Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250\times 6}{4} = \frac{1\,500}{4} = 375$ g de farine, $\frac{500\times 6}{4} = \frac{3\,000}{4} = 750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6\times 125 = 750$ g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai $\frac{750\times 2}{1\,000} = \frac{1\,500}{1\,000} = 1{,}5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes[1].

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra $\frac{60\times 45}{20} = \frac{\cancel{20}\times 3\times 45}{\cancel{20}} = 135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135 = 120+15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4\times 30\div 5 = 24$ pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7\times 24}{6} = \frac{7\times 4\times \cancel{6}}{\cancel{6}} = 28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

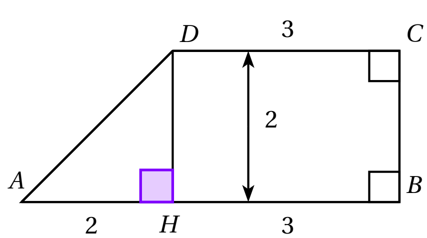
Stéphane nage $\frac{60\times 0{,}5}{3} = \frac{30}{3} = 10$ min, puis il court $\frac{60\times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5+0,5 = 5,5$ km, en $10+20 = 30$ min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60\times 5{,}5}{30} = \frac{\cancel{30}\times 2\times 5{,}5}{\cancel{30}} = 11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

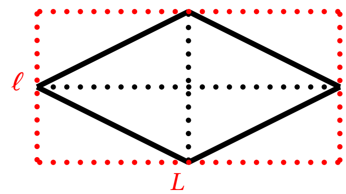
- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD, d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

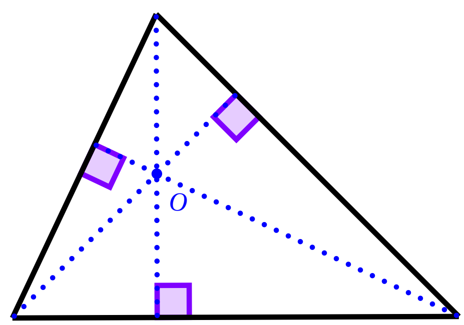
$$\mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(5+3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L, donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

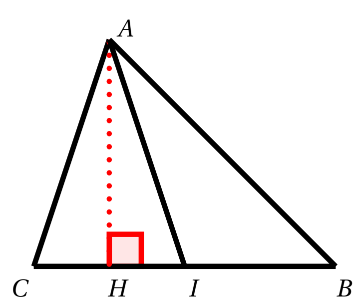


Exercice 5 **Rappels :**

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA, donc

$$\mathscr{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2} \qquad \mathscr{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I et le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7 1. La négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Il existe un homme immortel.

2. La négation de

Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

est

Tous les desserts sont sucrés à la cantine.

Remarque : Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe » , et réciproquement; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

3. La négation de

Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

est

Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

est

Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni... ni... » est « ou ». Donc la négation de

Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

est

Chloé aime les fraises ou les framboises.

Exercice 8 1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par 5}}_{\text{A}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il est multiple de 5}}_{\text{B}}.$$

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b) • L'implication contraposée est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de 5}}_{\text{non B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il ne se termine pas par 5}}_{\text{non A}}.$$

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

• L'implication réciproque est

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre est multiple de 5}}_{\text{B}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il se termine par 5}}_{\text{A}}.$$

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

$$\text{Si } \underbrace{\text{un nombre se termine par 0}}_{\text{A}}, \text{ alors } \underbrace{\text{il est multiple de 10}}_{\text{B}}.$$

et sa réciproque

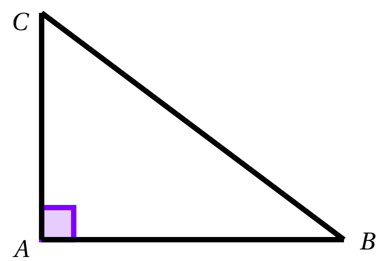
Si $\underbrace{\text{un nombre est multiple de 10}}_{\text{B}}$, alors $\underbrace{\text{il se termine par 0}}_{\text{A}}$.

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. **Théorème de Pythagore.**

   Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + BC^2$.



2. **Théorème contraposé de Pythagore.**

   Si $BC^2 \neq AB^2 + BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

3. **Théorème réciproque de Pythagore.**

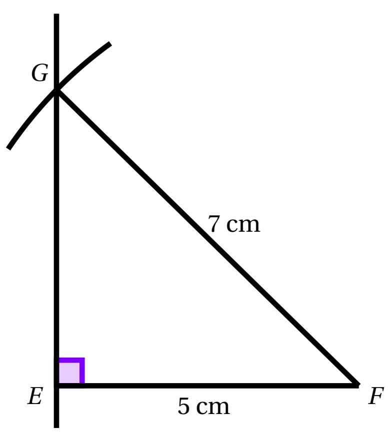
   Si $BC^2 = AB^2 + BC^2$, alors ABC est rectangle en A.

   Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

   ⚠En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E.
- Un arc de cercle de centre F, de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G.



D'après **le théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

$$\begin{aligned} FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\ 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\ 49 &= 25 + EG^2 \\ 49 - 25 &= EG^2 \\ \sqrt{24} &= EG \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

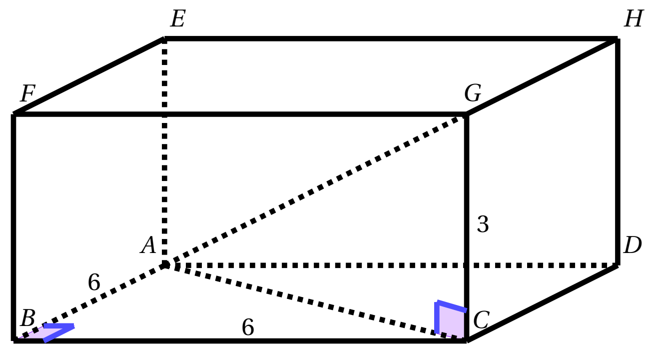
⚠Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A.
   On calcule :

$$\left.\begin{aligned} &BC^2 = 6^2 = 36 \\ &AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{aligned}\right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

   D'après **la contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$
$$AC^2 = 36 + 36$$
$$AC^2 = 72$$

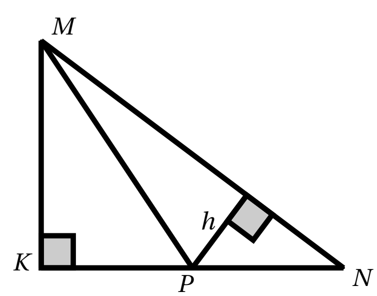
(Inutile de donner AC !)

Dans ACG rectangle en C,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$
$$AG^2 = 72 + 3^2$$
$$AG^2 = 72 + 9$$
$$AG^2 = 81$$
$$AG = \sqrt{81} = 9$$

Conclusion : $AG = 9$.

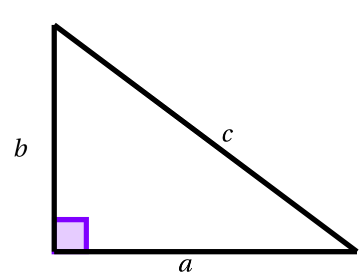
Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1,2$ cm.



1. $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3 \text{ cm}^2$.
2. On a aussi $\mathscr{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN \times 3}{2}$, soit $\cancel{3} \times 2 = PN \times \cancel{3}$; et donc $PN = 2$ cm.
3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN, puis KP et MP.

   ⚠On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.
   - Pour KN, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN. On obtient $KN = 4$ cm.
   - $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
   - Enfin, pour calculer PM, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP. On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b, l'hypoténuse mesure c.



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

$$\text{Pour tous nombres positifs } a \text{ et } b,\ \sqrt{a^2 + b^2} = a + b.$$

est FAUSSE ! Voici deux justifications :

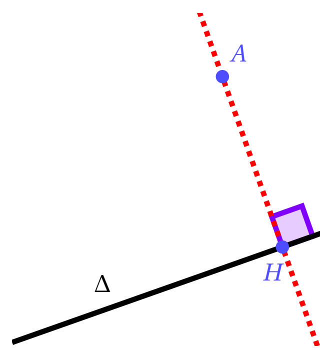
- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{est différent de} \qquad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2 + b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a + b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

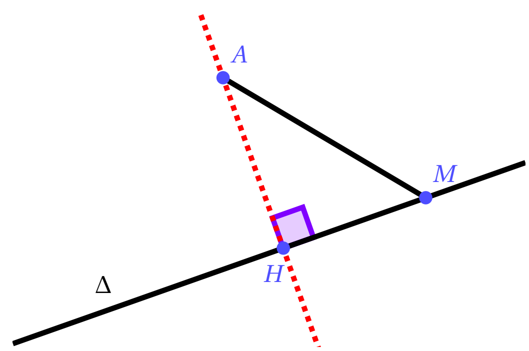
Exercice 14 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A. Elle coupe Δ en H.

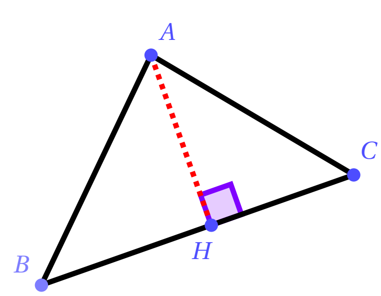


2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H, donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur[2] issue de A dans le triangle ABC.



2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur* ; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B \times h}{2}$ pour l'aire du triangle.

Exercice 15 On résout les équations :

$$\begin{aligned} x+7&=18\\ x+\cancel{7}-\cancel{7}&=18-7\\ x&=11 \end{aligned}$$

La solution est $x=11$

$$\begin{aligned} 3x+4&=19\\ 3x+\cancel{4}-\cancel{4}&=19-4\\ 3x&=15\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{15}{3}\\ x&=5 \end{aligned}$$

La solution est $x=5$.

$$\begin{aligned} 3,5x-9&=5\\ 3,5x-\cancel{9}+\cancel{9}&=5+9\\ 3,5x&=14\\ \frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}}&=\frac{14}{3,5}\\ x&=\frac{14}{3,5} \end{aligned}$$

Or $\frac{14}{3,5}=\frac{14\times2}{3,5\times2}=\frac{28}{7}=4$, donc la solution est $x=4$.

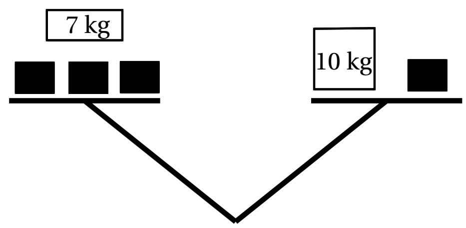
$$\begin{aligned} x+1&=-2x-5\\ x+1+2x&=\cancel{-2x}-5+\cancel{2x}\\ 3x+1&=-5\\ 3x+\cancel{1}-\cancel{1}&=-5-1\\ 3x&=-6\\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{-6}{3}\\ x&=-2 \end{aligned}$$

La solution est $x=-2$.

$$\begin{aligned} -2x+4&=3x-6\\ -2x+4-3x&=\cancel{3x}-6-\cancel{3x}\\ -5x+4&=-6\\ -5x+\cancel{4}-\cancel{4}&=-6-4\\ -5x&=-10\\ \frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}}&=\frac{-10}{-5}\\ x&=2 \end{aligned}$$

La solution est $x=2$.

Exercice 16 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M+7=10+M.$$

On la résout :

$$\begin{aligned} 3M+7-M&=10+\cancel{M}-\cancel{M}\\ 2M+7&=10\\ 2M+\cancel{7}-\cancel{7}&=10-7\\ 2M&=3\\ \frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}}&=\frac{3}{2}\\ M&=1,5 \end{aligned}$$

Conclusion : la solution est $M=1,5$.

Exercice 17 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15\,000-x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15\times x+25\times(15\,000-x).$$

Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation

$$15x+25(15\,000-x)=295\,000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned}
15x+25(15\,000-x) &= 295\,000\\
15x+25\times 15\,000+25\times(-x) &= 295\,000\\
15x+375\,000-25x &= 295\,000\\
-10x+375\,000 &= 295\,000\\
-10x+\cancel{375\,000}\cancel{-375\,000} &= 295\,000-375\,000\\
-10x &= -80\,000\\
\frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}} &= \frac{-80\,000}{-10}\\
x &= 8000.
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a $x = 8\,000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 18

$$A = \frac{5}{6}+\frac{2}{3} = \frac{5}{6}+\frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{5}{6}+\frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3\times\cancel{3}}{2\times\cancel{3}} = \frac{3}{2}$$
$$B = \frac{3}{4}-\frac{1}{6} = \frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{1\times 2}{6\times 2} = \frac{9}{12}-\frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12}$$
$$C = 2+\frac{1}{5} = \frac{2}{1}+\frac{1}{5} = \frac{2\times 5}{1\times 5}+\frac{1}{5} = \frac{10}{5}+\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$
$$D = \frac{3}{10}\times\frac{5}{6} = \frac{3\times 5}{10\times 6} = \frac{15}{60} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{15}\times 4} = \frac{1}{4}$$
$$E = 2\times\frac{5}{6}-\frac{4}{9} = \frac{2\times 5}{6}-\frac{4}{9} = \frac{10\times 3}{6\times 3}-\frac{4\times 2}{9\times 2} = \frac{30}{18}-\frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11\times\cancel{2}}{9\times\cancel{2}} = \frac{11}{9}$$
$$F = 4-3\times\frac{5}{6} = \frac{4}{1}-\frac{3\times 5}{6} = \frac{4\times 6}{1\times 6}-\frac{15}{6} = \frac{24}{6}-\frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3\times\cancel{3}}{2\times\cancel{3}} = \frac{3}{2}$$
$$G = \frac{6}{10}\times\frac{15}{8} = \frac{6\times 15}{10\times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9\times\cancel{10}}{8\times\cancel{10}} = \frac{9}{8}$$
$$H = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2\times 2}{3\times 3} = \frac{4}{9}$$

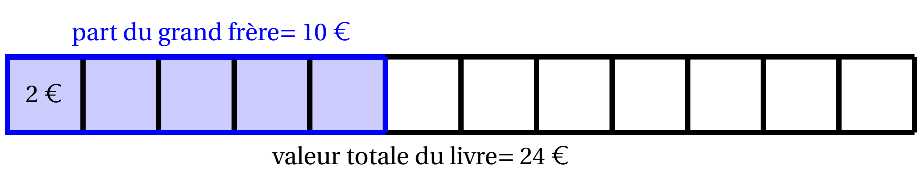
Exercice 19 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3} = \frac{4}{12}+\frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à

$$\frac{12}{5}\times 10 = \frac{12\times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24\text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5\times 2 = 10$ € ; et la valeur totale du livre est $12\times 2 = 24$ €.



Exercice 20

$$A=\frac{2^{15}\times 3^6}{2^{12}\times 3^4}=\frac{2^{15}}{2^{12}}\times\frac{3^6}{3^4}=2^{15-12}\times 3^{6-4}=2^3\times 3^2=8\times 9=72$$
$$B=\frac{5^3\times 5^6}{5^7}=\frac{5^{3+6}}{5^7}=\frac{5^9}{5^7}=5^{9-7}=5^2=25$$
$$C=\frac{2^{18}}{8\times 2^{12}}=\frac{2^{18}}{2^3\times 2^{12}}=\frac{2^{18}}{2^{3+12}}=\frac{2^{18}}{2^{15}}=2^{18-15}=2^3=8$$
$$D=\frac{6^6}{2^5\times 3^4}=\frac{(2\times 3)^6}{2^5\times 3^4}=\frac{2^6\times 3^6}{2^5\times 3^4}=\frac{2^6}{2^5}\times\frac{3^6}{3^4}=2^{6-5}\times 3^{6-4}=2^1\times 3^2=2\times 9=18$$
$$E=\frac{\left(10^4\right)^3}{10^8}=\frac{10^{4\times 3}}{10^8}=\frac{10^{12}}{10^8}=10^{12-8}=10^4=10\,000$$
$$F=\frac{4^5}{8^3}=\frac{(2^2)^5}{(2^3)^3}=\frac{2^{2\times 5}}{2^{3\times 3}}=\frac{2^{10}}{2^9}=2^{10-9}=2$$
$$G=\frac{10^{10}+10^8}{10^7}=\frac{10^{10}}{10^7}+\frac{10^8}{10^7}=10^{10-7}+10^{8-7}=10^3+10^1=1\,000+1=1\,001$$

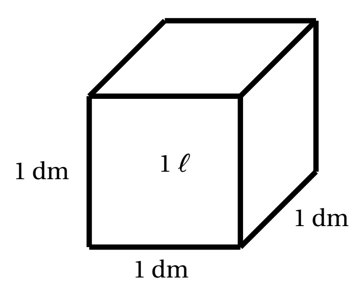
Exercice 21 Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.

On rappelle avant cela que $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=\underbrace{0,00}_{3\text{ zéros}}1$, donc multiplier un nombre par 10^{-3} revient à décaler la virgule de 3 rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour 10^{-2}).

$$\begin{aligned}
A&=35,4\times 10^{-3} && =0,0354\\
B&=0,034 && =0,0340\\
C&=3,6\times 10^{-2}=0,036 && =0,0360\\
D&=\frac{355}{10^4}=\frac{355}{10\,000} && =0,0355\\
E&=\frac{7}{60}\times\frac{3}{10}=\frac{7\times 3}{60\times 10}=\frac{7\times \cancel{3}}{20\times\cancel{3}\times 10}=\frac{7}{200} && =0,0350
\end{aligned}$$

Conclusion : $B<E<A<D<C$.

Exercice 22 Avant de commencer, il est utile de se rappeler que 10 cm=1 dm; et que 1 ℓ = 1 dm^3. Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure 1 dm sur 1 dm sur 1 dm, ou encore 10 cm sur 10 cm sur 10 cm (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



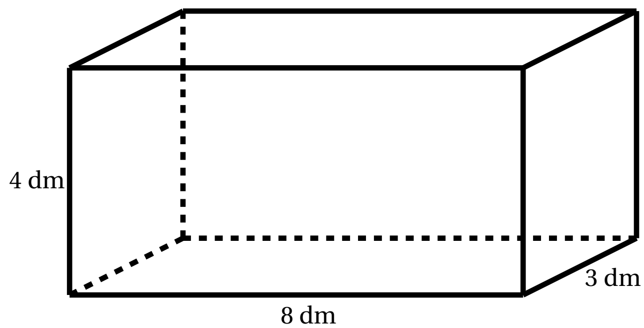
On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm, la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm. On dispose d'un robinet dont le débit est de 6 litres par minute.

