

# Mathématiques – Terminale spécialité

Corrigés des exercices

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Compléments sur la dérivation</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Suites et récurrence</b>	<b>19</b>

# 1 Compléments sur la dérivation

**Exercice 1** La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-2;6]$  par

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 4.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = 0,5 \times 2x - 2 \times 1 - 0 = x - 2.$$

La dérivée est du premier degré, donc pour obtenir le tableau de signe, il faut résoudre une équation, puis regarder le signe de  $a$  :

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x - \cancel{2} + \cancel{2} &= 0 + 2 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$a = 1$  (puisque  $x - 2$  signifie  $1x - 2$ ),  $a$  est  $\oplus$  donc le signe est de la forme  $-\ \phi \ +$

On en déduit le tableau de signe de  $f'$  et le tableau de variations de  $f$  :

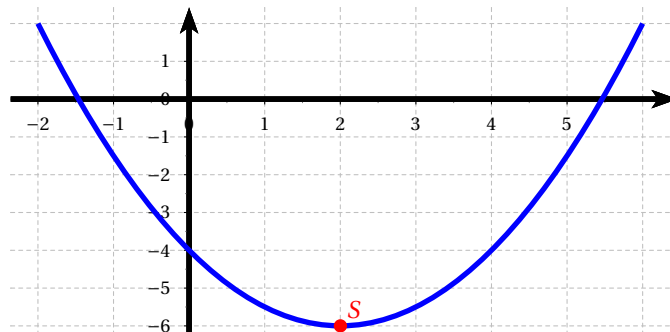
$x$	-2	2	6
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	-6	2

Pour compléter l'extrémité des flèches, on calcule :

- $f(-2) = 0,5 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) - 4 = 2$
- $f(2) = 0,5 \times 2^2 - 2 \times 2 - 4 = -6$
- $f(6) = 0,5 \times 6^2 - 2 \times 6 - 4 = 2$

On peut aussi faire un tableau de valeurs à la calculatrice.

**Remarque :** La courbe représentative est une parabole, dont le sommet  $S$  a pour coordonnées  $(2; -6)$ .



**Exercice 2** On considère un segment  $[AB]$  de longueur 4 et un point mobile  $M$  pouvant se déplacer librement sur ce segment.



On note  $x$  la longueur du segment  $[AM]$  et  $f(x)$  le produit des longueurs  $AM \times BM$ .

1.  $BM = AB - AM = 4 - x$ , donc

$$\begin{aligned} f(x) &= AM \times BM \\ &= x \times (4 - x) \\ &= x \times 4 + x \times (-x) \\ &= 4x - x^2. \end{aligned}$$

2. Le produit des longueurs  $AM \times BM$  est donné par  $f(x)$ , donc maximiser ce produit revient à maximiser la fonction  $f$ . On étudie donc les variations : pour tout  $x \in [0;4]$ ,

$$f'(x) = 4 \times 1 - 2x = -2x + 4.$$

On résout :

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= 0 \\ -2x + \cancel{4} - \cancel{4} &= 0 - 4 \\ \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} &= \frac{-4}{-2} \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$a = -2$ ,  $a$  est  $\ominus$  donc le signe est de la forme  $+ \ \phi \ -$

On obtient le tableau de signe de  $f'$  et le tableau de variations de  $f$  :

$x$	0	2	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Il n'est pas utile ici de compléter l'extrémité des flèches : tout ce qui nous intéresse, c'est la valeur de  $x$  pour laquelle  $f$  atteint son maximum.

Conclusion :  $f$  atteint son maximum lorsque  $x = 2$ , donc le produit  $AM \times BM$  est maximal lorsque  $x = 2$  ; c'est-à-dire quand  $M$  est le milieu de  $[AB]$ .

**Remarque :** Cet exemple est celui qu'a choisi Fermat vers 1637 pour exposer sa méthode de l'adégalité – ancêtre de la dérivation – pour déterminer le maximum et le minimum d'une fonction.

**Exercice 3** La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = 0,5x^3 + 0,75x^2 - 3x - 1.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g'(x) = 0,5 \times 3x^2 + 0,75 \times 2x - 3 \times 1 - 0 = 1,5x^2 + 1,5x - 3.$$

La dérivée est du second degré, donc on utilise la méthode de la classe de première :

- $a = 1,5$ ,  $b = 1,5$ ,  $c = -3$ .
- le discriminant est  $\Delta = b^2 - 4ac = 1,5^2 - 4 \times 1,5 \times (-3) = 20,25$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,5 - \sqrt{20,25}}{2 \times 1,5} = \frac{-1,5 - 4,5}{3} = \frac{-6}{3} = -2, \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,5 + \sqrt{20,25}}{2 \times 1,5} = \frac{-1,5 + 4,5}{3} = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

$a = 1,5$   $a$  est  $\oplus$  donc le signe est de la forme  $+ \ \phi \ - \ \phi \ +$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	<div><div></div><div><div></div><div>4</div><div></div></div><div><div></div><div>-2.75</div><div></div></div><div></div></div>				

