

Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Rappels de calcul et de géométrie | 2 |
|----------|--|----------|

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

| | | |
|---------------------|-----|---|
| Nombre de personnes | 4 | 6 |
| Farine (en g) | 250 | ? |
| Lait (en mL) | 500 | ? |
| Œufs | 4 | 6 |

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250 \times 6}{4} = \frac{1500}{4} = 375$ g de farine, $\frac{500 \times 6}{4} = \frac{3000}{4} = 750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6 \times 125 = 750$ g.

| | | |
|--------------|------|-----|
| masse (en g) | 1000 | 750 |
| prix (en €) | 2 | ? |

Je payerai $\frac{750 \times 2}{1000} = \frac{1500}{1000} = 1,5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes¹.

| | | |
|------------------|----|----|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 20 | 45 |

On mettra $\frac{60 \times 45}{20} = \frac{20 \times 3 \times 45}{20} = 135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135 = 120 + 15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

| | | | |
|----------|---|---|----|
| Florins | 7 | ? | ① |
| Pistoles | 6 | 4 | ② |
| Deniers | ? | 5 | 30 |

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4 \times 30 \div 5 = 24$ pistoles :

| | | | |
|----------|---|---|----|
| Florins | 7 | ? | ① |
| Pistoles | 6 | 4 | 24 |
| Deniers | ? | 5 | 30 |

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7 \times 24}{6} = \frac{7 \times 4 \times 6}{6} = 28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

| | | |
|------------------|----|-----|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 3 | 0,5 |

| | | |
|------------------|----|---|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 15 | 5 |

Stéphane nage $\frac{60 \times 0,5}{3} = \frac{30}{3} = 10$ min, puis il court $\frac{60 \times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5 + 0,5 = 5,5$ km, en $10 + 20 = 30$ min.

| | | |
|------------------|-----|----|
| temps (en min) | 30 | 60 |
| distance (en km) | 5,5 | ? |

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60 \times 5,5}{30} = \frac{30 \times 2 \times 5,5}{30} = 11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

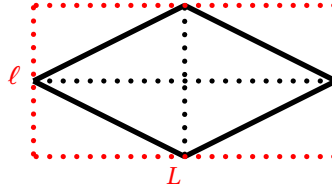
- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD , d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

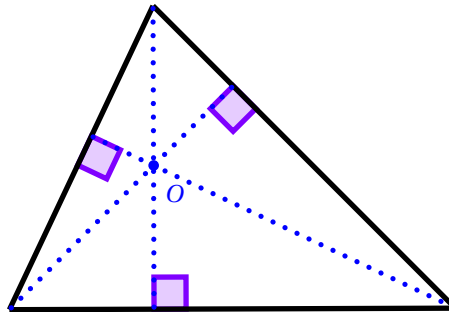
$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(5 + 3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L , donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

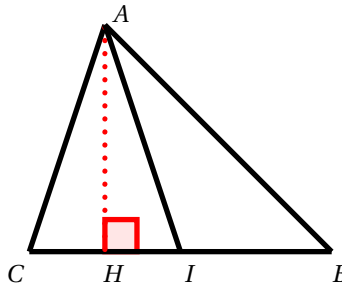


Exercice 5 Rappels :

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA , donc

$$\mathcal{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2}$$

$$\mathcal{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I est le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7 La méthode la plus simple pour écrire la négation d'une affirmation est d'utiliser des « ne pas », comme vous avez appris à le faire à l'école primaire. Par exemple, la négation de

2. L'implication

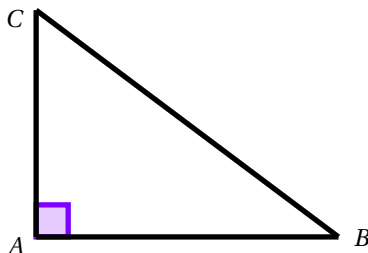
et sa réciproque

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. Théorème de Pythagore.

Si ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



2. Théorème contraposé de Pythagore.

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A .