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

$$\text{largeur}=8\text{ dm},\qquad \text{profondeur}=3\text{ dm},\qquad \text{hauteur}=4\text{ dm},$$

   donc son volume est

$$8\times 3\times 4=96\ \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de 6 ℓ/min, donc il faut $96 \div 6 = 16$ min pour remplir les 96 ℓ de l'aquarium.

Exercice 23 On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801 \qquad \text{(IR n°2)}$$
$$103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2\times 100 \times 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$71 \times 69 = (70+1)(70-1) = 70^2 - 1^2 = 4\,900 - 1 = 4\,899 \qquad \text{(IR n°3)}$$
$$2,05^2 = (2+0,05)^2 = 2^2 + 2\times 2 \times 0,05 + 0,05^2 = 4 + 0,2 + 0,0025 = 4,2025 \qquad \text{(IR n°1)}$$
$$4,3 \times 3,7 = (4+0,3)(4-0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91 \qquad \text{(IR n°3)}$$

Remarque : Comment calculer $0,05^2$ de tête ? Comme $0,05^2 = 0,05 \times 0,05$ et que 0,05 a deux chiffres après la virgule, $0,05^2$ en aura $2+2=4$. Il ne reste alors plus qu'à calculer $5^2 = 25$ pour pouvoir conclure : $0,05^2 = 0,0025$.
Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0,05 \times 0,0006 = 0,000030,$$

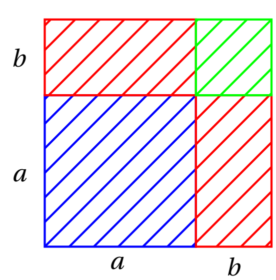
puisque $6 \times 5 = 30$ et que le résultat doit avoir $2+4=6$ chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

Exercice 24 Le côté du grand carré mesure $a+b$, donc son aire est $(a+b)^2$.
D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté a, donc d'aire a^2 (hachuré en bleu), un carré de côté b, donc d'aire b^2 (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés a et b, donc d'aires $a \times b$ (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2 \times a \times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exercice 25

1. Pour comparer les fractions $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$, on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4\times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30} \qquad , \qquad b = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme $24 < 25$, on obtient $a < b$.

2. On compare à présent $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$. On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

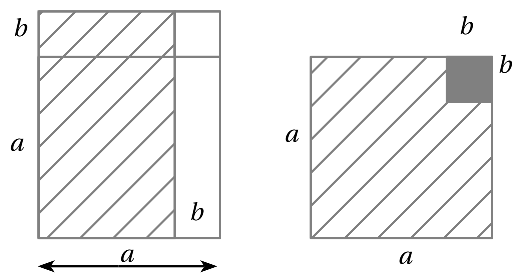
$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \qquad , \qquad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

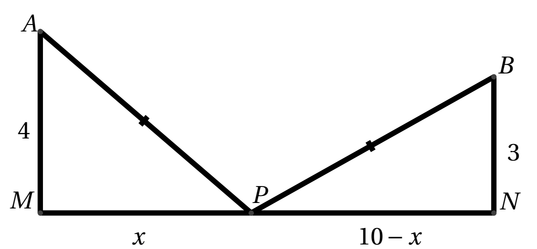
$$524 \times 526 = (525 - 1)(525 + 1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à $525 \times 525 = 525^2$, donc $c < d$.

Exercice 26 La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés $(a - b)$ et $(a + b)$, donc son aire est égale à $(a - b)(a + b)$.
Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté a duquel on a retiré un carré de côté b. Son aire est donc égale à $a^2 - b^2$.
L'identité remarquable n°3 nous dit que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



Exercice 27



On pose $MP = x$, on a donc $PN = MN - MP = 10 - x$.
D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles AMP et NBP :

$$\begin{aligned} AP^2 &= MP^2 + MA^2 \\ AP^2 &= x^2 + 4^2 \\ AP^2 &= x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BP^2 &= PN^2 + BN^2 \\ BP^2 &= (10 - x)^2 + 3^2 \\ BP^2 &= 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \qquad \text{(on développe grâce à l'IR n°2)} \\ BP^2 &= 100 - 20x + x^2 + 9 \\ BP^2 &= x^2 - 20x + 109 \end{aligned}$$

On sait que $AP = BP$, donc $AP^2 = BP^2$; et d'après les deux calculs ci-dessus :

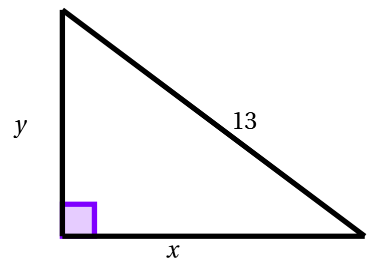
$$\cancel{x^2} + 16 = \cancel{x^2} - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned}
16 &= -20x+109\\
16{\color{red}-109} &= -20x+\cancel{109}\,{\color{red}\cancel{-109}}\\
\frac{-93}{\color{blue}-20} &= \frac{\cancel{-20}x}{\color{blue}\cancel{-20}}\\
4,65 &= x
\end{aligned}$$

Conclusion : $MP = 4,65$.

Exercice 28



1. D'après le théorème de Pythagore,
$$x^2+y^2=13^2=169.$$
D'après l'IR n°1, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$. Or $x^2+y^2=169$, et $\frac{x\times y}{2}=30$, puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit $x\times y = 30\times 2 = 60$, puis
$$(x+y)^2 = {\color{blue}x^2+y^2}+2{\color{red}xy} = {\color{blue}169}+2\times{\color{red}60} = 169+120 = 289.$$
Finalement, comme $(x+y)^2=289$,
$$x+y=\sqrt{289}=17.$$
2. On utilise cette fois l'IR n°2 :
$$(x-y)^2 = {\color{blue}x^2+y^2}-2{\color{red}xy} = {\color{blue}169}-2\times{\color{red}60} = 169-120 = 49.$$
Or $x-y\geq 0$, puisque x est plus grand que y, donc
$$x-y=\sqrt{49}=7.$$
⚠Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir $x-y=-7$!!!

On sait à présent que $x+y=17$ et $x-y=7$. On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit x :
$$\begin{aligned}
(x+y)+(x-y) &= 17+7\\
x+\cancel{y}+x-\cancel{y} &= 24\\
\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{24}{2}\\
x &= 12
\end{aligned}$$
Enfin, comme $x+y=17$, on trouve $y=17-x=17-12=5$.
Conclusion : $x=12$, $y=5$.

2 Nombres réels

Exercice 29

1. $-7\in\mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification : $-7=\dfrac{-7}{1}$, donc $-7\in\mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).
2. $-7\in\mathbb{N}$. **FAUX.**
Justification : -7 est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{Z}$. **FAUX.**
Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.
Remarque : Pour obtenir $\dfrac{13}{4} = 3,25$ sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ② Poser la division – ③ Remarquer que $\dfrac{13}{4} = \dfrac{12}{4} + \dfrac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$.

4. $-\dfrac{13}{4} \in \mathbb{D}$. **VRAI.**
Justification : $-\dfrac{13}{4} = -3,25$ a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.

5. $5,824 \in \mathbb{D}$. **VRAI.**
Justification : $5,824$ a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal

6. $5,824 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**
Justification n°1 : $5,824$ est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$).
Justification n°2 : $5,824 = \dfrac{5\,824}{1\,000}$, donc $5,824 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

7. $\dfrac{10}{6} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{rr|l} & 1\;0 & 6 \\ - & 6 & 1,6 \\ \hline & 4\;0 & \\ - & 3\;6 & \\ \hline & 4 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{10}{6} = 1,666\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

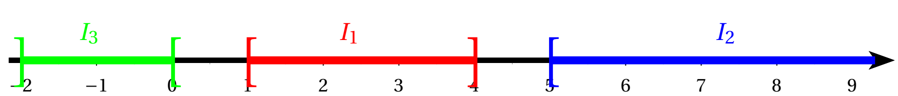
8. $\dfrac{17}{11} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**
Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{rr|l} & 1\;7 & 1\;1 \\ - & 1\;1 & 1,5\;4 \\ \hline & 6\;0 & \\ - & 5\;5 & \\ \hline & 5\;0 & \\ - & 4\;4 & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\dfrac{17}{11} = 1,5454\cdots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

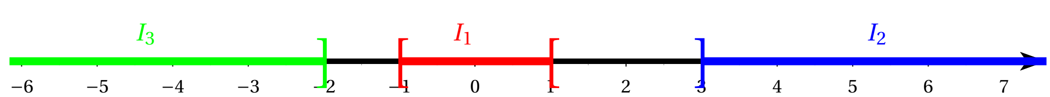
Exercice 30 1.

$I_1 = [1;4]$ $\qquad I_2 = [5;+\infty[$ $\qquad I_3 =]-2;0[$



2.

$I_1 = [-1;1[$ $\qquad I_2 =]3;+\infty[$ $\qquad I_3 =]-\infty;-2]$



Exercice 31 1. $5 \in [2;6[$

2. $-2 \notin]-2;1]$
3. $\pi \in]3;4[$ (on rappelle que $\pi \approx 3,14$)

Exercice 32 1. $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$

2. $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
3. $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
4. $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
5. $|7-4| = |3| = 3$
6. $|4-7| = |-3| = 3$
7. $|4-3| + |5-6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
8. $|5-11| + 2 \times |7-8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
9. $|8-5| \times |7-10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
10. $|15-6| - 4 \times |1-4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

Exercice 33 1. On résout l'équation $|x-2| = 3$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que

$$x-2=3 \qquad \text{ou que} \qquad x-2=-3$$

Donc

$$x-\cancel{2}+\cancel{2}=3+2 \qquad \text{ou} \qquad x-\cancel{2}+\cancel{2}=-3+2$$
$$x=5 \qquad \text{ou} \qquad x=-1$$

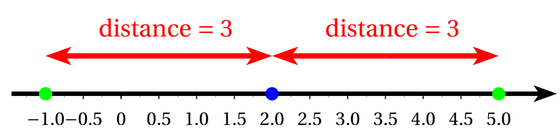
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=5$ et $x=-1$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-2| = 3$$

revient à dire que la distance entre x et 2 est égale à 3.



On voit qu'il y a deux solutions : $x=5$ et $x=-1$.

2. On résout l'équation $|x-1| = 4$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 4 sont 4 et -4.
Donc dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que

$$x-1=4 \qquad \text{ou que} \qquad x-1=-4$$

Donc

$$x-\cancel{1}+\cancel{1}=4+1 \qquad \text{ou} \qquad x-\cancel{1}+\cancel{1}=-4+1$$
$$x=5 \qquad \text{ou} \qquad x=-3$$

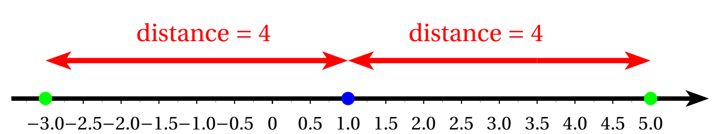
Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=5$ et $x=-3$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x-1| = 4$$

revient à dire que la distance entre x et 1 est égale à 4.



On voit qu'il y a deux solutions : $x=5$ et $x=-3$.

3. On résout l'équation $|x+2| = 2$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 2 sont 2 et -2.
Donc dire que

$$|x+2|=2$$

revient à dire que

$$x+2=2 \qquad \text{ou que} \qquad x+2=-2$$

Donc

$$\begin{array}{lll} x+\cancel{2}-\cancel{2}=2-2 & \text{ou} & x+\cancel{2}-\cancel{2}=-2-2 \\ x=0 & \text{ou} & x=-4 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=-4$.

Méthode n°2 : avec la distance.

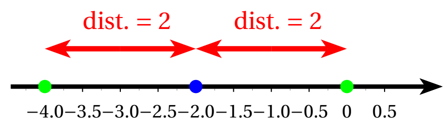
Il y a une vraie difficulté : l'égalité $|x+2|=2$ se réécrit

$$|x-(-2)|=2$$

(il faut absolument faire apparaître un « $-$ » pour pouvoir interpréter en termes de distance). Donc dire que

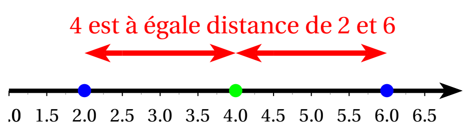
$$|x+2|=2$$

revient à dire que la distance entre x et -2 est égale à 2.



On voit qu'il y a deux solutions : $x=0$ et $x=-4$.

4. On résout l'équation $|x-2|=|x-6|$.
   Conformément à l'indication, on travaille avec la distance : dire que $|x-2|=|x-6|$, c'est dire que la distance entre x et 2 est la même que la distance entre x et 6. Autrement dit, x est à égale distance de 2 et de 6. Il y a un seul nombre x qui convienne : le milieu de l'intervalle $[2;6]$, c'est-à-dire $x=4$.



   Conclusion : il y a une seule solution, $x=4$.

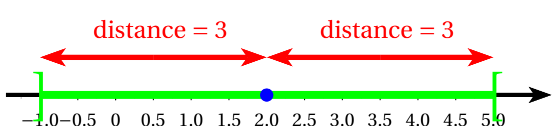
Exercice 34 Commençons par deux exemples :

- si $x=3$, alors $\sqrt{x^2}=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$.
- si $x=-3$, alors $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$.

On comprend que quand x est positif, on aura toujours $\sqrt{x^2}=x=|x|$; tandis que dans le cas où x est négatif, le signe $-$ « disparaît » lorsqu'on élève au carré, ce qui donne finalement $\sqrt{x^2}=|x|$.
Autrement dit, quel que soit x (y compris si $x=0$), on a l'égalité

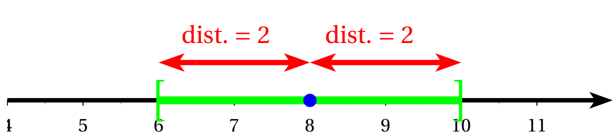
$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

Exercice 35 1. Dire que $|x-2|<3$, c'est dire que la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 3. On voit que les x qui conviennent sont tous les nombres de l'intervalle $]-1;5[$ (extrémités exclues, puisque l'inégalité est stricte).



2. Les points de l'intervalle ci-dessous sont les nombres x dont la distance à 8 est inférieure ou égale à 2 (donc extrémités incluses) ; autrement dit, ce sont les nombres x tels que

$$|x-8|\leq 2.$$



Exercice 36 Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. On part de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on élève au carré et on multiplie par q^2 :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}^2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\
2 &= \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \\
2 &= \frac{p^2}{q^2} \\
2 \times q^2 &= \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \times \cancel{q^2} \\
2q^2 &= p^2
\end{aligned}$$

2. Commençons par un exemple : prenons un nombre qui « se termine par 4 » (donc le chiffre des unités est 4). Le carré de ce nombre va « se terminer par 6 », puisque $4^2 = 16$. Autrement dit, le chiffre des unités du carré est 6.
   Avec la même technique, on voit que si le chiffre des unités est 9, celui du carré est 1 (puisque $9^2 = 81$) ; etc. On remplit ainsi le tableau :

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

3. Pour avoir le chiffre des unités de $2q^2$, il suffit de reprendre la deuxième ligne du tableau précédent et de multiplier par 2. Par exemple, si le chiffre des unités de q est 7, alors celui de q^2 est 9 ; et celui de $2q^2$ est 8 (puisque $2 \times 9 = 18$). On remplit ainsi le nouveau tableau :

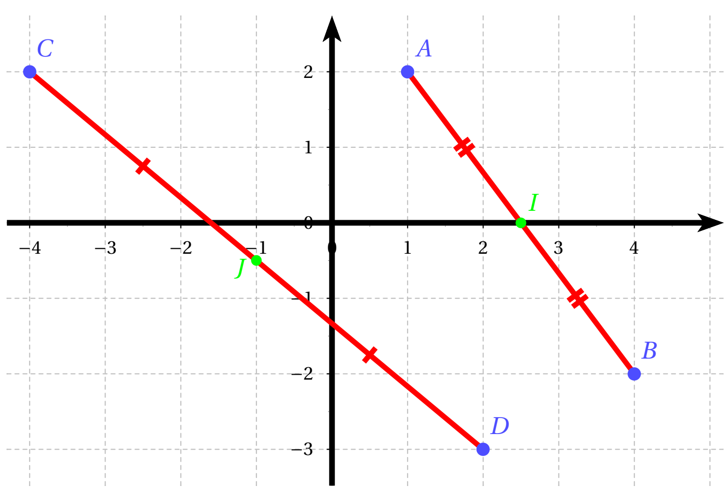
Chiffre des unités de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

4. D'après la question 1, $2q^2 = p^2$. Les nombres $2q^2$ et p^2 étant égaux, ils ont le même chiffre des unités. Or dans nos deux tableaux, le seul chiffre en commun des deuxièmes lignes est le 0 ; et on l'obtient lorsque le chiffre des unités de p est 0, et lorsque le chiffre des unités de q est 0 ou 5.
5. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : on peut donc l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. D'après la question précédente, p se termine par 0 et q se termine par 0 ou 5. Mais alors p et q sont tous deux multiples de 5, et donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite au départ.

   Conclusion : supposant que $\sqrt{2}$ était rationnel, on aboutit à une absurdité; c'est donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3 Géométrie repérée

Exercice 37 1.



(a) On a $A(\underset{x_A}{1}\ ;\ \underset{y_A}{2})$ et $B(\underset{x_B}{4}\ ;\ \underset{y_B}{-2})$. On calcule les coordonnées de I :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) \qquad I\left(\frac{5}{2}; \frac{0}{2}\right) \qquad I\,(2,5;0)\,.$$

(b)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

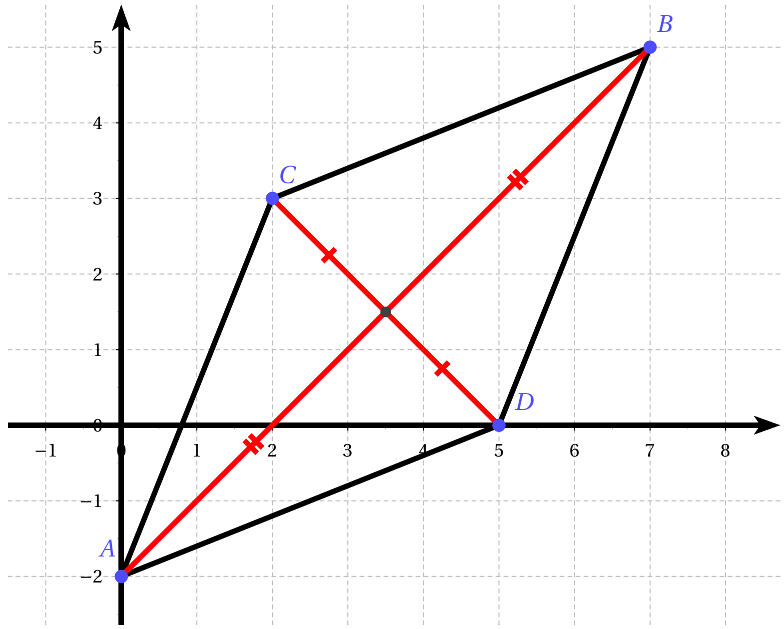
2. (a) On a $C(\underset{x_C}{-4}\,;\,\underset{y_C}{2})$ et $D(\underset{x_D}{2}\,;\,\underset{y_D}{-3})$. On calcule les coordonnées de J :

$$J\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}\right) \qquad J\left(\frac{-4+2}{2}; \frac{2+(-3)}{2}\right) \qquad J\left(\frac{-2}{2}; \frac{-1}{2}\right) \qquad J(-1; -0,5)\,.$$

(b)

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + \left(y_D - y_C\right)^2} = \sqrt{(2-(-4))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}.$$

Exercice 38 1.