- $g(-2) = 0,5 \times (-2)^3 + 0,75 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) - 1 = 4$
- $g(1) = 0,5 \times 1^3 + 0,75 \times 1^2 - 3 \times 1 - 1 = -2,75$

**Remarque :** Voici à quoi ressemble la courbe représentative :



**Exercice 4** La fonction  $h$  est définie sur  $[1; +\infty[$  par

$$h(x) = (x-6)\sqrt{x}.$$

On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$u(x) = x-6$$

,

$$v(x) = \sqrt{x},$$

$$u'(x) = 1$$

,

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On obtient, pour tout  $x \in [1; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 1 \times \sqrt{x} + (x-6) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}} \quad \left( \text{rappel : } \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = x \right) \\ &= \frac{3x-6}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

- On résout rapidement :

$$3x-6=0 \iff 3x=6 \iff x=\frac{6}{3}=2.$$

- Dans  $3x-6$ ,  $a=3 \oplus$ , donc  $[- \oplus +$
- $2\sqrt{x}$  est strictement positif pour tout  $x \in [1; +\infty[$ .

On a donc le tableau :

$x$	1	2	$+\infty$
$3x-6$	-	0	+
$2\sqrt{x}$	+		+
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	-5	$-4\sqrt{2}$	

- $h(1) = (1-6) \times \sqrt{1} = -5 \times 1 = -5$ ;
- $h(2) = (2-6) \times \sqrt{2} = -4\sqrt{2}$ .

**Exercice 5** La fonction  $f$  est définie sur  $[1;4]$  par  $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative,  $A, B, C$  les points de  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives 1, 2, 4; et  $T_A, T_B, T_C$  les tangentes à  $\mathcal{C}$  en ces points.

1. Pour dériver, le plus simple est de réécrire  $f(x)$  sous la forme

$$f(x) = x + 4 \times \frac{1}{x} - 3.$$

On obtient alors, pour tout  $x \in [1; 4]$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 \\ &= 1 - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{x^2} \end{aligned}$$

2. • Les racines de  $x^2 - 4$  sont évidentes : ce sont  $x_1 = -2$  et  $x_2 = 2$ . Seule la deuxième est dans l'intervalle  $[1; 4]$ .  
•  $x^2$  est strictement positif pour tout  $x \in [1; 4]$ .

On obtient donc le tableau :

$x$	1	2	4
$x^2 - 4$	-	0	+
$x^2$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2	1	2

Le signe de  $x^2 - 4$  sur  $]-\infty; +\infty[$  est de la forme  $\boxed{+ \phi - \phi +}$   
Mais comme on travaille sur l'intervalle  $[1; 4]$ , il ne reste plus que la partie droite  $\boxed{- \phi +}$

On calcule les valeurs aux extrémités des flèches :

- $f(1) = 1 + \frac{4}{1} - 3 = 2$  ;
- $f(2) = 2 + \frac{4}{2} - 3 = 1$  ;
- $f(4) = 4 + \frac{4}{4} - 3 = 2$ .

3. On rappelle que la tangente à la courbe en un point d'abscisse  $a$  a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Appliquons cette formule avec  $a = 1$  – puisque le point  $A$  a pour abscisse 1 :

$f(1) = 2$  (déjà calculé) et  $f'(1) = \frac{1^2 - 4}{1^2} = \frac{-3}{1} = -3$ , donc l'équation de  $T_A$  est

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ y &= -3(x - 1) + 2 \\ y &= -3x + 3 + 2 \\ y &= -3x + 5. \end{aligned}$$

Le point  $A$  a pour coordonnées  $(1; 2)$ , puisque  $f(1) = 2$  ; la tangente  $T_A$  passe donc par ce point. Pour la tracer, il faut placer un deuxième point (c'est une droite) ; ce que l'on peut faire de trois façons différentes :

- (a) L'ordonnée à l'origine est **5** (puisque  $T_A : y = -3x + 5$ ), donc  $T_A$  passe par le point de coordonnées  $(0; 5)$ .  
(b) Le coefficient directeur de  $T_A$  est **-3** (puisque  $T_A : y = -3x + 5$ ), donc en partant de  $A$ , il suffit d'avancer de 1 carreau en abscisse et de descendre de 3 carreaux en ordonnée –  $T_A$  passe donc par le point de coordonnées  $(2; -1)$ .  
(c) On calcule un deuxième point avec la formule : par exemple, si  $x = 2$ ,  $y = -3 \times 2 + 5 = -1$ . On obtient le point de coordonnées  $(2; -1)$  (le même qu'avec la méthode (b)) et on trace la tangente.
4. •  $f(2) = 1$  et  $f'(2) = \frac{2^2 - 4}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$ , donc l'équation de  $T_B$  est

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\ y &= 0(x - 2) + 1 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Le coefficient directeur étant égal à 0, la tangente  $T_B$  est horizontale.

