Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250\times 6}{4} = \frac{1500}{4} = 375$ g de farine, $\frac{500\times 6}{4} = \frac{3000}{4} = 750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6 \times 125 = 750$ g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai $\frac{750\times 2}{1000} = \frac{1500}{1000} = 1{,}5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes [1].

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra $\frac{60\times 45}{20} = \frac{\cancel{20}\times 3\times 45}{\cancel{20}} = 135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135 = 120 + 15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4 \times 30 \div 5 = 24$ pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7\times 24}{6} = \frac{7\times 4\times \cancel{6}}{\cancel{6}} = 28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

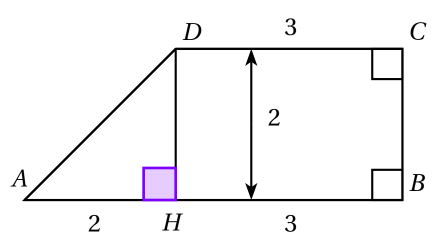
Stéphane nage $\frac{60\times 0{,}5}{3} = \frac{30}{3} = 10$ min, puis il court $\frac{60\times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5 + 0{,}5 = 5{,}5$ km, en $10 + 20 = 30$ min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60\times 5{,}5}{30} = \frac{\cancel{30}\times 2\times 5{,}5}{\cancel{30}} = 11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

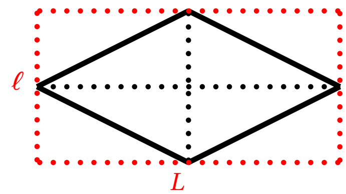
- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD, d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2\times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

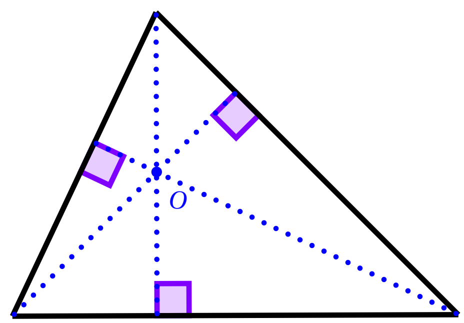
$$\mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(5+3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L, donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

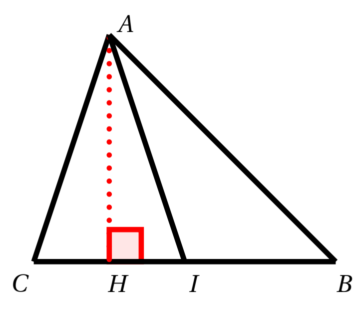


Exercice 5 Rappels :

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA, donc

$$\mathscr{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2} \qquad \mathscr{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I et le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7 La méthode la plus simple pour écrire la négation d'une affirmation est d'utiliser des « ne pas », comme vous avez appris à le faire à l'école primaire. Par exemple, la négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Tous les hommes ne sont pas mortels.

Dans le corrigé, on propose une autre méthode, plus efficace en général dans les situations rencontrées en cours de mathématiques.

1. La négation de

   Tous les hommes sont mortels.

   est

   Il existe un homme immortel.

2. La négation de

   Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

   est

   Tous les desserts sont sucrés à la cantine.

   Remarque : Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe » , et réciproquement ; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

3. La négation de

   Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

   est

   Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

   Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

   est

   Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé ni en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni... ni... » est « ou ». Donc la négation de

   Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

   est

   Chloé aime les fraises ou les framboises.

Exercice 8 1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par 5}}_{\text{A}}\text{, alors } \underbrace{\text{il est multiple de 5}}_{\text{B}}.$$

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b) • L'implication contraposée est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de 5}}_{\text{non B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il ne se termine pas par 5}}_{\text{non A}}.$$

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

• L'implication réciproque est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de 5}}_{\text{B}}\text{, alors } \underbrace{\text{il se termine par 5}}_{\text{A}}.$$

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par } 0}_{\text{A}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il est multiple de } 10}_{\text{B}}.$$

et sa réciproque

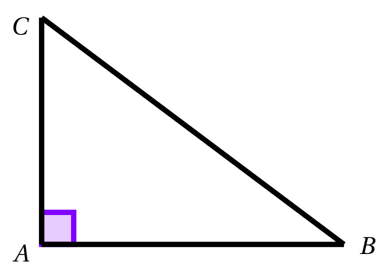
$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de } 10}_{\text{B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il se termine par } 0}_{\text{A}}.$$

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. **Théorème de Pythagore.**

$$\text{Si } ABC \text{ est rectangle en } A\text{, alors } BC^2 = AB^2 + BC^2.$$



2. **Théorème contraposé de Pythagore.**

$$\text{Si } BC^2 \neq AB^2 + BC^2\text{, alors } ABC \text{ n'est pas rectangle en } A.$$

