

Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Rappels de calcul et de géométrie | 2 |
| 2 | Nombres réels | 14 |
| 3 | Géométrie repérée | 18 |
| 4 | Études graphiques de fonctions | 25 |

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

| | | |
|---------------------|-----|---|
| Nombre de personnes | 4 | 6 |
| Farine (en g) | 250 | ? |
| Lait (en mL) | 500 | ? |
| Œufs | 4 | 6 |

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250 \times 6}{4} = \frac{1500}{4} = 375$ g de farine, $\frac{500 \times 6}{4} = \frac{3000}{4} = 750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6 \times 125 = 750$ g.

| | | |
|--------------|------|-----|
| masse (en g) | 1000 | 750 |
| prix (en €) | 2 | ? |

Je payerai $\frac{750 \times 2}{1000} = \frac{1500}{1000} = 1,5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes¹.

| | | |
|------------------|----|----|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 20 | 45 |

On mettra $\frac{60 \times 45}{20} = \frac{20 \times 3 \times 45}{20} = 135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135 = 120 + 15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

| | | | |
|----------|---|---|----|
| Florins | 7 | ? | ① |
| Pistoles | 6 | 4 | ② |
| Deniers | ? | 5 | 30 |

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4 \times 30 \div 5 = 24$ pistoles :

| | | | |
|----------|---|---|----|
| Florins | 7 | ? | ① |
| Pistoles | 6 | 4 | 24 |
| Deniers | ? | 5 | 30 |

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7 \times 24}{6} = \frac{7 \times 4 \times 6}{6} = 28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

| | | |
|------------------|----|-----|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 3 | 0,5 |

| | | |
|------------------|----|---|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 15 | 5 |

Stéphane nage $\frac{60 \times 0,5}{3} = \frac{30}{3} = 10$ min, puis il court $\frac{60 \times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5 + 0,5 = 5,5$ km, en $10 + 20 = 30$ min.

| | | |
|------------------|-----|----|
| temps (en min) | 30 | 60 |
| distance (en km) | 5,5 | ? |

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60 \times 5,5}{30} = \frac{30 \times 2 \times 5,5}{30} = 11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD , d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

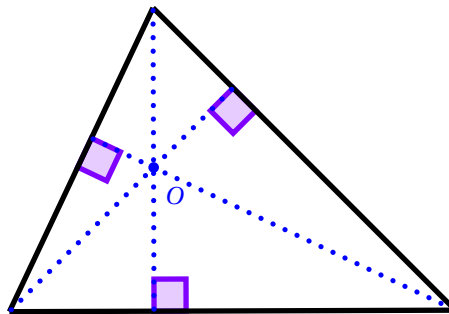
$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(5 + 3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L , donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.

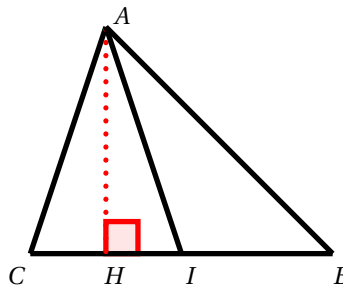


Exercice 5 Rappels :

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA , donc

$$\mathcal{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2}$$

$$\mathcal{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I est le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7 La méthode la plus simple pour écrire la négation d'une affirmation est d'utiliser des « ne pas », comme vous avez appris à le faire à l'école primaire. Par exemple, la négation de

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

Si un nombre se termine par 0, alors il est multiple de 10.

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_B$

et sa réciproque

Si un nombre est multiple de 10, alors il se termine par 0.

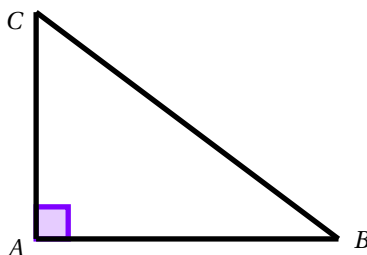
$\underbrace{\hspace{10em}}_B$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. Théorème de Pythagore.

Si ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



2. Théorème contraposé de Pythagore.

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A .

3. Théorème réciproque de Pythagore.

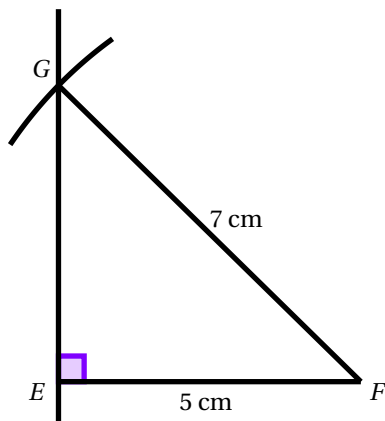
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠ En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E .
- Un arc de cercle de centre F , de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G .



D'après le **théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

$$\begin{aligned}
 FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\
 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\
 49 &= 25 + EG^2 \\
 49 - 25 &= EG^2 \\
 \sqrt{24} &= EG
 \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

⚠ Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

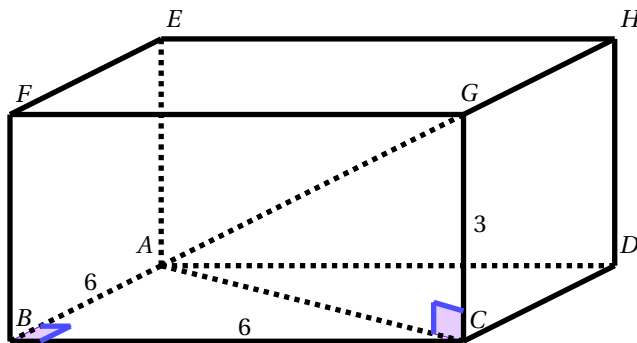
2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A .

On calcule :

$$\left. \begin{array}{l} BC^2 = 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{array} \right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

D'après la **contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A .

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B ,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 6^2 + 6^2 \\ AC^2 &= 36 + 36 \\ AC^2 &= 72 \\ &\text{(Inutile de donner } AC \text{ !)} \end{aligned}$$

Dans ACG rectangle en C ,

$$\begin{aligned} AG^2 &= AC^2 + CG^2 \\ AG^2 &= 72 + 3^2 \\ AG^2 &= 72 + 9 \\ AG^2 &= 81 \\ AG &= \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1,2$ cm.



1. $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3 \text{ cm}^2$.

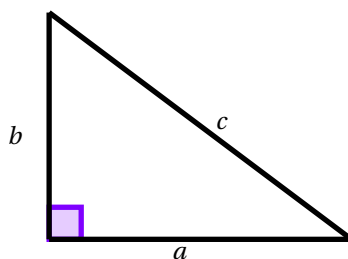
2. On a aussi $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$, donc $3 = \frac{PN \times 3}{2}$, soit $3 \times 2 = PN \times 3$; et donc $PN = 2$ cm.

3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN , puis KP et MP .

△ On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.

- Pour KN , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN . On obtient $KN = 4$ cm.
- $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
- Enfin, pour calculer PM , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP . On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b , l'hypoténuse mesure c .



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

Pour tous nombres positifs a et b , $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

est FAUSSE! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

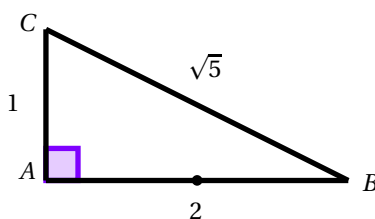
$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{est différent de} \quad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2 + b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a + b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

Exercice 14 1. L'égalité $1^2 + 2^2 = 5$ peut encore s'écrire

$$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2.$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore, un triangle de côtés $AB = 2$, $AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$ est rectangle en A .