- $f(4) = 2$  et  $f'(4) = \frac{4^2-4}{4^2} = \frac{12}{16} = 0,75$ , donc l'équation de  $T_C$  est

$$\begin{aligned}y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\y &= 0,75(x-4) + 2 \\y &= 0,75x - 3 + 2 \\y &= 0,75x - 1.\end{aligned}$$

On trace la tangente  $T_C$  par la même méthode que  $T_A$  (le plus simple et le plus précis est d'utiliser l'ordonnée à l'origine).

5. On place les points  $A, B, C$ , on trace les trois tangentes et on construit la courbe de la fonction  $f$  (en bleu) en s'appuyant sur ces tangentes.



**Exercice 6** La fonction  $i$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$i(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient avec

$$\begin{array}{lll}u(x) = 2x & , & v(x) = x^2 + 1, \\u'(x) = 2 & , & v'(x) = 2x.\end{array}$$

On obtient, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}i'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\&= \frac{2 \times (x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

2. • Les racines de  $-2x^2 + 2$  sont assez évidentes :

$$-2x^2 + 2 = 0 \iff 2 = 2x^2 \iff 1 = x^2 \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1).$$

- $(x^2 + 1)^2$  est strictement positif pour tout réel  $x$ .

On obtient donc le tableau :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$-2x^2+2$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$
$i'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$i(x)$					

- $i(-1) = \frac{2 \times (-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$  ;
- $i(1) = \frac{2 \times 1}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$ .

3. (a)  $i(0) = \frac{2 \times 0}{0^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$  et  $i'(0) = \frac{-2 \times 0^2 + 2}{(0^2 + 1)^2} = \frac{2}{1} = 2$ , donc l'équation de  $(T)$  est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 2x + 0$$

$$y = 2x.$$

- (b) Pour étudier les positions relatives de  $(C) : y = \frac{2x}{x^2+1}$  et  $(T) : y = 2x$ , on étudie **le signe de la différence** :

$$\frac{2x}{x^2+1} - 2x.$$

- Pour les valeurs de  $x$  pour lesquelles cette différence vaut 0, les deux courbes se coupent ;
- pour les valeurs de  $x$  pour lesquelles cette différence est strictement positive,  $(C)$  est au-dessus de  $(T)$  ;
- pour les valeurs de  $x$  pour lesquelles cette différence est strictement négative,  $(C)$  est en-dessous de  $(T)$ .

On commence par calculer la différence :

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2+1} - 2x &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x^3+2x}{x^2+1} \\ &= \frac{2x - 2x^3 - 2x}{x^2+1} \\ &= \frac{-2x^3}{x^2+1}. \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-2x^3$	$+$	$0$	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$		$+$
$\frac{-2x^3}{x^2+1}$	$+$	$0$	$-$
Positions relatives des courbes	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div>(C) au-dessus de (T)</div> <div style="text-align: center;">S e  c o u p e n t</div> <div>(C) en-dessous de (T)</div> </div>		

Pour compléter le tableau de signe :

- $-2x^3 = 0$  lorsque  $x = 0$  ;
- $-2x^3$  est  $\ominus$  lorsque  $x$  est strictement positif ;
- $-2x^3$  est  $\oplus$  lorsque  $x$  est strictement négatif ;
- $(x^2+1)^2$  est strictement positif pour tout réel  $x$ .

4.



**Exercice 7** La distance (en m) parcourue au temps  $t$  (en s) par une pierre en chute libre est  $d(t) = 5t^2$ . On lance cette pierre d'une hauteur de 20 m.

1. La pierre arrive au sol quand elle a parcouru 20 m. Il faut donc résoudre l'équation  $5t^2 = 20$  :

$$5t^2 = 20 \iff t^2 = \frac{20}{5} \iff t^2 = 4 \iff \left( t = 2 \text{ ou } \underbrace{t = -2}_{\text{impossible}} \right).$$

Conclusion : la pierre arrive au sol après 2 s.

2. On construit la courbe à partir d'un tableau de valeurs (avec un pas de 0,4 par exemple).

$t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
$d(t)$	0	0,8	3,2	7,2	12,8	20

Pour obtenir ce tableau, on utilise la calculatrice (bien sûr, on met des  $x$  à la place des  $t$ ) :

#### Calculatrices collège

- **MODE**
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- $f(X)=5X^2$  **EXE**  
(si on demande  $g(X)=$ , ne rien rentrer)
- Début? 0 **EXE**
- Fin? 2 **EXE**
- Pas? 0,4 **EXE**

#### NUMWORKS

$x$  s'obtient avec les touches

- **alpha** **x**
- 
- Fonctions **EXE** puis choisir Fonctions **EXE**
- $f(x)=5x^2$  **EXE**
- choisir Tableau **EXE** puis Régler l'intervalle **EXE**
- X début 0 **EXE**
- X fin 2 **EXE**
- Pas 0,4 **EXE**
- choisir Valider

#### TI graphiques

$X$  s'obtient avec la touche

- $x, t, \theta, n$
- $f(x)$
- $Y_1 = 5X^2$  **EXE**
- **2nde** **déf table**
- DébutTable=0 **EXE**
- PasTable=0,4 **EXE**
- ou  $\Delta Tbl=0,4$  **EXE**
- **2nde** **table**

