

Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

Table des matières

1	Rappels de calcul et de géométrie
----------	--

2

1 Rappels de calcul et de géométrie

Exercice 1 Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut $\frac{250 \times 6}{4} = \frac{1500}{4} = 375$ g de farine, $\frac{500 \times 6}{4} = \frac{3000}{4} = 750$ mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent $6 \times 125 = 750$ g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai $\frac{750 \times 2}{1000} = \frac{1500}{1000} = 1,5$ €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes¹.

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra $\frac{60 \times 45}{20} = \frac{20 \times 3 \times 45}{20} = 135$ min, soit 2 h 15 min (puisque $135 = 120 + 15$).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a $4 \times 30 \div 5 = 24$ pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a $\frac{7 \times 24}{6} = \frac{7 \times 4 \times 6}{6} = 28$ florins.

Exercice 2 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

Stéphane nage $\frac{60 \times 0,5}{3} = \frac{30}{3} = 10$ min, puis il court $\frac{60 \times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$ min.

2. Stéphane a parcouru un total de $5 + 0,5 = 5,5$ km, en $10 + 20 = 30$ min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc $\frac{60 \times 5,5}{30} = \frac{30 \times 2 \times 5,5}{30} = 11$ km/h.

Exercice 3



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

- d'un rectangle $BHDC$, d'aire $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$;
- d'un triangle AHD , d'aire $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Donc l'aire du trapèze est $6 + 2 = 8$.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(5 + 3) \times 2}{2} = 8.$$

Exercice 4 Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés ℓ et L , donc son aire est $\frac{\ell \times L}{2}$.



Exercice 5 Rappels :

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé O sur la figure ci-dessous).



Exercice 6 On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .



$[AH]$ est une hauteur dans les triangles BIA et CIA , donc

$$\mathcal{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2}$$

$$\mathcal{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or $BI = CI$ puisque I est le milieu de $[BC]$, donc BIA et CIA ont la même aire.

Exercice 7

1. La négation de

Tous les hommes sont mortels.

est

Il existe un homme immortel.

2. La négation de

Il existe un dessert sans sucre à la cantine.

est

Tous les desserts sont sucrés à la cantine.

Remarque : Dans les deux exemples que nous venons de traiter, pour écrire la négation d'une phrase, il suffit de remplacer les « tous » par « il existe », et réciproquement ; et d'inverser les conclusions (exemple : immortel/mortel). C'est une technique qui fonctionne toujours.

3. La négation de

Il existe un pays dans lequel tous les hommes savent lire.

est

Dans tous les pays, il existe un homme qui ne sait pas lire.

4. Le contraire de « être allé en Angleterre ou en Espagne » est « n'être allé ni en Angleterre, ni en Espagne », donc la négation de

Tous les élèves de la classe sont déjà allés en Angleterre ou en Espagne .

est

Il existe un élève de la classe qui n'est jamais allé en Angleterre, ni en Espagne.

5. Comme dans l'exemple précédent, le contraire de « ni... ni... » est « ou ». Donc la négation de

Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

est

Chloé aime les fraises ou les framboises.

Exercice 8 1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

1. (a) On identifie A et B dans l'implication :

Si un nombre se termine par 5, alors il est multiple de 5.

Cette implication est vraie (cours du primaire).

(b) • L'implication contraposée est

Si $\underbrace{\text{un nombre n'est pas multiple de 5}}_{\text{non B}}$, alors $\underbrace{\text{il ne se termine pas par 5}}_{\text{non A}}$.

Cette contraposée est vraie, puisque l'implication originale l'est (cf l'énoncé : quand une implication est vraie, sa contraposée l'est aussi).

- L'implication réciproque est

Si un nombre est multiple de 5, alors il se termine par 5.

Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

2. L'implication

Si $\underbrace{\text{un nombre se termine par 0}}_A$, alors $\underbrace{\text{il est multiple de 10}}_B$.

et sa réciproque

Si un nombre est multiple de 10, alors il se termine par 0.

B
A

sont vraies toutes les deux.

Exercice 9 Soit ABC un triangle

1. Théorème de Pythagore.

Si ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



2. Théorème contraposé de Pythagore.

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A .

3. Théorème réciproque de Pythagore.

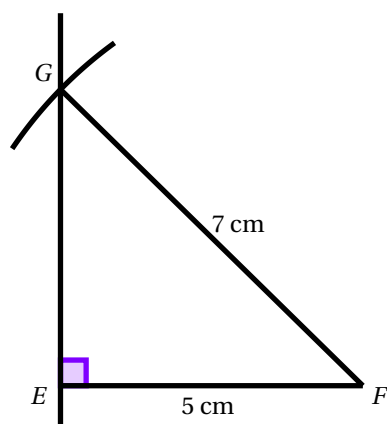
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠ En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre!