3. **Théorème réciproque de Pythagore.**

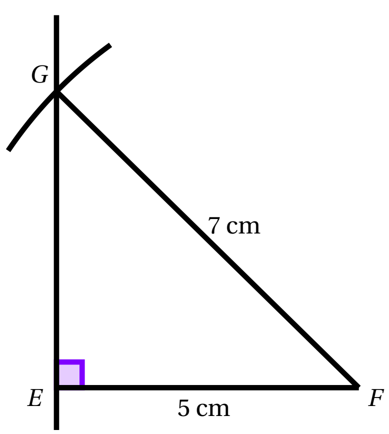
$$\text{Si } BC^2 = AB^2 + BC^2\text{, alors } ABC \text{ est rectangle en } A.$$

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E.
- Un arc de cercle de centre F, de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G.



D'après **le théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

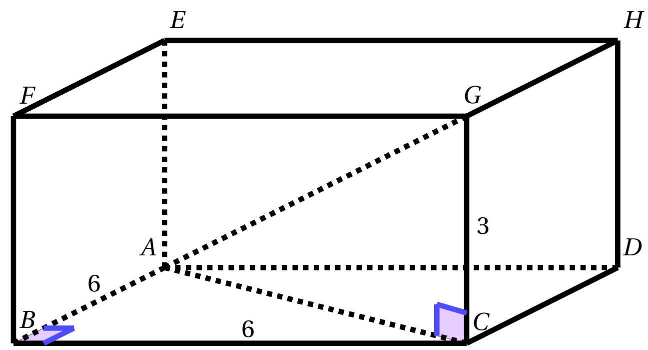
$$\begin{aligned} FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\ 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\ 49 &= 25 + EG^2 \\ 49 - 25 &= EG^2 \\ \sqrt{24} &= EG \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

⚠Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A.
   On calcule :
   $$\left.\begin{array}{l} BC^2 = 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{array}\right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$
   D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$
$$AC^2 = 36 + 36$$
$$AC^2 = 72$$

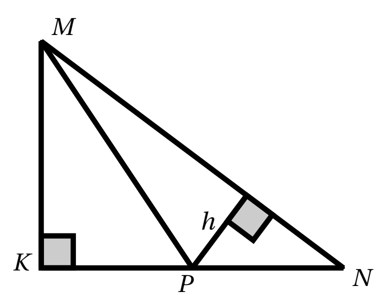
(Inutile de donner AC !)

Dans ACG rectangle en C,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$
$$AG^2 = 72 + 3^2$$
$$AG^2 = 72 + 9$$
$$AG^2 = 81$$
$$AG = \sqrt{81} = 9$$

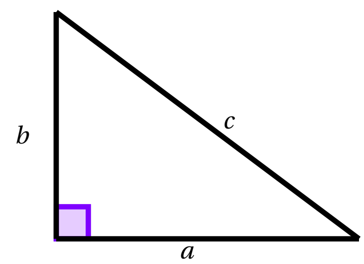
Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1{,}2$ cm.



1. $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1{,}2}{2} = 3\ \text{cm}^2$.
2. On a aussi $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN \times 3}{2}$, soit $\cancel{3} \times 2 = PN \times \cancel{3}$; et donc $PN = 2$ cm.
3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN, puis KP et MP.
   ⚠On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.
   - Pour KN, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN. On obtient $KN = 4$ cm.
   - $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
   - Enfin, pour calculer PM, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP. On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b, l'hypoténuse mesure c.



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

$$\text{Pour tous nombres positifs } a \text{ et } b,\ \sqrt{a^2 + b^2} = a + b.$$

est FAUSSE ! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

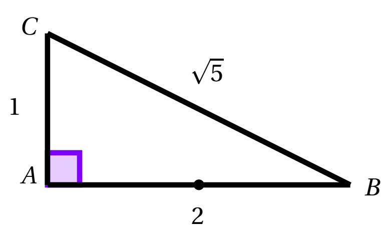
$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{est différent de} \qquad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2 + b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a + b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

Exercice 14 1. L'égalité $1^2 + 2^2 = 5$ peut encore s'écrire

$$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2.$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore, un triangle de côtés $AB = 2$, $AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$ est rectangle en A.



2. On propose deux méthodes :

(a) **Méthode géométrique.** L'hypoténuse $[BC]$ du triangle construit dans la question 1 est strictement plus grande que le côté de l'angle droit $[AB]$, donc $2 < \sqrt{5}$.

Par ailleurs, la distance la plus courte de B à C est la ligne droite, donc le chemin qui part de B et passe par A avant d'arriver à C a une longueur strictement plus grande que celle du segment $[BC]$. Autrement dit, $\sqrt{5} < 2+1$; c'est-à-dire $\sqrt{5} < 3$.