#### CASIO graphiques

$X$  s'obtient avec la touche **X,θ,T**

- **MENU** puis choisir TABLE **EXE**
- $Y_1 : 5X^2$  **EXE**
- **F5** (on choisit donc SET)
- Start : 0 **EXE**
- End : 2 **EXE**
- Step : 0,4 **EXE**
- **EXIT**
- **F6** (on choisit donc TABLE)





3. La vitesse de la pierre au moment de l'impact au sol est  $d'(2)$ .

Or  $d'(t) = 5 \times 2t = 10t$ , donc  $d'(2) = 10 \times 2 = 20$ . Ainsi la vitesse au moment de l'impact est de 20 m/s.

**Remarques :**

- cette vitesse instantanée est le coefficient directeur de la tangente au point  $A$  d'abscisse 2 (en rouge).
- la « vraie formule » (valable en l'absence de frottements) est  $d(t) = 4,9t^2$ . Dans l'exercice, on a pris 5 au lieu de 4,9 pour simplifier les calculs.

**Exercice 8** Dans cet exercice, on utilise deux propriétés du cours :

- la dérivée de  $x \mapsto e^{ax+b}$  est  $x \mapsto ae^{ax+b}$  ;
- une exponentielle est strictement positive.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = e^{0,5x+1}$$

$$f'(x) = \underbrace{0,5}_{\oplus} \underbrace{e^{0,5x+1}}_{\oplus}$$

$f' > 0$  donc  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .



Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g(x) = e^{-1,5x}$$

$$g'(x) = \underbrace{-1,5}_{\ominus} \underbrace{e^{-1,5x}}_{\oplus}$$

$g' < 0$  donc  $g$  strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .



Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h(x) = e^{2x-2}$$

$$h'(x) = \underbrace{2}_{\oplus} \underbrace{e^{2x-2}}_{\oplus}$$

$h' > 0$  donc  $h$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .



Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$i(x) = e^{-1x+1}$$

$$i'(x) = \underbrace{-1}_{\ominus} \underbrace{e^{-1x+1}}_{\oplus}$$

$i' < 0$  donc  $i$  strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .



À titre d'illustration, on a tracé les courbes des quatre fonctions. Elles ont toutes une allure très similaire, à deux différences près :

- elles montent lorsque  $a > 0$ , elles descendent lorsque  $a < 0$  ;
- plus  $|a|$  est grand, plus la pente de la partie inclinée est forte.

**Exercice 9** La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0;4]$  par

$$f(x) = (-2x+1)e^{-x}.$$

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$u(x) = -2x+1$$

$$u'(x) = -2$$

,

$$v(x) = e^{-x},$$

$$v'(x) = -e^{-x}.$$

,

On obtient, pour tout  $x \in [0;4]$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -2 \times e^{-x} + (-2x+1) \times (-e^{-x}) \\ &= -2 \times e^{-x} + (-2x) \times (-e^{-x}) + 1 \times (-e^{-x}) \\ &= -2 \times e^{-x} + 2x \times e^{-x} - 1 \times e^{-x} \\ &= (-2+2x-1) e^{-x} \\ &= (2x-3) e^{-x}. \end{aligned}$$

2. On étudie le signe de  $f'$  et on en déduit les variations de  $f$  :

- $2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2} \iff x = 1,5$  ;
- $e^{-x}$  est  $\oplus$  pour tout réel  $x$ .

$x$	0	1.5	4
$2x - 3$	-	0	+
$e^{-x}$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$-2e^{-1,5}$	$-7e^{-4}$

- $f(0) = (-2 \times 0 + 1) \times \underbrace{e^{-0}}_{=1} = 1 \times 1 = 1$
- $f(1,5) = (-2 \times 1,5 + 1) \times e^{-1,5} = -2e^{-1,5} \approx -0,45$
- $f(4) = (-2 \times 4 + 1) \times e^{-4} = -7e^{-4} \approx -0,13$

**Exercice 10** La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g'(x) = e^x - 1 - 0 = e^x - 1.$$

On résout l'équation :

$$e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$$

△ On a utilisé la propriété : le seul nombre dont l'exponentielle est égale à 1 est 0.

Pour avoir les signes dans chaque case du tableau, on remplace par des valeurs de  $x$  :

- pour l'intervalle  $]-\infty; 0[$ , on prend (par exemple)  $x = -1$  et on calcule avec la calculatrice :

$$g'(-1) = e^{-1} - 1 \approx -0,63 \quad \ominus ;$$

- pour l'intervalle  $]0; +\infty[$ , on prend (par exemple)  $x = 1$  et on calcule avec la calculatrice :

$$g'(1) = e^1 - 1 \approx 3,72 \quad \oplus.$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x) = e^x - 1$	-	0	+
$g(x)$		0	

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

**Remarque :** Le minimum de  $g$  est 0, donc  $g(x) \geq 0$  pour tout réel  $x$  ; autrement dit  $e^x - x - 1 \geq 0$ . Cette inégalité se réécrit

$$e^x \geq x + 1.$$

On obtiendra ce résultat par une autre méthode dans l'exercice 18 (utilisation de la convexité). Cette inégalité sera utilisée plus tard dans l'année, pour démontrer des résultats sur les limites.