2. On propose deux méthodes :

- (a) **Méthode géométrique.** L'hypoténuse $[BC]$ du triangle construit dans la question 1 est strictement plus grande que le côté de l'angle droit $[AB]$, donc $2 < \sqrt{5}$.

Par ailleurs, la distance la plus courte de B à C est la ligne droite, donc le chemin qui part de B et passe par A avant d'arriver à C a une longueur strictement plus grande que celle du segment $[BC]$. Autrement dit, $\sqrt{5} < 2 + 1$; c'est-à-dire $\sqrt{5} < 3$.

Conclusion :

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

- (b) **Méthode par le calcul.** On compare les carrés :

$$2^2 = 4, \quad \sqrt{5}^2 = 5 \quad \text{et} \quad 3^2 = 9.$$

Or $4 < 5 < 9$, donc

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

3. On calcule en posant les multiplications :

$$2,0^2 = 4$$

$$2,1^2 = 4,41$$

$$2,2^2 = 4,84$$

$$2,3^2 = 5,29.$$

Or $4,84 < 5 < 5,29$, donc

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3.$$

Remarques :

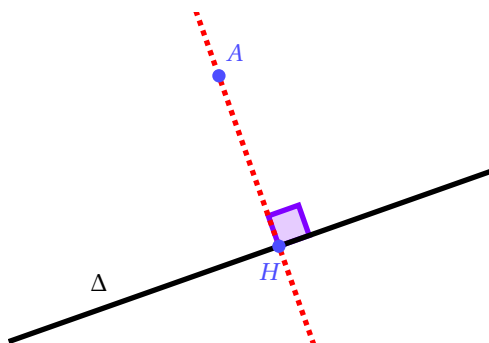
- L'écart entre 2,2 et 2,3 est bien égal à 0,1.
- On devait continuer les calculs jusqu'à dépasser 5 – donc on aurait pu avoir besoin de calculer $2,4^2$, $2,5^2$, etc. On était sûr cependant de ne pas dépasser 3,0.
- Rappel pour poser une multiplication avec un exemple :

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times 2.3 \\ \hline 6\ 9 \\ 4\ 6 \\ \hline 5.2\ 9 \end{array}$$

Rappelons que comme les facteurs 2,3 et 2,3 ont chacun 1 chiffre après la virgule, le résultat final en a $1 + 1 = 2$.

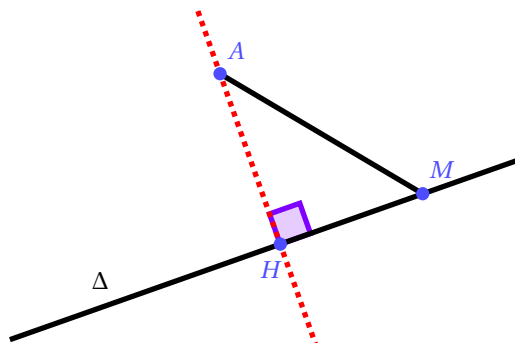
Exercice 15 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A . Elle coupe Δ en H .



2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H , donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur² issue de A dans le triangle ABC .

2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur*; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B \times h}{2}$ pour l'aire du triangle.



Exercice 16 On résout les équations :

| | | | | |
|--|---|--|---|--|
| $x + 7 = 18$ $x + \cancel{7} - \cancel{7} = 18 - 7$ $x = 11$ | $3x + 4 = 19$ $3x + \cancel{4} - \cancel{4} = 19 - 4$ $3x = 15$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$ $x = 5$ | $3,5x - 9 = 5$ $3,5x - \cancel{9} + \cancel{9} = 5 + 9$ $3,5x = 14$ $\frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}} = \frac{14}{3,5}$ $x = \frac{14}{3,5}$ <p>Or $\frac{14}{3,5} = \frac{14 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{28}{7} = 4$, donc la solution est $x = 4$.</p> | $x + 1 = -2x - 5$ $x + 1 + \cancel{2x} = \cancel{-2x} - 5 + \cancel{2x}$ $3x + 1 = -5$ $3x + \cancel{1} - \cancel{1} = -5 - 1$ $3x = -6$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{-6}{3}$ $x = -2$ | $-2x + 4 = 3x - 6$ $-2x + 4 - \cancel{3x} = \cancel{3x} - 6 - \cancel{3x}$ $-5x + 4 = -6$ $-5x + \cancel{4} - \cancel{4} = -6 - 4$ $-5x = -10$ $\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{-10}{-5}$ $x = 2$ |
| La solution est $x = 11$ | La solution est $x = 5$. | 4. | La solution est $x = -2$. | La solution est $x = 2$. |

Exercice 17 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M + 7 = 10 + M.$$

On la résout :

$$3M + 7 - \cancel{M} = 10 + \cancel{M} - \cancel{M}$$

$$2M + 7 = 10$$

$$2M + \cancel{7} - \cancel{7} = 10 - 7$$

$$2M = 3$$

$$\frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$M = 1,5$$

Conclusion : la solution est $M = 1,5$.

Exercice 18 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15\,000 - x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15 \times x + 25 \times (15\,000 - x).$$

Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation

$$15x + 25(15\,000 - x) = 295\,000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned} 15x + 25(15\,000 - x) &= 295\,000 \\ 15x + 25 \times 15\,000 + 25 \times (-x) &= 295\,000 \\ 15x + 375\,000 - 25x &= 295\,000 \\ -10x + 375\,000 &= 295\,000 \\ -10x + \cancel{375\,000} - \cancel{375\,000} &= 295\,000 - \cancel{375\,000} \\ -10x &= -80\,000 \\ \frac{-10x}{-10} &= \frac{-80\,000}{-10} \\ x &= 8\,000. \end{aligned}$$

Conclusion : il y a $x = 8\,000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 19

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\ B &= \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12} \\ C &= 2 + \frac{1}{5} = \frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \\ D &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{10 \times 6} = \frac{15}{60} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{15} \times 4} = \frac{1}{4} \\ E &= 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{10 \times 3}{6 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{30}{18} - \frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11 \times \cancel{2}}{9 \times \cancel{2}} = \frac{11}{9} \\ F &= 4 - 3 \times \frac{5}{6} = \frac{4}{1} - \frac{3 \times 5}{6} = \frac{4 \times 6}{1 \times 6} - \frac{15}{6} = \frac{24}{6} - \frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\ G &= \frac{6}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{6 \times 15}{10 \times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9 \times \cancel{10}}{8 \times \cancel{10}} = \frac{9}{8} \\ H &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

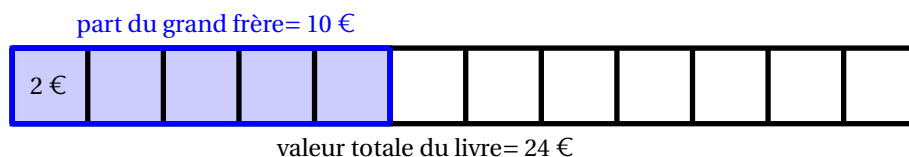
Exercice 20 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à

$$\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12 \times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5 \times 2 = 10$ € ; et la valeur totale du livre est $12 \times 2 = 24$ €.



Exercice 21

$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12} \times 3^{6-4} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

$$B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$

$$C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$

$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{(2 \times 3)^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6}{2^5} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5} \times 3^{6-4} = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$E = \frac{(10^4)^3}{10^8} = \frac{10^{4 \times 3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$

$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2 \times 5}}{2^{3 \times 3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$

$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7} + \frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7} + 10^{8-7} = 10^3 + 10^1 = 1\,000 + 1 = 1\,001$$

Exercice 22 Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.

