Mathématiques – Maths expertes

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Divisibilité, nombres premiers

Exercice 1 1. • On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 20 :

$$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5,$$

donc les diviseurs de 20 sont

$$1, 2, 4, 5, 10 \text{ et } 20.$$

- On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 36 :

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6,$$

donc les diviseurs de 36 sont

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 \text{ et } 36.$$

2. Le nombre 1 452 est :
   - divisible par 2, car il est pair ;
   - divisible par 3, car la somme de ses chiffres, $1+4+5+2 = 12$, est divisible par 3 ;
   - non divisible par 5, car il ne se termine ni par 0, ni par 5 ;
   - non divisible par 9, car la somme de ses chiffres, 12, n'est pas divisible par 9.

Exercice 2 On factorise : l'égalité $x^2 - 2xy = 14$ se réécrit

$$x(x-2y) = 14.$$

x et y sont des entiers naturels, donc $x - 2y$ est un entier. C'est même un entier naturel, car x et 14 sont positifs, donc par la règle des signes, $x - 2y$ est positif.
Or les différentes manières d'écrire 14 comme un produit d'entiers naturels sont :

$$14 = 1 \times 14 = 2 \times 7 = 7 \times 2 = 14 \times 1.$$

Il y a donc quatre possibilités :

$$\begin{cases} x & = 1 \\ x - 2y & = 14 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 2 \\ x - 2y & = 7 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 7 \\ x - 2y & = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & = 14 \\ x - 2y & = 1 \end{cases}.$$

On résout de tête chacun des quatre systèmes :

$$(x = 1, y = -6,5) \qquad , \qquad (x = 2, y = -2,5) \qquad , \qquad (x = 7, y = 2,5) \qquad , \qquad (x = 14, y = 6,5).$$

Aucun couple n'est un couple d'entiers naturels, donc le problème n'a aucune solution.

Exercice 3 1. Trois entiers consécutifs sont de la forme n, $n+1$, $n+2$, avec n entier (dans $\mathbb{Z}$), donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1).$$

$n + 1$ est un entier, donc $n + (n+1) + (n+2)$ est un multiple de 3.

2. Quatre entiers consécutifs sont de la forme n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, avec n entier, donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 4(n + 1,5).$$

Or $n + 1,5$ n'est pas un entier, donc la somme des quatre entiers consécutifs n'est pas un multiple de 4.

Exercice 4 On factorise :

$$n^2 - 2n = n(n-2).$$

D'après le point 1 de la proposition 1, si 5 divise n, il divise aussi $n(n-2)$.

Exercice 5 Commençons par rappeler que les nombres pairs sont les multiples de 2.

Pour démontrer le résultat de l'énoncé, on factorise

$$n^2 + n = n(n+1),$$

puis on distingue deux cas :

- Si n est pair, il est multiple de 2, donc $n(n+1)$ est également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair, donc multiple de 2 ; $n(n+1)$ est donc également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.

Dans tous les cas, n^2+n est un multiple de 2, donc un nombre pair.

Exercice 6 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 1.

1. Si $a|b$, alors $a|ub$ pour tout $u \in \mathbb{Z}$.
2. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(ub+vc)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

On commence par le point 1. Si $a|b$, on peut écrire $b = k \times a$, où k est un entier. Donc

$$ub = u(k \times a) = (uk) \times a,$$

qui est donc bien un multiple de a (car uk est un entier).

On démontre ensuite le point 2. Par hypothèse $a|b$ et $a|c$, donc on peut écrire $b = k \times a$ et $c = j \times a$, où k et j sont deux entiers. Mais alors

$$ub + vc = u(k \times a) + v(j \times a) = a(uk + vj).$$

Il s'agit bien d'un multiple de a, puisque $uk + vj$ est un entier (du fait que u, v, k, j sont des entiers).

Remarque : Une façon agréable d'énoncer le point 2 de la proposition 1 est de dire que

« Si a divise b et c, alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de b et c »

($ub + vc$ est ce que l'on appelle une combinaison linéaire de b et c).

Exercice 7 On fait un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse.** Soit n un entier naturel tel que $n+3$ divise $n+15$.
  De façon évidente, $n+3$ divise $n+3$, donc d'après la proposition 1 du cours, $n+3$ divise la combinaison linéaire

  $$1(n+15) - 1(n+3) = n + 15 - n - 3 = 12.$$

  On cherche les solutions avec n entier naturel, donc $n+3$ est supérieur ou égal à 3. Or les seuls diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à 3 sont 3, 4, 6 et 12. On a donc quatre possibilités :

  $$n+3 = 3 \quad , \quad n+3 = 4 \quad , \quad n+3 = 6 \quad , \quad n+3 = 12,$$

  qui donnent

  $$n = 0 \quad , \quad n = 1 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad n = 9.$$

- **Synthèse.** On vérifie les solutions trouvées :
  — Si $n = 0$, on on bien $n+3 = 0+3 = 3$, qui divise $n+15 = 0+15 = 15$.
  — Si $n = 1$, on on bien $n+3 = 1+3 = 4$, qui divise $n+15 = 1+15 = 16$.
  — Si $n = 3$, on on bien $n+3 = 3+3 = 6$, qui divise $n+15 = 3+15 = 18$.
  — Si $n = 9$, on on bien $n+3 = 9+3 = 12$, qui divise $n+15 = 9+15 = 24$.

  Conclusion : les entiers naturels n tels que $n+3$ divise $n+15$ sont 0, 1, 3 et 9.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation

$$a^2 + 1 = 2^n, \tag{1}$$

d'inconnue $a \in \mathbb{Z}$.

1. • On commence par le cas $n = 1$. Comme $2^1 = 2$, l'équation (1) s'écrit

   $$a^2 + 1 = 2.$$

   On résout :

   $$a^2 = 2 - 1 \iff a^2 = 1 \iff (a = 1 \text{ ou } a = -1).$$

   Il y a deux solutions : $a = 1$ et $a = -1$.

- Ensuite le cas $n = 2$. Comme $2^2 = 4$, l'équation (1) s'écrit
$$a^2 + 1 = 4.$$
On résout :
$$a^2 = 4 - 1 \iff a^2 = 3 \iff (a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3}).$$
Or $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ n'est pas un entier, donc il n'y a pas de solution.

2. On suppose à présent que $n \geq 3$.
   (a) On peut écrire
   $$2^n = 2^{n-3} \times 2^3 = 2^{n-3} \times 8.$$
   Par hypothèse $n \geq 3$, donc $n - 3 \geq 0$, et donc 2^{n-3} est un entier. Il s'ensuit que $2^n = \underbrace{2^{n-3}}_{\text{entier}} \times 8$ est un multiple de 8.

   (b) On raisonne par contraposée [1].
   Si a est pair, alors $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $a^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 = 2\left(2k^2\right) + 1$ est impair. D'un autre côté, 2^n est pair (car $n \in \mathbb{N}^*$). Il est donc impossible que $a^2 + 1$ (qui est impair) soit égal à 2^n (qui est pair).

   Conclusion : si a est pair, alors il n'est pas solution de (1). Donc par contraposée, si a est solution de (1), alors il est nécessairement impair.

   (c) On suppose que a est impair, donc de la forme $a = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas
   $$a^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4\left(k^2 + k\right).$$

   ⚠On a utilisé l'identité remarquable
   $$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

   D'après l'exercice 5, $k^2 + k$ est un nombre pair, donc multiple de 2 : on peut l'écrire $k^2 + k = 2m$, avec $m \in \mathbb{Z}$. Il vient donc finalement
   $$a^2 - 1 = 4\left(k^2 + k\right) = 4(2m) = 8m,$$
   ce qui prouve que $a^2 - 1$ est multiple de 8.