3. Théorème réciproque de Pythagore.

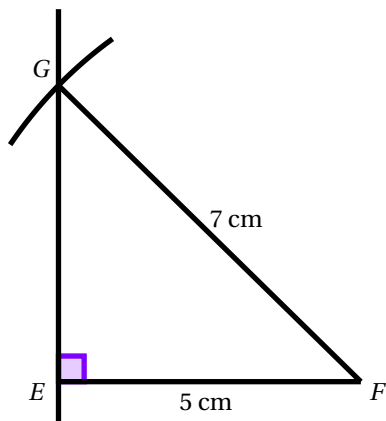
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠ En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre!

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E .
- Un arc de cercle de centre F , de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G .



D'après le **théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

$$FG^2 = EF^2 + EG^2$$

$$7^2 = 5^2 + EG^2$$

$$49 = 25 + EG^2$$

$$49 - 25 = EG^2$$

$$\sqrt{24} = EG$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

⚠ Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

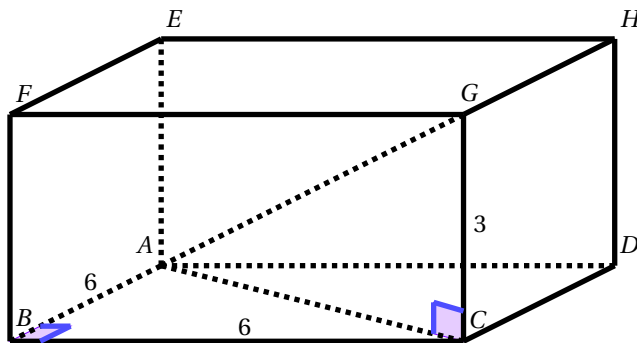
2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A .

On calcule :

$$\left. \begin{array}{l} BC^2 = 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{array} \right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A .

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B ,

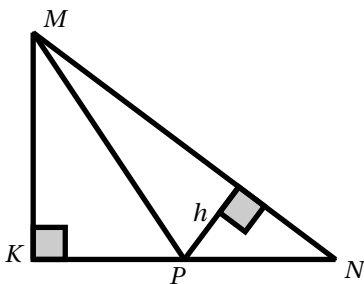
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 6^2 + 6^2 \\ AC^2 &= 36 + 36 \\ AC^2 &= 72 \\ &\text{(Inutile de donner } AC \text{ !)} \end{aligned}$$

Dans ACG rectangle en C ,

$$\begin{aligned} AG^2 &= AC^2 + CG^2 \\ AG^2 &= 72 + 3^2 \\ AG^2 &= 72 + 9 \\ AG^2 &= 81 \\ AG &= \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1,2$ cm.



1. $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3 \text{ cm}^2$.

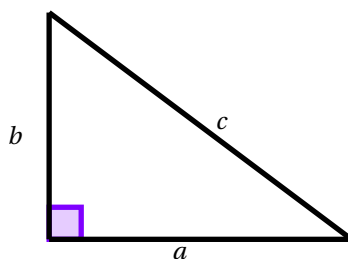
2. On a aussi $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN \times 3}{2}$, soit $3 \times 2 = PN \times 3$; et donc $PN = 2$ cm.

3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN , puis KP et MP .

\triangle On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.

- Pour KN , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN . On obtient $KN = 4$ cm.
- $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
- Enfin, pour calculer PM , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP . On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b , l'hypoténuse mesure c .



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

Pour tous nombres positifs a et b , $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

est FAUSSE! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

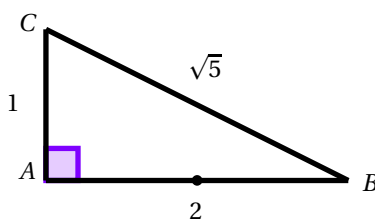
$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{est différent de} \quad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2 + b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a + b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

Exercice 14 1. L'égalité $1^2 + 2^2 = 5$ peut encore s'écrire

$$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2.$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore, un triangle de côtés $AB = 2$, $AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$ est rectangle en A .



2. On propose deux méthodes :

- (a) **Méthode géométrique.** L'hypoténuse $[BC]$ du triangle construit dans la question 1 est strictement plus grande que le côté de l'angle droit $[AB]$, donc $2 < \sqrt{5}$.