**Exercice 11**

$$\begin{aligned} \frac{e^8}{e^2 \times e^1 \times e^3} &= \frac{e^8}{e^{2+1+3}} = \frac{e^8}{e^6} = e^{8-6} = e^2 \\ \frac{e \times e^2}{(e^2)^2} &= \frac{e^1 \times e^2}{e^{2 \times 2}} = \frac{e^{1+2}}{e^4} = e^{3-4} = e^{-1} \\ (e^2)^3 \times e^{-5} &= e^{2 \times 3} \times e^{-5} = e^{6-5} = e^1 \end{aligned}$$

**Exercice 12** Dans chaque cas, on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions.

1.

$$e^x = -3$$

Impossible, car une exponentielle est strictement positive

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2.

$$e^{2x-1} = 1$$

$$2x - 1 = 0$$

(le seul nombre dont l'exponentielle vaut 1 est 0)

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

3. L'équation  $e^{2x} + 2e^x = 3$  se réécrit

$$(e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0.$$

Pour résoudre, il est astucieux de noter  $X = e^x$ ; l'équation se réécrit alors sous la forme

$$X^2 + 2X - 3 = 0.$$

On résout avec la méthode de la classe de première :

- $a = 1, b = 2, c = -3$ .
- le discriminant est  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux racines :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3,$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

On a posé  $X = e^x$ , donc il y a deux possibilités :

$$e^x = -3 \quad \text{ou} \quad e^x = 1.$$

La première équation n'a pas de solution, car une exponentielle est strictement positive; la deuxième équation a une seule solution :  $x = 0$ .

Conclusion : L'unique solution de l'équation  $e^{2x} + 2e^x = 3$  est  $x = 0$  :

$$\mathcal{S} = \{0\}.$$

**Exercice 13** On utilisera la propriété : pour tout nombre réel  $x$ ,

$$e^x \times e^{-x} = 1.$$

1. D'après l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  :

$$(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2 \times \underbrace{e^x \times e^{-x}}_{=1} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}.$$

2. On multiplie le numérateur et le dénominateur par  $e^x$  :

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^x}{(e^x + e^{-x}) \times e^x} \\ &= \frac{e^x \times e^x - e^{-x} \times e^x}{e^x \times e^x + e^{-x} \times e^x} \\ &= \frac{e^{x+x} - e^{-x+x}}{e^{x+x} + e^{-x+x}} \\ &= \frac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + e^0} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

**Exercice 14** 1. La fonction  $f$  est de la forme  $f(x) = e^{u(x)}$ , avec

$$u(x) = -x^2, \quad u'(x) = -2x.$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = -2xe^{-x^2}.$$

2. La fonction  $h$  est de la forme  $h(x) = (u(x))^n$ , avec

$$u(x) = -4x + 1, \quad u'(x) = -4, \quad n = 3.$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1} = 3 \times (-4) \times (-4x + 1)^{3-1} = -12(-4x + 1)^2.$$

3. La fonction  $i$  est de la forme  $i(x) = e^{u(x)}$ , avec

$$u(x) = 5x - 9, \quad u'(x) = 5.$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$i'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = 5e^{5x-9}.$$

4. La fonction  $j$  est de la forme  $j(x) = (u(x))^n$ , avec

$$u(x) = x^2 - 3x, \quad u'(x) = 2x - 3, \quad n = 5.$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$j'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1} = 5 \times (2x - 3) \times (x^2 - 3x)^{5-1} = (10x - 15) \times (x^2 - 3x)^4.$$

5. L'énoncé nous donne

$$k(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}.$$

Il faut se méfier : on ne peut calculer la racine carrée d'un nombre que si celui-ci est positif; et on ne peut dériver une fonction de la forme  $\sqrt{u}$  que lorsqu'elle est strictement positive. Intéressons-nous donc au signe de  $x^2 - x + 2$  :

Le discriminant est  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$ . Il s'ensuit qu'il n'y a pas de racine, et que  $x^2 - x + 2$  est strictement positif sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $k$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}$ , mais aussi dérivable.

Elle est de la forme  $k(x) = \sqrt{u(x)}$ , avec

$$u(x) = x^2 - x + 2, \quad u'(x) = 2x - 1.$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 2}}.$$

**Remarque informelle :** On a déjà vu les dérivées suivantes dans le cours de première :

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1} \\ (e^x)' &= e^x \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Les trois nouvelles formules du cours de terminale peuvent se réécrire

$$\begin{aligned}(u^n)' &= nu^{n-1} \times u' \\ (e^u)' &= e^u \times u' \\ (\sqrt{u})' &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'\end{aligned}$$

On voit qu'il suffit de remplacer  $x$  par  $u$ , et de multiplier par  $u'$ .