   (d) On suppose que $n \geq 3$ et que a est solution de (1). On a prouvé dans la question 2.(a) que 2^n était un multiple de 8, donc $a^2 + 1$ est un multiple de 8. D'un autre côté, d'après les questions 2.(b) et 2.(c), $a^2 - 1$ est également un multiple de 8. Donc d'après la proposition 1 du cours, la différence
   $$2^n - \left(a^2 - 1\right) = \left(a^2 + 1\right) - \left(a^2 - 1\right) = a^2 + 1 - a^2 + 1 = 2$$
   est un multiple de 8, ce qui est absurde.

   Conclusion : supposant que (1) admet une solution lorsque $n \geq 3$, on aboutit à une absurdité; c'est donc qu'il n'y a pas de solution dans ce cas-là.

3. D'après la question 1, il y a deux solutions, $a = 1$ et $a = -1$, lorsque $n = 1$. En revanche, il n'y a aucune solution quand $n = 2$. On vient par ailleurs de démontrer qu'il n'y avait aucune solution dans le cas $n \geq 3$. On peut donc conclure avec un tableau :

n	solutions de (1)
1	$a = 1$ et $a = -1$
≥ 2	aucune solution

Exercice 9 • On effectue la division euclidienne de 587 par 13 :

$$\begin{array}{r|l} 5\,8\,7 & 1\,3 \\ \cline{2-2} -\underline{5\,2} & 4\,5 \\ 6\,7 & \\ -\underline{6\,5} & \\ 2 & \end{array}$$

1. Pour prouver qu'une implication de la forme

Si A alors B,

est vraie, il suffit de prouver que sa contraposée

Si (non B) alors (non A)

est vraie.

$$587 = 45 \times 13 + 2.$$

Remarque : On obtient directement la réponse avec une calculatrice en faisant les calculs $587 \div 13 = 45, \cdots$, puis $587 - 45 \times 13 = 2$.

- On effectue la division euclidienne de 10000 par 11 :

$$\begin{array}{r|l} 10000 & 11 \\ \cline{2-2} -\ \ 99 & 909 \\ \cline{1-1} 100 & \\ -\ \ 99 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$10000 = 909 \times 11 + 1.$$

Exercice 10 1. On suppose que la différence entre a et b est 538, et que le quotient dans la division de a par b est 13, le reste 34. On peut donc écrire

$$\begin{cases} a = b + 538 \\ a = 13b + 34 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$b + 538 = 13b + 34,$$

donc

$$538 - 34 = 13b - b \qquad b = \frac{504}{12} = 42.$$

Conclusion : $b = 42$ et $a = b + 538 = 42 + 538 = 580$.

2. Quand on divise n par 29 et par 27, les quotients sont les mêmes et les restes sont respectivement 1 et 25. En notant q les quotients identiques, on obtient le système

$$\begin{cases} n = 29q + 1 \\ n = 27q + 25 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$29q + 1 = 27q + 25,$$

donc

$$29q - 27q = 25 - 1 \qquad 2q = 24 \qquad q = \frac{24}{2} = 12.$$

Conclusion : $n = 29q + 1 = 29 \times 12 + 1 = 349$.

Exercice 11 On écrit tous les produits d'entiers qui donnent 48 et 84 :

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \times 48 \\ &= 2 \times 24 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 4 \times 12 \\ &= 6 \times 8. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 48 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

$$\begin{aligned} 84 &= 1 \times 84 \\ &= 2 \times 42 \\ &= 3 \times 28 \\ &= 4 \times 21 \\ &= 6 \times 14 \\ &= 7 \times 12. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.

Le PGCD est le plus grand nombre qui divise à la fois 48 et 84. L'examen des listes ci-dessus donne

$$\text{PGCD}(48, 84) = 12.$$

Exercice 12

- On cherche le PGCD de 840 et 144. On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned}840 &= 5\times 144+120,\\ 144 &= 1\times 120+24,\\ 120 &= 5\times 24+0.\end{aligned}$$

  Le PGCD est le dernier reste non nul :

$$\mathrm{PGCD}(144,840)=24.$$

- On cherche le PGCD de 215 et 28. On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned}215 &= 7\times 28+19,\\ 28 &= 1\times 19+9,\\ 19 &= 2\times 9+1\\ 9 &= 9\times 1+0.\end{aligned}$$

  On a donc $\mathrm{PGCD}(215,28)=1$.

  Remarque : Comme $\mathrm{PGCD}(215,28)=1$, on dit que 215 et 28 sont premiers entre eux – leur seul diviseur positif commun est 1.

Exercice 13 Le côté de chaque dalle (exprimé en cm) doit être un entier qui divise 840 et 350 ; on veut de plus que ce côté soit le plus grand possible. On cherche donc le PGCD de 840 et 350 :

$$\begin{aligned}840 &= 2\times 350+140,\\ 350 &= 2\times 140+70,\\ 140 &= 2\times 70+0.\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{PGCD}(840,350)=70$, donc chaque dalle a un côté de 70 cm.
De plus, il y a $840\div 70=12$ dalles en longueur ; et $350\div 70=5$ dalles en largeur, donc un total de

$$12\times 5=60 \text{ dalles.}$$

Exercice 14 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 2.

Dans la division euclidienne

$$a=bq+r,$$

(i) si $r\neq 0$, $\mathrm{PGCD}(a,b)=\mathrm{PGCD}(b,r)$;

(ii) si $r=0$, $\mathrm{PGCD}(a,b)=b$.

1. Dans la situation de la division euclidienne $a=bq+r$, si l'entier k divise a et b, alors d'après la proposition 1 du cours, il divise la combinaison linéaire

$$r=a\times 1-b\times q.$$

   Par conséquent, on a l'implication

$$k \text{ divise } a \text{ et } b \implies k \text{ divise } b \text{ et } r.$$

   Réciproquement, si k divise b et r, alors k divise a, puisque $a=b\times q+r\times 1$ (on utilise à nouveau la proposition 1). Il divise donc a et b.
   On a finalement l'équivalence

$$k \text{ divise } a \text{ et } b \iff k \text{ divise } b \text{ et } r.$$

2. D'après l'équivalence de la question 1, la liste des diviseurs communs à a et b est la même que la liste des diviseurs communs à b et r. Il s'ensuit que le plus grand élément de chacune des deux listes est le même. Autrement dit :

$$\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r).$$

3. Si $r=0$, alors $a = bq$, donc b est un diviseur de a. Le plus grand diviseur commun à a et b est donc b :

$$\text{PGCD}(a,b) = b.$$

Exercice 15

1. On développe et on réduit :

$$2(3n+2)-3(2n+1) = 6n+4-6n-3 = 1.$$

2. Si un entier naturel k divise à la fois $3n+2$ et $2n+1$, alors il divise la combinaison linéaire $2(3n+2)-3(2n+1) = 1$. On a donc nécessairement $k=1$, c'est-à-dire que $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. La fraction

$$\frac{3n+2}{2n+1}$$

est donc irréductible.

Exercice 16 Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = 3n+1$ et $b_n = 3n-1$.

1. On présente avec un tableau :

n	a_n	b_n	PGCD (a_n, b_n)	1ers entre eux
1	4	2	2	non
2	7	5	1	oui
3	10	8	2	non
4	13	11	1	oui

On constate que le PGCD vaut 1 ou 2, suivant que n est pair ou impair. On va le démontrer rigoureusement dans les questions suivantes.