Conclusion :

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

(b) **Méthode par le calcul.** On compare les carrés :

$$2^2 = 4, \qquad \sqrt{5}^2 = 5 \qquad \text{et} \qquad 3^2 = 9.$$

Or $4 < 5 < 9$, donc

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

3. On calcule en posant les multiplications :

$$
\begin{aligned}
2,0^2 &= 4\\
2,1^2 &= 4,41\\
2,2^2 &= 4,84\\
2,3^2 &= 5,29.
\end{aligned}
$$

Or $4,84 < 5 < 5,29$, donc
$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3.$$

Remarques :

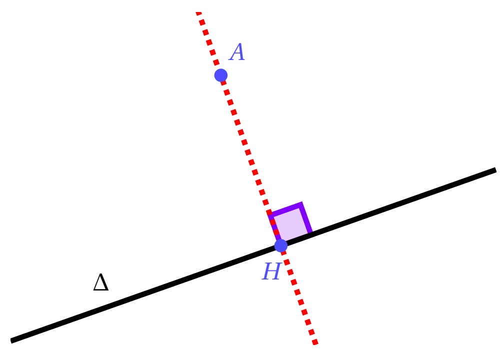
- L'écart entre 2,2 et 2,3 est bien égal à 0,1.
- On devait continuer les calculs jusqu'à dépasser 5 – donc on aurait pu avoir besoin de calculer $2,4^2$, $2,5^2$, etc. On était sûr cependant de ne pas dépasser 3,0.
- Rappel pour poser une multiplication avec un exemple :

$$
\begin{array}{r}
2.3\\
\times\quad 2.3\\
\hline
6\ 9\\
4\ 6\ \ \\
\hline
5.2\ 9
\end{array}
$$

Rappelons que comme les facteurs $2,3$ et $2,3$ ont chacun 1 chiffre après la virgule, le résultat final en a $1+1=2$.

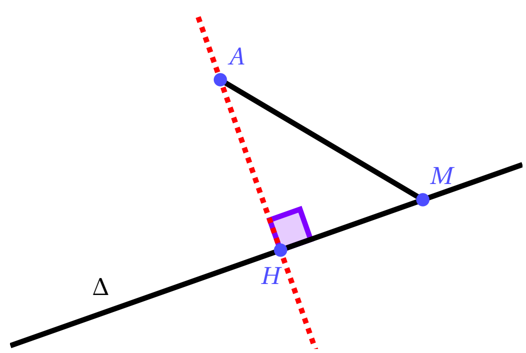
Exercice 15 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A. Elle coupe Δ en H.



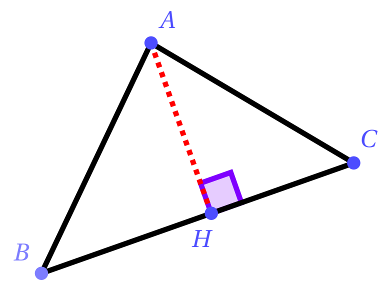
2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H, donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur[2] issue de A dans le triangle ABC.

2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur* ; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B\times h}{2}$ pour l'aire du triangle.



Exercice 16 On résout les équations :

$$\begin{aligned} x+7&=18\\ x+\cancel{7}-\cancel{7}&=18-7\\ x&=11\end{aligned}$$

La solution est $x=11$

$$\begin{aligned} 3x+4&=19\\ 3x+\cancel{4}-\cancel{4}&=19-4\\ 3x&=15\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{15}{3}\\ x&=5\end{aligned}$$

La solution est $x=5$.

$$\begin{aligned} 3,5x-9&=5\\ 3,5x-\cancel{9}+\cancel{9}&=5+9\\ 3,5x&=14\\ \frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}}&=\frac{14}{3,5}\\ x&=\frac{14}{3,5}\end{aligned}$$

Or $\frac{14}{3,5}=\frac{14\times2}{3,5\times2}=\frac{28}{7}=4$, donc la solution est $x=4$.

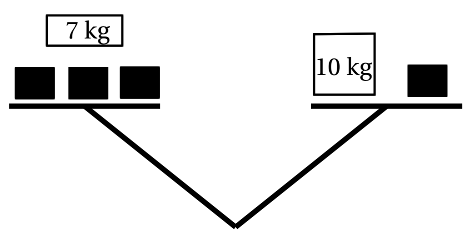
$$\begin{aligned} x+1&=-2x-5\\ x+1+2x&=\cancel{-2x}-5+\cancel{2x}\\ 3x+1&=-5\\ 3x+\cancel{1}-\cancel{1}&=-5-1\\ 3x&=-6\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{-6}{3}\\ x&=-2\end{aligned}$$

La solution est $x=-2$.

$$\begin{aligned} -2x+4&=3x-6\\ -2x+4-3x&=\cancel{3x}-6\cancel{-3x}\\ -5x+4&=-6\\ -5x+\cancel{4}-\cancel{4}&=-6-4\\ -5x&=-10\\ \frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}}&=\frac{-10}{-5}\\ x&=2\end{aligned}$$

La solution est $x=2$.