**Exercice 15** 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \\ f''(x) &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion :  $f''$  est strictement positive, donc  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

On peut aussi présenter les choses avec un tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x) = 2$	+	
Convexité	$f$ convexe	



2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 \\ g'(x) &= 3x^2 \\ g''(x) &= 6x. \end{aligned}$$

Cette fois, le tableau de signe est fortement recommandé :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g''(x) = 6x$	-	0	+
Convexité	$g$ concave	P t  i n f l e x i o n	$g$ convexe

Conclusion :

- $g$  est concave sur  $]-\infty; 0]$  ;

- $g$  est convexe sur  $[0; +\infty[$  ;
- le point de coordonnées  $(0;0)$  est un point d'inflexion.



3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h(x) = e^x$$

$$h'(x) = e^x$$

$$h''(x) = e^x.$$

Conclusion :  $h''$  est strictement positive, donc  $h$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  (cette fois, on se passe du tableau de signes).



**Exercice 16** La fonction  $g$  est définie sur l'intervalle  $[-1;3]$  par

$$g(x) = -0,5x^3 + 2x^2 - 2x.$$

1. Pour tout  $x \in [-1;3]$  :

$$g'(x) = -0,5 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 2 \times 1 = -1,5x^2 + 4x - 2.$$

La dérivée est du second degré, donc on utilise la méthode de la classe de première :

- $a = -1,5$ ,  $b = 4$ ,  $c = -2$ .
- le discriminant est  $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1,5) \times (-2) = 4$ .
- $\Delta > 0$ , donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times (-1,5)} = \frac{-4 - 2}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times (-1,5)} = \frac{-4 + 2}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

$a = -1,5$   $a$  est  $\ominus$  donc le signe est de la forme  $-\phi + \phi -$

$x$	-1	$\frac{2}{3}$		2	3
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	3.5	$-\frac{16}{27}$		0	-1.5

- $g(-1) = -0,5 \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) = 3,5$
- $g(\frac{2}{3}) = -0,5 \times (\frac{2}{3})^3 + 2 \times (\frac{2}{3})^2 - 2 \times (\frac{2}{3}) = -\frac{16}{27}$
- $g(2) = -0,5 \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 \times 2 = 0$
- $g(3) = -0,5 \times 3^3 + 2 \times 3^2 - 2 \times 3 = -1,5$

2. Pour tout  $x \in [-1;3]$  :

$$g''(x) = -1,5 \times 2x + 4 \times 1 - 0 = -3x + 4.$$

On étudie le signe de  $g''$  :

$$-3x + 4 = 0 \iff -3x = -4 \iff x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

$x$	-1	$\frac{4}{3}$	3
$-3x + 4$	+	0	-
Convexité	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">g convexe</div> <div style="text-align: center;">p t  i n f l e x i o n</div> <div style="text-align: center;">g concave</div> </div>		

$g\left(\frac{4}{3}\right) = [\dots] = -\frac{8}{27}$ , donc le point de coordonnées  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{27}\right)$  est un point d'inflexion (noté  $I$  sur la figure ci-dessous).

3.



**Exercice 17** La fonction  $h$  est définie sur l'intervalle  $[-1;4]$  par

$$h(x) = (2x + 3)e^{-x}.$$

On calcule les dérivées première et seconde :

1. **Dérivée première.** On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$\begin{array}{lll} u(x) = 2x + 3 & , & v(x) = e^{-x}, \\ u'(x) = 2 & , & v'(x) = -e^{-x}. \end{array}$$

On obtient, pour tout  $x \in [-1;4]$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2 \times e^{-x} + (2x + 3) \times (-e^{-x}) \\ &= 2 \times e^{-x} + 2x \times (-e^{-x}) + 3 \times (-e^{-x}) \\ &= 2 \times e^{-x} - 2x \times e^{-x} - 3 \times e^{-x} \\ &= (2 - 2x - 3) e^{-x} \\ &= (-2x - 1) e^{-x}. \end{aligned}$$

2. **Dérivée seconde.** On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$u(x) = -2x - 1$$

$$u'(x) = -2$$

$$,$$

$$,$$

$$v(x) = e^{-x},$$

$$v'(x) = -e^{-x}.$$

On obtient, pour tout  $x \in [-1;4]$  :

$$\begin{aligned} h''(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -2 \times e^{-x} + (-2x - 1) \times (-e^{-x}) \\ &= -2 \times e^{-x} + (-2x) \times (-e^{-x}) + (-1) \times (-e^{-x}) \\ &= -2 \times e^{-x} + 2x \times e^{-x} + 1 \times e^{-x} \\ &= (-2 + 2x + 1) e^{-x} \\ &= (2x - 1) e^{-x}. \end{aligned}$$

On étudie le signe de la dérivée seconde :

$$h''(x) = (2x - 1) e^{-x}.$$

- $2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}.$
- $e^{-x}$  est  $\oplus$  pour tout  $x \in [-1;4].$

On a donc le tableau :