2. Si un entier naturel k divise a_n et b_n, alors il divise la combinaison linéaire

$$a_n - b_n = (3n+1)-(3n-1) = 3n+1-3n+1 = 2.$$

Cet entier k ne peut donc être que 1 ou 2.

3. D'après la question précédente, le PGCD de a_n et b_n ne peut être que 1 ou 2. On distingue alors deux cas :
   - Si n est impair, alors $3n$ est impair (comme produit de deux nombres impairs – facile à justifier). Donc $3n-1$ et $3n+1$ sont pairs, et leur PGCD est égal à 2.
   - Si n est pair, alors $3n$ est pair (cf le point 1 de la proposition 1). Donc $3n-1$ et $3n+1$ sont impairs; ils ne sont pas divisibles par 2 et leur PGCD est nécessairement égal à 1.

Finalement, on a bien l'équivalence :

$$a_n \text{ et } b_n \text{ premiers entre eux} \iff n \text{ pair}.$$

Exercice 17 Rappelons pour commencer que les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7 et 11.

Pour savoir si un nombre n est premier, on essaye de le diviser par tous les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{n}$. D'après la proposition 3 du cours, s'il n'est divisible par aucun d'entre eux, c'est qu'il est premier; sinon, qu'il ne l'est pas. Parfois, il y a un diviseur évident, ce qui nous épargne de fastidieux calculs.

- 425 n'est pas premier, car il est divisible par 5 (diviseur évident).
- $\sqrt{53} = 7,\cdots$
  53 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à 7 (à savoir 2, 3, 5 et 7), donc il est premier.
- $7\,777 = 7 \times 1\,111$, donc 7 777 n'est pas premier (7 est un diviseur évident).
- $\sqrt{97} \approx 9,\cdots$, et 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7. Il est donc premier.
- $\sqrt{143} = 11,\cdots$ Le test avec 2, 3, 5 et 7 pourrait laisser penser que 143 est premier; mais ce n'est pas le cas, puisque $143 = 11 \times 13$ (il faut tester jusque 11, et ça ne fonctionne que pour 11).

Exercice 18 On barre les multiples de 2 (sauf 2), puis ceux de 3 (sauf 3), ceux de 5 (sauf 5) ; et enfin ceux de 7 (sauf 7). Comme $\sqrt{100} = 10$ et que les nombres premiers inférieurs à 10 sont 2, 3, 5 et 7, il ne reste plus dans le tableau que les nombres premiers (cf proposition 3 du cours) – ainsi que 1 !

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ce tableau est appelé *crible d'Ératosthène*.

Exercice 19 Soit $p > 2$ un nombre premier. En factorisant, l'équation

$$x^2 - y^2 = p \tag{2}$$

se réécrit

$$(x+y)(x-y) = p.$$

Les facteurs $x + y$ et $x - y$ sont des entiers. Or p est premier, donc les quatre seules possibilités de l'écrire comme un produit d'entiers sont

$$p = p \times 1 = 1 \times p = (-p) \times (-1) = (-1) \times (-p).$$

On a donc quatre possibilités :

$$\begin{cases} x+y=p \\ x-y=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x+y=-p \\ x-y=-1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=p \end{cases} , \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-p \end{cases}.$$

⚠Dans cet exercice, les solutions négatives sont autorisées (on ne se restreint pas aux entiers naturels).

On résout chacun des quatre systèmes en ajoutant membre à membre les deux lignes. Par exemple, pour le premier :

$$x+y+x-y = p+1 \qquad 2x = p+1 \qquad x = \frac{p+1}{2} \qquad \text{puis} \qquad y = p - x = \frac{2p}{2} - \frac{p+1}{2} = \frac{2p-p-1}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

Conclusion : dans ce cas-là, le couple $x = \frac{p+1}{2}$, $y = \frac{p-1}{2}$ est solution. C'est de plus bien un couple d'entiers, car $p > 2$ étant premier, il est impair, donc $p+1$ et $p-1$ sont pairs, et finalement $\frac{p+1}{2}$ et $\frac{p-1}{2}$ sont des entiers.

On résout de la même façon les trois autres systèmes pour obtenir quatre couples solutions :

$$(x = \frac{p+1}{2}, y = \frac{p-1}{2}) \quad , \quad (x = \frac{-p-1}{2}, y = \frac{-p+1}{2}) \quad , \quad (x = \frac{p+1}{2}, y = \frac{-p+1}{2}) \quad , \quad (x = \frac{-p-1}{2}, y = \frac{p-1}{2}).$$

Exercice 20

1. On décompose en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$168 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1.$ $\qquad$ $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1.$

Pour obtenir le PGCD, on fait le produit de tous les nombres en commun, en prenant la plus petite puissance :

$$\text{PGCD}(168, 60) = 2^2 \times 3^1 = 12.$$

2. On décompose en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 224 & 2 \\ 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$224 = 2^5 \times 7^1$.

$$\begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$196 = 2^2 \times 7^2$.

Pour obtenir le PGCD, on fait le produit de tous les nombres en commun, en prenant la plus petite puissance :

$$\mathrm{PGCD}(224, 196) = 2^2 \times 7^1 = 28.$$

Exercice 21 Je verrai à nouveau les objets en même temps dans un nombre de jours multiple à la fois de 168 et 90. Comme on cherche la plus petite solution, il faut déterminer le plus petit multiple commun à 168 et 90.

On décompose comme d'habitude en produits de nombres premiers (je ne détaille pas) ; on obtient :

$$\begin{aligned} 168 &= 2^3 \times 3^1 \times 7^1, \\ 90 &= 2^1 \times 3^2 \times 5^1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{PPCM}(168, 90) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 2\,520.$$

Les objets A et B apparaîtront de nouveau en même temps dans 2 520 jours.

Remarque : Le même type de calcul que celui que nous venons de mener permet de comprendre que le Soleil, la Terre et la Lune se retrouvent dans des configurations sensiblement identiques tous les 18 ans et 11 jours. Cette période, appelée « saros », est utilisée pour prédire les éclipses.

Exercice 22 Une boîte à chaussures de dimensions intérieures 31,2 cm, 13 cm et 7,8 cm est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres.

Pour minimiser le nombre de cubes, il faut maximiser la longueur de leur arête. Comme ce doit être un nombre entier de millimètres, il doit diviser à la fois 312, 130 et 78 ; et c'est donc leur PGCD. On décompose en produits de nombres premiers :

$$\begin{aligned} 312 &= 2^3 \times 3^1 \times 13^1, \\ 130 &= 2^1 \times 5^1 \times 13^1, \\ 78 &= 2^1 \times 3^1 \times 13^1. \end{aligned}$$

On en déduit que la longueur de l'arête optimale est

$$\mathrm{PGCD}(312, 130, 78) = 2^1 \times 13^1 = 26.$$

Conclusion : les cubes auront une arête de 26 mm. On en mettra $312 \div 26 = 12$ en longueur, $130 \div 26 = 5$ en largeur et $78 \div 13 = 6$ en hauteur, soit

$$12 \times 5 \times 6 = 360$$

en tout.

Exercice 23 D'après la proposition 4 du cours, les diviseurs de $n = 2^6 \times 3^2 \times 7^4$ sont les nombres de la forme

$$2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma,$$

avec $0 \leq \alpha \leq 6$, $0 \leq \beta \leq 2$ et $0 \leq \gamma \leq 4$.

Il y a donc 7 possibilités pour α (de 0 à 6), 3 pour β (de 0 à 2) et 5 pour γ (de 0 à 4), soit

$$7 \times 3 \times 5 = 105$$

diviseurs positifs de n en tout.