Exercice 10 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment $[EF]$.
- La perpendiculaire à $[EF]$ passant par E .
- Un arc de cercle de centre F , de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en G .



D'après le **théorème de Pythagore** dans EFG rectangle en E :

$$\begin{aligned}
 FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\
 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\
 49 &= 25 + EG^2 \\
 49 - 25 &= EG^2 \\
 \sqrt{24} &= EG
 \end{aligned}$$

Conclusion : $EG = \sqrt{24}$ cm.

⚠ Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

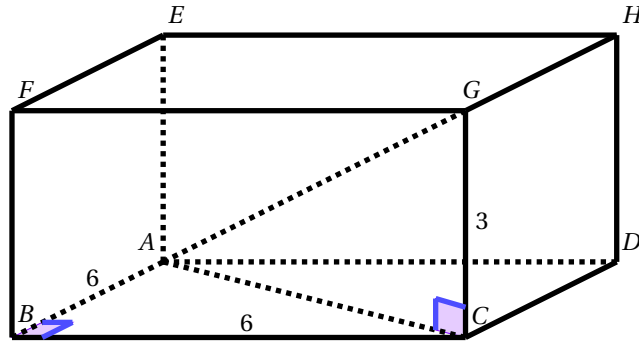
2. Le plus grand côté est $[BC]$, donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en A .

On calcule :

$$\left. \begin{aligned} BC^2 &= 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 &= 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{aligned} \right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

D'après la **contraposée du théorème de Pythagore**, ABC n'est pas rectangle en A .

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = BC = 6$ et $CG = 3$.



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans ABC rectangle en B ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 6^2 + 3^2$$

$$AC^2 = 36 + 36$$

$$AC^2 = 72$$

(Inutile de donner AC !)

Dans ACG rectangle en C ,

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$

$$AG^2 = 72 + 3^2$$

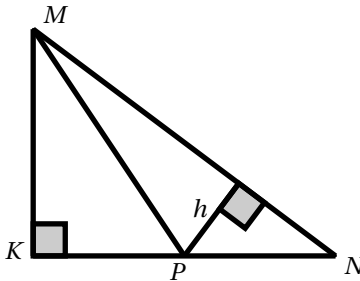
$$AG^2 = 72 + 9$$

$$AG^2 = 81$$

$$AG = \sqrt{81} = 9$$

Conclusion : $AG = 9$.

Exercice 12 Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment $[MK]$ mesure 3 cm, le segment $[MN]$ mesure 5 cm et $h = 1,2$ cm.



$$1. \mathcal{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3 \text{ cm}^2.$$

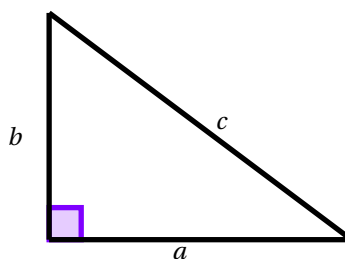
$$2. \text{ On a aussi } \mathcal{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}, \text{ donc } 3 = \frac{PN \times 3}{2}, \text{ soit } 3 \times 2 = PN \times 3; \text{ et donc } PN = 2 \text{ cm.}$$

3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement KN , puis KP et MP .

△ On ne sait pas, à ce stade, que P est le milieu de $[KN]$.

- Pour KN , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMN . On obtient $KN = 4$ cm.
- $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$ cm.
- Enfin, pour calculer PM , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle KMP . On obtient $MP = \sqrt{13}$ cm.

Exercice 13 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent a et b , l'hypoténuse mesure c .



D'après le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. L'affirmation

Pour tous nombres positifs a et b , $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

est FAUSSE! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit $a = 4$ et $b = 3$. Dans ce cas

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{est différent de} \quad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.** $\sqrt{a^2 + b^2}$ est la longueur de l'hypoténuse c du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que $a + b$ est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

Exercice 14 Soit A un point et Δ une droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur Δ est le point H de Δ tel que $(AH) \perp \Delta$.

1. On trace la perpendiculaire à Δ passant par A . Elle coupe Δ en H .



2. Par construction, le triangle AMH est rectangle en H , donc son hypoténuse AM est strictement plus grande que le côté de l'angle droit AH (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :



3. Le segment $[AH]$ est la hauteur² issue de A dans le triangle ABC .



2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment $[AH]$ peut être appelé *hauteur*, la droite (AH) peut également être appelée *hauteur*; enfin la longueur AH peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule $\frac{B \times h}{2}$ pour l'aire du triangle.