2. On calcule les coordonnées de M :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad M\left(\frac{0+7}{2}; \frac{-2+5}{2}\right) \qquad M\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \qquad M(3,5; 1,5)\,.$$

Puis celles de M' :

$$M'\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}\right) \qquad M'\left(\frac{2+5}{2}; \frac{3+0}{2}\right) \qquad M'\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \qquad M'(3,5; 1,5)\,.$$

3. On constate dans la question précédente que $M = M'$, les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ du quadrilatère $ACBD$ se coupent donc en leur milieu. D'après une propriété du collège, cela entraîne que $ACBD$ est un parallélogramme, puis que ses côtés opposés sont de même longueur : $BD = AC$, $CB = AD$.

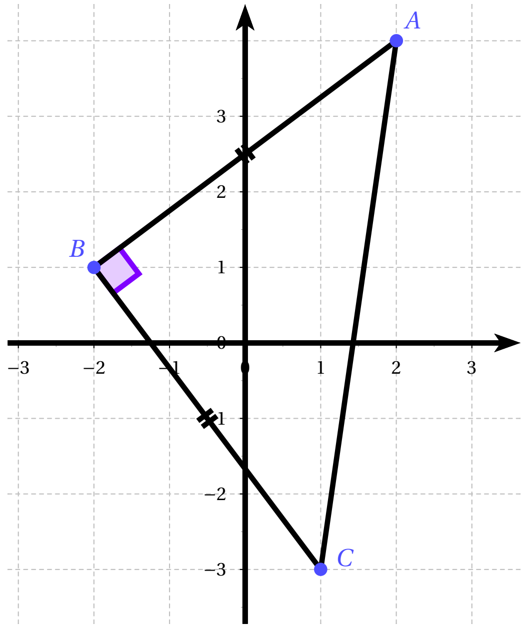
4. On calcule les longueurs AC et CB :
   - $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}.$
   - $CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2} = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}.$

   On constate que $AC = CB$, donc d'après la question précédente :

$$BD = AC = CB = AD.$$

   Conclusion : le quadrilatère $ACBD$ a quatre côtés de même longueur, donc c'est un losange.

Exercice 39



On calcule la longueur des trois côtés :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$AB = BC$, donc ABC est isocèle en B. On utilise le théorème réciproque de Pythagore pour prouver qu'il est rectangle :

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Exercice 40 1. • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}.$

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AC^2 + BC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{10}^2 = 40 + 10 = 50 \end{array}\right\} AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en C.

2. D'après la formule du cours :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \qquad I\left(\frac{6+1}{2}; \frac{0+5}{2}\right) \qquad I\,(3,5\;;\;2,5)\,.$$

3. Le triangle ABC étant rectangle en C, le milieu I de l'hypoténuse $[AB]$ est le centre de Γ (rappel de l'énoncé) ; et le rayon de Γ est

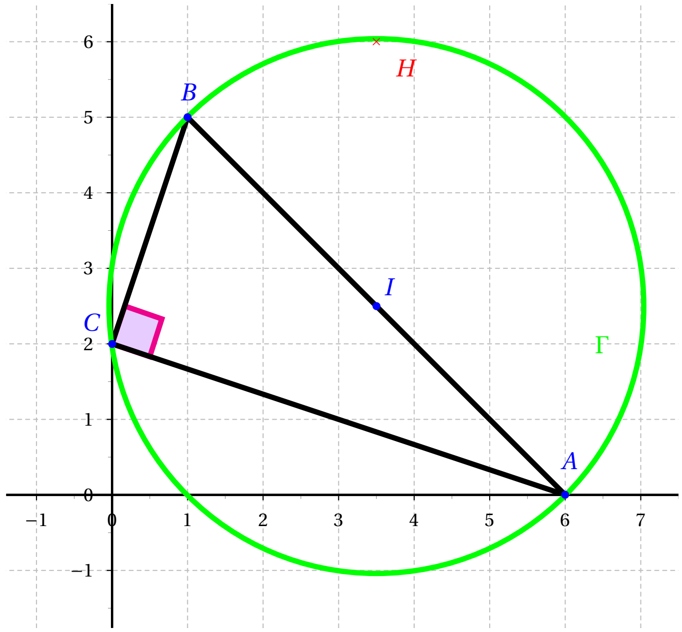
$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + \left(y_A - y_I\right)^2} = \sqrt{(6-3,5)^2 + (0-2,5)^2} = \sqrt{2,5^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{6,25+6,25} = \sqrt{12,5}.$$

4. Savoir si $H(3,5\;;\;6)$ appartient à Γ revient à savoir si la longueur IH est égale à r ou non. On calcule cette longueur avec la formule du cours :

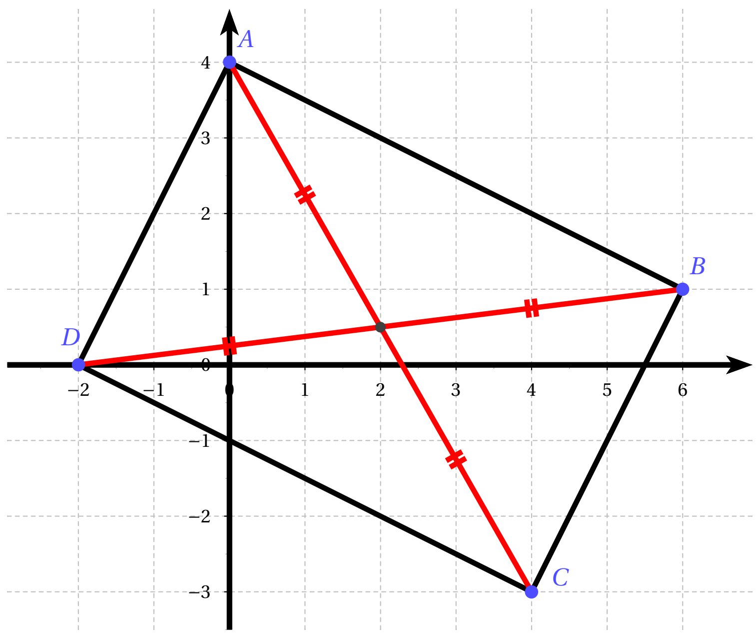
$$IH = \sqrt{(x_H - x_I)^2 + (y_H - y_I)^2} = \sqrt{(3,5-3,5)^2 + (6-2,5)^2} = \sqrt{0^2 + 3,5^2} = \sqrt{0+12,25} = \sqrt{12,25}.$$

Comme $\sqrt{12,25} \neq \sqrt{12,5}$, le point H n'appartient pas à Γ.

N.B. La figure est trompeuse, puisqu'on a l'impression que H est sur Γ. En réalité, si vous avez pris 1 cm comme unité graphique, le point H est à environ trois cheveux (au sens propre) du cercle.



Exercice 41



1. • Le milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right) \qquad \left(\frac{0+4}{2};\frac{4+(-3)}{2}\right) \qquad (2\ ;\ 0,5).$$

   • Le milieu du segment $[BD]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right) \qquad \left(\frac{6+(-2)}{2};\frac{1+0}{2}\right) \qquad (2\ ;\ 0,5).$$

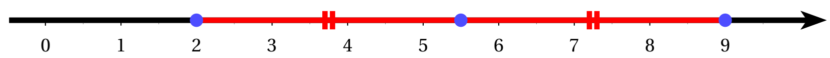
   Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme (propriété du collège).

   ⚠Si vous donnez un nom aux milieux des diagonales **avant de faire les calculs**, donnez-leur des noms différents : avant de faire les calculs, on n'a pas encore prouvé que les milieux étaient les mêmes.

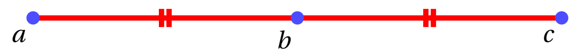
2. On calcule la longueur des diagonales :
   • $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{4^2+(-7)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}.$
   • $BD=\sqrt{(x_D-x_B)^2+\left(y_D-y_B\right)^2}=\sqrt{(-2-6)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}.$

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont de même longueur, donc c'est un rectangle (propriété du collège).

Exercice 42 1. Le symétrique de 2 par rapport à $5,5$ est 9.



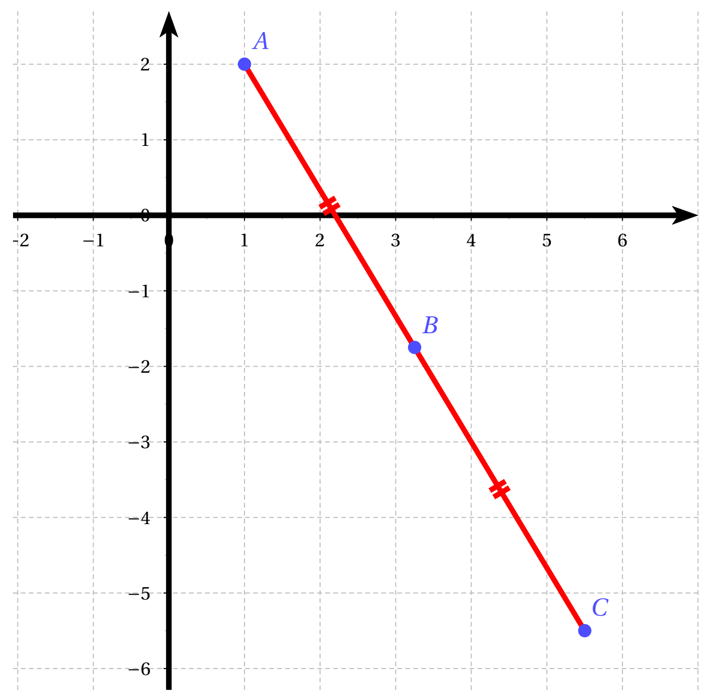
2. On généralise le travail de la question précédente : c est le symétrique de a par rapport à b lorsque b est le milieu du segment qui va de a à c.



Autrement dit $b = \frac{a+c}{2}$, ce qui donne $b \times 2 = \frac{a+c}{\cancel{2}} \times \cancel{2}$, soit $2b = a + c$; et donc

$$c = 2b - a.$$

3. On place C, symétrique du point A par rapport au point B.



Par définition d'une symétrie centrale, B est le milieu du segment $[AC]$, donc d'après la formule du cours pour le milieu d'un segment :

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad , \qquad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Autrement dit, en remplaçant avec les données de l'énoncé :

$$3,25 = \frac{1 + x_C}{2} \qquad , \qquad -1,75 = \frac{2 + y_C}{2}.$$

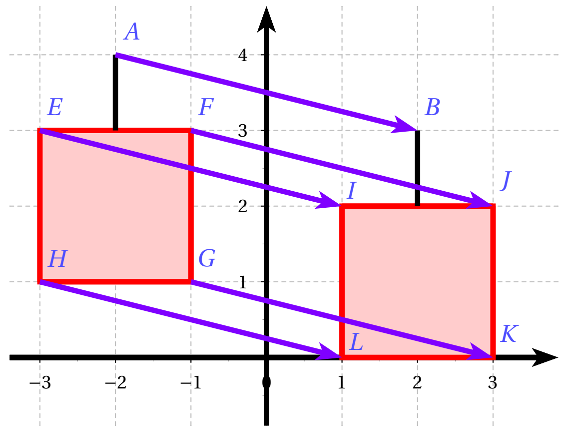
En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient

$$x_C = 2 \times 3,25 - 1 = 5,5 \qquad , \qquad y_C = 2 \times (-1,75) - 2 = -5,5.$$

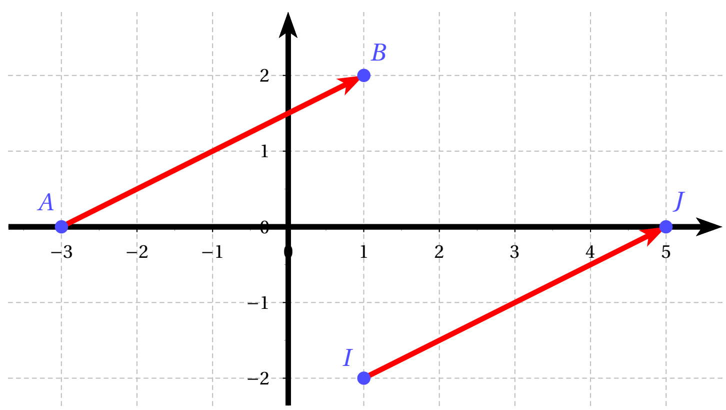
Conclusion : $C(5,5\ ;\ -5,5)$.

Exercice 43 Cet exercice d'introduction à la notion de vecteur appelle quelques commentaires :

1. La télécabine $EFGH$ glisse pour aboutir à la position $IJKL$. Ce déplacement est appelé « translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ».
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a été représenté en violet sur la figure, il est égal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{FJ}$, $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{HL}$. On peut donc écrire
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{HL}.$$
3. Pour aller de A à B, on avance de 4 carreaux en abscisse et on descend de 1 carreau en ordonnée; on dit que $\overrightarrow{AB}$ a pour abscisse 4 et pour ordonnée -1. On note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.



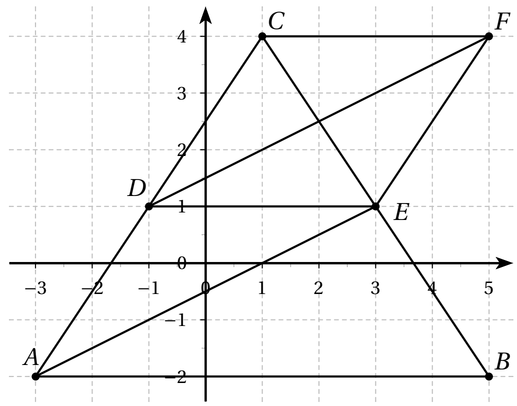
Exercice 44 1.



2. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-3)\\2-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$
3. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$:
$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}x_J - x_I\\y_J - y_I\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}5-1\\0-(-2)\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$

   Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 45 On considère les points $A(-3;-2)$, $B(5;-2)$, $C(1;4)$, $D(-1;1)$, $E(3;1)$, $F(5;4)$.

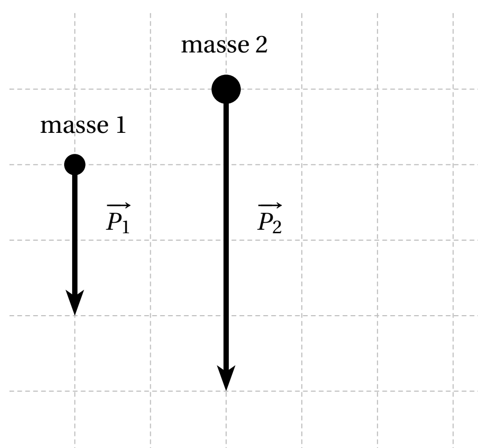


Il y a trop de possibilités pour que les justifie toutes. Je vais me contenter de donner un couple de vecteurs égaux, avec la justification; puis donner toutes les autres égalités possibles, mais sans les justifier :

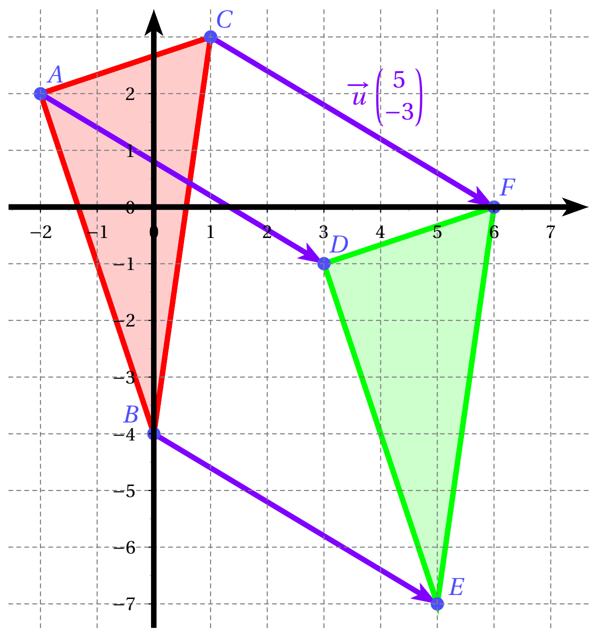
1. **Une égalité et sa justification.**
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$. En effet, ces vecteurs ont les mêmes coordonnées :
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. **Toutes les autres égalités.**
   $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ $\quad \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FE}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF}$ $\quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FD}$ $\quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB}$ $\quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BE}$

   ⚠Attention à l'ordre des lettres! Par exemple, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, mais $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{FE}$ (il y a un problème de sens : le vecteur $\overrightarrow{DC}$ « monte vers le haut et la droite »; tandis que $\overrightarrow{FE}$ « descend vers le bas et la gauche » – l'erreur se détecte aussi bien sûr en calculant les coordonnées).

Exercice 46 En physique, un vecteur représente une force, et la longueur (ou norme) du vecteur correspond à l'intensité de la force. L'égalité $\left\|\overrightarrow{P_2}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{P_1}\right\|$ signifie que la masse 2 a un poids deux fois plus important que celui de la masse 1.



Exercice 47 L'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ est le triangle DEF.



4 Études graphiques de fonctions

Exercice 48 Un voyageur de commerce (= un représentant) fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

Remarque : On peut penser que l'indemnité kilométrique sert à rembourser les frais de déplacement (par exemple si le représentant utilise sa propre voiture) ; et que la part fixe sert à payer les repas.