Exercice 24

1. Soit n le carré d'un entier m, c'est-à-dire que $n = m^2$. On décompose m en produit de nombres premiers :

$$m = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k},$$

d'où l'on tire

$$n = m^2 = \left(p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}\right)^2 = p_1^{2\beta_1} \times p_2^{2\beta_2} \times \cdots \times p_k^{2\beta_k},$$

décomposition dans laquelle tous les exposants sont pairs.

Le nombre $2^6 \times 3^9 \times 5^2$ de l'exercice n'est donc pas un carré parfait, puisque l'un des exposants de sa décomposition (à savoir le nombre 9) est impair.

2. On s'inspire de la question précédente. Le nombre $B = 2^8 \times 3^8 \times 7^4$ est un multiple de de $A = 2^7 \times 3^8 \times 7^3$, puisque tous les exposants dans sa décomposition sont supérieurs à ceux de la décomposition de A (proposition 4). De plus, B est le carré de $b = 2^4 \times 3^4 \times 7^2$ – donc c'est bien un carré parfait.

Remarque : Il n'y a pas une seule solution au problème. On aurait par exemple pu choisir $B = 2^{10} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^6$ – en prenant garde d'avoir des exposants pairs, et plus grands que ceux de la décomposition de A.

Exercice 25 Le but de l'exercice est de démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers strictement positifs.

1. Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, alors $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, soit $2 = \frac{p^2}{q^2}$. On a donc

$$p^2 = 2q^2.$$

2. On décompose p et q en produits de nombres premiers :

$$p = 2^\alpha \times p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k},$$
$$q = 2^\beta \times q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_k^{\beta_k}.$$

Dans ces décompositions, les p_i et les q_i sont des nombres premiers distincts de 2. Par ailleurs, l'un des exposants α ou β pourrait être nul (il se peut que 2 n'apparaisse pas dans l'une des deux décompositions, voire dans les deux).

On élève q au carré, comme dans l'exercice 24 :

$$q^2 = \left(2^\beta \times q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_k^{\beta_k}\right)^2 = 2^{2\beta} \times q_1^{2\beta_1} \times \cdots \times q_k^{2\beta_k},$$

d'où l'on tire

$$2q^2 = 2^{2\beta+1} \times q_1^{2\beta_1} \times \cdots \times q_k^{2\beta_k}.$$

On obtient de même

$$p^2 = 2^{2\alpha} \times p_1^{2\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{2\alpha_k}.$$

On sait que $p^2 = 2q^2$, donc par unicité de la décomposition d'un entier naturel en produit de nombres premiers (théorème 3 du cours), les exposants dans les décompositions de p^2 et de $2q^2$ devraient être les mêmes. En comparant les exposants de 2, cela donne

$$2\beta + 1 = 2\alpha,$$

ce qui est absurde, puisque le membre de gauche de cette égalité est impair, celui de droite pair.

Conclusion : supposant que que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers strictement positifs, on aboutit à une absurdité. C'est donc que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous cette forme : il est irrationnel.

2 Les nombres complexes

Exercice 26 On écrit les nombres sous forme algébrique :

1. $(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = 6-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}-2\underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1} = 6-\mathrm{i}+2 = 8-\mathrm{i}$.
2. $-(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}(2-\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-\underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1} = -1+\mathrm{i}+1 = \mathrm{i}$.
3. $(3-2\mathrm{i})^2 = 3^2-2\times3\times2\mathrm{i}+(2\mathrm{i})^2 = 9-12\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2 = 9-12\mathrm{i}-4 = 5-12\mathrm{i}$.
4. $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})(2+\mathrm{i}\sqrt{3}) = 2^2-\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = 4-\mathrm{i}^2\sqrt{3}^2 = 4+3 = 7$.
5. $\mathrm{i}^4 = \left(\mathrm{i}^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$.
6. $(1+\mathrm{i})^2 = 1+2\times1\times\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 1+2\mathrm{i}-1 = 2\mathrm{i}$.

Exercice 27 Dans chaque cas, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions. On fera grand usage de l'identité remarquable

$$A^2-B^2 = (A+B)(A-B).$$

1. $$z^2 = 4\mathrm{i}z \iff z^2-4\mathrm{i}z = 0 \iff z(z-4\mathrm{i}) = 0 \iff (z=0 \text{ ou } z-4\mathrm{i}=0) \iff (z=0 \text{ ou } z=4\mathrm{i}) \qquad \boxed{\mathscr{S} = \{0, 4\mathrm{i}\}}$$
2. $$z^2 = 9 \iff z^2-9 = 0 \iff z^2-3^2 = 0 \iff (z+3)(z-3) = 0 \iff (z+3=0 \text{ ou } z-3=0) \iff (z=-3 \text{ ou } z=3) \qquad \boxed{\mathscr{S} = \{3, -3\}}$$
3. L'astuce consiste à écrire $-4 = (2\mathrm{i})^2$!
$$z^2 = -4 \iff z^2 = (2\mathrm{i})^2 \iff z^2-(2\mathrm{i})^2 = 0 \iff (z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i}) = 0 \iff (z+2\mathrm{i}=0 \text{ ou } z-2\mathrm{i}=0) \iff (z=-2\mathrm{i} \text{ ou } z=2\mathrm{i}) \qquad \boxed{\mathscr{S} = \{2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}}$$
4. Ici, on multiplie par $-\mathrm{i}$ pour « éliminer le i » :
$$\mathrm{i}z = 5 \iff -\mathrm{i}\times\mathrm{i}z = -\mathrm{i}\times5 \iff -\mathrm{i}^2z = -5\mathrm{i} \iff z = -5\mathrm{i} \qquad \boxed{\mathscr{S} = \{-5\mathrm{i}\}}$$

Exercice 28 On écrit sous forme algébrique en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur. On fait usage de la nouvelle identité remarquable

$$(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$$

lorsque a et b sont réels (elle est vraie aussi si ce sont des complexes!).

1. $$\frac{1}{3-4\mathrm{i}} = \frac{1(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{3+4\mathrm{i}}{3^2+4^2} = \frac{3+4\mathrm{i}}{25} = \frac{3}{25}+\frac{4}{25}\mathrm{i}.$$
2. $$\frac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} = \frac{2+\mathrm{i}+1}{5} = \frac{3}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

Exercice 29 Soit $z = a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe, où $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Par définition $\overline{z} = a-\mathrm{i}b$, donc

1. $z+\overline{z} = a+\mathrm{i}b+a-\mathrm{i}b = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.
2. $z-\overline{z} = a+\mathrm{i}b-(a-\mathrm{i}b) = a+\mathrm{i}b-a+\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

Exercice 30 On résout les équations :

1. $$z = 1-\mathrm{i}z \iff z+\mathrm{i}z = 1 \iff z(1+\mathrm{i}) = 1 \iff z = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \qquad \boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}}$$
2. $$(2+\mathrm{i})z = 2-\mathrm{i} \iff z = \frac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{2^2-2\times2\times\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} = \frac{4-4\mathrm{i}-1}{5} = \frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i} \qquad \boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}\right\}}$$

Exercice 31 Pour tous complexes $z = a + \mathrm{i}b$, $w = c + \mathrm{i}d$ écrits sous forme algébrique :