Par ailleurs, la distance la plus courte de B à C est la ligne droite, donc le chemin qui part de B et passe par A avant d'arriver à C a une longueur strictement plus grande que celle du segment $[BC]$. Autrement dit, $\sqrt{5} < 2 + 1$; c'est-à-dire $\sqrt{5} < 3$.

Conclusion :

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

- (b) **Méthode par le calcul.** On compare les carrés :

$$2^2 = 4, \quad \sqrt{5}^2 = 5 \quad \text{et} \quad 3^2 = 9.$$

Or $4 < 5 < 9$, donc

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

3. On calcule en posant les multiplications :

$$2,0^2 = 4$$

$$2,1^2 = 4,41$$

$$2,2^2 = 4,84$$

$$2,3^2 = 5,29.$$

Or $4,84 < 5 < 5,29$, donc

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3.$$

Remarques :

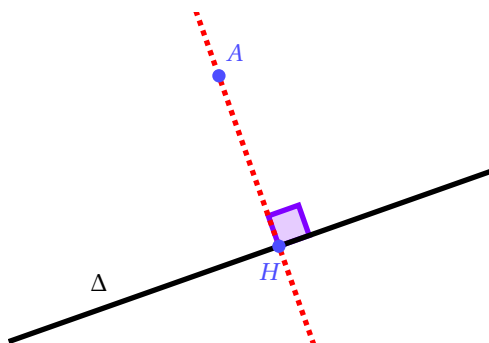
- L'écart entre 2,2 et 2,3 est bien égal à 0,1.
- On devait continuer les calculs jusqu'à dépasser 5 – donc on aurait pu avoir besoin de calculer $2,4^2$, $2,5^2$, etc. On était sûr cependant de ne pas dépasser 3,0.
- Rappel pour poser une multiplication avec un exemple :

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times 2.3 \\ \hline 6\ 9 \\ 4\ 6 \\ \hline 5.2\ 9 \end{array}$$

Rappelons que comme les facteurs 2,3 et 2,3 ont chacun 1 chiffre après la virgule, le résultat final en a $1 + 1 = 2$.

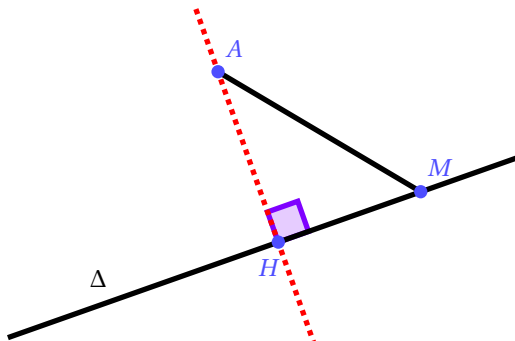
Exercice 15 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A . Elle coupe Δ en H .



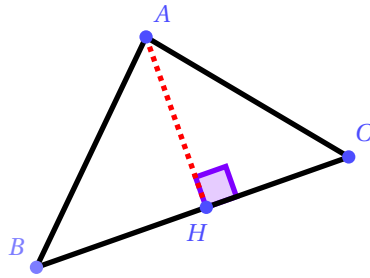
2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H , donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur² issue de A dans le triangle ABC .

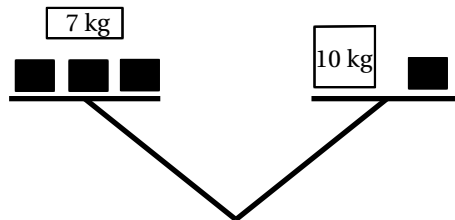
2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur*; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B \times h}{2}$ pour l'aire du triangle.