1. S'il fait 120 km dans la journée, le montant de la note de frais est de

$$30 + 120 \times 0,5 = 30 + 60 = 90 \text{ €}.$$

2. On note x le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et $f(x)$ le montant de la note de frais. On a alors

$$f(x) = 30 + x \times 0,5 = 0,5x + 30.$$

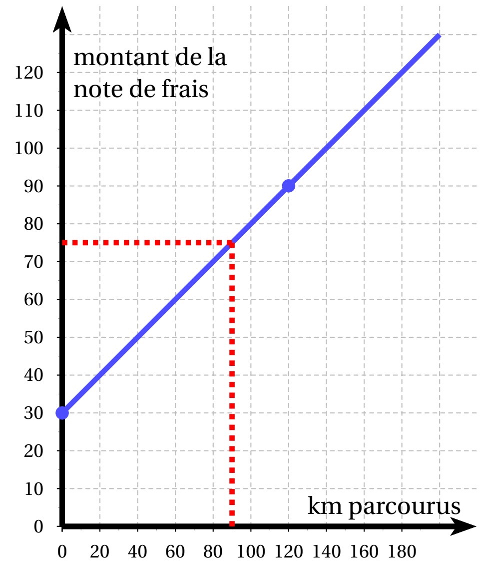
3. La fonction f est affine, puisque $f(x) = 0,5x+30$ (c'est bien une fonction de la forme $f(x) = ax+b$, avec $a = 0,5$ et $b = 30$). Sa courbe représentative est donc une droite, que l'on trace à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs ; par exemple :

x	0	120
$f(x)$	30	90

$$f(0) = 0,5 \times 0 + 30 = 30$$
$$f(120) = 0,5 \times 120 + 30 = 90$$

On place les points de coordonnées $(0;30)$ et $(120;90)$, puis on trace la droite – en réalité un segment, puisqu'on va de 0 à 200 en abscisses.

Remarque : On a choisi les valeurs 0 et 120, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs – l'avantage de 0, c'est que le calcul est facile ; et l'avantage de 120, c'est qu'on a déjà fait le calcul dans la question 1.



4. Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Pour déterminer le nombre de km parcourus dans la journée, il y a deux méthodes :
   - **Graphiquement.** On voit qu'il a parcouru 90 km (pointillés rouges) [3].
   - **Par le calcul.** On retire les frais fixes : $90 - 30 = 60$ € d'indemnité kilométrique. Puis, comme chaque km compte pour $0,5$ €, on divise : $45 \div 0,5 = 45 \times 2 = 90$ km. [4]

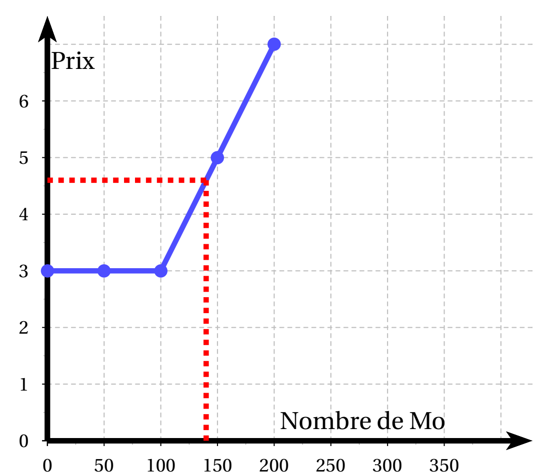
Exercice 49 1. • Lorsqu'on télécharge 50 Mo, on paye 3 €.
   - Lorsqu'on télécharge 150 Mo, les 100 premiers coûtent 3 € ; et les 50 suivants coûtent $50 \times 0,04 = 2$ €. On paye donc au total $3 + 2 = 5$ €.

2. On complète le tableau de valeurs :

Nombre de Mo	0	50	100	150	200
Prix à payer	3	3	3	5	7

Remarque : jusqu'à 100 Mo, on paye 3 €. Ensuite, chaque nouvelle tranche de 50 Mo est facturée 2 €.

3. On construit la courbe qui donne le prix payé en fonction du nombre de Mo téléchargés. Elle est constante sur l'intervalle $[0;100]$, puis affine sur l'intervalle $[100;200]$. Il faut donc utiliser une règle pour effectuer le tracé [5].



4. Il y a deux méthodes :
   - **Graphiquement.** On voit qu'on a téléchargé 140 Mo (pointillés rouges).
   - **Par le calcul.** J'ai payé 4,60 €, donc $3 + 1,60$ €. J'ai donc téléchargé $1,60 \div 0,04 = 40$ Mo au-delà du 100^{e}. Autrement dit, j'ai téléchargé 140 Mo.

3. La méthode graphique est simple, mais la réponse pourrait être imprécise.
4. On peut aussi résoudre l'équation $0,5x + 30 = 75$.
5. On parle de fonction « affine par morceaux ».

Exercice 50 Les gares de Calais et de Boulogne-sur-Mer sont distantes de 30 km. Un train part à 12 h de Boulogne-sur-Mer en direction de Calais et roule à la vitesse de 40 km/h. Un train part de Calais à 12 h 15 et fait route en sens inverse à la vitesse de 60 km/h.

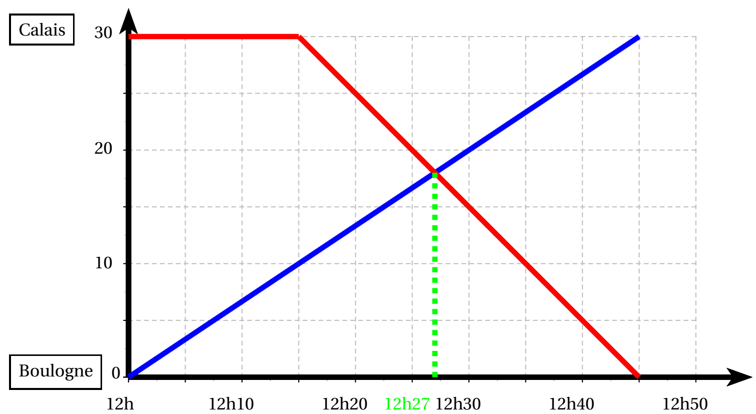
1. Le train qui part à 12 h de Boulogne-sur-Mer roule à la vitesse de 40 km/h, donc il parcourt 40 km en 60 min. Pour savoir quand il arrive à Calais, on complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	40	30

Le train mettra $\frac{60\times30}{40}=\frac{1800}{40}=45$ min pour arriver à Calais, donc il y sera à 12 h 45.

Pour le train qui part de Calais, le calcul est plus facile : il roule à 60 km/h, donc parcourt 60 km en 60 min; et ainsi 30 km en 30 min. Comme il part à 12 h 15, il arrive à 12 h 45 lui aussi.

On peut ainsi représenter la marche des deux trains :



2. Nous allons déterminer l'heure de croisement des trains par le calcul. Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes.

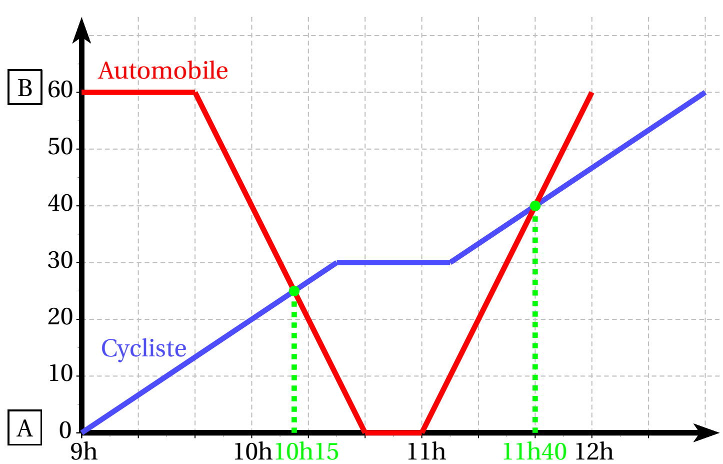
À 12h15, le train qui part de Boulogne-sur-Mer a parcouru 10 km (facile à vérifier), il est donc à 20 km de Calais. C'est l'heure à laquelle le deuxième train part. Comme l'un roule à 40 km/h et l'autre à 60 km/h, tout se passe comme si un seul train devait parcourir 20 km à la vitesse de $40+60=100$ km/h. On complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	100	20

$\frac{60\times20}{100}=\frac{1200}{100}=12$, donc il faudrait 12 min à ce train pour parcourir 20 km. Ainsi, les deux trains se croiseront-ils à

$$12 \text{ h } 15 \text{ min} + 12 \text{ min} = 12 \text{ h } 27 \text{ min}.$$

Exercice 51 Je me contenterai du graphique, donc je ne ferai pas les calculs pour avoir les heures exactes des deux rencontres – elles s'obtiennent avec les mêmes techniques que dans l'exercice précédent.



Exercice 52 Le taux d'anticorps (en g/l) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en mois), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 12 mois, est donné par la formule suivante :

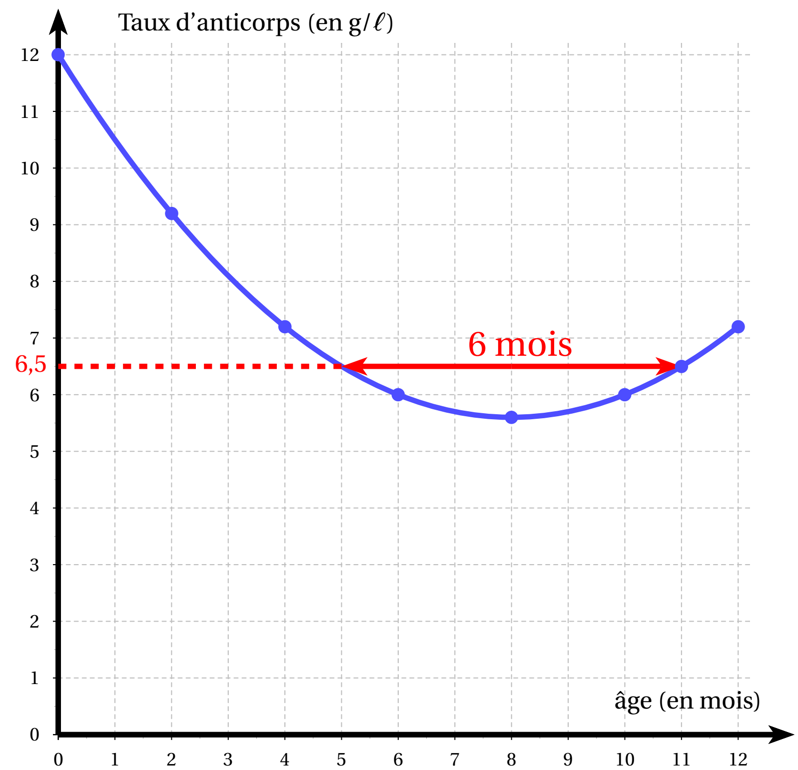
$$f(x) = 0,1x^2 - 1,6x + 12.$$

1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[0;12]$ avec un pas de 2 :

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	12	9,2	7,2	6	5,6	6	7,2

Détail de deux calculs :
- $f(0) = 0,1 \times 0^2 - 1,6 \times 0 + 12 = 12$.
- $f(12) = 0,1 \times 12^2 - 1,6 \times 12 + 12 = 7,2$.

2.



3. Le taux d'anticorps à la naissance est de 12 g/ℓ.
4. Tableau de variations :

x	0		8		12
$f(x)$	12	↘	5.6	↗	7.2

Le taux d'anticorps est minimal à l'âge de 8 mois.

5. D'après le graphique, le taux d'anticorps est inférieur à 6,5 g/ℓ pendant 6 mois (du 5e au 11e mois).

Exercice 53 On considère la fonction f définie sur $[-1;3]$ par

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

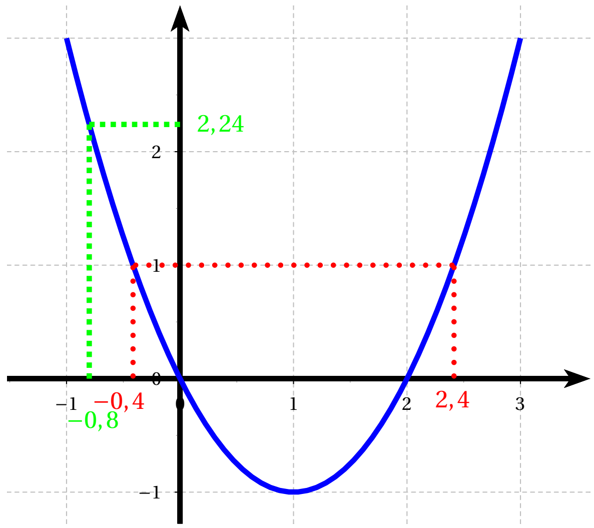
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[-1;3]$ avec un pas de 0,5 :

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	3	1,25	0	$-0,75$	-1	$-0,75$	0	1,25	3

Détail de deux calculs :

- $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$.
- $f(0,5) = 0,5^2 - 2 \times 0,5 = 0,25 - 1 = -0,75$.

2. Courbe représentative de f :



3. L'image de $-0,8$ par f est

$$f(-0,8) = (-0,8)^2 - 2 \times (-0,8) = 0,64 + 1,6 = 2,24.$$

On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat – si on a de bons yeux !

4. Les antécédents de 1 par f sont $-0,4$ et $2,4$ environ (voir pointillés rouges).
5. Les solutions l'inéquation $f(x) < 1$ sont tous les nombres dont l'image est strictement inférieure à -1. Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $]-0,4;2;4[$ environ.
6. Tableau de variations de f :

x	-1		1		3
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

7. Tableau de signe de f :

x	-1		0		2		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 54 On considère la fonction g définie sur $[1;4]$ par

$$g(x) = x - \frac{6}{x}.$$

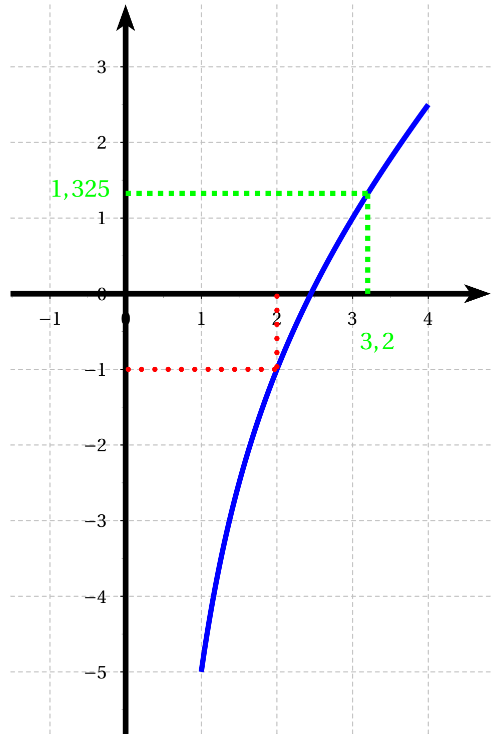
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[1;4]$ avec un pas de $0,5$:

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$g(x)$	-5	$-2,5$	-1	$0,1$	1	$1,79$	$2,5$

Détail de deux calculs :
- $g(2) = 2 - \frac{6}{2} = 2 - 3 = -1$.
- $g(1,5) = 1,5 - \frac{6}{1,5} = 1,5 - 4 = -2,5$.

Remarque : L'énoncé demande d'arrondir à 10^{-2} près par excès. Cela signifie qu'il faut donner deux chiffres après la virgule et arrondir par valeur supérieure le deuxième chiffre après la virgule. Par exemple $g(3,5) = 1,7857\cdots \approx 1,79$.

2. Courbe représentative de g :



3. L'image de $3,2$ par g est

$$g(3,2) = 3,2 - \frac{6}{3,2} = 3,2 - 1,875 = 1,325.$$

On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat.

4. L'unique solution de l'équation $g(x) = -1$ (donc l'unique antécédent de -1 par g) est 2 (pointillés rouges).

5. Les solutions l'inéquation $g(x) \geq -1$ sont tous les nombres dont l'image est supérieure ou égale à -1. Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $[2;4]$.

6. Tableau de variations de g :

x	1		4
$g(x)$	-5	$\nearrow$	2.5

7. Tableau de signe de g :

x	1		≈ 2.4		4
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 55 1. x est une longueur, donc $x \geq 0$. Par ailleurs, la longueur x ne peut pas dépasser 4 (car $AB = 4$).

Conclusion : on a l'encadrement

$$0 \leq x \leq 4.$$

2. • $AP = AD - DP = 4 - x$.

- L'aire du rectangle $AMNP$ est

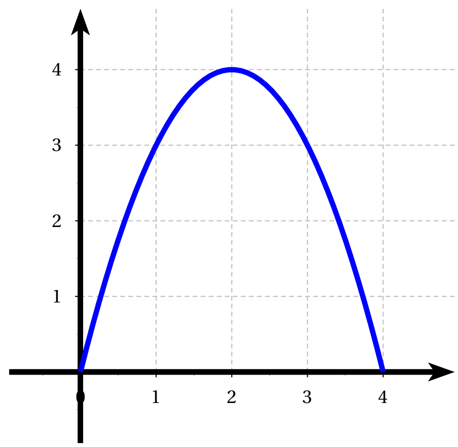
$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{AMNP} &= AM \times AP \\
&= x \times (4-x) && \text{(car } AP = 4-x\text{)} \\
&= x \times 4 + x \times (-x) && \text{(on développe)} \\
&= 4x - x^2.
\end{aligned}$$

3. La fonction f est définie pour $0 \leq x \leq 4$ par
$$f(x) = 4x - x^2.$$
Autrement dit, $f(x)$ donne l'aire du rectangle $AMNP$ pour une valeur donnée de x.

(a) Tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0

Courbe représentative :

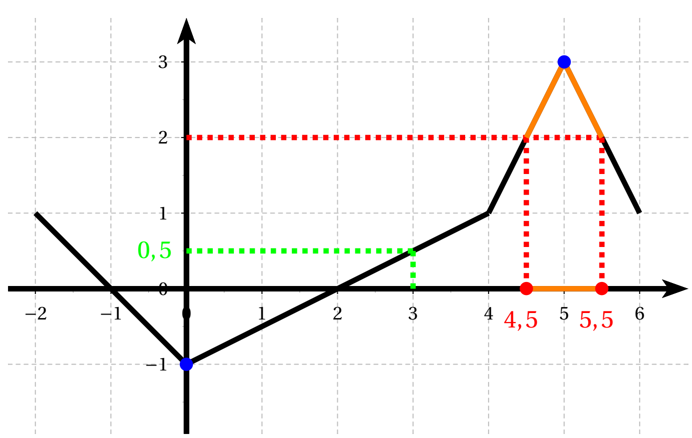


(b) Tableau de variations de f :

x	0		2		4
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

(c) La fonction f atteint son maximum lorsque $x = 2$, donc l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale lorsque $x = 2$, c'est-à-dire quand M est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 56



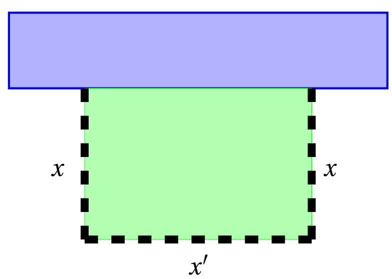
1. L'image de 3 par f est $0,5$ (pointillés verts).
2. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $4,5$ et $5,5$ (pointillés rouges).
3. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ sont tous les nombres de l'intervalle $[4,5\ ;\ 5,5]$: c'est sur cet intervalle que la courbe est au dessus de 2 (parties de la courbe et de l'axe des abscisses repassées en orange).
4. Tableau de variations de f :

x	-2		0		5		6
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

5. Le maximum de f est 3, son minimum est -1 (points bleus).
6. Tableau de signe de f :

x	-2		-1		2		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 57 On dispose d'une clôture de 100 mètres de long pour délimiter un terrain rectangulaire le long d'une rivière (la clôture est en pointillés — on ne met pas de clôture le long de la rivière). On note x et x' les longueurs des côtés du terrain.



