# Corrigé du devoir surveillé n°1

## Exercice 1

1. $f$ est de la forme $f = u^n$, avec $u(x) = 5x - 3$, $u'(x) = 5$ et $n = 4$. Donc pour tout réel $x$ :

$$f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1} = 4 \times 5 \times (5x-3)^{4-1} = 20\,(5x-3)^3.$$

2. $g$ est de la forme $g = \mathrm{e}^u$, avec $u(x) = x^2 - x + 1$, $u'(x) = 2x - 1$. Donc pour tout réel $x$ :

$$g'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x+1}.$$

## Exercice 2

1. (a) La fonction $f$ s'écrit comme un produit : $f = u \times v$, avec
   - $u(x) = 4x - 2$, $\quad u'(x) = 4$,
   - $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $\quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

   Donc pour tout $x \in [0;6]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 4 \times \mathrm{e}^{-x} + (4x-2) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 4 \times \mathrm{e}^{-x} - 4x \times \mathrm{e}^{-x} + 2 \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= (4 - 4x + 2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

   (b) On étudie le signe de $f'$ et on en déduit les variations de $f$ :

| $x$ | 0 | | 1.5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4x+6$ | | + | 0 | − | |
| $\mathrm{e}^{-x}$ | | + | | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

2. (a) On admet que

$$f''(x) = (4x-10)\mathrm{e}^{-x}$$

   pour tout $x \in [0;6]$. On peut donc construire le tableau de signe :

| $x$ | 0 | | 2.5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x-10$ | | − | 0 | + | |
| $\mathrm{e}^{-x}$ | | + | | + | |
| $f''(x)$ | | − | 0 | + | |

   Par conséquent :
   - $f''$ est négative sur $[0;2,5]$, donc $f$ est concave sur cet intervalle.
   - $f''$ est positive sur $[2,5;6]$, donc $f$ est convexe sur cet intervalle.

   (b) $f''$ change de signe en $2,5$, donc il y a un unique point d'inflexion $A$, dont l'abscisse vaut $2,5$.
   La tangente $T$ en ce point $A$ a pour équation

$$y = f'(2,5)(x-2,5) + f(2,5).$$

   On calcule :

- $f(2,5) = (4\times 2,5-2)\mathrm{e}^{-2,5} = 8\mathrm{e}^{-2,5}$,
- $f'(2,5) = (-4\times 2,5+6)\mathrm{e}^{-2,5} = -4\mathrm{e}^{-2,5}$,

donc

$$\begin{aligned} T: y &= -4\mathrm{e}^{-2,5}(x-2,5)+8\mathrm{e}^{-2,5}\\ T: y &= -4\mathrm{e}^{-2,5}x+10\mathrm{e}^{-2,5}+8\mathrm{e}^{-2,5}\\ T: y &= -4\mathrm{e}^{-2,5}x+18\mathrm{e}^{-2,5}\end{aligned}$$

(c) Le point $B$ est le point d'intersection de $T$ avec l'axe des abscisses. Pour obtenir ses coordonnées, on remplace donc $y$ par 0 dans l'équation de $T$, puis on résout pour trouver $x$ :

$$0 = -4\mathrm{e}^{-2,5}x+18\mathrm{e}^{-2,5} \iff 4\mathrm{e}^{-2,5}x = 18\mathrm{e}^{-2,5} \iff x = \frac{18\cancel{\mathrm{e}^{-2,5}}}{4\cancel{\mathrm{e}^{-2,5}}} \iff x = 4,5.$$

Conclusion : $B$ a pour coordonnées $(4,5\ ;\ 0)$.

# Exercice 3

Un mobile se déplace sur un axe $[Ox)$ gradué en cm. On observe son déplacement pendant une durée de 6 secondes.
Sa position sur l'axe est donnée en fonction du temps $t$ (en s), par la fonction

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t.$$

1. Pour tout $t \in [0;6]$ :
$$f'(t) = \frac{1}{3}\times 3t^2 - 4\times 2t + 12\times 1 = t^2 - 8t + 12.$$
Pour obtenir le signe de $f'$, on résout l'équation $t^2 - 8t + 12 = 0$ :
$$\Delta = (-8)^2 - 4\times 1\times 12 = 16,$$
donc il y a deux racines :
$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{8+4}{2} = 6,\\ t_2 &= \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{8-4}{2} = 2.\end{aligned}$$
On en déduit le signe de $f'$ et les variations de $f$ :

| $t$ | 0 | | 2 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | + | 0 | − | 0 |
| $f(t)$ | 0 | ↗ | $\frac{32}{3}$ | ↘ | 0 |

2. D'après le tableau de variations de la question précédente, le mobile part du point $O$, puis se déplace vers la droite, jusqu'à la graduation $\frac{32}{3}$ cm, qu'il atteint au temps $t = 2$ s. Ensuite il revient au point $O$, qu'il atteint au temps $t = 6$ s.
3. Lorsqu'il retourne au point $O$, donc au temps $t = 6$ s, la vitesse du mobile est $f'(6) = 0$ cm/s.