Exercice 16 On résout les équations :

| | | | | |
|---|--|--|---|---|
| $x + 7 = 18$ $x + \cancel{7} - \cancel{7} = 18 - 7$ $x = 11$ <p>La solution est $x = 11$</p> | $3x + 4 = 19$ $3x + \cancel{4} - \cancel{4} = 19 - 4$ $3x = 15$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$ $x = 5$ <p>La solution est $x = 5$.</p> | $3,5x - 9 = 5$ $3,5x - \cancel{9} + \cancel{9} = 5 + 9$ $3,5x = 14$ $\frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}} = \frac{14}{3,5}$ $x = \frac{14}{3,5}$ <p>Or $\frac{14}{3,5} = \frac{14 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{28}{7} = 4$, donc la solution est $x = 4$.</p> | $x + 1 = -2x - 5$ $x + 1 + \cancel{2x} = \cancel{-2x} - 5 + \cancel{2x}$ $3x + 1 = -5$ $3x + \cancel{1} - \cancel{1} = -5 - 1$ $3x = -6$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{-6}{3}$ $x = -2$ <p>La solution est $x = -2$.</p> | $-2x + 4 = 3x - 6$ $-2x + 4 - \cancel{3x} = \cancel{3x} - 6 - \cancel{3x}$ $-5x + 4 = -6$ $-5x + \cancel{4} - \cancel{4} = -6 - 4$ $-5x = -10$ $\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{-10}{-5}$ $x = 2$ <p>La solution est $x = 2$.</p> |
|---|--|--|---|---|

Exercice 17 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M + 7 = 10 + M.$$

On la résout :

$$3M + 7 - \cancel{M} = 10 + \cancel{M} - \cancel{M}$$

$$2M + 7 = 10$$

$$2M + \cancel{7} - \cancel{7} = 10 - 7$$

$$2M = 3$$

$$\frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$M = 1,5$$

Conclusion : la solution est $M = 1,5$.

Exercice 18 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15\,000 - x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15 \times x + 25 \times (15\,000 - x).$$

Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation

$$15x + 25(15\,000 - x) = 295\,000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned} 15x + 25(15\,000 - x) &= 295\,000 \\ 15x + 25 \times 15\,000 + 25 \times (-x) &= 295\,000 \\ 15x + 375\,000 - 25x &= 295\,000 \\ -10x + 375\,000 &= 295\,000 \\ -10x + \cancel{375\,000} - \cancel{375\,000} &= 295\,000 - \cancel{375\,000} \\ -10x &= -80\,000 \\ \frac{-10x}{-10} &= \frac{-80\,000}{-10} \\ x &= 8\,000. \end{aligned}$$

Conclusion : il y a $x = 8\,000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 19

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\ B &= \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12} \\ C &= 2 + \frac{1}{5} = \frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \\ D &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{10 \times 6} = \frac{15}{60} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{15} \times 4} = \frac{1}{4} \\ E &= 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{10 \times 3}{6 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{30}{18} - \frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11 \times \cancel{2}}{9 \times \cancel{2}} = \frac{11}{9} \\ F &= 4 - 3 \times \frac{5}{6} = \frac{4}{1} - \frac{3 \times 5}{6} = \frac{4 \times 6}{1 \times 6} - \frac{15}{6} = \frac{24}{6} - \frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\ G &= \frac{6}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{6 \times 15}{10 \times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9 \times \cancel{10}}{8 \times \cancel{10}} = \frac{9}{8} \\ H &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

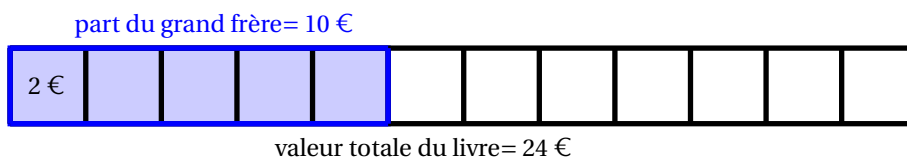
Exercice 20 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à

$$\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12 \times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5 \times 2 = 10$ € ; et la valeur totale du livre est $12 \times 2 = 24$ €.



Exercise 21

$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12} \times 3^{6-4} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

$$B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$

$$C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$

$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{(2 \times 3)^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6}{2^5} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5} \times 3^{6-4} = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$E = \frac{(10^4)^3}{10^8} = \frac{10^{4 \times 3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$

$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2 \times 5}}{2^{3 \times 3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$

$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7} + \frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7} + 10^{8-7} = 10^3 + 10^1 = 1\,000 + 1 = 1\,001$$