Exercice 17 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M+7=10+M.$$

On la résout :

$$\begin{aligned} 3M+7-M&=10+\cancel{M}\cancel{-M}\\ 2M+7&=10\\ 2M+\cancel{7}-\cancel{7}&=10-7\\ 2M&=3\\ \frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}}&=\frac{3}{2}\\ M&=1,5\end{aligned}$$

Conclusion : la solution est $M=1,5$.

Exercice 18 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15\,000-x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc
$$15\times x+25\times(15\,000-x).$$
Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation
$$15x+25(15\,000-x)=295\,000.$$

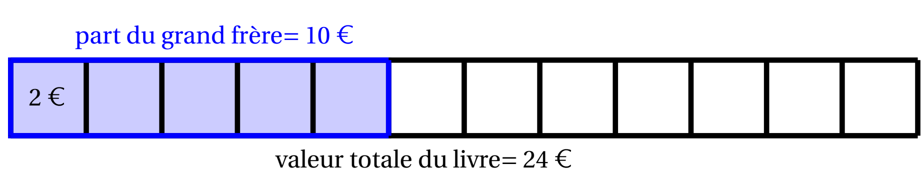
2. On résout l'équation de la question précédente :
$$\begin{aligned}
15x+25(15\,000-x) &= 295\,000\\
15x+25\times15\,000+25\times(-x) &= 295\,000\\
15x+375\,000-25x &= 295\,000\\
-10x+375\,000 &= 295\,000\\
-10x+\cancel{375\,000}\cancel{-375\,000} &= 295\,000-375\,000\\
-10x &= -80\,000\\
\frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}} &= \frac{-80\,000}{-10}\\
x &= 8000.
\end{aligned}$$
Conclusion : il y a $x=8\,000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 19

$$A=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5+4}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3\times\cancel{3}}{2\times\cancel{3}}=\frac{3}{2}$$
$$B=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3\times3}{4\times3}-\frac{1\times2}{6\times2}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{9-2}{12}=\frac{7}{12}$$
$$C=2+\frac{1}{5}=\frac{2}{1}+\frac{1}{5}=\frac{2\times5}{1\times5}+\frac{1}{5}=\frac{10}{5}+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$$
$$D=\frac{3}{10}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times5}{10\times6}=\frac{15}{60}=\frac{\cancel{15}}{\cancel{15}\times4}=\frac{1}{4}$$
$$E=2\times\frac{5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{2\times5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{10\times3}{6\times3}-\frac{4\times2}{9\times2}=\frac{30}{18}-\frac{8}{18}=\frac{30-8}{18}=\frac{22}{18}=\frac{11\times\cancel{2}}{9\times\cancel{2}}=\frac{11}{9}$$
$$F=4-3\times\frac{5}{6}=\frac{4}{1}-\frac{3\times5}{6}=\frac{4\times6}{1\times6}-\frac{15}{6}=\frac{24}{6}-\frac{15}{6}=\frac{24-15}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3\times\cancel{3}}{2\times\cancel{3}}=\frac{3}{2}$$
$$G=\frac{6}{10}\times\frac{15}{8}=\frac{6\times15}{10\times8}=\frac{90}{80}=\frac{9\times\cancel{10}}{8\times\cancel{10}}=\frac{9}{8}$$
$$H=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times3}=\frac{4}{9}$$

Exercice 20 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}.$$
Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à
$$\frac{12}{5}\times10=\frac{12\times10}{5}=\frac{120}{5}=24\text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5\times2=10$ € ; et la valeur totale du livre est $12\times2=24$ €.



Exercice 21

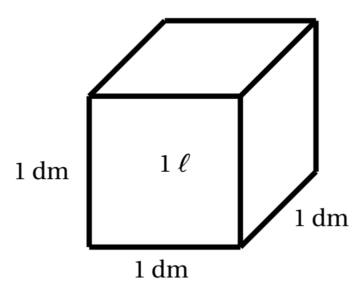
$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12} \times 3^{6-4} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$
$$B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$
$$C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$
$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{(2 \times 3)^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6}{2^5} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5} \times 3^{6-4} = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$
$$E = \frac{\left(10^4\right)^3}{10^8} = \frac{10^{4\times3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$
$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2\times5}}{2^{3\times3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$
$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7} + \frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7} + 10^{8-7} = 10^3 + 10^1 = 1\,000 + 1 = 1\,001$$

Exercice 22 Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.
On rappelle avant cela que $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = \underbrace{0{,}00}_{3\text{ zéros}}1$, donc multiplier un nombre par 10^{-3} revient à décaler la virgule de 3 rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour 10^{-2}).

$$\begin{aligned}
A &= 35{,}4 \times 10^{-3} && = 0{,}0354 \\
B &= 0{,}034 && = 0{,}0340 \\
C &= 3{,}6 \times 10^{-2} = 0{,}036 && = 0{,}0360 \\
D &= \frac{355}{10^4} = \frac{355}{10\,000} && = 0{,}0355 \\
E &= \frac{7}{60} \times \frac{3}{10} = \frac{7 \times 3}{60 \times 10} = \frac{7 \times \cancel{3}}{20 \times \cancel{3} \times 10} = \frac{7}{200} && = 0{,}0350
\end{aligned}$$

Conclusion : $B < E < A < D < C$.