On rappelle avant cela que $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \underbrace{0,00}_\text{3 zéros} 1$, donc multiplier un nombre par 10^{-3} revient à décaler la virgule de 3

rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour 10^{-2}).

$$A = 35,4 \times 10^{-3} = 0,0354$$

$$B = 0,034 = 0,0340$$

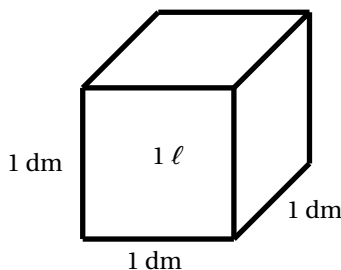
$$C = 3,6 \times 10^{-2} = 0,036 = 0,0360$$

$$D = \frac{355}{10^4} = \frac{355}{10\,000} = 0,0355$$

$$E = \frac{7}{60} \times \frac{3}{10} = \frac{7 \times 3}{60 \times 10} = \frac{7 \times \cancel{3}}{20 \times \cancel{3} \times 10} = \frac{7}{200} = 0,0350$$

Conclusion : $B < E < A < D < C$.

Exercice 23 Avant de commencer, il est utile de se rappeler que $10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}$; et que $1 \ell = 1 \text{ dm}^3$. Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure 1 dm sur 1 dm sur 1 dm , ou encore 10 cm sur 10 cm sur 10 cm (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est 80 cm , la profondeur 30 cm et la hauteur 40 cm . On dispose d'un robinet dont le débit est de $6 \text{ litres par minute}$.

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

largeur = 8 dm , profondeur = 3 dm , hauteur = 4 dm ,

donc son volume est

$$8 \times 3 \times 4 = 96 \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de $6 \ell/\text{min}$, donc il faut $96 \div 6 = 16 \text{ min}$ pour remplir les 96ℓ de l'aquarium.

Exercice 24 On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801 \quad (\text{IR n}^\circ 2)$$

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609 \quad (\text{IR n}^\circ 1)$$

$$71 \times 69 = (70 + 1)(70 - 1) = 70^2 - 1^2 = 4900 - 1 = 4899 \quad (\text{IR n}^\circ 3)$$

$$2,05^2 = (2 + 0,05)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 0,05 + 0,05^2 = 4 + 0,2 + 0,0025 = 4,2025 \quad (\text{IR n}^\circ 1)$$

$$4,3 \times 3,7 = (4 + 0,3)(4 - 0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91 \quad (\text{IR n}^\circ 3)$$

Remarque : Comment calculer $0,05^2$ de tête? Comme $0,05^2 = 0,05 \times 0,05$ et que $0,05$ a deux chiffres après la virgule, $0,05^2$ en aura $2 + 2 = 4$. Il ne reste alors plus qu'à calculer $5^2 = 25$ pour pouvoir conclure : $0,05^2 = 0,0025$.

Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0,05 \times 0,0006 = 0,000030,$$

puisque $6 \times 5 = 30$ et que le résultat doit avoir $2 + 4 = 6$ chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

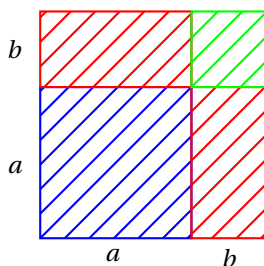
Exercice 25 Le côté du grand carré mesure $a + b$, donc son aire est $(a + b)^2$.

D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté a , donc d'aire a^2 (hachuré en bleu), un carré de côté b , donc d'aire b^2 (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés a et b , donc d'aires $a \times b$ (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2 \times a \times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exercice 26 1. Pour comparer les fractions $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{5}{6}$, on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30} \quad , \quad b = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme $24 < 25$, on obtient $a < b$.

2. On compare à présent $c = \frac{524}{525}$ et $d = \frac{525}{526}$. On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \quad , \quad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

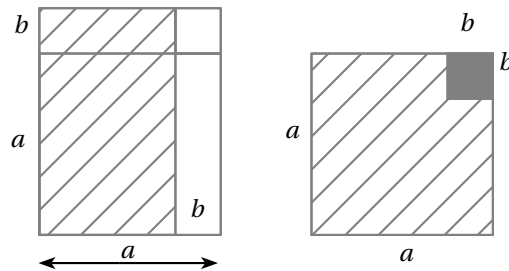
$$524 \times 526 = (525 - 1)(525 + 1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à $525 \times 525 = 525^2$, donc $c < d$.

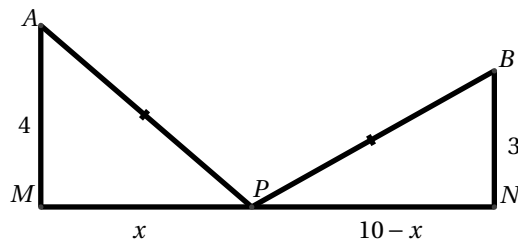
Exercice 27 La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés $(a - b)$ et $(a + b)$, donc son aire est égale à $(a - b)(a + b)$.

Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté a duquel on a retiré un carré de côté b . Son aire est donc égale à $a^2 - b^2$.

L'identité remarquable n°3 nous dit que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



Exercice 28



On pose $MP = x$, on a donc $PN = MN - MP = 10 - x$.

D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles AMP et BNP :

$$AP^2 = MP^2 + MA^2$$

$$AP^2 = x^2 + 4^2$$

$$AP^2 = x^2 + 16$$

$$BP^2 = PN^2 + BN^2$$

$$BP^2 = (10 - x)^2 + 3^2$$

$$BP^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \quad (\text{on développe grâce à l'IR n°2})$$

$$BP^2 = 100 - 20x + x^2 + 9$$

$$BP^2 = x^2 - 20x + 109$$

On sait que $AP = BP$, donc $AP^2 = BP^2$; et d'après les deux calculs ci-dessus :

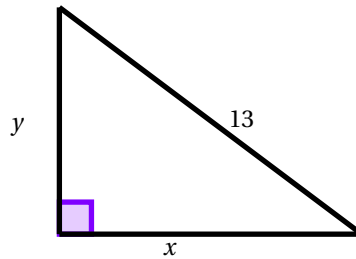
$$x^2 + 16 = x^2 - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned}
 16 &= -20x + 109 \\
 16 - 109 &= -20x + 109 - 109 \\
 \frac{-93}{-20} &= \frac{-20x}{-20} \\
 4,65 &= x
 \end{aligned}$$

Conclusion : $MP = 4,65$.

Exercice 29



1. D'après le théorème de Pythagore,

$$x^2 + y^2 = 13^2 = 169.$$

D'après l'IR n°1, $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Or $x^2 + y^2 = 169$, et $\frac{x \times y}{2} = 30$, puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit $x \times y = 30 \times 2 = 60$, puis

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 169 + 2 \times 60 = 169 + 120 = 289.$$

Finalement, comme $(x + y)^2 = 289$,

$$x + y = \sqrt{289} = 17.$$

2. On utilise cette fois l'IR n°2 :

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 169 - 2 \times 60 = 169 - 120 = 49.$$

Or $x - y \geq 0$, puisque x est plus grand que y , donc

$$x - y = \sqrt{49} = 7.$$

△ Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir $x - y = -7$!!!

