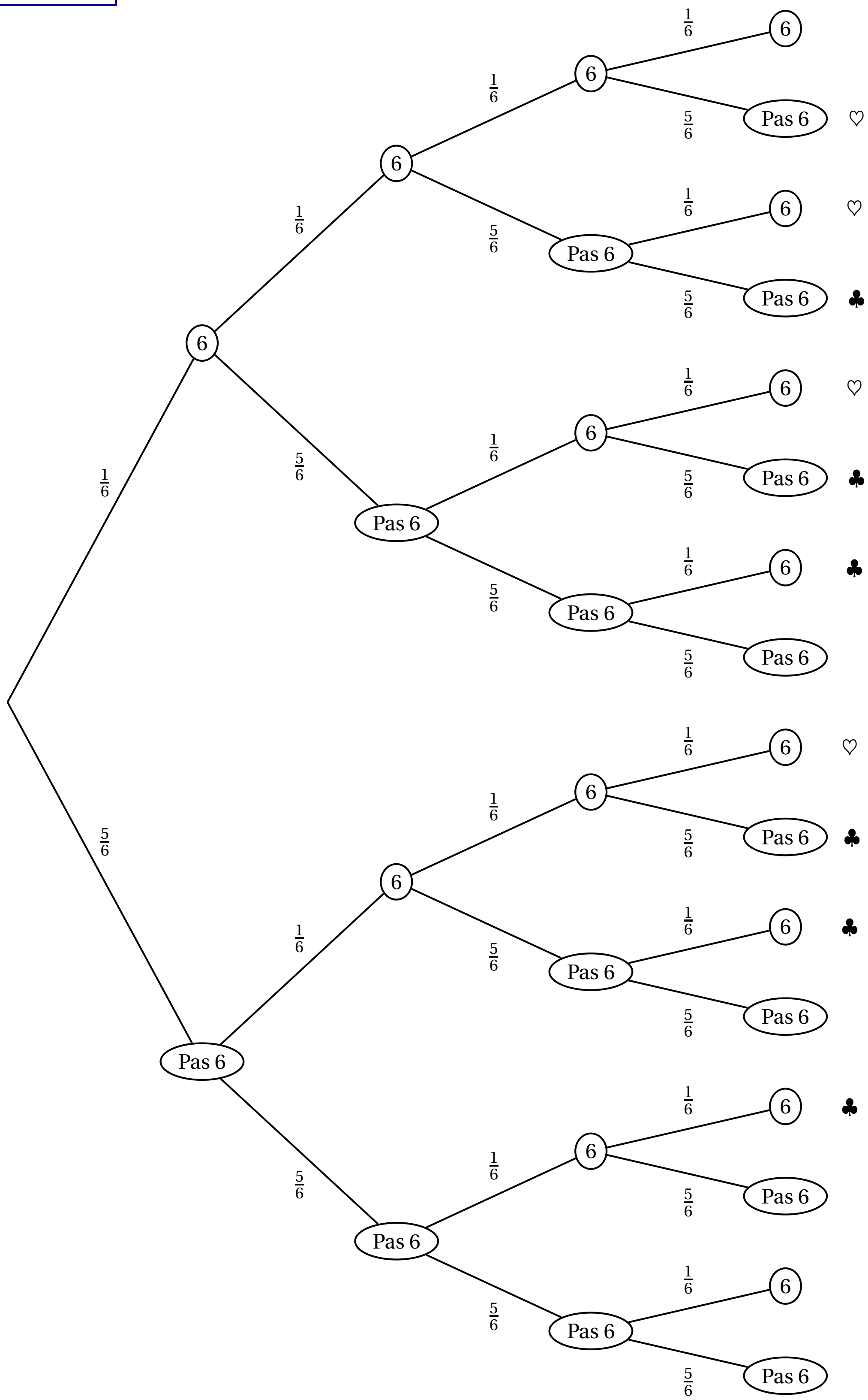
Il y a 6 « chemins » qui mènent à l'événement C. Cela vient du fait qu'il faut choisir la position des deux 6 parmi quatre lancers, ce qui donne $\binom{4}{2} = 6$ possibilités.
Chacune de ces éventualités a pour probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$, donc

$$P(C) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Calculons à présent $P(D)$. Il y a 4 « chemins » qui mènent à l'événement D, puisqu'il faut choisir trois 6 parmi quatre et que $\binom{4}{3} = 4$.
Chacune de ces éventualités a pour probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$, donc

$$P(D) = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1.$$

Exemple 4 – Suite



Le théorème suivant généralise la situation.

Théorème 1

On dispute successivement n parties d'un jeu de hasard, indépendantes les unes des autres, la probabilité de gagner une partie donnée étant p, la probabilité de la perdre $1-p$ (on parle de schéma de n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre p). On note X le nombre de parties gagnées.
Alors pour tout entier $0 \leq k \leq n$:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}.$$

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n, p.

Exemple 5

Une urne contient 2 boules bleues et 3 rouges indiscernables au toucher. On tire successivement dix boules au hasard, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On note X le nombre de boules bleues tirées.

À retenir (loi de X et justification)

Il s'agit d'un schéma de 10 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5}=0,4$, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$, $p=0,4$.