Exercice 23 Avant de commencer, il est utile de se rappeler que 10 cm=1 dm; et que 1 ℓ = 1 dm^3. Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure 1 dm sur 1 dm sur 1 dm, ou encore 10 cm sur 10 cm sur 10 cm (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



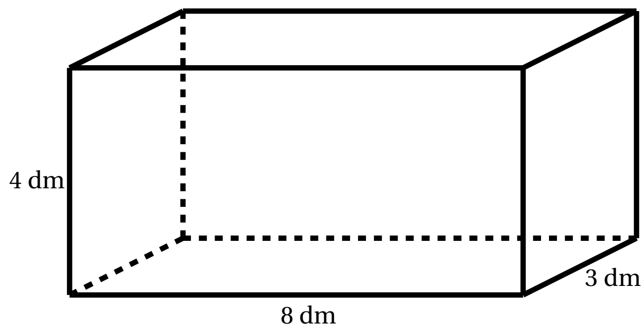
On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm, la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm. On dispose d'un robinet dont le débit est de 6 litres par minute.

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

   largeur = 8 dm, profondeur = 3 dm, hauteur = 4 dm,

   donc son volume est

   $$8 \times 3 \times 4 = 96\ \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de 6 ℓ/min, donc il faut $96 \div 6 = 16$ min pour remplir les 96 ℓ de l'aquarium.

Exercice 24 On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\times 100\times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801 \qquad \text{(IR n°2)}$$
$$103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2\times 100\times 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$71\times 69 = (70+1)(70-1) = 70^2 - 1^2 = 4\,900 - 1 = 4\,899 \qquad \text{(IR n°3)}$$
$$2{,}05^2 = (2+0{,}05)^2 = 2^2 + 2\times 2\times 0{,}05 + 0{,}05^2 = 4 + 0{,}2 + 0{,}0025 = 4{,}2025 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$4{,}3\times 3{,}7 = (4+0{,}3)(4-0{,}3) = 4^2 - 0{,}3^2 = 16 - 0{,}09 = 15{,}91 \qquad \text{(IR n°3)}$$

Remarque : Comment calculer $0{,}05^2$ de tête ? Comme $0{,}05^2 = 0{,}05\times 0{,}05$ et que $0{,}05$ a deux chiffres après la virgule, $0{,}05^2$ en aura $2+2=4$. Il ne reste alors plus qu'à calculer $5^2 = 25$ pour pouvoir conclure : $0{,}05^2 = 0{,}0025$.
Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0{,}05\times 0{,}0006 = 0{,}000030,$$

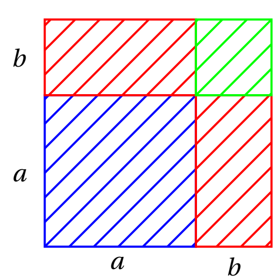
puisque $6\times 5 = 30$ et que le résultat doit avoir $2+4=6$ chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

Exercice 25 Le côté du grand carré mesure $a+b$, donc son aire est $(a+b)^2$.
D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté a, donc d'aire a^2 (hachuré en bleu), un carré de côté b, donc d'aire b^2 (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés a et b, donc d'aires $a\times b$ (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2\times a\times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exercice 26 1. Pour comparer les fractions $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$, on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4\times 6}{5\times 6} = \frac{24}{30} \qquad , \qquad b = \frac{5\times 5}{6\times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme $24 < 25$, on obtient $a < b$.

2. On compare à présent $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$. On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

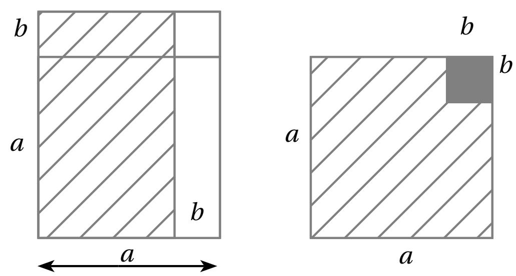
$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \qquad , \qquad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

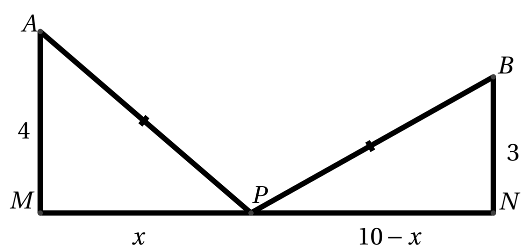
$$524 \times 526 = (525-1)(525+1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à $525 \times 525 = 525^2$, donc $c < d$.