On sait à présent que $x + y = 17$ et $x - y = 7$. On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit x :

$$\begin{aligned}
 (x + y) + (x - y) &= 17 + 7 \\
 x + \cancel{y} + x - \cancel{y} &= 24 \\
 \frac{2x}{2} &= \frac{24}{2} \\
 x &= 12
 \end{aligned}$$

Enfin, comme $x + y = 17$, on trouve $y = 17 - x = 17 - 12 = 5$.

Conclusion : $x = 12$, $y = 5$.

2 Nombres réels

Exercice 30 1. $-7 \in \mathbb{Q}$. **VRAI**.

Justification : $-7 = \frac{-7}{1}$, donc $-7 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

2. $-7 \in \mathbb{N}$. **FAUX**.

Justification : -7 est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3. $-\frac{13}{4} \in \mathbb{Z}$. **FAUX.**

Justification : $-\frac{13}{4} = -3,25$ a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.

Remarque : Pour obtenir $\frac{13}{4} = 3,25$ sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ②

Poser la division – ③ Remarquer que $\frac{13}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$.

4. $-\frac{13}{4} \in \mathbb{D}$. **VRAI.**

Justification : $-\frac{13}{4} = -3,25$ a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.

5. $5,824 \in \mathbb{D}$. **VRAI.**

Justification : 5,824 a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal

6. $5,824 \in \mathbb{Q}$. **VRAI.**

Justification n°1 : 5,824 est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$).

Justification n°2 : $5,824 = \frac{5824}{1000}$, donc $5,824 \in \mathbb{Q}$ (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

7. $\frac{10}{6} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**

Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ -6 & 1,6 \\ \hline 40 & \\ -36 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\frac{10}{6} = 1,666\ldots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

8. $\frac{17}{11} \in \mathbb{D}$. **FAUX.**

Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 17 & 11 \\ -11 & 1,54 \\ \hline 60 & \\ -55 & \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion : $\frac{17}{11} = 1,5454\ldots$ n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

Exercice 31 1.

$$I_1 = [1; 4] \quad I_2 = [5; +\infty[\quad I_3 =]-2; 0[$$



2.

$$I_1 = [-1; 1[\quad I_2 =]3; +\infty[\quad I_3 =]-\infty; -2]$$



- Exercice 32**
1. $5 \in [2; 6[$
 2. $-2 \notin]-2; 1]$
 3. $\pi \in]3; 4[$ (on rappelle que $\pi \approx 3,14$)

- Exercice 33**
1. $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$
 2. $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
 3. $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
 4. $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
 5. $|7 - 4| = |3| = 3$
 6. $|4 - 7| = |-3| = 3$
 7. $|4 - 3| + |5 - 6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
 8. $|5 - 11| + 2 \times |7 - 8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
 9. $|8 - 5| \times |7 - 10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
 10. $|15 - 6| - 4 \times |1 - 4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

- Exercice 34**
1. On résout l'équation $|x - 2| = 3$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc dire que

$$|x - 2| = 3$$

revient à dire que

$$x - 2 = 3 \quad \text{ou que} \quad x - 2 = -3$$

Donc

$$\begin{array}{ll} x - \cancel{2} + \cancel{2} = 3 + 2 & \text{ou} \quad x - \cancel{2} + \cancel{2} = -3 + 2 \\ x = 5 & \text{ou} \quad x = -1 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

2. On résout l'équation $|x - 1| = 4$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 4 sont 4 et -4.
Donc dire que

$$|x - 1| = 4$$

revient à dire que

$$x - 1 = 4 \quad \text{ou que} \quad x - 1 = -4$$

Donc

$$\begin{array}{ll} x - \cancel{1} + \cancel{1} = 4 + 1 & \text{ou} \quad x - \cancel{1} + \cancel{1} = -4 + 1 \\ x = 5 & \text{ou} \quad x = -3 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

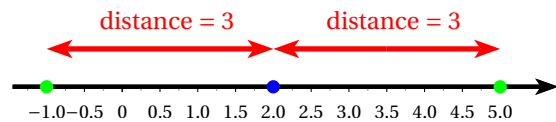
3. On résout l'équation $|x + 2| = 2$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x - 2| = 3$$

revient à dire que la distance entre x et 2 est égale à 3.



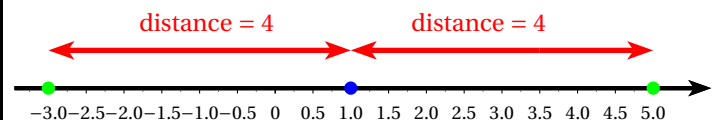
On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -1$.

Méthode n°2 : avec la distance.

Dire que

$$|x - 1| = 4$$

revient à dire que la distance entre x et 1 est égale à 4.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 5$ et $x = -3$.

Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 2 sont 2 et -2.

Donc dire que

$$|x + 2| = 2$$

revient à dire que

$$x + 2 = 2 \quad \text{ou que} \quad x + 2 = -2$$

Donc

$$\begin{aligned} x + \cancel{2} - \cancel{2} &= 2 - 2 & \text{ou} & & x + \cancel{2} - \cancel{2} &= -2 - 2 \\ x &= 0 & \text{ou} & & x &= -4 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

Méthode n°2 : avec la distance.

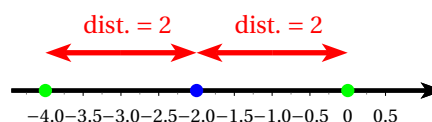
Il y a une vraie difficulté : l'égalité $|x + 2| = 2$ se réécrit

$$|x - (-2)| = 2$$

(il faut absolument faire apparaître un « - » pour pouvoir interpréter en termes de distance). Donc dire que

$$|x + 2| = 2$$

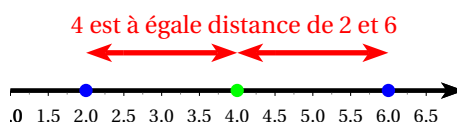
revient à dire que la distance entre x et -2 est égale à 2.



On voit qu'il y a deux solutions : $x = 0$ et $x = -4$.

4. On résout l'équation $|x - 2| = |x - 6|$.

Conformément à l'indication, on travaille avec la distance : dire que $|x - 2| = |x - 6|$, c'est dire que la distance entre x et 2 est la même que la distance entre x et 6. Autrement dit, x est à égale distance de 2 et de 6. Il y a un seul nombre x qui convienne : le milieu de l'intervalle $[2;6]$, c'est-à-dire $x = 4$.



Conclusion : il y a une seule solution, $x = 4$.

Exercice 35 Commençons par deux exemples :

- si $x = 3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$.
- si $x = -3$, alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

On comprend que quand x est positif, on aura toujours $\sqrt{x^2} = x = |x|$; tandis que dans le cas où x est négatif, le signe « disparaît » lorsqu'on élève au carré, ce qui donne finalement $\sqrt{x^2} = |x|$.

Autrement dit, quel que soit x (y compris si $x = 0$), on a l'égalité

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 36 1. Dire que $|x - 2| < 3$, c'est dire que la distance entre x et 2 est strictement inférieure à 3. On voit que les x qui conviennent sont tous les nombres de l'intervalle $] -1; 5[$ (extrémités exclues, puisque l'inégalité est stricte).



2. Les points de l'intervalle ci-dessous sont les nombres x dont la distance à 8 est inférieure ou égale à 2 (donc extrémités incluses) ; autrement dit, ce sont les nombres x tels que

$$|x - 8| \leq 2.$$



Exercice 37 Le but de l'exercice est de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. On part de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on élève au carré et on multiplie par q^2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}^2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ 2 &= \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2 \times q^2 &= \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \times \cancel{q^2} \\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

2. Commençons par un exemple : prenons un nombre qui « se termine par 4 » (donc le chiffre des unités est 4). Le carré de ce nombre va « se terminer par 6 », puisque $4^2 = 16$. Autrement dit, le chiffre des unités du carré est 6.

