Mathématiques – Terminale spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Compléments sur la dérivation

Exercice 1 La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2;6]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 4.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,5 \times 2x - 2 \times 1 - 0 = x - 2.$$

La dérivée est du premier degré, donc pour obtenir le tableau de signe, il faut résoudre une équation, puis regarder le signe de a :

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x - \cancel{2} + \cancel{2} &= 0 + 2 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$a = 1$ (puisque $x - 2$ signifie $1x - 2$), a est $\oplus$ donc le signe est de la forme $\boxed{- \ \phi \ +}$

On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f :

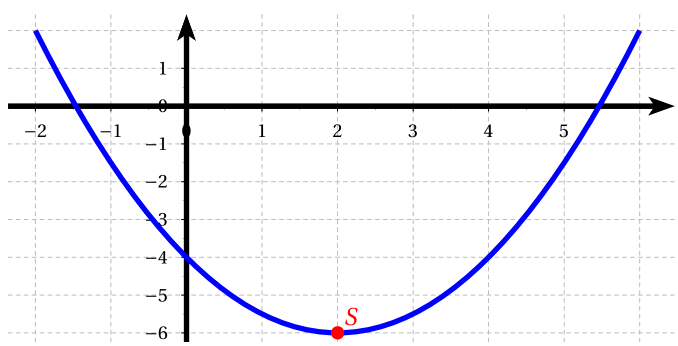
x	-2		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2

Pour compléter l'extrémité des flèches, on calcule :

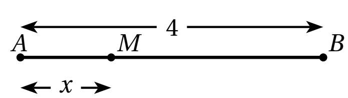
- $f(-2) = 0,5 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) - 4 = 2$
- $f(2) = 0,5 \times 2^2 - 2 \times 2 - 4 = -6$
- $f(6) = 0,5 \times 6^2 - 2 \times 6 - 4 = 2$

On peut aussi faire un tableau de valeurs à la calculatrice.

Remarque : La courbe représentative est une parabole, dont le sommet S a pour coordonnées $(2;-6)$.



Exercice 2 On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 et un point mobile M pouvant se déplacer librement sur ce segment.



On note x la longueur du segment $[AM]$ et $f(x)$ le produit des longueurs $AM \times BM$.

1. $BM = AB - AM = 4 - x$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= AM \times BM \\ &= x \times (4 - x) \\ &= x \times 4 + x \times (-x) \\ &= 4x - x^2. \end{aligned}$$

2. Le produit des longueurs $AM \times BM$ est donné par $f(x)$, donc maximiser ce produit revient à maximiser la fonction f. On étudie donc les variations : pour tout $x \in [0;4]$,

$$f'(x) = 4 \times 1 - 2x = -2x + 4.$$

On résout :

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= 0 \\ -2x + \cancel{4} - \cancel{4} &= 0 - 4 \\ \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} &= \frac{-4}{-2} \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$a = -2$, a est $\ominus$ donc le signe est de la forme $\boxed{+ \ \phi \ -}$

On obtient le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f :

x	0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Il n'est pas utile ici de compléter l'extrémité des flèches : tout ce qui nous intéresse, c'est la valeur de x pour laquelle f atteint son maximum.

Conclusion : f atteint son maximum lorsque $x = 2$, donc le produit $AM \times BM$ est maximal lorsque $x = 2$; c'est-à-dire quand M est le milieu de $[AB]$.

Remarque : Cet exemple est celui qu'a choisi Fermat vers 1637 pour exposer sa méthode de l'adégalité – ancêtre de la dérivation – pour déterminer le maximum et le minimum d'une fonction.

Exercice 3 La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 0,5x^3 + 0,75x^2 - 3x - 1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 0,5 \times 3x^2 + 0,75 \times 2x - 3 \times 1 - 0 = 1,5x^2 + 1,5x - 3.$$

La dérivée est du second degré, donc on utilise la méthode de la classe de première :

- $a = 1,5$, $b = 1,5$, $c = -3$.
- le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1,5^2 - 4 \times 1,5 \times (-3) = 20,25$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

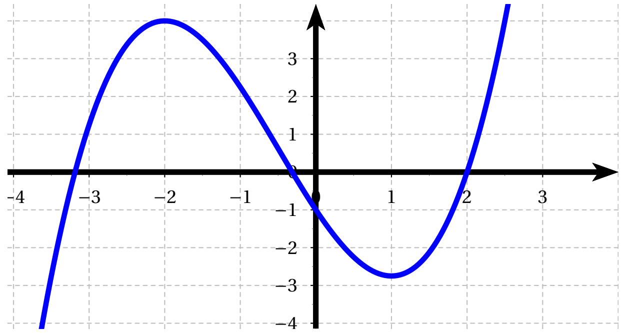
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,5 - \sqrt{20,25}}{2 \times 1,5} = \frac{-1,5 - 4,5}{3} = \frac{-6}{3} = -2, \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,5 + \sqrt{20,25}}{2 \times 1,5} = \frac{-1,5 + 4,5}{3} = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

