Devoir surveillé n°3

- Le soin, la rédaction et l'orthographe seront pris en compte dans l'évaluation des copies.
- On demande aux élèves de rendre le sujet du devoir avec leur copie.

Exercice 1 — 4,5 points

Dans chaque cas, calculer les termes u_1 à u_3 des suites :

1. $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 7 - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
2. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n)^2 - u_n - 1 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 — 4,5 points

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que
$$u_{n+1} - u_n = 2n$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 — 4,5 points

Le 1er janvier 2025, on place 1 000 € sur un livret d'épargne, qu'on laissera ensuite fructifier. Le livret a un rendement annuel de 5 %, ce qui signifie que la somme placée augmente de 5 % par an sans qu'on fasse rien. On note u_n la somme sur le livret après n années ; on a donc en particulier $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2. Interpréter les résultats.
2. On utilise un tableur pour déterminer au bout de combien d'années la somme sur le livret dépassera 2 000 €. On a reproduit ci-dessous une partie de la feuille de calcul.

	A	**B**	**C**	$\cdots$	**O**	**P**	**Q**	**R**
1	n	0	1	$\cdots$	13	14	15	16
2	u_n	1000	1050	$\cdots$	1884,65	1979,93	2078,93	2182,87

   (a) On a entré une formule dans la cellule C2, que l'on a ensuite étirée vers la droite pour obtenir les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est cette formule ?

   (b) En utilisant les résultats de la feuille de calcul ci-dessus, déterminer le 1er janvier de quelle année la somme sur le compte dépassera 2 000 €.

Exercice 4 — 6,5 points

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = -0,5u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Tracer dans un même repère les droites d'équations $y = x$ et $y = -0,5x + 4$ sur l'intervalle $[0;5]$ (on prendra 1 cm ou 1 grand carreau comme unité graphique).
2. Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en suivant la méthode du cours.
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   *S'il y a une limite finie, on calculera sa **valeur exacte**.*