$x$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$4$
$2x - 1$	$-$	$0$	$+$
$e^{-x}$	$+$		$+$
$h''(x)$	$-$	$0$	$+$
Convexité	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div><math>h</math> concave</div> <div style="text-align: center;"> <div style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);"> Point d'inflexion </div> </div> <div><math>h</math> convexe</div> </div>		



**Exercice 18** On note  $\mathcal{C}$  la courbe de la fonction exponentielle et  $T$  sa tangente au point  $A(0;1)$ .



1. On pose  $f(x) = e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On sait que  $f'(x) = e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc

$$f(0) = f'(0) = e^0 = 1.$$

L'équation de la tangente  $T$  est donc

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = 1(x-0) + 1$$

$$y = x + 1$$

2. On a déjà vu dans un exercice précédent que la fonction exponentielle était convexe sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème 8 du cours, la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de toutes ses tangentes; elle est donc en particulier au-dessus de  $T$ . Il s'ensuit que

$$e^x \geq x + 1$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .



**Remarque :** On a déjà démontré ce résultat par une étude de fonction, dans l'exercice 10.

**Exercice 19** 1. Si  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = 4x + 1$ , alors

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2) = 4x^2 + 1.$$

2. Si  $u(x) = x + 2$  et  $v(x) = x^3 - 3x$ , alors

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x + 2) = (x + 2)^3 - 3(x + 2).$$

3. Si  $u(x) = x - 4$  et  $v(x) = \sqrt{x}$ , alors

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x - 4) = \sqrt{x - 4}.$$

4. Si  $u(x) = 2x + 3$  et  $v(x) = e^x$ , alors

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(2x + 3) = e^{2x+3}.$$

**Exercice 20** 1. Sachant que  $v \circ u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , on peut prendre

$$u(x) = x^2 + 1, \quad v(x) = \sqrt{x}.$$

2. Sachant que  $v \circ u(x) = (x - 3)^2 + 5(x - 3) + 1$ , on peut prendre

$$u(x) = x - 3, \quad v(x) = x^2 + 5x + 1.$$

3. Sachant que  $v \circ u(x) = e^{3x-1}$ , on peut prendre

$$u(x) = 3x - 1, \quad v(x) = e^x.$$

**Remarque :** Il y a une infinité de choix possibles. Par exemple, pour le deuxième, on pourrait prendre

$$u(x) = (x - 3)^2 + 5(x - 3) + 1, \quad v(x) = x + 1;$$

ou encore

$$u(x) = (x - 3)^2 + 5(x - 3) + 1, \quad v(x) = x;$$

etc.

**Exercice 21** On considère dans un repère orthonormé la parabole  $P : y = x^2$  et le point  $A(3;0)$ .

1. Soit  $m$  un réel et soit  $M$  le point de  $P$  d'abscisse  $m$ . L'ordonnée de  $M$  est  $m^2$ , donc

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(m - 3)^2 + (m^2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{m^2 - 2 \times m \times 3 + 3^2 + m^4} \\ &= \sqrt{m^4 + m^2 - 6m + 9}. \end{aligned}$$

On remarque que  $AM = f(m)$ , où  $f$  est la fonction définie dans la question suivante. De ce fait, trouver le point  $M$  pour lequel la longueur  $AM$  est minimale revient à trouver la valeur de  $x$  pour laquelle  $f$  atteint son minimum. Nous y reviendrons dans la question 3.

2. On pose  $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est de la forme  $f(x) = \sqrt{u(x)}$ , avec

$$u(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9, \quad u'(x) = 4x^3 + 2x - 6.$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = \frac{2(2x^3 + x - 3)}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}.$$

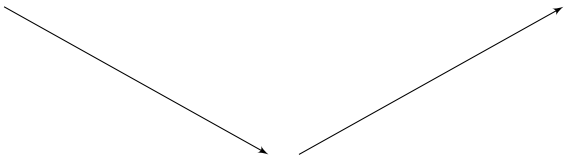
Pour démontrer la formule de l'énoncé, on développe :

$$(x - 1)(2x^2 + 2x + 3) = x \times 2x^2 + x \times 2x + x \times 3 - 1 \times 2x^2 - 1 \times 2x - 1 \times 3 = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2x^2 - 2x - 3 = 2x^3 + x - 3.$$

On retombe sur le numérateur obtenu précédemment; on a donc bien

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(2x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}.$$

Pour construire le tableau de variations de la fonction  $f$ , il faut étudier le signe de  $2x^2 + 2x + 3$ . Son discriminant est  $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 3 = -20$ , donc il n'y a pas de racine et  $2x^2 + 2x + 3$  est strictement positif pour tout réel  $x$ . On peut donc compléter le tableau :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+
$2x^2 + 2x + 3$	+	+	+
$\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

3. • La fonction  $f$  atteint son minimum pour  $x = 1$ , donc la longueur  $AM$  est minimale lorsque  $m = 1$ . Autrement dit, le point de  $P$  le plus proche de  $A$  est le point  $M(1;1)$ .
- La tangente  $(T)$  à la parabole  $P$  au point  $M$  a pour équation

$$y = g'(1)(x-1) + g(1),$$

avec  $g(x) = x^2$  – donc  $g'(x) = 2x$ , et  $g'(1) = 2 \times 1 = 2$ . On a ainsi

$$(T) : y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

$$y = 2(x-1) + 1$$

$$y = 2x - 1.$$

- Pour prouver que  $(AM)$  est perpendiculaire à  $(T)$ , on utilise le produit scalaire :

$(T)$  passe par  $M(1;1)$  et par  $N(2;3)$  (puisque  $2 \times 2 - 1 = 3$ ), donc elle est dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Par ailleurs

$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0.$$

Les droites  $(T)$  et  $(AM)$  sont donc bien perpendiculaires.