On voudrait délimiter le terrain le plus grand possible.

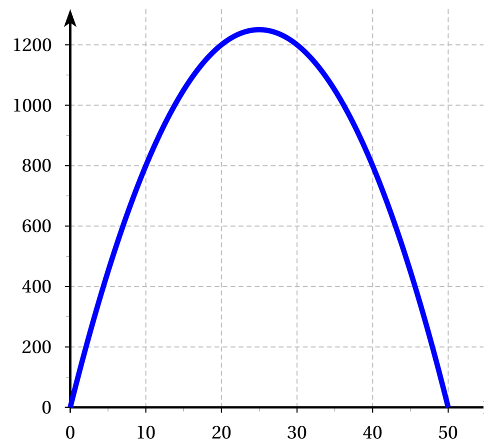
1. (a) x est une longueur, donc $x \geq 0$. Par ailleurs, la longueur x apparaît deux fois sur la figure, donc x ne peut pas dépasser 50 (car $2 \times 50 = 100$).
   Conclusion : on a l'encadrement
   $$0 \leq x \leq 50.$$
   (b) Le périmètre, 100 m, s'obtient en faisant le calcul
   $$x + x + x',$$
   donc
   $$2x + x' = 100\ ;$$
   et donc
   $$x' = 100 - 2x.$$
   (c) L'aire du terrain est
   $$\begin{aligned} x \times x' &= x \times (100 - 2x) && \text{(car } x' = 100 - 2x\text{)} \\ &= x \times 100 + x \times (-2x) && \text{(on développe)} \\ &= 100x - 2x^2. \end{aligned}$$

2. On définit à présent la fonction f sur $[0;50]$ par
$$f(x) = 100x - 2x^2.$$
Autrement dit, $f(x)$ donne l'aire du terrain pour une valeur donnée de x.

   (a) Tableau de valeurs :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	0	450	800	1050	1200	1250	1200	1050	800	450	0

   (b) Courbe représentative :



   (c) f atteint son maximum lorsque $x = 25$, donc la surface du terrain est maximale lorsque $x = 25$. Dans ce cas, $x' = 100 - 2 \times 25 = 50$. Autrement dit, le terrain de surface maximale mesure 50 m sur 25 m.

Exercice 58 On construit la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $[-2;3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

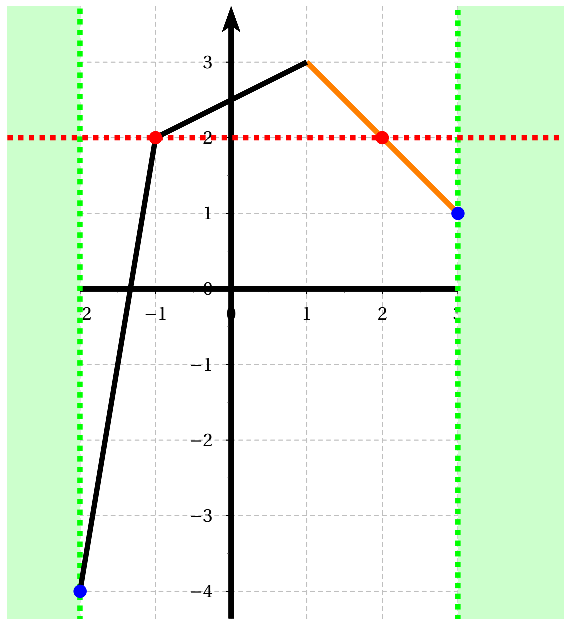
- f est croissante sur l'intervalle $[-2;1]$;
- f est affine sur l'intervalle $[1;3]$;
- $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$;
- les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2.

Il y a plusieurs étapes :

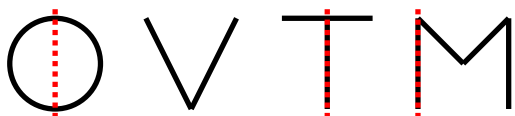
1. Pour commencer, on utilise l'ensemble de définition : on sait qu'il faut tracer la courbe sur l'intervalle $[-2;3]$ (zones vertes exclues).
2. Ensuite, on sait que $f(-2) = -4$ et $f(3) = 1$, donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(-2;-4)$ et $(3;1)$ (placés en bleu).
3. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2, donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(2;2)$ (placés en rouge). De plus, la courbe représentative ne coupe nulle part ailleurs la droite horizontale qui passe par l'ordonnée 2 (tracée également en rouge, en pointillés).
4. La fonction f est affine sur $[1;3]$, donc sa courbe représentative sur cet intervalle est un segment. On trace l'unique segment passant par les points déjà placés (en orange).
5. Enfin f est croissante sur l'intervalle $[-2;1]$, donc on trace une courbe « qui monte » sur cet intervalle (en noir). Il faut aussi bien sûr qu'elle passe par les points déjà placés.

   Remarque : Pour cette dernière étape, il y a plusieurs dessins possibles. Sur le graphique j'ai choisi de tracer deux segments par facilité (technique), mais vous pouvez faire une courbe à main levée qui ne soit pas droite.

La courbe finale est tracée en noir et en orange.



Exercice 59 Les courbes en forme de O, de T et de M ne sont pas les courbes représentatives de fonctions, puisqu'un nombre aurait plusieurs images (pointillés rouges).
En revanche, la lettre V n'a pas ce problème et représente bien la courbe d'une fonction (exemple : la courbe de la fonction définie par $f(x) = 2|x|$ pour $x \in [-1;1]$ est en forme de V).



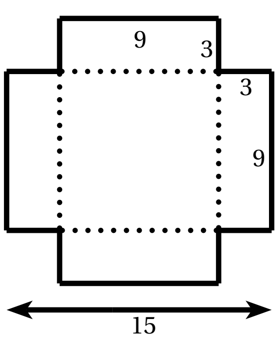
D'une manière générale, on reconnaît une fonction (et la courbe représentative d'une fonction) au fait que tout nombre réel a **au plus une** image (donc 0 ou 1 image).

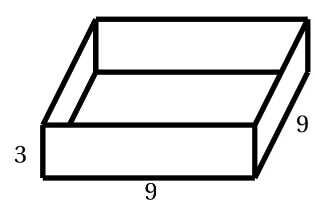
Exercice 60 Dans tout l'exercice, les longueurs sont exprimées en cm, les aires en cm² et les volumes en cm³.

1. (a) x est une longueur, donc $x \geq 0$. D'autre part, la longueur x apparaît deux fois, donc comme la plaque de métal a pour côté 15, x ne peut dépasser $7,5$. Autrement dit :

$$x \text{ est compris entre } 0 \text{ et } 7,5.$$

   (b) Dans cette question, on prend $x = 3$. Il reste alors $15 - 2 \times 3 = 9$ cm pour le côté du carré central.



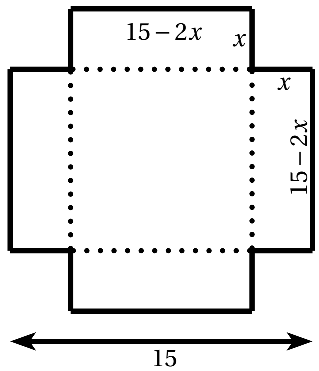


Le volume de la boîte est égal à

$$L \times \ell \times h = 9 \times 9 \times 3 = 243.$$

2. À partir de là, je regroupe la correction des sous-questions.

Le carré du fond a pour côté $15 - x - x = 15 - 2x$, et la hauteur de la boîte est x.



Donc le volume de la boîte est

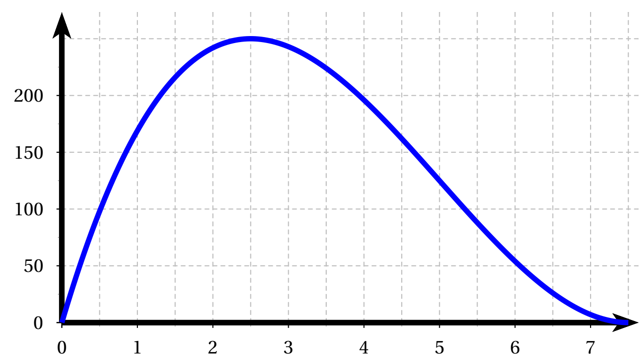
$$L \times \ell \times h = (15-2x)\times(15-2x)\times x.$$

On développe cette expression :

$$\begin{aligned}V(x) &= (15-2x)\times(15-2x)\times x\\ &= (15\times 15+15\times(-2x)+(-2x)\times 15+(-2x)\times(-2x))\times x\\ &= \left(225-30x-30x+4x^2\right)\times x\\ &= 225x-30x^2-30x^2+4x^3\\ &= 4x^3-60x^2+225x.\end{aligned}$$

On fait un tableau de valeurs pour V sur $[0;7,5]$ avec un pas de $0,5$, puis on construit sa courbe représentative.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
$V(x)$	0	98	169	216	242	250	243	224	196	162	125	88	54	26	7	0



Conclusion : d'après le graphique, le volume est maximal lorsque $x = 2,5$.

5 Probabilités

Exercice 61 1. Comme on ne remet pas le premier jeton avant de tirer le deuxième, il n'est pas possible d'obtenir un « double ». L'univers est donc

$$U = \{(1,2);(1,3);(2,1);(2,3);(3,1);(3,2)\}.$$

2. L'événement A : « un des jetons porte le n°1 » s'écrit sous forme ensembliste

$$A = \{(1,2);(1,3);(2,1);(3,1)\}$$

(on conserve tous les événements élémentaires où apparaît le chiffre 1).

Il y a 4 cas favorables à A, et 6 cas possibles dans l'univers, donc $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Exercice 62 1. L'univers est

$$U = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}.$$

Il comporte $4 \times 4 = 16$ éléments.

2. L'événement B : « au moins l'un des deux dés tombe sur 4 » s'écrit sous forme ensembliste

$$B = \{(1,4);(2,4);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4)\}$$

(on conserve tous les événements élémentaires où apparaît au moins un 4).
Il y a 7 cas favorables à B.

3. D'après les questions précédentes, $P(B) = \frac{7}{16}$.

Exercice 63 1. L'univers est

$$U = \{RRR;RRB;RBR;RBB;BRR;BRB;BBR;BBB;VRR;VRB;VBR;VBB\}.$$

Il comporte $3 \times 2 \times 2 = 12$ éléments[6].

2. Le contraire de

A : « la tenue du footballeur comporte du bleu »

est

$\overline{A}$: « la tenue du footballeur **ne** comporte **pas** de bleu ».

Il s'écrit sous forme ensembliste

$$\overline{A} = \{RRR;VRR\}$$

– il n'y a que deux tenues qui n'ont pas de bleu !

On en déduit $P\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{12}$, puis

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = \frac{12}{12} - \frac{2}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 64 1. Il y a 6 choix possibles pour le vainqueur de la course, puis 5 pour le deuxième (puisqu'il est différent du vainqueur) ; et enfin 4 pour le troisième. Donc au total

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

podiums différents possibles.

2. Imaginons que les chevaux soient numérotés de 1 à 12 et que le classement de la course soit

1^er^ : Cheval n°7 2^e^ : Cheval n°4 3^e^ : Cheval n°10

Dans ce cas, le tiercé dans l'ordre est $(7,4,10)$; et les tiercés dans le désordre sont

$$(4,7,10)\ ;\ (4,10,7)\ ;(10,7,4)\ ;(10,4,7)\ ;(7,10,4).$$

Il y a 5 cas favorables à T, donc

$$P(T) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 65 1. On raisonne comme dans l'exercice précédent : il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

2. On va regarder l'événement contraire et répondre à la question : « Combien y a-t-il de podiums **ne** comportant **aucun** Américain ? »
Comme 5 des 8 participants ne sont pas Américains, le nombre de podiums sans aucun Américain est $5 \times 4 \times 3 = 60$.

On revient à la question initiale : il reste $336 - 60 = 276$ podiums avec au moins un Américain.

6. L'opération $3 \times 2 \times 2$ vient du fait qu'il y a trois couleurs de maillot, 2 couleurs de short et 2 couleurs de chaussettes. On pourrait représenter la situation avec un arbre pour être sûr de n'oublier aucune tenue.

Exercice 66 On regroupe la correction des deux questions. On utilise des symboles différents pour chacun des événements, mais un seul tableau suffit :

- $\heartsuit$ A : « la somme des deux faces est égale à 5 » ;
- $\clubsuit$ B : « exactement un des deux dés tombe sur 4 » ;
- $\diamondsuit$ C : « on tire deux numéros impairs ».

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4
1	$\diamondsuit$		$\diamondsuit$	$\heartsuit\clubsuit$
2			$\heartsuit$	$\clubsuit$
3	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$
4	$\heartsuit\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	

Il y a $4 \times 4 = 16$ cases dans le tableau. Il y a $4\heartsuit$, $6\clubsuit$ et $4\diamondsuit$ dans le tableau, donc

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \qquad P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 67 On place dans un tableau un symbole pour chaque événement :

- $\heartsuit$ A : « la France joue » ;
- $\clubsuit$ B : « le match oppose la France à l'Allemagne » ;
- $\spadesuit$ C : « le match oppose deux pays du Benelux ».

	Fra	All	Ita	Bel	PB	Lux
Fra		$\heartsuit\clubsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
All	$\heartsuit\clubsuit$					
Ita	$\heartsuit$					
Bel	$\heartsuit$				$\spadesuit$	$\spadesuit$
PB	$\heartsuit$			$\spadesuit$		$\spadesuit$
Lux	$\heartsuit$			$\spadesuit$	$\spadesuit$	

⚠ Il faut exclure la diagonale, car une équipe ne peut jouer contre elle-même. Il n'y a donc que 30 cases.

D'après le tableau :

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

Les pays du Benelux sont la Belgique, les Pays-Bas (Nederland) et le Luxembourg, d'où les $\spadesuit$ en bas à droite du tableau. On obtient $P(C) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Exercice 68 On place dans un tableau un symbole pour chaque événement :

- $\heartsuit$ A : « les deux jetons choisis sont identiques » ;
- $\clubsuit$ B : « exactement un des deux jetons représente un visage » ;

	☼	◐	♪	☺	☹
☼	$\heartsuit$			$\clubsuit$	$\clubsuit$
◐		$\heartsuit$		$\clubsuit$	$\clubsuit$
♪			$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
☺	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	
☹	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$		$\heartsuit$

On obtient :

$$P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \qquad P(B) = \frac{12}{25}.$$

Exercice 69 Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

On a colorié les cases de trois couleurs :
- en vert : le candidat connaît les deux questions ;
- en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
- en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

Géo \ Hist	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

Conclusion : il y a $6 \times 5 = 30$ cases au total, 6 vertes et 15 oranges, donc :
- la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$;
- la probabilité que le candidat connaisse une seule des deux questions est $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Exercice 70 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectifs :

	VTT	~~VTT~~	Total
Escalade	3	7	10
~~Escalade~~	13	9	22
Total	16	16	32

Remarque : on sait qu'il y a autant d'élèves qui pratiquent le VTT que d'élèves qui ne le pratiquent pas, donc 16 élèves le pratiquent et 16 ne le pratiquent pas.

2. Par lecture du tableau : $P(A) = \frac{3}{32}$ et $P(B) = \frac{9}{32}$.

Le calcul du nombre de cas favorables à C est moins évident et peut être mené de plusieurs façons différentes. Par exemple :
- ajouter ceux qui font du VTT à ceux qui font de l'escalade, puis retrancher les élèves qui pratiquent les deux sports (sinon ils sont comptés deux fois) : $16 + 10 - 3 = 23$.
- ajouter ceux qui ne font que du VTT, ceux qui ne font que de l'escalade, et ceux qui pratiquent les deux sports : $13+7+3 = 23$.
- remarquer que C est le contraire de B et donc faire le calcul : $32 - 9 = 23$.
- etc.

Dans tous les cas on obtient $P(C) = \frac{23}{32}$.

Exercice 71 1. Pour compléter le tableau, on calcule :
- 5% de 10 000 valent 500 ;
- $10000 - 500 = 9500$;
- 4% de 9 500 valent 380 ;
- on complète le reste du tableau avec des additions/soustractions.

	Animaux sains	Animaux malades	Total
Test positif	380	500	880
Test négatif	9 120	0	9 120
Total	9 500	500	10 000

2. (a) $P(M) = \dfrac{500}{10000} = 0,05$ (c'est le 5 % déjà donné par l'énoncé).
$P(T) = \dfrac{880}{10000} = 0,088$.
(b) 500 des 880 animaux ayant un test positif sont malades, donc la probabilité qu'un animal ayant un test positif soit malade est $\frac{500}{880} \approx 57\%$.
(c) Tous les animaux malades ont un test positif, donc la probabilité qu'un animal malade ait un test positif est 1.

Exercice 72 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectifs :

	Abonnés au soir	Pas abonnés au soir	Total
Abonnés au matin	50	20	70
Pas abonnés au matin	50	160	210
Total	100	180	280

2. (a) $P(S) = \frac{100}{280}$ $\quad P\left(\overline{M}\right) = \frac{210}{280}$.
   (b) La probabilité que le pensionnaire soit abonné aux deux journaux est

$$P(S \cap M) = \frac{50}{280}.$$

   (c) On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. La probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* est $\frac{50}{70}$.

Exercice 73 1. Les nombres pairs sont 2, 4, 6, ..., 100. Il y en a 50, donc

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0,5.$$

Les multiples de 5 sont

$$5 = 5 \times 1, \ 10 = 5 \times 2, \ 15 = 5 \times 3, \ \cdots, \ 100 = 5 \times 20.$$

Il y en a 20, donc

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

2. L'événement $A \cap B$ s'écrit « le nombre est pair et multiple de 5 », ou de façon plus simple (et plus explicite) « le nombre est multiple de 10 ».
3. Les multiples de 10 sont 10, 20, 30, ..., 100. Il y en a 10, donc

$$P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

D'après une formule du cours :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6.$$

Exercice 74 1. L'événement $A \cup B$, s'écrit « au moins l'un des deux feux est vert ». Cet événement se produit à coup sûr, puisque les deux feux ne sont jamais tous les deux rouges en même temps (cf énoncé). On a donc

$$P(A \cup B) = 1.$$

2. L'événement « Pierre a les deux feux verts » s'écrit $A \cap B$, donc d'après une formule du cours, sa probabilité est :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,8 + 0,5 - 1 = 0,3.$$

Exercice 75 1. On suppose que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cup B) = 0,9$.
   (a) D'après une formule du cours,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,6 - 0,9 = 0,1.$$

   (b) D'un côté $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$; de l'autre $P(A \cap B) = 0,1$.
   Conclusion : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, donc A et B ne sont pas indépendants.