1. $\overline{z+w} = \overline{a+\mathrm{i}b+c+\mathrm{i}d} = \overline{a+c+\mathrm{i}(b+d)} = a+c-\mathrm{i}(b+d) = a-\mathrm{i}b+c-\mathrm{i}d = \overline{z}+\overline{w}$.
2. D'un côté :
$$z \times w = (a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = ac+\mathrm{i}ad+\mathrm{i}bc+\mathrm{i}^2bd = ac-bd+\mathrm{i}(ad+bc),$$
donc
$$\overline{z\times w} = ac-bd-\mathrm{i}(ad+bc).$$
De l'autre,
$$\overline{z}\times\overline{w} = (a-\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d) = ac-\mathrm{i}ad-\mathrm{i}bc+\mathrm{i}^2bd = ac-bd-\mathrm{i}(ad+bc).$$
On a donc bien
$$\overline{z\times w} = \overline{z}\times\overline{w}.$$

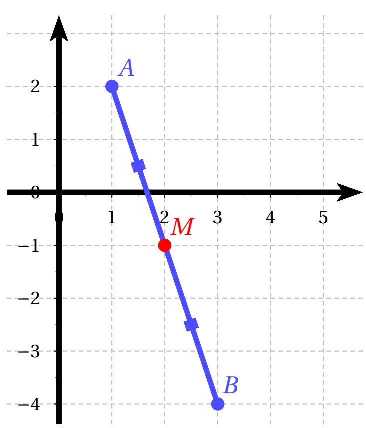
Exercice 32 Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = a+\mathrm{i}b$. On pose
$$Z = z-2\overline{z}+2+3\mathrm{i}.$$

1. On écrit Z sous forme algébrique :
$$Z = z-2\overline{z}+2+3\mathrm{i} = a+\mathrm{i}b-2(a-\mathrm{i}b)+2+3\mathrm{i} = a+\mathrm{i}b-2a+2\mathrm{i}b+2+3\mathrm{i} = -a+2+\mathrm{i}(3b+3).$$
2. On raisonne par équivalences :
   - Z imaginaire pur $\iff$ $\mathrm{Re}(Z)=0$ $\iff$ $-a+2=0$ $\iff$ $a=2$.
     Conclusion : Z est imaginaire pur lorsque z est de la forme $z = 2+\mathrm{i}b$, avec b réel quelconque.
   - Z réel $\iff$ $\mathrm{Im}(Z)=0$ $\iff$ $3b+3=0$ $\iff$ $b=-1$.
     Conclusion : Z est réel lorsque z est de la forme $z = a-\mathrm{i}$, avec a réel quelconque.

   ⚠Un complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nul ; il est imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle.

Exercice 33

1.



2. D'après la formule du cours, le milieu M du segment $[AB]$ a pour affixe
$$m = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2\mathrm{i}+3-4\mathrm{i}}{2} = \frac{4-2\mathrm{i}}{2} = 2-\mathrm{i}.$$
3. D'après la formule du cours, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = b-a = (3-4\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i}) = 3-4\mathrm{i}-1-2\mathrm{i} = 2-6\mathrm{i}.$$

Exercice 34

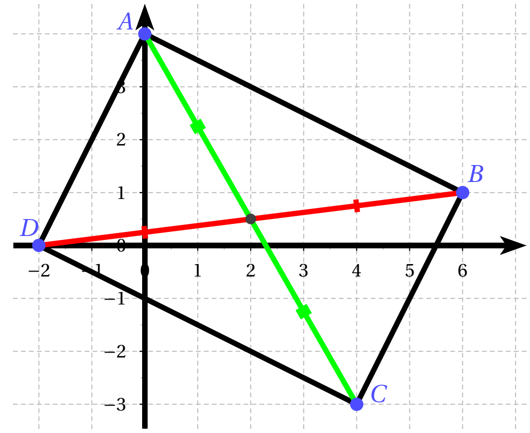
Le milieu de $[AC]$ a pour affixe

$$\frac{a+c}{2}=\frac{4\mathrm{i}+4-3\mathrm{i}}{2}=\frac{4+\mathrm{i}}{2}=2+0,5\mathrm{i}.$$

Le milieu de $[BD]$ a pour affixe

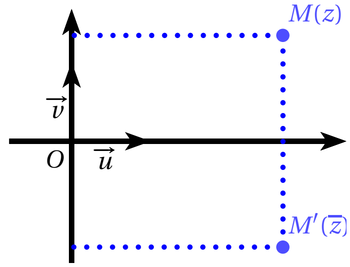
$$\frac{b+d}{2}=\frac{6+\mathrm{i}-2}{2}=\frac{4+\mathrm{i}}{2}=2+0,5\mathrm{i}.$$

Les affixes sont les mêmes, donc les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu. C'est donc un parallélogramme (propriété du collège).



Exercice 35 Dans chaque cas, s est une transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

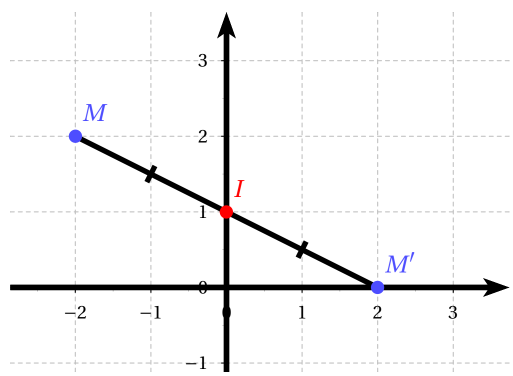
1. Si $z'=\overline{z}$, s est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



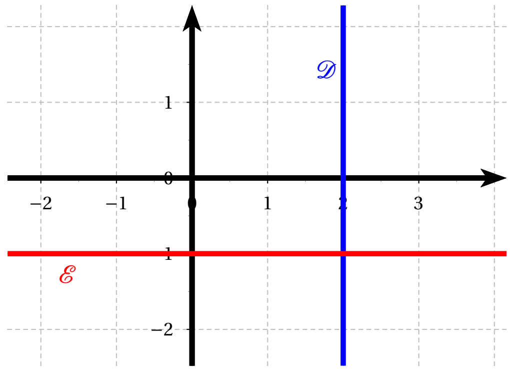
2. Si $z'=2\mathrm{i}-z$, alors

$$\frac{z+z'}{2}=\frac{z+2\mathrm{i}-z}{2}=\mathrm{i},$$

donc le point I d'affixe i est le milieu du segment $\left[MM'\right]$. On en déduit que s est la symétrie centrale de centre I.



Exercice 36
- La partie réelle d'un complexe est l'abscisse de son image. Donc l'ensemble $\mathscr{D}=\{M(z)\mid \mathrm{Re}(z)=2\}$ est l'ensemble des points d'abscisse 2, c'est-à-dire la droite d'équation $x=2$.
- La partie imaginaire d'un complexe est l'ordonnée de son image. Donc l'ensemble $\mathscr{E}=\{M(z)\mid \mathrm{Im}(z)=-1\}$ est l'ensemble des points d'ordonnée -1, c'est-à-dire la droite d'équation $y=-1$.



Exercice 37 1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x + \mathrm{i}y$. On écrit sous forme algébrique :

$$\mathrm{i}z + 2\overline{z} = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 2(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{i}x + \mathrm{i}^2 y + 2x - 2\mathrm{i}y = 2x - y + \mathrm{i}(x - 2y).$$

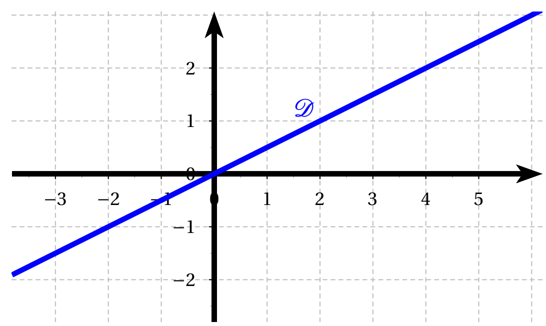
Conclusion :

- la partie réelle de $\mathrm{i}z + 2\overline{z}$ est $2x - y$;
- la partie imaginaire de $\mathrm{i}z + 2\overline{z}$ est $x - 2y$.