Avec la même technique, on voit que si le chiffre des unités est 9, celui du carré est 1 (puisque $9^2 = 81$) ; etc. On remplit ainsi le tableau :

| Chiffre des unités de p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffre des unités de p^2 | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

3. Pour avoir le chiffre des unités de $2q^2$, il suffit de reprendre la deuxième ligne du tableau précédent et de multiplier par 2. Par exemple, si le chiffre des unités de q est 7, alors celui de q^2 est 9 ; et celui de $2q^2$ est 8 (puisque $2 \times 9 = 18$). On remplit ainsi le nouveau tableau :

| Chiffre des unités de q | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffre des unités de $2q^2$ | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 8 | 2 |

4. D'après la question 1, $2q^2 = p^2$. Les nombres $2q^2$ et p^2 étant égaux, ils ont le même chiffre des unités. Or dans nos deux tableaux, le seul chiffre en commun des deuxièmes lignes est le 0 ; et on l'obtient lorsque le chiffre des unités de p est 0, et lorsque le chiffre des unités de q est 0 ou 5.
5. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : on peut donc l'écrire sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. D'après la question précédente, p se termine par 0 et q se termine par 0 ou 5. Mais alors p et q sont tous deux multiples de 5, et donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite au départ.

Conclusion : supposant que $\sqrt{2}$ était rationnel, on aboutit à une absurdité ; c'est donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3 Géométrie repérée

Exercice 38 1.



- (a) On a $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} x_B \\ y_B \end{smallmatrix}\right)$. On calcule les coordonnées de I :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) \quad I\left(\frac{5}{2}; \frac{0}{2}\right) \quad I(2,5;0).$$

(b)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

2. (a) On a $C(-4; 2)$ et $D(2; -3)$. On calcule les coordonnées de J :

$$J\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}\right) \quad J\left(\frac{-4 + 2}{2}; \frac{2 + (-3)}{2}\right) \quad J\left(\frac{-2}{2}; \frac{-1}{2}\right) \quad J(-1; -0,5).$$

(b)

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}.$$

Exercice 39 1.



2. On calcule les coordonnées de M :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad M\left(\frac{0 + 7}{2}; \frac{-2 + 5}{2}\right) \quad M\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad M(3,5; 1,5).$$

Puis celles de M' :

$$M'\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}\right) \quad M'\left(\frac{2 + 5}{2}; \frac{3 + 0}{2}\right) \quad M'\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad M'(3,5; 1,5).$$

3. On constate dans la question précédente que $M = M'$, les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ du quadrilatère $ACBD$ se coupent donc en leur milieu. D'après une propriété du collège, cela entraîne que $ACBD$ est un parallélogramme, puis que ses côtés opposés sont de même longueur : $BD = AC$, $CB = AD$.

4. On calcule les longueurs AC et CB :

$$\bullet AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

$$\bullet CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(7 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

On constate que $AC = CB$, donc d'après la question précédente :

$$BD = AC = CB = AD.$$

Conclusion : le quadrilatère $ACBD$ a quatre côtés de même longueur, donc c'est un losange.

Exercice 40



On calcule la longueur des trois côtés :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 - 4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

$AB = BC$, donc ABC est isocèle en B . On utilise le théorème réciproque de Pythagore pour prouver qu'il est rectangle :

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array} \right\} AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B .

Exercice 41 1. • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}.$

$$\bullet AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}.$$

$$\bullet BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AC^2 + BC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{10}^2 = 40 + 10 = 50 \end{array} \right\} AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en C .

2. D'après la formule du cours :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = I\left(\frac{6+1}{2}; \frac{0+5}{2}\right) = I(3,5; 2,5).$$

3. Le triangle ABC étant rectangle en C , le milieu I de l'hypoténuse $[AB]$ est le centre de Γ (rappel de l'énoncé); et le rayon de Γ est

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2} = \sqrt{(6 - 3,5)^2 + (0 - 2,5)^2} = \sqrt{2,5^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{6,25 + 6,25} = \sqrt{12,5}.$$

4. Savoir si $H(3,5; 6)$ appartient à Γ revient à savoir si la longueur IH est égale à r ou non. On calcule cette longueur avec la formule du cours :

$$IH = \sqrt{(x_H - x_I)^2 + (y_H - y_I)^2} = \sqrt{(3,5 - 3,5)^2 + (6 - 2,5)^2} = \sqrt{0^2 + 3,5^2} = \sqrt{0 + 12,25} = \sqrt{12,25}.$$

Comme $\sqrt{12,25} \neq \sqrt{12,5}$, le point H n'appartient pas à Γ .

N.B. La figure est trompeuse, puisqu'on a l'impression que H est sur Γ . En réalité, si vous avez pris 1 cm comme unité graphique, le point H est à environ trois cheveux (au sens propre) du cercle.



Exercice 42



1. • Le milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) \quad \left(\frac{0 + 4}{2}; \frac{4 + (-3)}{2} \right) \quad (2; 0,5).$$

- Le milieu du segment $[BD]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2} \right) \quad \left(\frac{6 + (-2)}{2}; \frac{1 + 0}{2} \right) \quad (2; 0,5).$$

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme (propriété du collège).

⚠ Si vous donnez un nom aux milieux des diagonales **avant de faire les calculs**, donnez-leur des noms différents : avant de faire les calculs, on n'a pas encore prouvé que les milieux étaient les mêmes.

2. On calcule la longueur des diagonales :

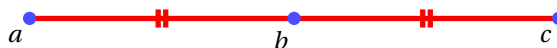
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-3 - 4)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}.$
- $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}.$

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont de même longueur, donc c'est un rectangle (propriété du collège).

Exercice 43 1. Le symétrique de 2 par rapport à 5,5 est 9.



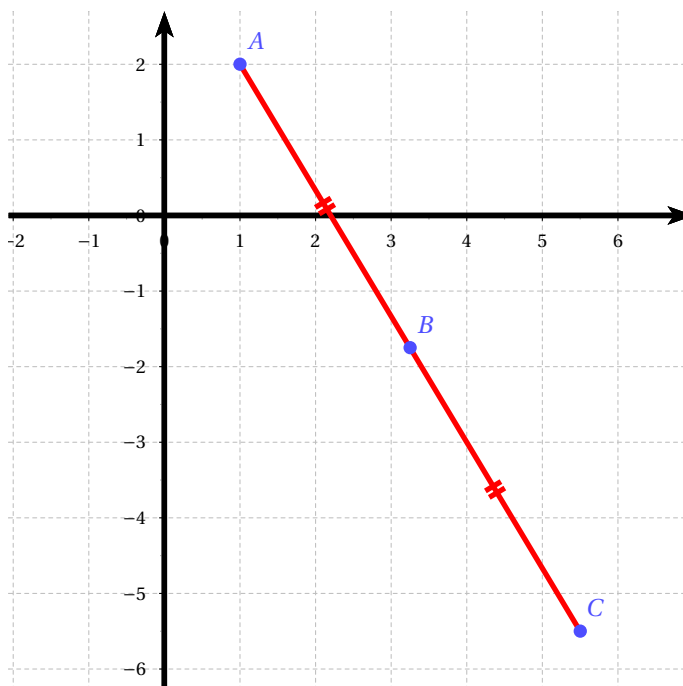
2. On généralise le travail de la question précédente : c est le symétrique de a par rapport à b lorsque b est le milieu du segment qui va de a à c .