$a = 1,5$ a est $\oplus$ donc le signe est de la forme $\boxed{+ \ \phi \ - \ \phi \ +}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	4	↘	-2.75	↗	

- $g(-2) = 0,5 \times (-2)^3 + 0,75 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) - 1 = 4$
- $g(1) = 0,5 \times 1^3 + 0,75 \times 1^2 - 3 \times 1 - 1 = -2,75$

Remarque : Voici à quoi ressemble la courbe représentative :



Exercice 4 La fonction h est définie sur $[1;+\infty[$ par

$$h(x) = (x-6)\sqrt{x}.$$

On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$u(x) = x-6 \quad , \quad v(x) = \sqrt{x},$$
$$u'(x) = 1 \quad , \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On obtient, pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)\\
&= 1 \times \sqrt{x} + (x-6) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\text{rappel : } \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x\right)\\
&= \frac{3x-6}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

- On résout rapidement :

$$3x-6=0 \iff 3x=6 \iff x = \frac{6}{3} = 2.$$

- Dans $3x-6$, $a = 3 \oplus$, donc $\boxed{-\ \phi\ +}$
- $2\sqrt{x}$ est strictement positif pour tout $x \in [1;+\infty[$.

On a donc le tableau :

x	1		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x}$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-5	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	

- $h(1) = (1-6) \times \sqrt{1} = -5 \times 1 = -5$;
- $h(2) = (2-6) \times \sqrt{2} = -4\sqrt{2}$.

Exercice 5 La fonction f est définie sur $[1;4]$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x} - 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, 2, 4 ; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. Pour dériver, le plus simple est de réécrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = x + 4 \times \frac{1}{x} - 3.$$

On obtient alors, pour tout $x \in [1;4]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 \\ &= 1 - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{x^2} \end{aligned}$$

2. • Les racines de $x^2 - 4$ sont évidentes : ce sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$. Seule la deuxième est dans l'intervalle $[1;4]$.
   • x^2 est strictement positif pour tout $x \in [1;4]$.

   On obtient donc le tableau :

x	1		2		4
$x^2 - 4$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	1	↗	2

Le signe de $x^2 - 4$ sur $]-\infty;+\infty[$ est de la forme $\boxed{+\ \phi\ -\ \phi\ +}$
Mais comme on travaille sur l'intervalle $[1;4]$, il ne reste plus que la partie droite $\boxed{-\ \phi\ +}$

On calcule les valeurs aux extrémités des flèches :
- $f(1) = 1 + \frac{4}{1} - 3 = 2$;
- $f(2) = 2 + \frac{4}{2} - 3 = 1$;
- $f(4) = 4 + \frac{4}{4} - 3 = 2$.

3. On rappelle que la tangente à la courbe en un point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Appliquons cette formule avec $a = 1$ – puisque le point A a pour abscisse 1 :

$f(1) = 2$ (déjà calculé) et $f'(1) = \frac{1^2-4}{1^2} = \frac{-3}{1} = -3$, donc l'équation de T_A est

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= -3(x-1) + 2 \\ y &= -3x + 3 + 2 \\ y &= -3x + 5. \end{aligned}$$

Le point A a pour coordonnées $(1;2)$, puisque $f(1) = 2$; la tangente T_A passe donc par ce point. Pour la tracer, il faut placer un deuxième point (c'est une droite) ; ce que l'on peut faire de trois façons différentes :

(a) L'ordonnée à l'origine est 5 (puisque $T_A : y = -3x+5$), donc T_A passe par le point de coordonnées $(0;5)$.

(b) Le coefficient directeur de T_A est -3 (puisque $T_A : y = -3x + 5$), donc en partant de A, il suffit d'avancer de 1 carreau en abscisse et de descendre de 3 carreaux en ordonnée – T_A passe donc par le point de coordonnées $(2;-1)$.

(c) On calcule un deuxième point avec la formule : par exemple, si $x = 2$, $y = -3 \times 2 + 5 = -1$. On obtient le point de coordonnées $(2;-1)$ (le même qu'avec la méthode (b)) et on trace la tangente.

4. • $f(2) = 1$ et $f'(2) = \frac{2^2-4}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$, donc l'équation de T_B est

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ y &= 0(x-1) + 1 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

   Le coefficient directeur étant égal à 0, la tangente T_B est horizontale.

- $f(4) = 2$ et $f'(4) = \frac{4^2-4}{4^2} = \frac{12}{16} = 0,75$, donc l'équation de T_C est

$$\begin{aligned}
y &= f'(4)(x-4) + f(4)\\
y &= 0,75(x-4)+2\\
y &= 0,75x - 3 + 2\\
y &= 0,75x - 1.
\end{aligned}$$

On trace la tangente T_C par la même méthode que T_A (le plus simple et le plus précis est d'utiliser l'ordonnée à l'origine).

5. On place les points A, B, C, on trace les trois tangentes et on construit la courbe de la fonction f (en bleu) en s'appuyant sur ces tangentes.