2. Soit M un point du plan d'affixe z. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\iff \left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) \text{ réel} \\ &\iff \mathrm{Im}\left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) = 0 \\ &\iff x - 2y = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{D}$ est donc la droite d'équation $x - 2y = 0$ (ou, sous forme réduite, $y = \frac{1}{2}x$).



Exercice 38 1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x + \mathrm{i}y$. On écrit sous forme algébrique :

$$(z+2) \times \overline{z} = (x + \mathrm{i}y + 2) \times (x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2 y^2 + 2x - 2\mathrm{i}y = x^2 + 2x + y^2 - 2\mathrm{i}y.$$

Conclusion :

- la partie réelle de $(z+2) \times \overline{z}$ est $x^2 + 2x + y^2$;
- la partie imaginaire de $(z+2) \times \overline{z}$ est $-2y$.

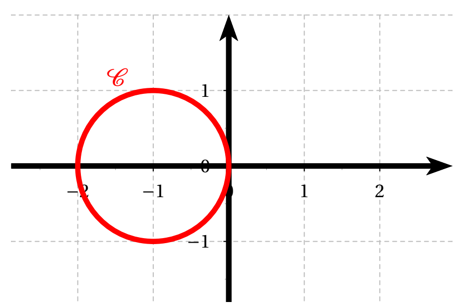
2. Soit M un point du plan d'affixe z. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff \left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) \text{ imaginaire pur} \\ &\iff \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) = 0 \\ &\iff x^2 + 2x + y^2 = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{C}$ est un cercle. En effet :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 = 0 &\iff \left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 + y^2 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $I(-1;0)$ et de rayon $\sqrt{1} = 1$.



Rappel : Le cercle de centre $I(x_I; y_I)$ de rayon R a pour équation

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2.$$

Exercice 39 À tout point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point M' d'affixe $z' = (z + \mathrm{i})\left(\overline{z} + 2\mathrm{i}\right)$.

1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x + \mathrm{i}y$. On écrit sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z' = (z+\mathrm{i})\left(\overline{z} + 2\mathrm{i}\right) &= (x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}) \times (x - \mathrm{i}y + 2\mathrm{i}) = x^2 - \mathrm{i}xy + 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2 y^2 + 2\mathrm{i}^2 y + \mathrm{i}x - \mathrm{i}^2 y + 2\mathrm{i}^2 \\ &= x^2 - \mathrm{i}xy + 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}xy + y^2 - 2y + \mathrm{i}x + y - 2 = x^2 + y^2 - y - 2 + 3\mathrm{i}x. \end{aligned}$$

Conclusion :

- la partie réelle de z' est x^2+y^2-y-2 ;
- la partie imaginaire de z' est $3x$.

2. On raisonne par équivalences :

$$M' \text{ sur l'axe des abscisses} \iff \mathrm{Im}(z')=0 \iff 3x=0 \iff x=0.$$

Δ est donc la droite d'équation $x=0$.

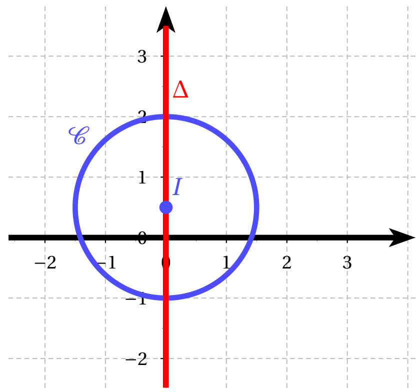
3. On raisonne par équivalences :

$$M' \text{ sur l'axe des ordonnées} \iff \mathrm{Re}(z')=0 \iff x^2+y^2-y-2=0.$$

Or $y^2-y=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, donc

$$x^2+y^2-y-2=0 \iff x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0 \iff x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Conclusion : $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.



Exercice 40 On résout dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2-2z+5=0$.
   - Le discriminant est $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 5=-16$.
   - $\Delta<0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{2-\mathrm{i}\sqrt{|-16|}}{2\times 1}=\frac{2-4\mathrm{i}}{2}=1-2\mathrm{i},$$
$$z_2=\overline{z_1}=1+2\mathrm{i}.$$

2. $z^2-4z+3=0$.
   - Le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 3=4$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$ – qui sont en fait des nombres réels :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{4}}{2\times 1}=\frac{4-2}{2}=1,$$
$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{4}}{2\times 1}=\frac{4+2}{2}=3.$$

3. $z^2+z+1=0$.
   - Le discriminant est $\Delta=1^2-4\times 1\times 1=-3$.
   - $\Delta<0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{|-3|}}{2\times 1}=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2=\overline{z_1}=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 41 On effectue les divisions euclidiennes :

1.

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2z^3-7z^2+13z-5 & 2z-1 \\ \cline{3-3}
- & 2z^3-z^2 & z^2-3z+5 \\ \cline{2-2}
 & -6z^2+13z-5 & \\
- & -6z^2+3z & \\ \cline{2-2}
 & 10z-5 & \\
- & 10z-5 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Conclusion :

$$2z^3-7z^2+13z-5=(2z-1)\left(z^2-3z+5\right).$$

2.

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^4-4z^3-9z^2+27z+38 & z^2-z-7 \\ \cline{3-3}
- & z^4-z^3\ -7z^2 & z^2-3z-5 \\ \cline{2-2}
 & -3z^3-2z^2+27z & \\
- & -3z^3+3z^2+21z & \\ \cline{2-2}
 & -5z^2+6z+38 & \\
- & -5z^2+5z+35 & \\ \cline{2-2}
 & z+\ \ 3 &
\end{array}$$

On s'arrête car le degré du reste $(z+3)$ est strictement inférieur à celui du diviseur (z^2-z-7). Finalement :

$$z^4-4z^3-9z^2+27z+38=\left(z^2-z-7\right)\left(z^2-3z-5\right)+\underbrace{z+3}_{\text{reste}}.$$

Exercice 42 1. (a) 1 est racine évidente de l'équation $z^3-5z^2+8z-4=0$, puisque

$$1^3-5\times1^2+8\times1-4=0.$$

D'après la proposition 2 du cours, on peut factoriser par $z-1$. Pour obtenir le quotient, on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^3-5z^2+8z-4 & z-1 \\ \cline{3-3}
- & z^3-z^2 & z^2-4z+4 \\ \cline{2-2}
 & -4z^2+8z-4 & \\
- & -4z^2+4z & \\ \cline{2-2}
 & 4z-4 & \\
- & 4z-4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc

$$z^3-5z^2+8z-4=(z-1)\left(z^2-4z+4\right).$$

On peut dès lors résoudre :

$$\begin{aligned}
z^3-5z^2+8z-4=0 &\iff (z-1)\left(z^2-4z+4\right)=0\\
&\iff z-1=0 \qquad \text{ou} \qquad z^2-4z+4=0.
\end{aligned}$$

- L'équation $z-1=0$ a pour solution $z=1$.
- On résout l'équation $z^2-4z+4=0$:
  — Le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times4=0$.