Exercice 27 La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés $(a-b)$ et $(a+b)$, donc son aire est égale à $(a-b)(a+b)$.
Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté a duquel on a retiré un carré de côté b. Son aire est donc égale à $a^2 - b^2$.
L'identité remarquable n°3 nous dit que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



Exercice 28



On pose $MP = x$, on a donc $PN = MN - MP = 10 - x$.
D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles AMP et NBP :

$$AP^2 = MP^2 + MA^2$$
$$AP^2 = x^2 + 4^2$$
$$AP^2 = x^2 + 16$$

$$BP^2 = PN^2 + BN^2$$
$$BP^2 = (10-x)^2 + 3^2$$
$$BP^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \qquad \text{(on développe grâce à l'IR n°2)}$$
$$BP^2 = 100 - 20x + x^2 + 9$$
$$BP^2 = x^2 - 20x + 109$$

On sait que $AP = BP$, donc $AP^2 = BP^2$; et d'après les deux calculs ci-dessus :

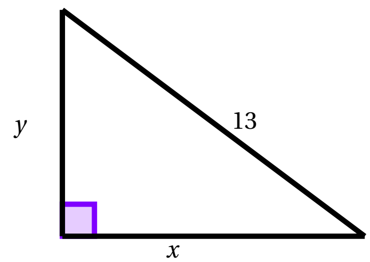
$$\cancel{x^2} + 16 = \cancel{x^2} - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned} 16 &= -20x+109 \\ 16-109 &= -20x+\cancel{109}\cancel{-109} \\ \frac{-93}{-20} &= \frac{\cancel{-20}x}{\cancel{-20}} \\ 4,65 &= x \end{aligned}$$

Conclusion : $MP = 4,65$.

Exercice 29



1. D'après le théorème de Pythagore,
$$x^2+y^2 = 13^2 = 169.$$
D'après l'IR n°1, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$. Or $x^2+y^2 = 169$, et $\frac{x\times y}{2} = 30$, puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit $x\times y = 30\times 2 = 60$, puis
$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 169+2\times 60 = 169+120 = 289.$$
Finalement, comme $(x+y)^2 = 289$,
$$x+y = \sqrt{289} = 17.$$
2. On utilise cette fois l'IR n°2 :
$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = 169-2\times 60 = 169-120 = 49.$$
Or $x-y \geq 0$, puisque x est plus grand que y, donc
$$x-y = \sqrt{49} = 7.$$
⚠Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir $x-y = -7$!!!

On sait à présent que $x+y = 17$ et $x-y = 7$. On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit x :
$$\begin{aligned} (x+y)+(x-y) &= 17+7 \\ x+\cancel{y}+x-\cancel{y} &= 24 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{24}{2} \\ x &= 12 \end{aligned}$$
Enfin, comme $x+y = 17$, on trouve $y = 17-x = 17-12 = 5$.
Conclusion : $x = 12$, $y = 5$.

2 Nombres réels

Exercice 30 1. $-7 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification : $-7 = \dfrac{-7}{1}$, donc $-7 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

2. $-7 \in \mathbb{N}$. **FAUX.**
Justification : -7 est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{Z}$. **FAUX.**

Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.

Remarque : Pour obtenir $\dfrac{13}{4} = 3,25$ sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ② Poser la division – ③ Remarquer que $\dfrac{13}{4} = \dfrac{12}{4} + \dfrac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$.

4. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{D}$. **VRAI.**

Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.

5. $5,824 \in \mathbb{D}$. **VRAI.**
Justification : $5,824$ a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal

6. $5,824 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification n°1 : $5,824$ est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$).
Justification n°2 : $5,824 = \dfrac{5\,824}{1\,000}$, donc $5,824 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

7. $\dfrac{10}{6} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{rrr|l}
 & 1 & 0 & 6 \\ \cline{4-4}
- & & 6 & 1,6 \\ \cline{2-3}
 & & 4\ 0 & \\
 & - & 3\ 6 & \\ \cline{3-3}
 & & 4 &
\end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{10}{6} = 1,666\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

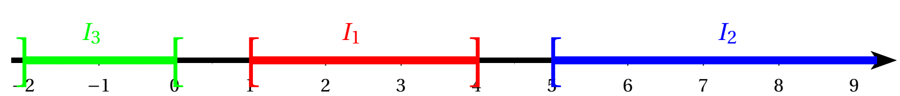
8. $\dfrac{17}{11} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 1 & 7 & & 1\ 1 \\ \cline{5-5}
- & 1 & 1 & & 1,5\ 4 \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 0 & \\
 & - & 5 & 5 & \\ \cline{3-4}
 & & 5 & 0 & \\
 & - & 4 & 4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 6 &
\end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{17}{11} = 1,5454\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

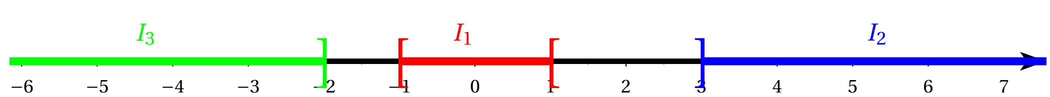
Exercice 31 1.