Autrement dit $b = \frac{a+c}{2}$, ce qui donne $b \times 2 = \frac{a+c}{2} \times 2$, soit $2b = a + c$; et donc

$$c = 2b - a.$$

3. On place C , symétrique du point A par rapport au point B .



Par définition d'une symétrie centrale, B est le milieu du segment $[AC]$, donc d'après la formule du cours pour le milieu d'un segment :

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \quad , \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Autrement dit, en remplaçant avec les données de l'énoncé :

$$3,25 = \frac{1 + x_C}{2} \quad , \quad -1,75 = \frac{2 + y_C}{2}.$$

En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient

$$x_C = 2 \times 3,25 - 1 = 5,5 \quad , \quad y_C = 2 \times (-1,75) - 2 = -5,5.$$

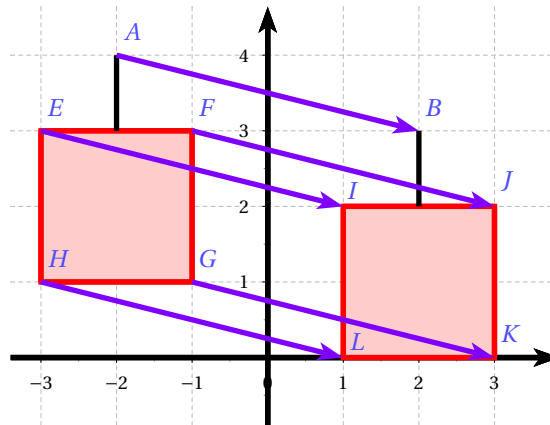
Conclusion : $C(5,5 ; -5,5)$.

Exercice 44 Cet exercice d'introduction à la notion de vecteur appelle quelques commentaires :

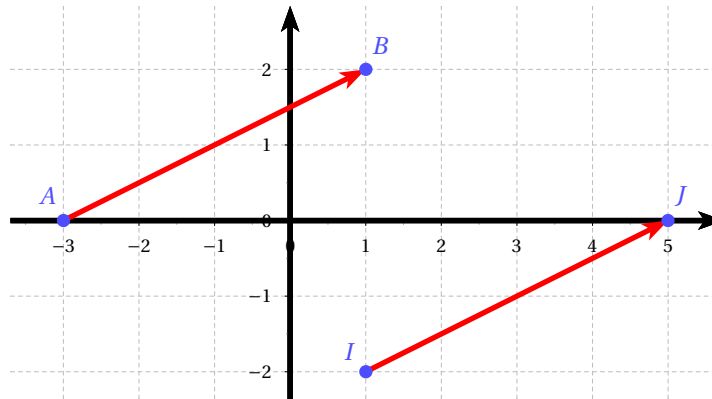
1. La télécabine $EFGH$ glisse pour aboutir à la position $IJKL$. Ce déplacement est appelé « translation de vecteur \overrightarrow{AB} ».
2. Le vecteur \overrightarrow{AB} a été représenté en violet sur la figure, il est égal à chacun des vecteurs \overrightarrow{EI} , \overrightarrow{FJ} , \overrightarrow{GK} et \overrightarrow{HL} . On peut donc écrire

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{HL}.$$

3. Pour aller de A à B , on avance de 4 carreaux en abscisse et on descend de 1 carreau en ordonnée; on dit que \overrightarrow{AB} a pour abscisse 4 et pour ordonnée -1 . On note $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Exercice 45 1.



2. On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. On calcule les coordonnées de \overrightarrow{IJ} :

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 0 - (-2) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{IJ} ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice 46 On considère les points $A(-3; -2)$, $B(5; -2)$, $C(1; 4)$, $D(-1; 1)$, $E(3; 1)$, $F(5; 4)$.



Il y a trop de possibilités pour que les justifie toutes. Je vais me contenter de donner un couple de vecteurs égaux, avec la justification; puis donner toutes les autres égalités possibles, mais sans les justifier :

1. **Une égalité et sa justification.**

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$. En effet, ces vecteurs ont les mêmes coordonnées :

- $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. **Toutes les autres égalités.**

$$\begin{array}{cccccccccccc} \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE} & \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED} & \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE} & \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} & \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FE} & \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF} & \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FD} & \overrightarrow{CE} = \\ \overrightarrow{EB} & \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BE} & & & & & & & & \end{array}$$

⚠ Attention à l'ordre des lettres! Par exemple, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, mais $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{FE}$ (il y a un problème de sens : le vecteur \overrightarrow{DC} « monte vers le haut et la droite »; tandis que \overrightarrow{FE} « descend vers le bas et la gauche » – l'erreur se détecte aussi bien sûr en calculant les coordonnées).

Exercice 47 En physique, un vecteur représente une force, et la longueur (ou norme) du vecteur correspond à l'intensité de la force. L'égalité $\|\vec{P}_2\| = 2 \|\vec{P}_1\|$ signifie que la masse 2 a un poids deux fois plus important que celui de la masse 1.



Exercice 48 L'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le triangle DEF .



4 Études graphiques de fonctions

Exercice 49 Un voyageur de commerce (= un représentant) fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

Remarque : On peut penser que l'indemnité kilométrique sert à rembourser les frais de déplacement (par exemple si le représentant utilise sa propre voiture) ; et que la part fixe sert à payer les repas.

1. S'il fait 120 km dans la journée, le montant de la note de frais est de

$$30 + 120 \times 0,5 = 30 + 60 = 90 \text{ €}.$$

2. On note x le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et $f(x)$ le montant de la note de frais. On a alors

$$f(x) = 30 + x \times 0,5 = 0,5x + 30.$$

3. La fonction f est affine, puisque $f(x) = 0,5x + 30$ (c'est bien une fonction de la forme $f(x) = ax + b$, avec $a = 0,5$ et $b = 30$). Sa courbe représentative est donc une droite, que l'on trace à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs ; par exemple :

| | | |
|--------|----|-----|
| x | 0 | 120 |
| $f(x)$ | 30 | 90 |

$$f(0) = 0,5 \times 0 + 30 = 30$$

$$f(120) = 0,5 \times 120 + 30 = 90$$

On place les points de coordonnées (0;30) et (120;90), puis on trace la droite – en réalité un segment, puisqu'on va de 0 à 200 en abscisses.

Remarque : On a choisi les valeurs 0 et 120, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs – l'avantage de 0, c'est que le calcul est facile ; et l'avantage de 120, c'est qu'on a déjà fait le calcul dans la question 1.



4. Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Pour déterminer le nombre de km parcourus dans la journée, il y a deux méthodes :

- **Graphiquement.** On voit qu'il a parcouru 90 km (pointillés rouges) ³.
- **Par le calcul.** On retire les frais fixes : $90 - 30 = 60$ € d'indemnité kilométrique. Puis, comme chaque km compte pour 0,5 €, on divise : $45 \div 0,5 = 45 \times 2 = 90$ km. ⁴

Exercice 50 1. • Lorsqu'on télécharge 50 Mo, on paye 3 €.