— $\Delta = 0$, donc il y a une seule solution dans $\mathbb{C}$:

$$z_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2\times 1} = 2.$$

Conclusion : l'équation $z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$ (qui sont en fait des nombres réels) :

$$\mathscr{S} = \{1; 2\}.$$

(b) -2 est racine évidente de l'équation $z^3 + 8 = 0$, puisque $(-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$.
D'après la proposition 2 du cours, on peut factoriser par $z - (-2) = z + 2$. Pour obtenir le quotient, on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^3+0z^2+0z+8 & \quad z+2 \\ \cline{3-3}
- & z^3+2z^2 & z^2-2z+4 \\ \cline{2-2}
 & -2z^2+0z+8 & \\
- & -2z^2-4z & \\ \cline{2-2}
 & 4z+8 & \\
- & 4z+8 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc

$$z^3 + 8 = (z+2)\left(z^2 - 2z + 4\right).$$

On peut dès lors résoudre :

$$\begin{aligned} z^3 + 8 = 0 &\iff (z+2)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0 \\ &\iff z + 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad z^2 - 2z + 4 = 0. \end{aligned}$$

- L'équation $z + 2 = 0$ a pour solution $z = -2$.
- On résout l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$:
  - Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$.
  - $\Delta < 0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2 - \mathrm{i}\sqrt{|-12|}}{2\times 1} = \frac{2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \\ z_2 &= \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Remarque : $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Conclusion : l'équation $z^3 + 8 = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{C}$:

$$\mathscr{S} = \left\{-2; 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}; 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}.$$

2. Pour résoudre l'équation $z^4 - 1 = 0$, on peut d'abord voir que 1 est racine évidente, puis factoriser avec la division euclidienne. On aura $z^4 - 1 = (z-1)Q(z)$, avec Q de degré 3. Il faudra alors de nouveau factoriser Q, avant de pouvoir finir la résolution. Il y a heureusement plus rapide : on factorise grâce aux identités remarquable $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ et $A^2 + B^2 = (A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B)$.

$$z^4 - 1 = \left(z^2\right)^2 - 1^2 = \left(z^2 + 1\right)\left(z^2 - 1\right) = \left(z^2 + 1^2\right)\left(z^2 - 1^2\right) = (z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})(z+1)(z-1),$$

d'où l'on tire les quatre solutions de l'équation :

$$\mathscr{S} = \{-\mathrm{i}; \mathrm{i}; -1; 1\}.$$

Exercice 43 1 est racine de $P(z) = z^9 + 4z^7 - z^6 - 5z^3 + 3z^2 - 2$, car

$$1^9 + 4 \times 1^7 - 1^6 - 5 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 2 = 1 + 4 - 1 - 5 + 3 - 2 = 0,$$

donc d'après la proposition 2 du cours, $z - 1$ divise P.

Exercice 44 Comme $z+2$ est de degré 1, le reste dans la division euclidienne de z^4+6z-1 par $z+2$ est un polynôme constant : on peut écrire

$$z^4+6z-1=(z+2)Q(z)+c,$$

où Q est un polynôme et c une constante réelle.

On remplace z par -2 :

$$\begin{aligned}(-2)^4+6\times(-2)-1&=(-2+2)Q(-2)+c\\ 16-12-1&=0\times Q(-2)+c\\ 3&=c\end{aligned}$$

Conclusion : le reste dans la division euclidienne de z^4+6z-1 par $z+2$ est le polynôme constant égal à 3.

Remarque : L'astuce est de remplacer z par une racine du diviseur – ici, -2 est racine de $z+2$.

Exercice 45 Comme z^2+1 est de degré 2, le reste dans la division euclidienne de z^8+z^3+1 par z^2+1 est un polynôme de la forme $az+b$: on peut écrire

$$z^8+z^3+1=\left(z^2+1\right)Q(z)+az+b,$$

où Q est un polynôme et a, b sont deux constantes réelles.

Une racine de z^2+1 est i, donc en remplace par i :

$$\begin{aligned}\mathrm{i}^8+\mathrm{i}^3+1&=\left(\mathrm{i}^2+1\right)Q(\mathrm{i})+a\mathrm{i}+b\\ 1-\mathrm{i}+1&=0\times Q(\mathrm{i})+a\mathrm{i}+b\\ 2-\mathrm{i}&=a\mathrm{i}+b\end{aligned}$$

Comme a et b sont des réels, par unicité de l'écriture sous forme cartésienne d'un nombre complexe :

$$a=-1 \qquad \text{et} \qquad b=2.$$

Conclusion : le reste dans la division euclidienne de z^8+z^3+1 par z^2+1 est le polynôme $-z+2$.

Exercice 46 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 2.

Soient P un polynôme de degré $n\geq 1$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine de P, c'est-à-dire que $P(\alpha)=0$. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que

$$P(z)=(z-\alpha)Q(z).$$

Le polynôme $z-\alpha$ est de degré 1, donc la division euclidienne de P par $z-\alpha$ s'écrit

$$P(z)=(z-\alpha)Q(z)+c, \tag{3}$$

où c est un polynôme constant.

On remplace z par α :

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+c.$$

Par hypothèse $P(\alpha)=0$, puisque α est racine de P, donc

$$0=0\times Q(\alpha)+c,$$

qui donne $c=0$. En reprenant (3),on obtient

$$P(z)=(z-\alpha)Q(z),$$

c'est-à-dire que $z-\alpha$ divise P.

On rappelle à présent le théorème :

Théorème 2.

Un polynôme de degré $n \geq 1$ a au plus n racines dans $\mathbb{C}$.

On fait une démonstration par récurrence sur le degré du polynôme : pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété « un polynôme de degré n a au plus n racines dans $\mathbb{C}$. »

La propriété est vraie au rang 1, car un polynôme de degré 1 est de la forme $P(z) = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Il a donc une seule racine dans $\mathbb{C}$: $z = -\frac{b}{a}$.

Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \geq 1$: tout polynôme de degré n a au plus n racines dans $\mathbb{C}$; et prenons un polynôme P de degré $n+1$.

Il y a deux cas possibles : ou bien P n'a aucune racine, auquel cas la propriété est vraie au rang $n+1$; ou bien P admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, d'après la proposition 2, on peut écrire

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z),$$

où Q est de degré n (puisque P est de degré $n+1$).

Si $z \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence

$$P(z) = 0 \iff z - \alpha = 0 \text{ ou } Q(z) = 0.$$

L'ensemble des racines de P est donc l'ensemble qui contient α et les racines de Q. Or Q est de degré n, donc par hypothèse de récurrence, il a au plus n racines dans $\mathbb{C}$. On en déduit que P a au plus $n+1$ racines dans $\mathbb{C}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

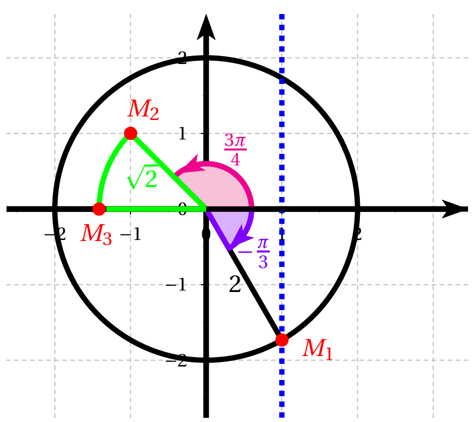
Exercice 47

1. On note r le module et θ l'argument principal de $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   - $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.
   - $\left.\begin{array}{ll} \cos\theta = \frac{a}{r} & = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} & = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

   On note M_1 l'image dans le plan complexe.
2. On note r le module et θ l'argument principal de $-1 + \mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
   - $\left.\begin{array}{ll} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} & = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

   On note M_2 l'image dans le plan complexe.
3. On note r le module et θ l'argument principal de $-\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 0\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.
   - $\left.\begin{array}{ll} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & = -1 \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{0}{\sqrt{2}} & = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \pi$

   On note M_3 l'image dans le plan complexe.