2. (a) L'événement $A \cap B$ s'écrit « la carte est un roi rouge ». Il y a deux rois rouges dans le jeu, donc

$$P(A \cap B) = \frac{2}{32} = 0,0625.$$

   (b) Il y a 16 cartes rouges dans le jeu, donc $P(A) = \frac{16}{32} = 0,5$.
   Il y a 4 rois dans le jeu, donc $P(B) = \frac{4}{32} = 0,125$.
   $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,125 = 0,0625 = P(A \cap B)$, donc A et B sont indépendants.

   Remarque : Le mot « indépendants » est conforme à l'idée intuitive que l'on s'en fait : deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur celle de l'autre. Dans l'exemple de la question 2, si vous savez que la carte est rouge, cela ne change pas la probabilité que ce soit un roi; et réciproquement, si vous savez que c'est un roi, vous n'en tirez aucune information sur sa couleur.

3. Dans cette question, on suppose que $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,7$; et que les événements A et B sont indépendants.

   D'après une formule du cours et la propriété d'indépendance :

$$\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) & \\
P(A\cup B) &= P(A) + P(B) - P(A)\times P(B) & \text{(on utilise l'indépendance)}\\
0,7 &= 0,4 + P(B) - 0,4\times P(B) & \\
0,7 &= 0,4 + x - 0,4x & \text{(on pose } x = P(B)\text{)}\\
0,7 &= 0,4 + 0,6x & \\
0,7-0,4 &= \cancel{0,4} + 0,6x - \cancel{0,4} & \text{(on résout l'équation)}\\
\frac{0,3}{0,6} &= \frac{\cancel{0,6}x}{\cancel{0,6}} & \\
0,5 &= x. &
\end{aligned}$$

   Conclusion : $P(B) = 0,5$.

15 Fractions et manipulation de formules

Exercice 76

1. $A = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$
3. $C = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$
4. $D = \frac{4}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{4\times5}{15\times6} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$
5. $E = \frac{5}{6} \times 4 = \frac{5\times4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$
6. $F = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times3} = \frac{4}{9}$
7. $G = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5}\times\frac{3}{2} = \frac{4\times3}{5\times2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$
8. $H = 3 \div \frac{15}{4} = 3 \times \frac{4}{15} = \frac{3\times4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
9. $I = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\times 3 = \left(\frac{3}{12} - \frac{2}{12}\right)\times 3 = \frac{1}{12}\times 3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
10. $J = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2\times4}{3\times5} = \frac{5}{15} + \frac{8}{15} = \frac{13}{15}$
11. $K = \frac{35}{56}\times\frac{72}{45} = \frac{35\times72}{56\times45} = \frac{5\times7\times8\times9}{7\times8\times5\times9} = 1$ (tout se simplifie)
12. $L = \frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{7}}{\frac{4}{3}\times\frac{2}{7}} = \frac{\frac{28}{21}-\frac{6}{21}}{\frac{4\times2}{3\times7}} = \frac{\frac{22}{21}}{\frac{8}{21}} = \frac{22}{\cancel{21}}\times\frac{\cancel{21}}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$
13. $M = \frac{2-\frac{10}{7}}{\frac{1}{3}+\frac{5}{7}} = \frac{\frac{2}{1}-\frac{10}{7}}{\frac{7}{21}+\frac{15}{21}} = \frac{\frac{14}{7}-\frac{10}{7}}{\frac{22}{21}} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{22}{21}} = \frac{4}{7}\times\frac{21}{22} = \frac{4\times3\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times22} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$
14. $N = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{1\times1\times3}{2\times2\times2} = \frac{3}{8}$
15. $O = \frac{5}{7}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{4} = \frac{5\times2\times3\times7}{7\times9\times5\times4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
16. $P = \frac{2}{24} + \frac{5}{2} - \frac{50}{60} = \frac{1}{12} + \frac{5}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{12} + \frac{30}{12} - \frac{10}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$
17. $Q = \frac{\frac{5}{6}+\frac{9}{12}}{\frac{3}{4}+\frac{10}{12}} = \frac{\frac{10}{12}+\frac{9}{12}}{\frac{9}{12}+\frac{10}{12}} = \frac{\frac{19}{12}}{\frac{19}{12}} = 1$
18. $R = \frac{11}{6}\times\frac{14}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{11} = \frac{11\times14\times3\times6\times5}{6\times3\times5\times7\times11} = \frac{14}{7} = 2$

Exercice 77 On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\\
&= \frac{1\times60}{2\times60}+\frac{1\times30}{4\times30}+\frac{1\times20}{6\times20}+\frac{1\times15}{8\times15}+\frac{1\times12}{10\times12}+\frac{1\times10}{12\times10}\\
&= \frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}\\
&= \frac{60+30+20+15+12+10}{120} = \frac{147}{20}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir $1 = \frac{120}{120}$, il y a $\frac{27}{120}$ « en trop », c'est-à-dire $\frac{15}{120} + \frac{12}{120}$. Il faut donc enlever les termes correspondants :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{60}{120} & + & \frac{30}{120} & + & \frac{20}{120} & + & \xcancel{\frac{15}{120}} & + & \xcancel{\frac{12}{120}} & + & \frac{10}{120} & = 1\\
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{6} & + & \xcancel{\frac{1}{8}} & + & \xcancel{\frac{1}{10}} & + & \frac{1}{12} & = 1.
\end{array}$$

Exercice 78

1. On écrit comme somme de deux fractions égyptiennes :

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

2. On cherche l'entier n tel que

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Cette égalité se réécrit

$$\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{1\times 5}{3\times 5}+\frac{1}{n},$$

soit

$$\frac{6}{15}=\frac{5}{15}+\frac{1}{n}.$$

Il est clair que $n=15$ convient, et que c'est le seul nombre qui convienne.

3. (a) On a intérêt à « partir du membre de droite » : pour tout entier a supérieur à 1,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}&=\frac{a\times 1}{a\times(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)} && \text{(on réduit au même dénominateur)}\\ &=\frac{a}{a(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)}\\ &=\frac{\cancel{a+1}}{a(\cancel{a+1})} && \text{(on simplifie)}\\ &=\frac{1}{a}.\end{aligned}$$

C'est bien l'égalité attendue.

(b) On utilise la question précédente avec $a=6$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}&=\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6(6+1)}\\ \frac{1}{6}&=\frac{1}{7}+\frac{1}{42} && \text{(écriture de }\tfrac{1}{6}\text{ comme somme de deux fractions égyptiennes).}\end{aligned}$$

Exercice 79 La moyenne harmonique de deux nombres strictement positifs a et b est le nombre h défini par :

$$h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

1. (a) La moyenne harmonique de 2 et 6 est

$$\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}}=\frac{2}{\frac{4}{6}}=2\times\frac{6}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

(b) La moyenne harmonique de 4 et 16 est

$$\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{2}{\frac{4}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{2}{\frac{5}{16}}=2\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}=6,4.$$

2. Un cycliste monte une côte de 7 km à la vitesse moyenne de 14 km/h. Arrivé en haut, il fait demi-tour et redescend la côte à la vitesse moyenne de 35 km/h.

(a) On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en h et en km) :

temps (en h)	1	?
distance (en km)	14	7

temps (en h)	1	?
distance (en km)	35	7

Le cycliste met $\frac{1\times 7}{14}=\frac{\cancel{7}}{2\times\cancel{7}}=\frac{1}{2}=0,5$ h pour monter la côte, puis $\frac{1\times 7}{35}=\frac{\cancel{7}}{5\times\cancel{7}}=\frac{1}{5}=0,2$ h pour la descendre.

(b) Au total, le cycliste a parcouru $7+7=14$ km en $0,5+0,2=0,7$ h. On calcule sa vitesse moyenne :

temps (en h)	0,7	1
distance (en km)	14	?

La distance parcourue par le cycliste en 1 h est $\frac{1\times 14}{0,7}=\frac{140}{7}=20$ km, donc sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est de 20 km/h.

(c) Vérifions que la moyenne harmonique de 14 et 35 est égale à 20 :

$$\frac{2}{\frac{1}{14}+\frac{1}{35}}=\frac{2}{\frac{5}{70}+\frac{2}{70}}=\frac{2}{\frac{7}{70}}=\frac{2}{\frac{1}{10}}=2\times\frac{10}{1}=20.$$

3. On note d la longueur de la côte, v_1 la vitesse du cycliste en montée, v_2 sa vitesse en descente.

   Grâce à la formule $t = \frac{d}{v}$, on voit que :
   - le temps de montée est $t_1 = \frac{d}{v_1}$;
   - le temps de descente est $t_2 = \frac{d}{v_2}$.

   Donc au total, le cycliste a parcouru la distance $D = d + d = 2d$, en un temps $T = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$. Sa vitesse moyenne est donc
$$V = \frac{D}{T} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2\cancel{d}}{\cancel{d}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$
   Il s'agit bien de la moyenne harmonique de v_1 et v_2.

   Remarque : Une erreur fréquente est de croire que si on monte à la vitesse v_1 et que l'on redescend à la vitesse v_2, alors la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est $\frac{v_1+v_2}{2}$. C'est la formule de la moyenne que vous utilisez habituellement (on l'appelle « moyenne arithmétique » de v_1 et v_2), mais elle n'est pas adaptée ici. C'est facile à comprendre intuitivement : comme on passe généralement plus de temps à monter, la vitesse en montée a plus d'importance que la vitesse en descente et la moyenne arithmétique (qui attribue une importance égale à v_1 et v_2) ne convient pas.

Exercice 80 L'idée consiste à « partir d'en bas à droite », puis à « remonter » dans la fraction. Par exemple, dans $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$, le premier calcul à effectuer est le $2 + \frac{1}{2}$ tout en bas à droite.

Par ailleurs, on fera bien attention d'écrire les barres de fractions sur toute la largeur nécessaire, sans oublier aucun terme de l'expression. Par exemple, pour commencer le premier calcul, il faut obligatoirement écrire la grosse expression $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$ en entier – sinon c'est faux !

Enfin, il est agréable de remarquer que $\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$: pour inverser une fraction, il suffit d'intervertir le numérateur et le dénominateur. La situation se présentera constamment dans les calculs ci-dessous.

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = 1+\frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = 1+\frac{1}{\frac{5}{3}} = 1+\frac{3}{5} = \frac{5}{5}+\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$
$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{10}{5}+\frac{2}{5}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{5}}} = 1+\frac{1}{\frac{24}{12}+\frac{5}{12}} = 1+\frac{1}{\frac{29}{12}} = \frac{29}{29}+\frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

Remarques :
- Il y a un lien entre le premier calcul et la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., dont chaque terme s'obtient en faisant la somme des deux précédents : $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, $8+5=13$, etc.
- On pourrait poursuivre la fraction jusqu'à l'infini : $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\dots}}}}$. Plus on avance, plus on se rapproche du nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.
- On pourrait aussi poursuivre la deuxième fraction jusqu'à l'infini : $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\dots}}}}$. Dans ce cas, on se rapproche de $\sqrt{2} \approx 1,414$.
- Ces « fractions infinies » sont étudiées par les mathématiciens depuis longtemps ; leur nom officiel est « fractions continues ».

Exercice 81 1. Pour « isoler » d, on part de l'égalité $v = \frac{d}{t}$, dont on multiplie les deux membres par t :
$$v \times t = \frac{d}{\cancel{t}} \times \cancel{t}.$$
Les t se simplifient dans le membre de droite : on obtient $v \times t = d$.

Pour « isoler » t, on repart de l'égalité $v \times t = d$, dont on divise les deux membres par v :
$$\frac{\cancel{v} \times t}{\cancel{v}} = \frac{d}{v}.$$
Conclusion : $\boxed{d = v \times t}$ $\boxed{t = \frac{d}{v}}$

2. On part de l'égalité $U = RI$, dont on divise les deux membres par R :

$$\frac{U}{R} = \frac{\cancel{R} \times I}{\cancel{R}}.$$

Conclusion : $\boxed{I = \frac{U}{R}}$

3. $P = UI$ et $U = RI$ donc $P = \underbrace{U}_{=RI} I = RI \times I = RI^2$

Conclusion : $\boxed{P = RI^2}$

Remarque : Les formules des questions 2 et 3 sont des formules sur les circuits électriques. U désigne la tension (en volts), I l'intensité (en ampères), R la résistance (en ohms) et P la puissance (en watts).

4. On part de l'égalité $v = \sqrt{2gh}$, dont on élève les deux membres au carré :

$$v^2 = \sqrt{2gh}^2$$
$$v^2 = 2gh$$

Puis on divise par $2g$:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\cancel{2g}h}{\cancel{2g}}.$$

Conclusion : $\boxed{h = \frac{v^2}{2g}}$

Remarque : Dans ces formules, v désigne la vitesse (en m/s) et h la distance parcourue (en m) par un objet en chute libre, en supposant qu'il n'est soumis qu'à son propre poids (on suppose en particulier qu'il n'y a pas de frottement). La constante g désigne l'accélération de la pesanteur sur la terre, elle vaut environ 9,8.
Exemple : lorsqu'une personne chute d'une hauteur de 5 m, sa vitesse à l'impact est $v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 5} \approx 9{,}9$ m/s, soit environ 35,6 km/h.

5. On part de l'égalité $E = mc^2$, et l'on divise d'abord par m :

$$\frac{E}{m} = \frac{\cancel{m}c^2}{\cancel{m}}.$$

On obtient $c^2 = \frac{E}{m}$, d'où $\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{m}}}$

Remarque : La relation $E = mc^2$ est due à Einstein. Je laisse aux amateurs de physique le plaisir de se renseigner à son sujet.

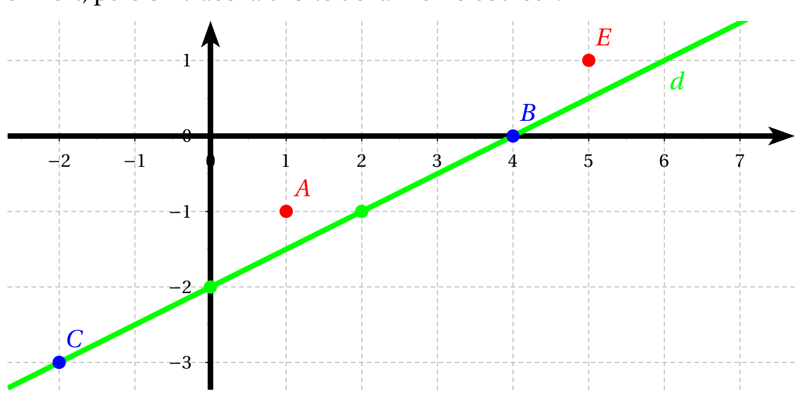
6 Équations de droites

Exercice 76 1. On trace la droite $d : y = 0{,}5x - 2$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	-2	-1

$0{,}5 \times 0 - 2 = -2$
$0{,}5 \times 2 - 2 = -1$

On place les deux points en vert, puis on trace la droite de la même couleur.



2. D'après le cours, un point $M\left(x_M;y_M\right)$ appartient à d si, et seulement si, $y_M = 0,5\times x_M - 2$. Par exemple, $B(\underset{x_B}{4};\underset{y_B}{0})$ est sur d car $\underset{y_B}{0} = 0,5\times \underset{x_B}{4} - 2$.
Faisons le calcul pour chacun des points proposés. On les place ensuite en bleu sur le graphique s'ils sont sur d, en rouge sinon.

Point $A(1;-1)$:	$-1\neq 0,5\times 1-2$	donc $A\notin d$
Point $B(4;0)$:	$0=0,5\times 4-2$	donc $B\in d$
Point $C(-2;-3)$:	$-3=0,5\times(-2)-2$	donc $C\in d$
Point $E(5;1)$:	$1\neq 0,5\times 5-2$	donc $E\notin d$

3. Soit $\Delta : y=-x+3$. Pour savoir si les points proposés sont sur Δ, on reprend la méthode de la question 2 :

Point $H(1;2)$:	$2=-1+3$	donc $H\in\Delta$
Point $I(-2;6)$:	$6\neq-(-2)+3$	donc $I\notin\Delta$
Point $J(1000;-997)$:	$-997=-1000+3$	donc $J\in\Delta$

Exercice 77 1. Soit $D : y=2x+1$.

(a)

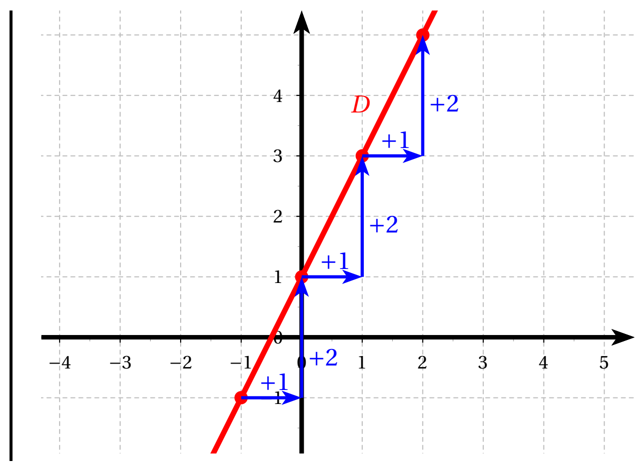
x	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5

$2\times(-1)+1=-1$

$2\times 0+1=1$

$2\times 1+1=3$

$2\times 2+1=5$



(b) Quand x augmente de 1, y augmente de 2.
En effet, dans le tableau précédent, les valeurs de x augmente de 1 en 1 ; tandis les valeurs de y augmentent de 2 en 2. On l'observe bien sur le graphique également.

Remarque : Cela vient du « 2 » de l'équation $y=2x+1$: si x augmente de 1, alors $2x$ augmente de 2. C'est la méthode que l'on utilisera pour vérifier graphiquement la valeur du coefficient directeur (cf les « +2 » sur le graphique) ; elle est généralisée dans la question suivante.