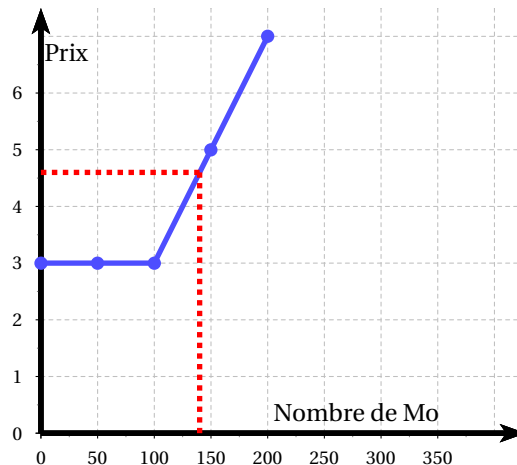
- Lorsqu'on télécharge 150 Mo, les 100 premiers coûtent 3 € ; et les 50 suivants coûtent $50 \times 0,04 = 2$ €. On paye donc au total $3 + 2 = 5$ €.

2. On complète le tableau de valeurs :

| Nombre de Mo | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 |
|--------------|---|----|-----|-----|-----|
| Prix à payer | 3 | 3 | 3 | 5 | 7 |

Remarque : jusqu'à 100 Mo, on paye 3 €. Ensuite, chaque nouvelle tranche de 50 Mo est facturée 2 €.

3. On construit la courbe qui donne le prix payé en fonction du nombre de Mo téléchargés. Elle est constante sur l'intervalle $[0; 100]$, puis affine sur l'intervalle $[100; 200]$. Il faut donc utiliser une règle pour effectuer le tracé ⁵.



4. Il y a deux méthodes :

- **Graphiquement.** On voit qu'on a téléchargé 140 Mo (pointillés rouges).
- **Par le calcul.** J'ai payé 4,60 €, donc $3 + 1,60$ €. J'ai donc téléchargé $1,60 \div 0,04 = 40$ Mo au-delà du 100^e. Autrement dit, j'ai téléchargé 140 Mo.

3. La méthode graphique est simple, mais la réponse pourrait être imprécise.

4. On peut aussi résoudre l'équation $0,5x + 30 = 75$.

5. On parle de fonction « affine par morceaux ».

Exercice 51 Les gares de Calais et de Boulogne-sur-Mer sont distantes de 30 km. Un train part à 12 h de Boulogne-sur-Mer en direction de Calais et roule à la vitesse de 40 km/h. Un train part de Calais à 12 h 15 et fait route en sens inverse à la vitesse de 60 km/h.

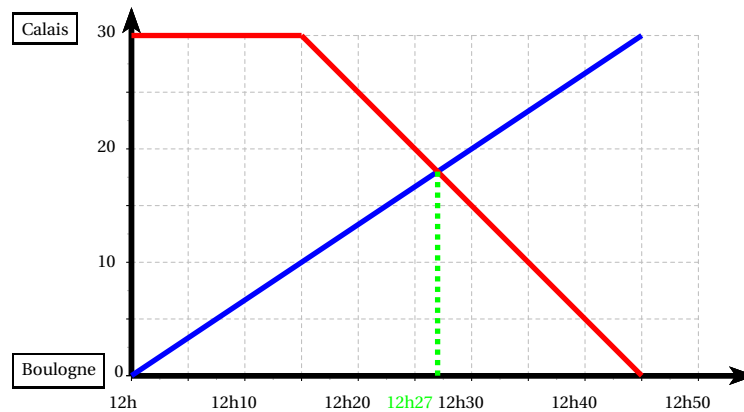
1. Le train qui part à 12 h de Boulogne-sur-Mer roule à la vitesse de 40 km/h, donc il parcourt 40 km en 60 min. Pour savoir quand il arrive à Calais, on complète un tableau de proportionnalité :

| | | |
|------------------|----|----|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 40 | 30 |

Le train mettra $\frac{60 \times 30}{40} = \frac{1800}{40} = 45$ min pour arriver à Calais, donc il y sera à 12 h 45.

Pour le train qui part de Calais, le calcul est plus facile : il roule à 60 km/h, donc parcourt 60 km en 60 min ; et ainsi 30 km en 30 min. Comme il part à 12 h 15, il arrive à 12 h 45 lui aussi.

On peut ainsi représenter la marche des deux trains :



2. Nous allons déterminer l'heure de croisement des trains par le calcul. Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes.

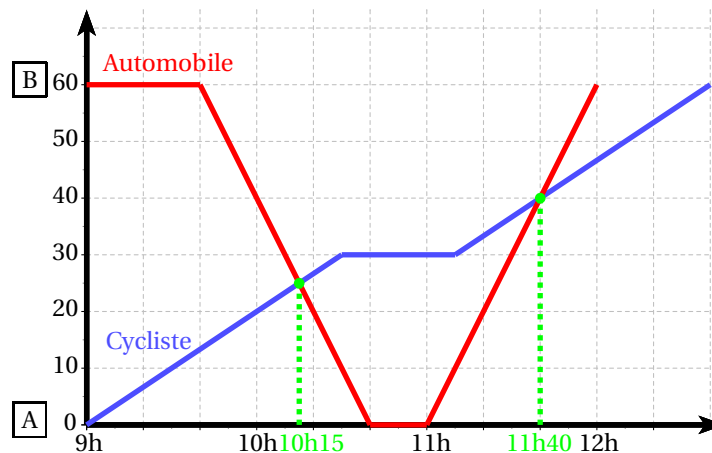
À 12h15, le train qui part de Boulogne-sur-Mer a parcouru 10 km (facile à vérifier), il est donc à 20 km de Calais. C'est l'heure à laquelle le deuxième train part. Comme l'un roule à 40 km/h et l'autre à 60 km/h, tout se passe comme si un seul train devait parcourir 20 km à la vitesse de $40 + 60 = 100$ km/h. On complète un tableau de proportionnalité :

| | | |
|------------------|-----|----|
| temps (en min) | 60 | ? |
| distance (en km) | 100 | 20 |

$\frac{60 \times 20}{100} = \frac{1200}{100} = 12$, donc il faudrait 12 min à ce train pour parcourir 20 km. Ainsi, les deux trains se croiseront-ils à

12 h 15 min + 12 min = 12 h 27 min.

Exercice 52 Je me contenterai du graphique, donc je ne ferai pas les calculs pour avoir les heures exactes des deux rencontres – elles s'obtiennent avec les mêmes techniques que dans l'exercice précédent.



Exercice 53 Le taux d'anticorps (en g/l) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en mois), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 12 mois, est donné par la formule suivante :

$$f(x) = 0,1x^2 - 1,6x + 12.$$

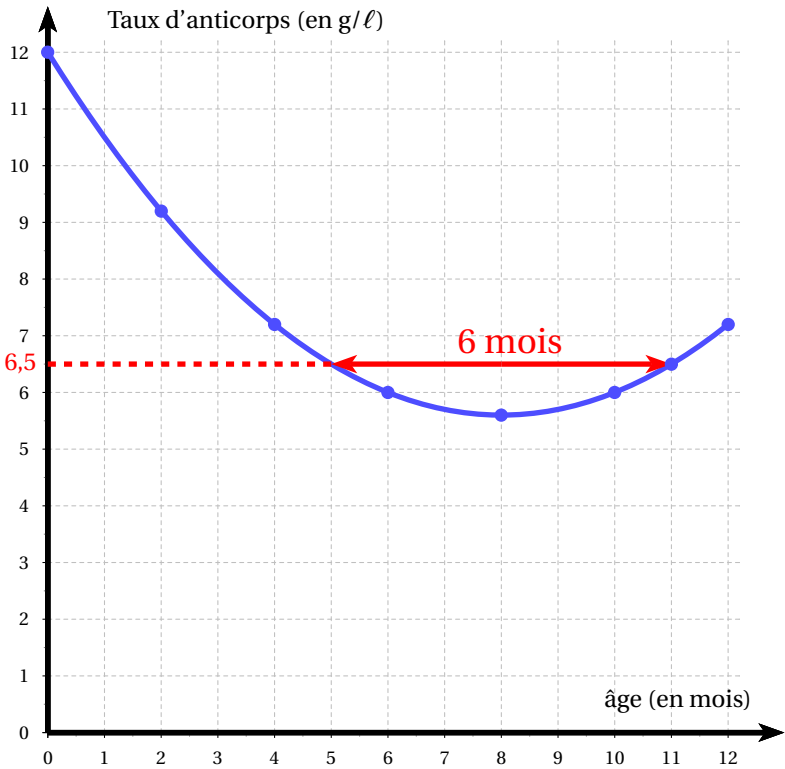
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[0; 12]$ avec un pas de 2 :

| | | | | | | | |
|--------|----|-----|-----|---|-----|----|-----|
| x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| $f(x)$ | 12 | 9,2 | 7,2 | 6 | 5,6 | 6 | 7,2 |