Exercice 15 On résout les équations :

$x + 7 = 18$ $x + \cancel{7} - \cancel{7} = 18 - 7$ $x = 11$ <p>La solution est $x = 11$</p>	$3x + 4 = 19$ $3x + \cancel{4} - \cancel{4} = 19 - 4$ $3x = 15$ $\cancel{3}x = \frac{15}{3}$ $x = 5$ <p>La solution est $x = 5$.</p>	$3,5x - 9 = 5$ $3,5x - \cancel{9} + \cancel{9} = 5 + 9$ $3,5x = 14$ $\frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}} = \frac{14}{3,5}$ $x = \frac{14}{3,5}$ <p>Or $\frac{14}{3,5} = \frac{14 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{28}{7} = 4$, donc la solution est $x = 4$.</p>	$x + 1 = -2x - 5$ $x + 1 + \cancel{2x} = -2\cancel{x} - 5 + \cancel{2x}$ $3x + 1 = -5$ $3x + \cancel{1} - \cancel{1} = -5 - 1$ $3x = -6$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{-6}{3}$ $x = -2$ <p>La solution est $x = -2$.</p>	$-2x + 4 = 3x - 6$ $-2x + 4 - \cancel{3x} = 3\cancel{x} - 6 - \cancel{3x}$ $-5x + 4 = -6$ $-5x + \cancel{4} - \cancel{4} = -6 - 4$ $-5x = -10$ $\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{-10}{-5}$ $x = 2$ <p>La solution est $x = 2$.</p>
---	---	--	---	---

Exercice 16 Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse M kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M + 7 = 10 + M.$$

On la résout :

$$3M + 7 - \cancel{M} = 10 + \cancel{M} - \cancel{M}$$

$$2M + 7 = 10$$

$$2M + \cancel{7} - \cancel{7} = 10 - 7$$

$$2M = 3$$

$$\frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$M = 1,5$$

Conclusion : la solution est $M = 1,5$.

Exercice 17 Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a x places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a x places dans les virages, donc $(15000 - x)$ places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15 \times x + 25 \times (15000 - x).$$

Comme cette recette est 295 000 €, x est solution de l'équation

$$15x + 25(15000 - x) = 295000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned}
15x + 25(15000 - x) &= 295000 \\
15x + 25 \times 15000 + 25 \times (-x) &= 295000 \\
15x + 375000 - 25x &= 295000 \\
-10x + 375000 &= 295000 \\
-10x + 375000 - 375000 &= 295000 - 375000 \\
-10x &= -80000 \\
\frac{-10x}{-10} &= \frac{-80000}{-10} \\
x &= 8000.
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a $x = 8000$ places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

Exercice 18

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{2} \\
B &= \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12} \\
C &= 2 + \frac{1}{5} = \frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \\
D &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{10 \times 6} = \frac{15}{60} = \frac{15}{15 \times 4} = \frac{1}{4} \\
E &= 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{10 \times 3}{6 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{30}{18} - \frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11 \times 2}{9 \times 2} = \frac{11}{9} \\
F &= 4 - 3 \times \frac{5}{6} = \frac{4}{1} - \frac{3 \times 5}{6} = \frac{4 \times 6}{1 \times 6} - \frac{15}{6} = \frac{24}{6} - \frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{2} \\
G &= \frac{6}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{6 \times 15}{10 \times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9 \times 10}{8 \times 10} = \frac{9}{8} \\
H &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

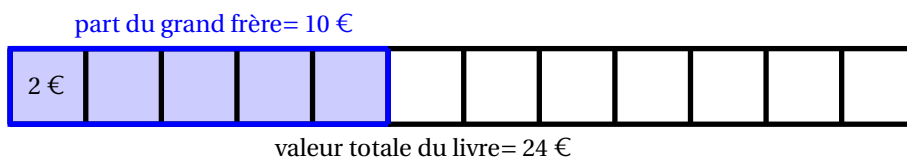
Exercice 19 Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste $\frac{5}{12}$ du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit $\frac{12}{12}$ du prix) est égal à

$$\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12 \times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ €}.$$

Remarque : Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente $\frac{1}{12}$ du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les $\frac{5}{12}$ du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent $5 \times 2 = 10$ € ; et la valeur totale du livre est $12 \times 2 = 24$ €.



Exercise 20

$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12} \times 3^{6-4} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

$$B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$

$$C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$

$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{(2 \times 3)^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6}{2^5} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5} \times 3^{6-4} = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$E = \frac{(10^4)^3}{10^8} = \frac{10^{4 \times 3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$

$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2 \times 5}}{2^{3 \times 3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$

$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7} + \frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7} + 10^{8-7} = 10^3 + 10^1 = 1\,000 + 1 = 1\,001$$