On a donc par exemple :

- La probabilité de tirer trois boules bleues est

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\times 0,4^3\times(1-0,4)^{10-3}=120\times 0,4^3\times 0,6^7\approx 0,215.$$

À retenir

nb total boules

proba boule B

nb boules R

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\times 0,4^3\times 0,6^7$$

nb de boules B

proba boule R

- La probabilité de tirer au moins une boule bleue est $P(X\geq 1)$. Pour faire le calcul, il est judicieux d'utiliser l'événement contraire :

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\underbrace{\binom{10}{0}}_{=1}\times\underbrace{0,4^0}_{=1}\times(1-0,4)^{10-0}=1-0,6^{10}\approx 0,994.$$

Remarques.

- Dans l'appendice, on donne les instructions pour obtenir directement les probabilités de l'exemple 5 en utilisant une calculatrice graphique.
- Dans l'exemple 3, le nombre Y de victoires de Benjamin suit la loi binomiale de paramètres $n=2$, $p=0,4$. Et dans l'exemple 4, le nombre X de 6 suit la loi binomiale de paramètres $n=4$, $p=\frac{1}{6}$.

Théorème 2

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n, p, alors :

1. $E(X) = n \times p$.
2. $V(X) = n \times p \times (1 - p)$.

Exemple 6

On reprend l'exemple 5 : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$, $p = 0,4$, donc

- $E(X) = 10 \times 0,4 = 4$;
- $V(X) = 10 \times 0,4 \times (1 - 0,4) = 0,24$.

Exemple 7

On joue n parties indépendantes d'un jeu de hasard, la probabilité de gagner une partie donnée étant $p = 0,4$. On note X le nombre de parties gagnées.

Il s'agit d'un schéma de n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $0,4$, donc X suit la loi binomiale de paramètres n, $p = 0,4$. On a donc

$$P(X = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \times \underbrace{0,4^0}_{1} \times 0,6^{n-0} = 0,6^n.$$

Bien sûr, la méthode de l'exemple précédent se généralise :

Théorème 3

Si X suit la loi binomiale de paramètres n, p, alors $P(X = 0) = (1 - p)^n$.

III. Appendice : loi binomiale avec les calculatrices graphiques

On reprend l'exemple 5 : la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$, $p = 0,4$. On explique comment calculer $P(X = 3)$ et $P(X \leq 3)$.

$\boxed{\textbf{Calcul de P(X = 3).}}$

NUMWORKS

Touche $\boxed{}$, on choisit Probabilités, puis on choisit Binomiale (après si nécessaire $\boxed{}$). Ensuite on complète

n	10
p	0.4

et on choisit Suivant. On se déplace vers la gauche, touche $\boxed{\text{EXE}}$ et on choisit $\boxed{}$; enfin on remplace la valeur grisée P(X = 3)

TI

Touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$, on choisit binomFdp(puis on complète

nbreEssais : 10
p : 0.4
valeur de x : 3

on va sur Coller et on appuie deux fois sur $\boxed{\text{entrer}}$

CASIO

Touche $\boxed{\text{MENU}}$ puis STAT – DIST – BINM – Bpd
puis on complète

Data : Variable
x : 3
Numtrial : 10
p : 0.4

on va sur Execute et on appuie sur $\boxed{\text{entrer}}$

Quel que soit le modèle, on obtient la réponse :

$$P(X=3)\approx 0,215.$$

Calcul de P(X ≤ 3).

NUMWORKS

Touche [ ], on choisit Probabilités, puis on choisit Binomiale (après si nécessaire [ ]). Ensuite on complète

n	10
p	0.4

et on choisit Suivant. On se déplace vers la gauche, touche $\boxed{\text{EXE}}$ et on choisit [ ]; enfin on remplace la valeur grisée P(X ≤ 3)

TI

Touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$, on choisit binomFRép(puis on complète

nbreEssais	: 10
p	: 0.4
valeur de x	: 3

on va sur Coller et on appuie deux fois sur $\boxed{\text{entrer}}$

CASIO

Touche $\boxed{\text{MENU}}$ puis STAT – DIST – BINM – Bcd
puis on complète

Data	: Variable
x	: 3
Numtrial	: 10
p	: 0.4

on va sur Execute et on appuie sur $\boxed{\text{entrer}}$

Quel que soit le modèle, on obtient la réponse :

$$P(X\leq 3)\approx 0,382.$$

Remarques.

- Pour calculer $P(X\geq 4)$ avec une **TI** ou une **CASIO**, on utilise l'événement contraire : on calcule $P(X\leq 3)$ comme ci-dessus et on écrit

$$P(X\geq 4)=1-P(X\leq 3)\approx 1-0,382\approx 0,618.$$

  Avec une calculatrice **NUMWORKS**, il suffit de choisir [ ].

- Avec les **Calculatrices collège**, on peut calculer $P(X=3)$, mais seulement en utilisant la formule

$$P(X=3)=\frac{10!}{3!7!}\times 0,4^3\times 0,6^7.$$

  En revanche, aucune commande ne permet de calculer $P(X\leq 3)$: il faut « décomposer »

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3),$$

  faire chaque calcul comme pour $P(X=3)$ ci-dessus et ajouter de proche en proche.