$I_1 = [1;4] \qquad I_2 = [5;+\infty[\qquad I_3 =]-2;0[$



2.

$I_1 = [-1;1[\qquad I_2 =]3;+\infty[\qquad I_3 =]-\infty;-2]$



Exercice 32

1. $5 \in [2;6[$
2. $-2 \notin]-2;1]$
3. $\pi \in]3;4[$ (on rappelle que $\pi \approx 3,14$)

Exercice 33

1. $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$
2. $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
3. $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
4. $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
5. $|7-4| = |3| = 3$
6. $|4-7| = |-3| = 3$
7. $|4-3| + |5-6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
8. $|5-11| + 2 \times |7-8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
9. $|8-5| \times |7-10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
10. $|15-6| - 4 \times |1-4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

Exercice 34

1. On résout l'équation $|x-2| = 3$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que

$$x-2 = 3 \qquad \text{ou que} \qquad x-2 = -3$$

Donc

$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 3 + 2 \qquad \text{ou} \qquad x - \cancel{2} + \cancel{2} = -3 + 2$$
$$x = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -1$$

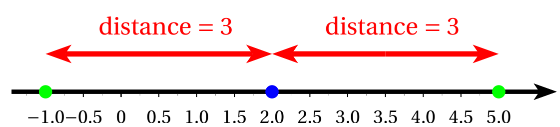
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que la distance entre x et 2 est égale à 3.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

2. On résout l'équation $|x-1| = 4$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 4 sont 4 et -4.
Donc dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que

$$x-1 = 4 \qquad \text{ou que} \qquad x-1 = -4$$

Donc

$$x - \cancel{1} + \cancel{1} = 4 + 1 \qquad \text{ou} \qquad x - \cancel{1} + \cancel{1} = -4 + 1$$
$$x = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -3$$

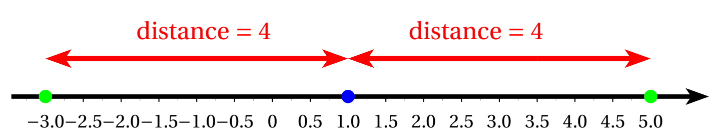
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que la distance entre x et 1 est égale à 4.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

3. On résout l'équation $|x+2| = 2$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 2 sont 2 et -2.
Donc dire que

$$|x+2|=2$$

revient à dire que

$$x+2=2 \qquad \text{ou que} \qquad x+2=-2$$

Donc

$$x+\cancel{2}-\cancel{2}=2-2 \qquad \text{ou} \qquad x+\cancel{2}-\cancel{2}=-2-2$$
$$x=0 \qquad \text{ou} \qquad x=-4$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=-4$.

Méthode n°2 : avec la distance.

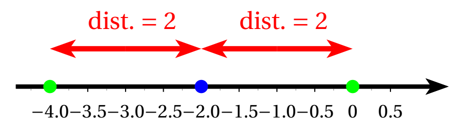
Il y a une vraie difficulté : l'égalité $|x+2|=2$ se réécrit

$$|x-(-2)|=2$$

(il faut absolument faire apparaître un « $-$ » pour pouvoir interpréter en termes de distance). Donc dire que

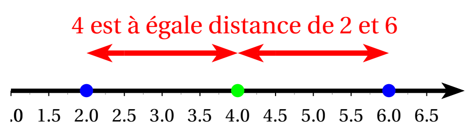
$$|x+2|=2$$

revient à dire que la distance entre x et -2 est égale à 2.



On voit qu'il y a deux solutions : $x=0$ et $x=-4$.

4. On résout l'équation $|x-2|=|x-6|$.
Conformément à l'indication, on travaille avec la distance : dire que $|x-2|=|x-6|$, c'est dire que la distance entre x et 2 est la même que la distance entre x et 6. Autrement dit, x est à égale distance de 2 et de 6. Il y a un seul nombre x qui convienne : le milieu de l'intervalle $[2;6]$, c'est-à-dire $x=4$.



Conclusion : il y a une seule solution, $x=4$.