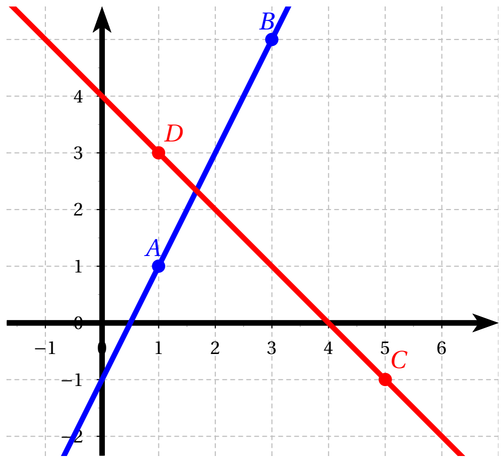
2. Soit Δ une droite non verticale quelconque, d'équation $y=ax+b$; et soient A et B deux points distincts de Δ.
   (a) A est sur Δ, donc $y_A=a\times x_A+b$. De même, B est sur Δ, donc $y_B=a\times x_B+b$.
   (b) On sait que $y_A=ax_A+b$ et que $y_B=ax_B+b$, donc

$$\begin{aligned} y_B-y_A &= (a\times x_B+b)-(a\times x_A+b)\\ &= a\times x_B+\cancel{b}-a\times x_A-\cancel{b}\\ &= a\left(x_B-x_A\right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a\cancel{(x_B-x_A)}}{\cancel{x_B-x_A}}=a.$$

Exercice 78 1.



(a) $A(1;1)$, $B(3;5)$.

La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = 2x + b$.

La droite (AB) passe par $A(\underset{x}{1};\underset{y}{1})$, donc

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \times 1 + b \\ 1 &= 2 + b \\ 1 - 2 &= \cancel{2} + b - \cancel{2} \\ -1 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = 2x - 1$.

(b) $C(5;-1)$, $D(1;3)$.

La droite (CD) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3-(-1)}{1-5} = \frac{4}{-4} = -1.$$

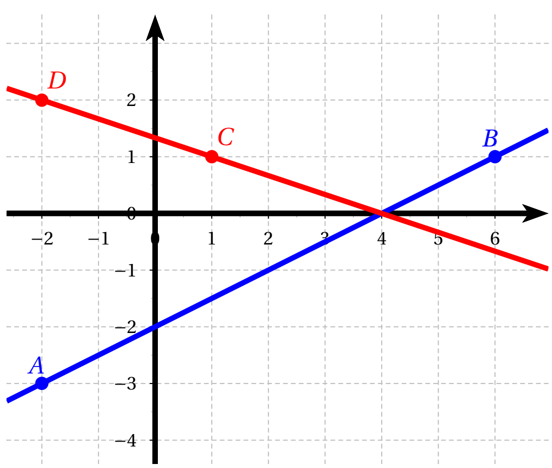
A ce stade, on sait que $(CD) : y = -1x + b$.

La droite (CD) passe par $C(\underset{x}{5};\underset{y}{-1})$, donc

$$\begin{aligned} -1 &= -1 \times 5 + b \\ -1 &= -5 + b \\ -1 + 5 &= \cancel{-5} + b + \cancel{5} \\ 4 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(CD) : y = -1x + 4$ – ou encore $(CD) : y = -x + 4$.

2.



(a) $A(-2;-3)$, $B(6;1)$.

La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-(-3)}{6-(-2)} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = 0,5x + b$.

La droite (AB) passe par $A(\underset{x}{-2};\underset{y}{-3})$, donc

$$\begin{aligned} -3 &= 0,5 \times (-2) + b \\ -3 &= -1 + b \\ -3 + 1 &= \cancel{-1} + b + \cancel{1} \\ -2 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = 0,5x - 2$.

(b) $C(1;1)$, $D(-2;2)$.

La droite (CD) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2-1}{-2-1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

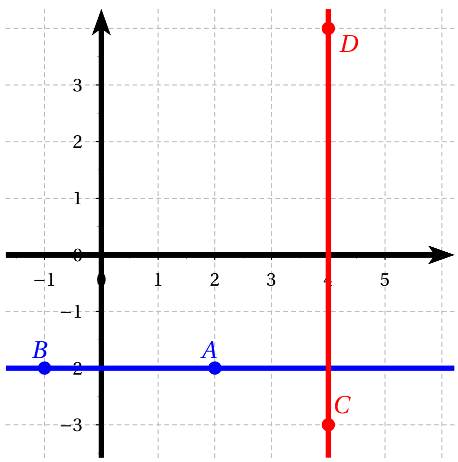
A ce stade, on sait que $(CD) : y = -\frac{1}{3}x + b$.

La droite (CD) passe par $C(\underset{x}{1};\underset{y}{1})$, donc

$$\begin{aligned}
1 &= -\frac{1}{3}\times 1 + b \\
1 &= -\frac{1}{3} + b \\
1 + \frac{1}{3} &= \cancel{-\frac{1}{3}} + b + \cancel{\frac{1}{3}} \\
\frac{3}{3} + \frac{1}{3} &= b \\
\frac{4}{3} &= b
\end{aligned}$$

Conclusion : $(CD) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

3.



$A(2;-2)$, $B(-1;-2)$, $C(4;-3)$, $D(4;4)$.

La droite (AB) est horizontale, c'est l'ensemble des points d'ordonnée $y=-2$, donc son équation est $y=-2$.

$$(AB) : y = -2.$$

La droite (CD) est verticale, c'est l'ensemble des points d'abscisse $x=4$, donc son équation est $x=4$.

$$(CD) : x = 4.$$

Remarques : Dans le cas de droites horizontales ou verticales, on n'attend aucune justification de votre part, vous pouvez directement donner l'équation.

Exercice 79 1. On trace les droites $D_1 : y = x-4$ et $D_2 : y = -2x+3$ à partir de deux tableaux de valeurs :

Tracé de D_1.

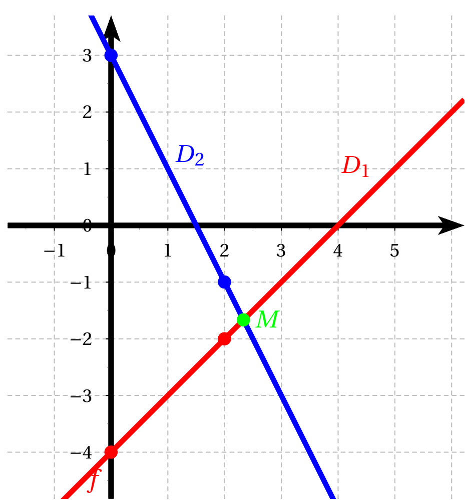
x	0	2
y	-4	-2

$$0-4=-4$$
$$2-4=-2$$

Tracé de D_2.

x	0	2
y	3	-1

$$-2\times 0+3=3$$
$$-2\times 2+3=-1$$



2. On note M le point d'intersection de $D_1 : y = x-4$ et $D_2 : y = -2x+3$. Pour déterminer ses coordonnées, on résout l'équation :

$$
\begin{aligned}
x-4&=-2x+3\\
x-\cancel{4}+\cancel{4}&=-2x+3+4\\
x+2x&=\cancel{-2x}+7+\cancel{2x}\\
\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}&=\frac{7}{3}\\
x&=\frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

On en déduit $y=x-4=\frac{7}{3}-\frac{4}{1}=\frac{7}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{5}{3}$.
Conclusion : $M\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Exercice 80 1. On trace la droite $D : y=2x+1$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	1	5

$$2\times 0+1=1$$
$$2\times 2+1=5$$

2. La droite (AB) a une équation de la forme $y=ax+b$. D'après le cours :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-2}{4-2}=\frac{-4}{2}=-2.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y=-2x+b$.

La droite (AB) passe par $A(2;2)$, donc

$$
\begin{aligned}
2&=-2\times 2+b\\
2&=-4+b\\
2+4&=\cancel{-4}+b+\cancel{4}\\
6&=b
\end{aligned}
$$

Conclusion : $(AB) : y=-2x+6$.

3. On a $D : y=2x+1$ et $(AB) : y=-2x+6$. Pour déterminer les coordonnées de M, on résout l'équation :

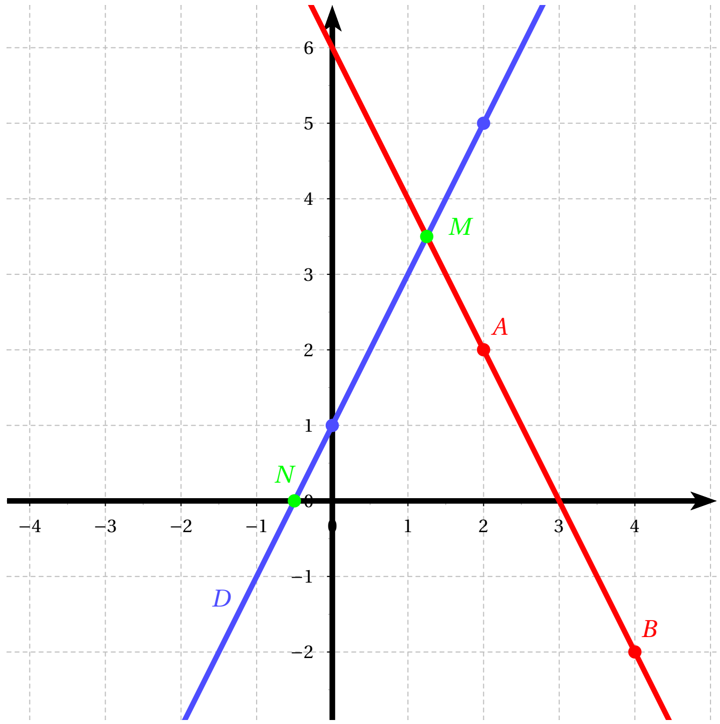
$$
\begin{aligned}
2x+1&=-2x+6\\
2x+\cancel{1}-\cancel{1}&=-2x+6-1\\
2x+2x&=\cancel{-2x}+5+\cancel{2x}\\
\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}&=\frac{5}{4}\\
x&=1,25.
\end{aligned}
$$

On en déduit $y=2x+1=2\times 1,25+1=3,5$.
Conclusion : $M(1,25\ ;\ 3,5)$.

4. $D : y=2x+1$ coupe l'axe des abscisses en N, donc l'ordonnée de N est 0.
Pour déterminer l'abscisse de N, on remplace donc y par 0 dans l'équation de D et on résout l'équation :

$$
\begin{aligned}
0&=2x+1\\
0-1&=2x+\cancel{1}-\cancel{1}\\
\frac{-1}{2}&=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\\
-0,5&=x.
\end{aligned}
$$

Conclusion : $N(-0,5\ ;\ 0)$.



Exercice 81 1. La figure est à la fin.

2. La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{1-(-2)} = \frac{2}{3}.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = \frac{2}{3}x + b$.

La droite (AB) passe par $A(-2;1)$, donc

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{3} \times (-2) + b \\ 1 &= -\frac{4}{3} + b \\ \frac{3}{3} + \frac{4}{3} &= -\cancel{\frac{4}{3}} + b + \cancel{\frac{4}{3}} \\ \frac{7}{3} &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

3. On trace la droite $\Delta : y = -2x + 3$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	3	-1

$$-2 \times 0 + 3 = 3$$
$$-2 \times 2 + 3 = -1$$

4. $(AB) : y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ coupe l'axe des abscisses en M, donc l'ordonnée de M est 0.
Pour déterminer l'abscisse de M, on remplace donc y par 0 dans l'équation de (AB) et on résout l'équation :

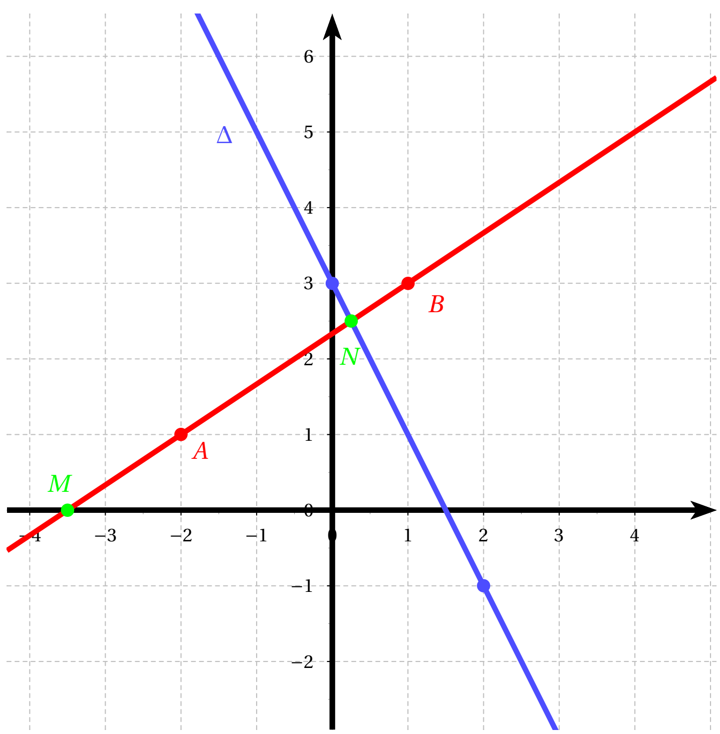
$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \\
0 - \frac{7}{3} &= \frac{2}{3}x + \cancel{\frac{7}{3}} - \cancel{\frac{7}{3}} \\
\frac{-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} &= \frac{\cancel{\frac{2}{3}}x}{\cancel{\frac{2}{3}}} \\
-\frac{7}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} &= x \\
-3,5 &= x.
\end{aligned}
$$

Conclusion : $M(-3,5\ ;\ 0)$.

5. On a $(AB) : y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ et $\Delta : y = -2x + 3$. Pour déterminer les coordonnées de N, on résout l'équation :

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} &= -2x + 3 \\
\frac{2}{3}x + \cancel{\frac{7}{3}} - \cancel{\frac{7}{3}} &= -2x + \frac{9}{3} - \frac{7}{3} \\
\frac{2}{3}x + 2x &= \cancel{-2x} + \frac{2}{3} + \cancel{2x} \\
\frac{2}{3}x + \frac{6}{3}x &= \frac{2}{3} \\
\frac{\cancel{\frac{8}{3}}x}{\cancel{\frac{8}{3}}} &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}} \\
x &= \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{8} \\
x &= 0,25
\end{aligned}
$$

On en déduit $y = -2x + 3 = -2 \times 0,25 + 3 = 2,5$.
Conclusion : $N(0,25\ ;\ 2,5)$.



Exercice 82 1. Pour tracer les droites Δ et D, on fait un tableau de valeurs avec deux valeurs (je ne donne pas de détail).

2. On a $\Delta : y = x - 3$ et D : $y = -2x + 1$. Pour déterminer les coordonnées de M, on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
x - 3 &= -2x + 1 \\
x - \cancel{3} + \cancel{3} &= -2x + 1 + 3 \\
x + 2x &= \cancel{-2x} + 4 + \cancel{2x} \\
\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{4}{3} \\
x &= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

On en déduit $y = x - 3 = \frac{4}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{5}{3}$.
Conclusion : $M\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

3. La droite (AB) a une équation de la forme $y = ax + b$. D'après le cours :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{3 - (-2)} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

A ce stade, on sait que $(AB) : y = 0,8x + b$.

La droite (AB) passe par $A(-2; 1)$, donc

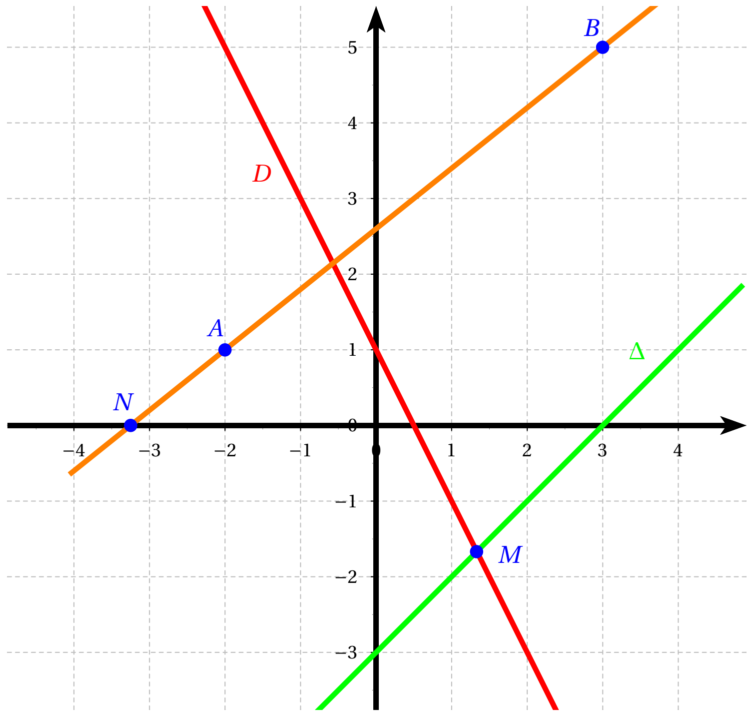
$$\begin{aligned}
1 &= 0,8 \times (-2) + b \\
1 &= -1,6 + b \\
1 + 1,6 &= \cancel{-1,6} + b + \cancel{1,6} \\
2,6 &= b
\end{aligned}$$

Conclusion : $(AB) : y = 0,8x + 2,6$.

4. $(AB) : y = 0,8x + 2,6$ coupe l'axe des abscisses en N, donc l'ordonnée de N est 0.
Pour déterminer l'abscisse de N, on remplace donc y par 0 dans l'équation de (AB) et on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
0 &= 0,8x + 2,6 \\
0 - 2,6 &= 0,8x + \cancel{2,6} - \cancel{2,6} \\
\frac{-2,6}{0,8} &= \frac{\cancel{0,8}x}{\cancel{0,8}} \\
-3,25 &= x.
\end{aligned}$$

Conclusion : $N(-3,25\ ;\ 0)$.



Exercice 83 1. (a) On trace la droite $d : y = 1,5x - 2,4$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	$-2,4$	$0,6$

$1,5 \times 0 - 2,4 = -2,4$

$1,5 \times 2 - 2,4 = 0,6$

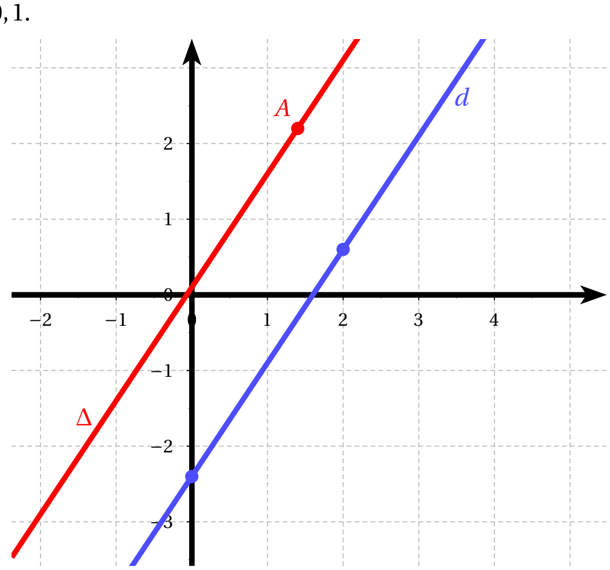
(b) La droite Δ est parallèle à d, donc elles ont le même coefficient directeur. Or le coefficient directeur de d est $1,5$ donc le coefficient directeur de Δ est $1,5$ également. On a donc

$$\Delta : y = 1,5x + b.$$

La droite Δ passe par $A(1,4\ ;\ 2,2)$, donc

$$\begin{aligned} 2,2 &= 1,5 \times 1,4 + b \\ 2,2 &= 2,1 \\ 2,2 - 2,1 &= \cancel{2,1} + b - \cancel{2,1} \\ 0,1 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $\Delta : y = 1,5x + 0,1$.