Détail de deux calculs :

- $f(0) = 0,1 \times 0^2 - 1,6 \times 0 + 12 = 12.$
- $f(12) = 0,1 \times 12^2 - 1,6 \times 12 + 12 = 7,2.$

2.



3. Le taux d'anticorps à la naissance est de 12 g/l.

4. Tableau de variations :

| | | | |
|--------|----|-----|-----|
| x | 0 | 8 | 12 |
| $f(x)$ | 12 | 5.6 | 7.2 |

Le taux d'anticorps est minimal à l'âge de 8 mois.

5. D'après le graphique, le taux d'anticorps est inférieur à 6,5 g/l pendant 6 mois (du 5^e au 11^e mois).

Exercice 54 On considère la fonction f définie sur $[-1; 3]$ par

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

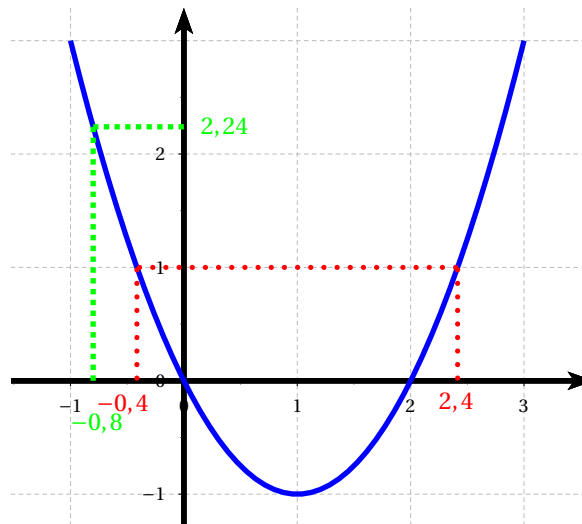
1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[-1; 3]$ avec un pas de 0,5 :

| | | | | | | | | | |
|--------|----|------|---|-------|----|-------|---|------|---|
| x | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $f(x)$ | 3 | 1,25 | 0 | -0,75 | -1 | -0,75 | 0 | 1,25 | 3 |

Détail de deux calculs :

- $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$.
- $f(0,5) = 0,5^2 - 2 \times 0,5 = 0,25 - 1 = -0,75$.

2. Courbe représentative de f :



3. L'image de $-0,8$ par f est

$$f(-0,8) = (-0,8)^2 - 2 \times (-0,8) = 0,64 + 1,6 = 2,24.$$

On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat – si on a de bons yeux!

- Les antécédents de 1 par f sont $-0,4$ et $2,4$ environ (voir pointillés rouges).
- Les solutions l'inéquation $f(x) < 1$ sont tous les nombres dont l'image est strictement inférieure à -1 . Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $] -0,4; 2,4[$ environ.
- Tableau de variations de f :

| | | | |
|--------|----|----|---|
| x | -1 | 1 | 3 |
| $f(x)$ | 3 | -1 | 3 |

7. Tableau de signe de f :

| | | | | | |
|--------|----|---|---|---|---|
| x | -1 | 0 | 2 | 3 | |
| $f(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |

Exercice 55 On considère la fonction g définie sur $[1;4]$ par

$$g(x) = x - \frac{6}{x}.$$

1. On fait un tableau de valeurs pour f sur $[1;4]$ avec un pas de $0,5$:

| | | | | | | | |
|--------|----|------|----|-----|---|------|-----|
| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| $g(x)$ | -5 | -2,5 | -1 | 0,1 | 1 | 1,79 | 2,5 |

Détail de deux calculs :

- $g(2) = 2 - \frac{6}{2} = 2 - 3 = -1$.
- $g(1,5) = 1,5 - \frac{6}{1,5} = 1,5 - 4 = -2,5$.

Remarque : L'énoncé demande d'arrondir à 10^{-2} près par excès. Cela signifie qu'il faut donner deux chiffres après la virgule et arrondir par valeur supérieure le deuxième chiffre après la virgule. Par exemple $g(3,5) = 1,7857 \dots \approx 1,79$.

2. Courbe représentative de g :



3. L'image de 3,2 par g est

$$g(3,2) = 3,2 - \frac{6}{3,2} = 3,2 - 1,875 = 1,325.$$

On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat.

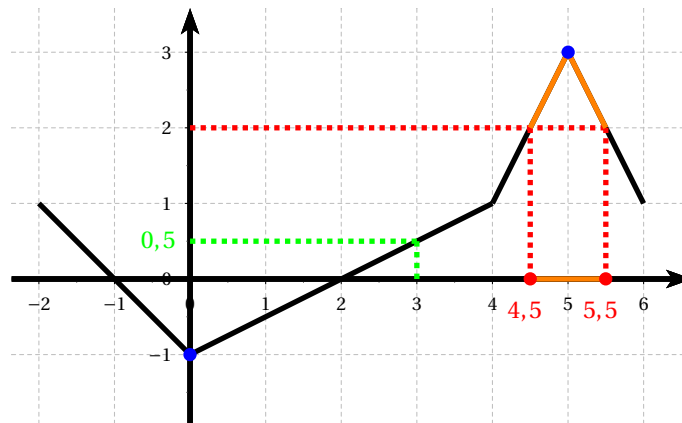
4. L'unique solution de l'équation $g(x) = -1$ (donc l'unique antécédent de -1 par g) est 2 (pointillés rouges).
5. Les solutions l'inéquation $g(x) \geq -1$ sont tous les nombres dont l'image est supérieure ou égale à -1 . Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle $[2; 4]$.
6. Tableau de variations de g :

| | | |
|--------|--|---|
| x | 1 | 4 |
| $g(x)$ | <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> -5 ↗ 2.5 </div> | |

7. Tableau de signe de g :

| | | | |
|--------|---|---------------|---|
| x | 1 | ≈ 2.4 | 4 |
| $g(x)$ | - | 0 | + |

Exercice 57



1. L'image de 3 par f est 0,5 (pointillés verts).
2. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont 4,5 et 5,5 (pointillés rouges).
3. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ sont tous les nombres de l'intervalle $[4,5 ; 5,5]$: c'est sur cet intervalle que la courbe est au dessus de 2 (parties de la courbe et de l'axe des abscisses repassées en orange).
4. Tableau de variations de f :

| x | -2 | 0 | 5 | 6 |
|--------|----|----|---|---|
| $f(x)$ | 1 | -1 | 3 | 1 |

5. Le maximum de f est 3, son minimum est -1 (points bleus).
6. Tableau de signe de f :

| x | -2 | -1 | 2 | 6 | |
|--------|----|----|---|---|---|
| $f(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |