Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1

1. On écrit $u_n = \left(5+\dfrac{3}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = \left(5+3\times\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on en déduit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = (5+3\times 0)(2+0) = 10.$$

2. $v_n = \dfrac{8-0,6^n}{2+(-0,6)^n}$.
$$\left.\begin{array}{lll} -1<0,6<1 & \Longrightarrow & \lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0 \\ -1<-0,6<1 & \Longrightarrow & \lim\limits_{n\to+\infty} (-0,6)^n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{8-0}{2+0} = 4.$$

Exercice 2

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $v_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n\times 2}{2^n\times 2} \\ &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\overbrace{-n+1}^{\ominus}}{\underbrace{2^{n+1}}_{\oplus}} \end{aligned}$$

   Conclusion : $v_{n+1}-v_n \leq 0$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et elle est clairement minorée par 0. D'après le théorème de limite monotone, toute suite décroissante minorée converge, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$v_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\times(n+1)\times\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\times v_n.$$

3. On sait que :

- $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

On « passe à la limite » dans l'égalité de la question précédente :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times v_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\ell = \frac{1}{2} \times (1+0) \times \ell.$$

On résout cette équation :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell \iff \ell - \frac{1}{2}\ell = 0 \iff \frac{1}{2}\ell = 0 \iff \ell = 2 \times 0 \iff \ell = 0.$$

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 3

1. Les cas possibles sont les 3-listes d'un ensemble à 10 éléments, il y en a 10^3 ; les cas favorables à A sont les 3-listes d'un ensemble à 4 éléments, il y en a 4^3. On a donc

$$P(A) = \frac{4^3}{10^3} = \frac{64}{1000} = \frac{8}{125}.$$

2. Les cas possibles sont les 3-listes sans répétition d'un ensemble à 10 éléments, il y en a $10 \times 9 \times 8$; les cas favorables à B sont les 3-listes sans répétition d'un ensemble à 6 éléments, il y en a $6 \times 5 \times 4$. On a donc

$$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}.$$

3. On choisit simultanément 3 boules parmi 10, donc il y a $\binom{10}{3}$ cas possibles. Pour que l'événement C se réalise, il faut piocher simultanément 2 boules rouges parmi 6, et 1 verte parmi 4, donc il y a $\binom{6}{2} \times \binom{4}{1}$ cas favorables à C. On en déduit

$$P(C) = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{15 \times 4}{120} = \frac{1}{2}.$$