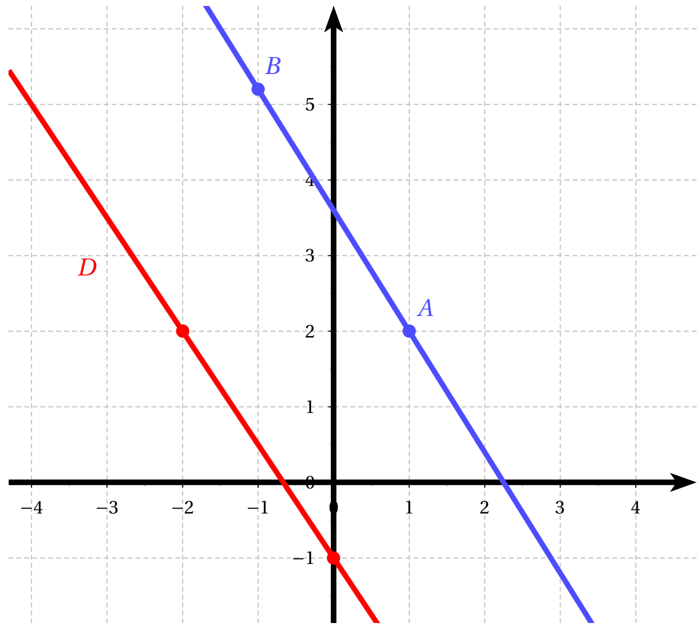


2. (a) On trace la droite $D : y = -1,5x - 1$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	-2
y	-1	2

$-1,5\times 0-1=-1$
$-1,5\times(-2)-1=2$

(b) Le coefficient directeur de D est $-1,5$.
Le coefficient directeur de (AB) est
$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5,2-2}{-1-1}=\frac{3,2}{-2}=-1,6.$$
Les droites D et (AB) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles ne sont pas parallèles.



Exercice 84 1. La droite (AB) a une équation de la forme $y=ax+b$. D'après le cours :
$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-(-2)}{5-1}=\frac{2}{4}=0,5.$$
A ce stade, on sait que $(AB): y=0,5x+b$.

La droite (AB) passe par $A(1;-2)$, donc
$$\begin{aligned}-2&=0,5\times 1+b\\-2&=0,5+b\\-2-0,5&=\cancel{0,5}+b-\cancel{0,5}\\-2,5&=b\end{aligned}$$
Conclusion : $(AB): y=0,5x-2,5$.

2. On trace la droite $\Delta : y=-2x+5$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	2
y	5	1

$-2\times 0+5=5$
$-2\times 2+5=1$

3. On a $(AB): y=0,5x-2,5$ et $\Delta : y=-2x+5$. Pour déterminer les coordonnées de M, on résout l'équation :
$$\begin{aligned}0,5x-2,5&=-2x+5\\0,5x-\cancel{2,5}+\cancel{2,5}&=-2x+5+2,5\\0,5x+2x&=\cancel{-2x}+7,5+\cancel{2x}\\\frac{\cancel{2,5}x}{\cancel{2,5}}&=\frac{7,5}{2,5}\\x&=3.\end{aligned}$$

On en déduit $y = 0,5x - 2,5 = 0,5 \times 3 - 2,5 = 1,5 - 2,5 = -1$.
Conclusion : $M(3;-1)$.

4. d est parallèle à Δ, donc elles ont le même coefficient directeur (-2) ; on a donc $d : y = -2x + b$.

   Pour trouver b, on utilise le fait que d passe par $C(\underset{x}{-2};\underset{y}{3})$:

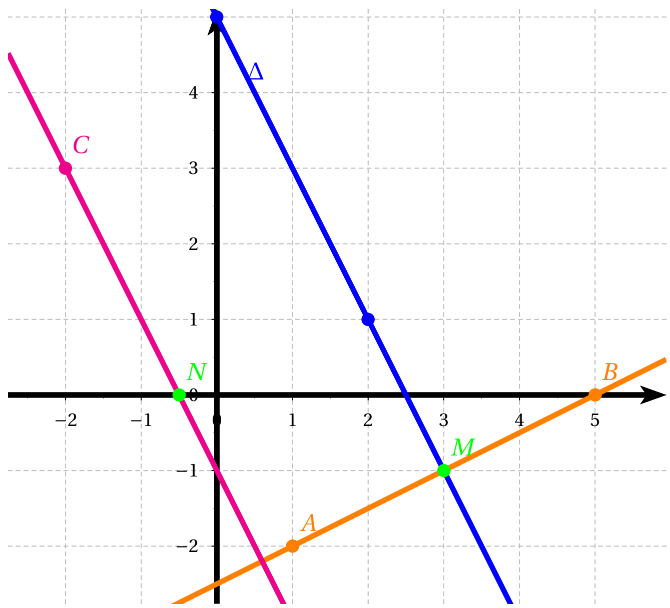
$$\begin{aligned} 3 &= -2 \times (-2) + b \\ 3 &= 4 + b \\ 3 - 4 &= \cancel{4} + b - \cancel{4} \\ -1 &= b \end{aligned}$$

   Conclusion : $d : y = -2x - 1$.

5. $d : y = -2x - 1$ coupe l'axe des abscisses en N, donc l'ordonnée de N est 0.
   Pour déterminer l'abscisse de N, on remplace donc y par 0 dans l'équation de d et on résout l'équation :

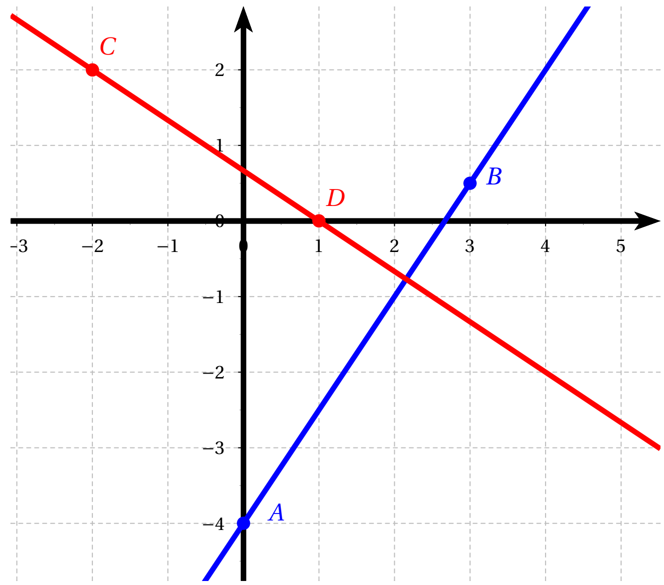
$$\begin{aligned} 0 &= -2x - 1 \\ 0 + 1 &= -2x - \cancel{1} + \cancel{1} \\ \frac{1}{-2} &= \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} \\ -0,5 &= x. \end{aligned}$$

   Conclusion : $N(-0,5\ ;\ 0)$.



Exercice 85 Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(0;-4)$, $B(3;0,5)$, $C(-2;2)$ et $D(1;0)$.



Le coefficient directeur de (AB) est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,5-(-4)}{3-0} = \frac{4,5}{3} = 1,5.$$

Le coefficient directeur de (CD) est

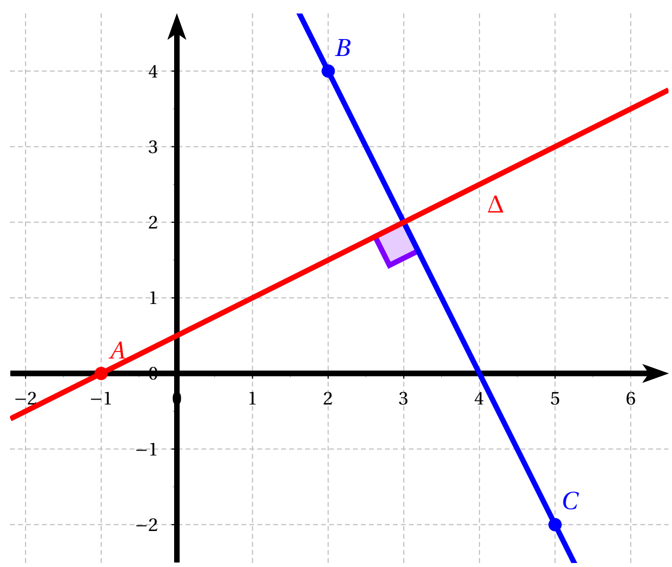
$$a' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0-2}{1-(-2)} = \frac{-2}{3}.$$

On calcule le produit :

$$a \times a' = 1,5 \times \frac{-2}{3} = -\frac{1,5\times 2}{3} = -\frac{3}{3} = -1.$$

D'après la propriété donnée avant l'énoncé, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

2. Soients $A(-1;0)$, $B(2;4)$, $C(5;-2)$; et Δ la perpendiculaire à (BC) passant par A.



Le coefficient directeur de (BC) est

$$a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2-4}{5-2} = \frac{-6}{3} = -2.$$

On note a' le coefficient directeur de Δ. Comme $(BC) \perp \Delta$, d'après la propriété donnée avant l'énoncé, $a \times a' = -1$, soit $(-2) \times a' = -1$. On a donc

$$\frac{\cancel{-2}a'}{\cancel{-2}} = \frac{-1}{-2} \qquad \text{et ainsi} \qquad a' = 0,5.$$

A ce stade, on sait que $\Delta : y = 0,5x + b$.

La droite Δ passe par $A(-1;0)$, donc

$$\begin{aligned} 0 &= 0,5 \times (-1) + b \\ 0 &= -0,5 + b \\ 0 + 0,5 &= \cancel{-0,5} + b + \cancel{0,5} \\ 0,5 &= b \end{aligned}$$

Conclusion : $\Delta : y = 0,5x + 0,5$.

Exercice 86 Le tableau suivant donne la part (en pourcentage) des voitures diesel dans les ventes de voitures neuves, en France, entre 2012 et 2017.

Rang de l'année	0	1	2	3	4	5
% des voitures diesel	73	67	64	58	52	48

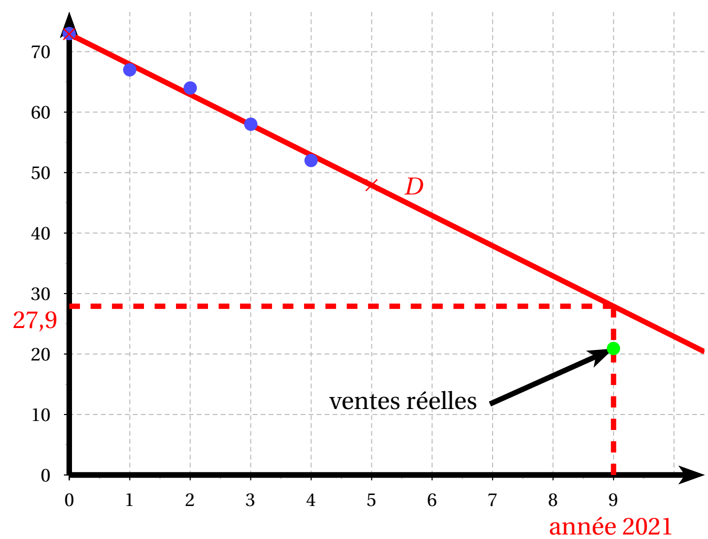
1. On place les points (en bleu) dans un repère comme s'il s'agissait de tracer la courbe représentative d'une fonction. On ne les relie pas.
2. Les points placés à la question précédente sont « presque alignés ». La calculatrice permet d'obtenir l'équation de la droite « la plus proche » de ces points, qu'on appelle droite d'ajustement (ou droite de régression).

   Avec une Calculatrice collège, la procédure est la suivante :
   - touche $\boxed{\text{MENU}}$ – on choisit $\boxed{\text{2 :Statistiques}}$ puis $\boxed{\text{2 :y=ax+b}}$
   - on entre les valeurs du tableau en colonne
   - touche $\boxed{\text{OPTN}}$ – on choisit $\boxed{\text{4 :Calc régression}}$ – on lit les valeurs de a et b

   On obtient a $\approx -5,0$ et b $\approx 72,9$. La droite d'ajustement D a donc pour équation $y = -5x + 72,9$.
3. On trace la droite $D : y = -5x + 72,9$ (en rouge) à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs. Par exemple :

x	0	5
y	72,9	47,9

$$-5 \times 0 + 72,9 = 72,9$$
$$-5 \times 5 + 72,9 = 47,9$$



La droite est toute proche des points bleus. Elle « modélise » l'évolution de la part des voitures diesel à partir de 2012.

Si cet ajustement était fiable, en 2021 (année n°9), le pourcentage de diesels dans les ventes de voitures neuves devrait être approximativement égal à

$$-5 \times 9 + 72,9 = 27,9$$

(voir pointillés rouges).

En réalité, les diesels ne représentaient plus que 20,9 % des ventes en 2021, ce qui montre que l'ajustement proposé dans l'énoncé n'est plus valable – c'est à partir de 2018 que les ventes commencent à « décrocher ».

Exercice 87 Au 18° siècle, l'étude des distances entre les planètes et le soleil a conduit les astronomes Titius et Bode à imaginer l'existence d'une planète encore inconnue, Cérès, entre Mars et Jupiter.
Le graphique ci-dessous donne les distances des planètes au soleil, en unités astronomiques (1 UA = distance terre-soleil).

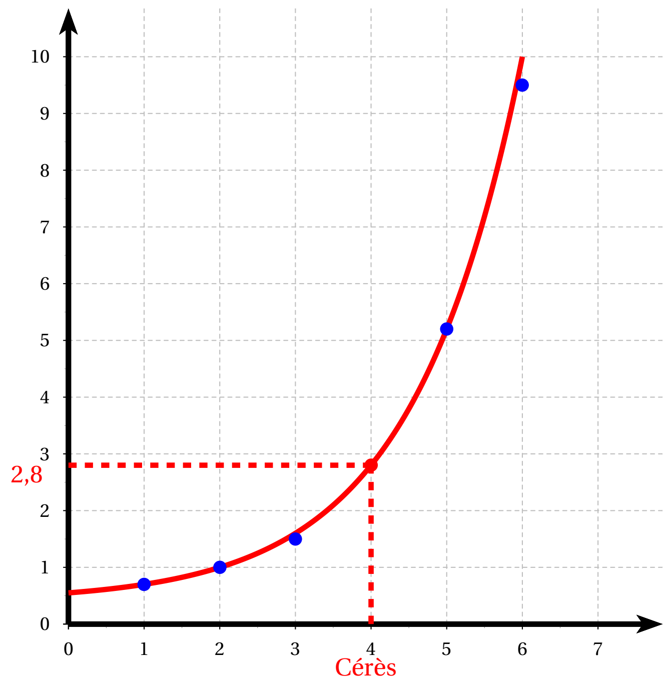
Nom	Vénus	Terre	Mars	Cérès	Jup.	Satur.
Rang	1	2	3	4	5	6
Distance	0,7	1	1,5	?	5,2	9,5

1. On construit le nuage de points associé à cette série comme dans l'exercice précédent. On laisse vide l'emplacement pour la planète n°4.
2. Pour tracer la courbe de la fonction, on fait un tableau de valeurs sur $[0;6]$ avec un pas de 1.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$0,7$	1	$1,6$	$2,8$	$5,2$	6	10

Détail de deux calculs :
- $f(0) = 0,4 + 0,15 \times 2^0 = 0,4 + 0,15 \times 1 = 0,4 + 0,15 = 0,55$ (⚠ $2^0 = 1$).
- $f(3) = 0,4 + 0,15 \times 2^3 = 0,4 + 0,15 \times 8 = 0,4 + 1,2 = 1,6$.

On trace la courbe en rouge dans le repère ci-dessous.



3. Suivant l'ajustement par la fonction f, la planète n°4 Cérès devrait se trouver à 2,8 U.A. du soleil.

Remarque : Il existe bel et bien une planète naine Cérès, dans la ceinture d'astéroïde, entre Mars et Jupiter. Le modèle de l'énoncé a également participé à la découverte d'Uranus. Pourtant, on considère aujourd'hui que ce modèle n'est pas fiable et que son efficacité à détecter des planètes relève d'un « coup de chance » formidable (le terme savant est « sérendipité »). On renvoie le lecteur à l'article Wikipédia sur la loi de Titius-Bode pour plus de détails.

7 Pourcentages, taux d'évolution

Exercice 88 1. On complète un tableau de proportionnalité :

Élèves	30	?
Pourcentage	100	80

Il y a $30 \times 80 \div 100 = 24$ filles dans la classe.

2. On complète un tableau de proportionnalité :

Marins	1 760	1 046
Pourcentage	100	?

$1\,046 \times 100 \div 1\,760 \approx 59,43$, donc environ 59,43 % des marins sont tombés malades.

N.B. On fait le calcul et, seulement après, on écrit la réponse avec le symbole %. Rappelons à cette occasion la signification de 59,43 % :

$$59,43\ \% = \frac{59,43}{100} = 0,5943.$$

Donc dire que 59,43 % des marins sont tombés malades, c'est dire que la proportion de malades est $\frac{59,43}{100}$.

3. Le fait que la bouteille soit titrée à 12 % vol. signifie qu'elle contient 12 % d'alcool pur. On complète donc un tableau de proportionnalité :

Volume (en mL)	500	?
Pourcentage	100	12

La bouteille contient $500 \times 12 \div 100 = 60$ mL d'alcool pur.

4. On complète un tableau de proportionnalité :

Votes	16 161	8 892
Pourcentage	100	?

$8\,892 \times 100 \div 16\,161 \approx 55,02$, donc environ 55,02 % des électeurs ont voté pour E. Macron.

5. Sur 100 personnes de l'entreprise, il y a 56 hommes.
25 % d'entre eux fument, ce qui représente

$$25 \times 56 \div 100 = 14 \text{ personnes}$$

(on peut bien sûr faire un tableau de proportionnalité pour obtenir cette réponse).
Conclusion : les hommes fumeurs représentent 14 % du personnel de l'entreprise.