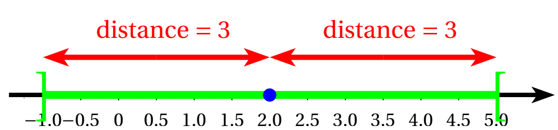
Exercice 35 Commençons par deux exemples :

- si $x=3$, alors $\sqrt{x^2}=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$.
- si $x=-3$, alors $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$.

On comprend que quand x est positif, on aura toujours $\sqrt{x^2}=x=|x|$; tandis que dans le cas où x est négatif, le signe $-$ « disparaît » lorsqu'on élève au carré, ce qui donne finalement $\sqrt{x^2}=|x|$.
Autrement dit, quel que soit x (y compris si $x=0$), on a l'égalité

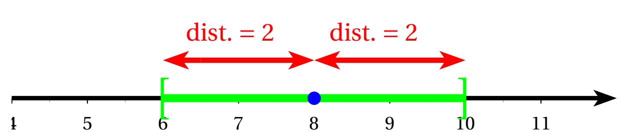
$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

Exercice 36 1. Dire que $|x-2|<3$, c'est dire que la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 3. On voit que les x qui conviennent sont tous les nombres de l'intervalle $]-1;5[$ (extrémités exclues, puisque l'inégalité est stricte).



2. Les points de l'intervalle ci-dessous sont les nombres x dont la distance à 8 est inférieure ou égale à 2 (donc extrémités incluses) ; autrement dit, ce sont les nombres x tels que

$$|x-8|\leq 2.$$



Exercice 37 Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. On part de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on élève au carré et on multiplie par q^2 :

$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$
$$2 = \frac{p}{q} \times \frac{p}{q}$$
$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$2 \times q^2 = \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \times \cancel{q^2}$$
$$2q^2 = p^2$$

2. Commençons par un exemple : prenons un nombre qui « se termine par 4 » (donc le chiffre des unités est 4). Le carré de ce nombre va « se terminer par 6 », puisque $4^2 = 16$. Autrement dit, le chiffre des unités du carré est 6.

   Avec la même technique, on voit que si le chiffre des unités est 9, celui du carré est 1 (puisque $9^2 = 81$) ; etc. On remplit ainsi le tableau :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

3. Pour avoir le chiffre des unités de $2q^2$, il suffit de reprendre la deuxième ligne du tableau précédent et de multiplier par 2. Par exemple, si le chiffre des unités de q est 7, alors celui de q^2 est 9 ; et celui de $2q^2$ est 8 (puisque $2 \times 9 = 18$). On remplit ainsi le nouveau tableau :

Chiffre des unités de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

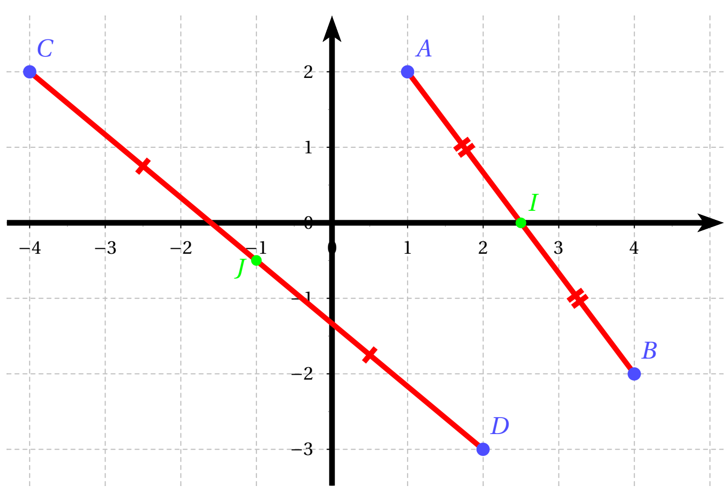
4. D'après la question 1, $2q^2 = p^2$. Les nombres $2q^2$ et p^2 étant égaux, ils ont le même chiffre des unités. Or dans nos deux tableaux, le seul chiffre en commun des deuxièmes lignes est le 0 ; et on l'obtient lorsque le chiffre des unités de p est 0, et lorsque le chiffre des unités de q est 0 ou 5.

5. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : on peut donc l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. D'après la question précédente, p se termine par 0 et q se termine par 0 ou 5. Mais alors p et q sont tous deux multiples de 5, et donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite au départ.

   Conclusion : supposant que $\sqrt{2}$ était rationnel, on aboutit à une absurdité ; c'est donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3 Géométrie repérée

Exercice 38 1.



(a) On a $A(\underbrace{1}_{x_A} ; \underbrace{2}_{y_A})$ et $B(\underbrace{4}_{x_B} ; \underbrace{-2}_{y_B})$. On calcule les coordonnées de I :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) \qquad I\left(\frac{5}{2}; \frac{0}{2}\right) \qquad I\,(2,5;0)\,.$$

(b)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$