## 2 Suites et récurrence

**Exercice 22** On calcule trois ou quatre termes, suivant le cas – suffisamment pour « avoir compris le principe ».

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 2}$ .

$$u_0 = \frac{0^2 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{1^2 - 1}{1 + 2} = \frac{0}{3} = 0$$

$$u_2 = \frac{2^2 - 1}{2 + 2} = \frac{3}{4}$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

△ On « démarre » à  $n = 1$ , puisqu'on ne peut pas diviser par 0.

$$v_1 = \frac{(-1)^1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$v_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$v_3 = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$v_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Les termes sont alternativement positifs et négatifs. On dit que la suite est alternée.

3.  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

On prend $n = 0$ :	On prend $n = 1$ :	On prend $n = 2$ :	On prend $n = 3$ :
$u_{0+1} = 2u_0 - 1$	$u_{1+1} = 2u_1 - 1$	$u_{2+1} = 2u_2 - 1$	$u_{3+1} = 2u_3 - 1$
$u_1 = 2 \times 3 - 1$	$u_2 = 2 \times 5 - 1$	$u_3 = 2 \times 9 - 1$	$u_4 = 2 \times 17 - 1$
$u_1 = 5$	$u_2 = 9$	$u_3 = 17$	$u_4 = 33$

4.  $v_0 = -1$  et  $v_{n+1} = v_n + n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On prend $n = 0$ :	On prend $n = 1$ :	On prend $n = 2$ :	On prend $n = 3$ :
$v_{0+1} = v_0 + 0$	$v_{1+1} = v_1 + 1$	$v_{2+1} = v_2 + 2$	$v_{3+1} = v_3 + 3$
$v_1 = -1 + 0$	$v_2 = -1 + 1$	$v_3 = 0 + 2$	$v_4 = 2 + 3$
$v_1 = -1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 5$

**Exercice 23** 1. Pour diminuer un nombre de 8 %, il faut le multiplier par 0,92, car  $100 \% - 8 \% = 92 \% = 0,92$ . On peut donc compléter le schéma :



Conclusion :

$$v_0 = 10 ; v_1 = 9,2 ; v_2 = 8,464.$$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = 0,92$ .

2. La masse d'iode 131 après 10 jours est

$$v_{10} = v_0 \times q^{10} = 10 \times 0,92^{10} \approx 4,3 \mu\text{g}.$$

3. On part de  $10 \mu\text{g}$  d'iode 131, donc il s'agit de déterminer à partir de quand il en restera moins de  $5 \mu\text{g}$ . Pour cela, on fait un tableau de valeurs avec la calculatrice, en rentrant la formule

$$Y = 10 * 0.92^X$$

(on peut aussi utiliser le mode suite ou le mode tableur, suivant les modèles).

Après quelques essais<sup>1</sup>, on obtient :

1. On ne peut pas savoir en démarrant jusqu'à quelle valeur de  $n$  il faut aller; il faut donc faire des essais. Lorsque nous connaîtrons le logarithme népérien, nous pourrons donner une méthode plus efficace; et nous pourrons même donner une formule : la demi-vie est  $-\frac{\ln 2}{\ln 0,92}$ .

$n$	8	9
$v_n$	5,13	4,72

Conclusion : la demi-vie de l'iode 131 est de 8 jours et quelques.

**Exercice 24** 1.  $100\% - 15\% = 85\% = 0,85$ , donc pour diminuer un nombre de 15 %, il faut le multiplier par 0,85. Ainsi, dans le schéma ci-dessous, l'intensité lumineuse est-elle multipliée par 0,85 à chaque nouvelle plaque :



**Remarque :** Le lumen est une unité de mesure du flux lumineux, utilisée notamment pour indiquer la capacité d'éclairage des ampoules électriques.

2. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = 0,85$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 0,85^n.$$

3. Comme on part de 12 lm, il s'agit de savoir le nombre de plaques nécessaires pour que l'intensité lumineuse soit inférieure à 0,12 lm (puisque  $12 \div 100 = 0,12$ ).

Comme dans l'exercice précédent, on rentre la formule

$$Y = 12 * 0.85^X$$

dans le mode fonction de la calculatrice, puis on fait des essais. On obtient :

$n$	28	29
$v_n$	0,13	0,11

Conclusion : il faut superposer au moins 29 plaques pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 100.