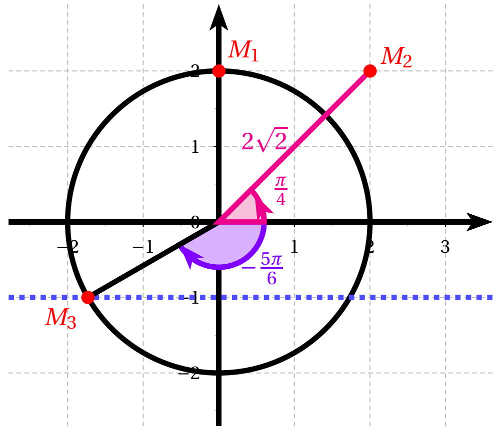


4. On note r le module et θ l'argument principal de $2\mathrm{i} = 0 + 2\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.
   - $\left.\begin{array}{ll} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{0}{2} & = 0 \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{2}{2} & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

   On note M_1 l'image dans le plan complexe.
5. On note r le module et θ l'argument principal de $2 + 2\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   - $\left.\begin{array}{ll} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} & = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} & = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

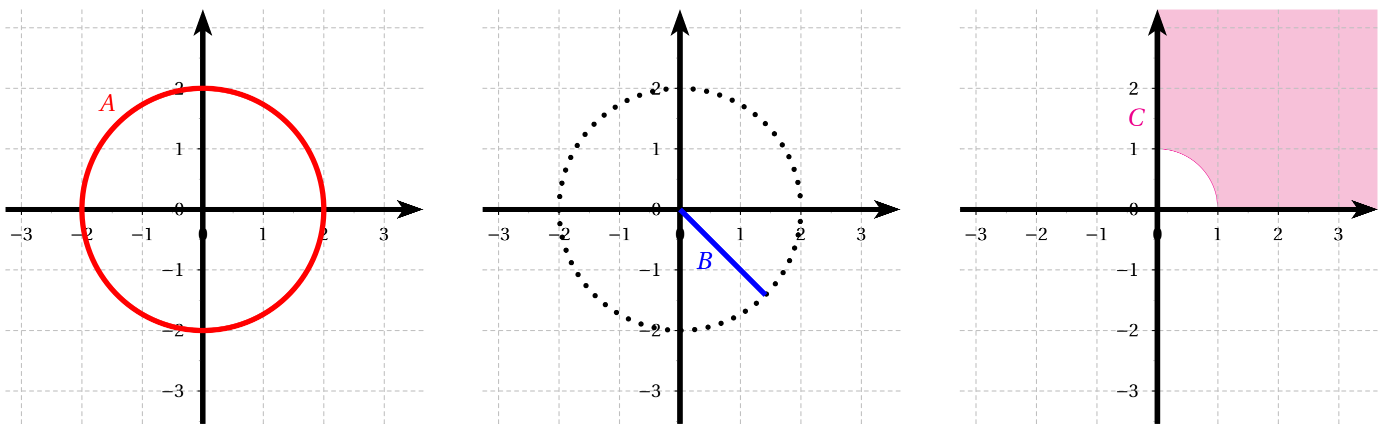
   On note M_2 l'image dans le plan complexe.
6. On note r le module et θ l'argument principal de $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.
   - $\left.\begin{array}{ll} \cos\theta = \frac{a}{r} & = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} & = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{5\pi}{6}$

   On note M_3 l'image dans le plan complexe.



Exercice 48 On représente les ensembles dans le plan complexe :

1. $A = \{M(z) \mid |z| = 2\}$.
2. $B = \{M(z) \mid \arg(z) = -\frac{\pi}{4} \text{ et } |z| \leq 2\}$
3. $C = \{M(z) \mid 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } |z| \geq 1\}$



Exercice 49 La longueur du segment $[AK]$ est

$$AK = |k - a| = |3 + 2\mathrm{i} - (1 - \mathrm{i})| = |3 + 2\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i}| = |2 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Exercice 50 On reprend l'énoncé de l'exercice 34. On sait déjà que $ABCD$ est un parallélogramme. Pour prouver que c'est un rectangle, il suffit de prouver que ses diagonales sont de même longueur (propriété du collège).

La longueur de la diagonale $[AC]$ est

$$AC = |c - a| = |4 - 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i}| = |4 - 7\mathrm{i}| = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{65}.$$

Celle de la diagonale $[BD]$ est

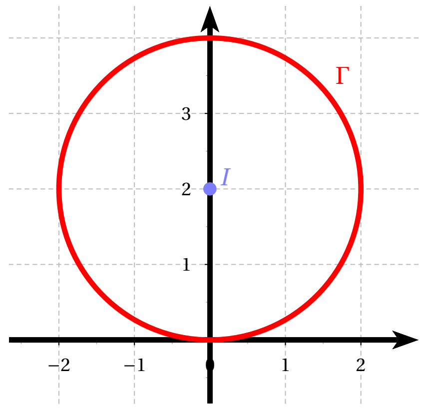
$$BD = |d - b| = |-2 - (6 + \mathrm{i})| = |-8 - \mathrm{i}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}.$$

Les diagonales sont de même longueur, donc $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 51 On note I le point d'affixe $2i$ et on considère un point $M(z)$ du plan complexe. On a l'équivalence :

$$|z - 2i| = 2 \iff IM = 2,$$

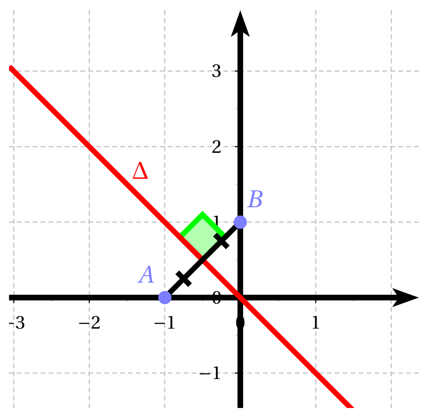
donc Γ est le cercle de centre I de rayon 2.



Exercice 52 On note A le point d'affixe -1, B le point d'affixe i et on considère un point $M(z)$ du plan complexe. On a l'équivalence

$$|z+1| = |z-\mathrm{i}| \iff |z-(-1)| = |z-\mathrm{i}| \iff AM = BM,$$

donc Δ est la médiatrice du segment $[AB]$ [2].



Exercice 53 Soient z, z' deux complexes, que l'on écrit sous forme algébrique : $z = a+\mathrm{i}b$, $z' = c+\mathrm{i}d$.
On calcule séparément :

- $$z\times z' = (a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = ac+\mathrm{i}bc+\mathrm{i}ad+\underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1}bd = (ac-bd)+\mathrm{i}(bc+ad).$$

  On a donc

  $$\begin{aligned}\left|z\times z'\right| &= \sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2} = \sqrt{(ac)^2-2\times ac\times bd+(bd)^2+(bc)^2+2\times bc\times ad+(ad)^2}\\ &= \sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+b^2c^2+2abcd+a^2d^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}.\end{aligned}$$

- $$|z|\times\left|z'\right| = \sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}.$$

On a donc bien

$$\left|z\times z'\right| = |z|\times\left|z'\right|.$$

3 Matrices

Exercice 54 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -4 & 3 & 5\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0\\ 1 & -5 & 1\end{pmatrix}$.

1. $a_{12} = 0$, $a_{23} = 5$, $b_{22} = -5$.

2. On rappelle que la médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment passant par son milieu, mais aussi l'ensemble des points à égale distance des extrémités du segment.

2.

$$A+B=\begin{pmatrix}2+(-2) & 0+3 & 1+0\\ -4+1 & 3+(-5) & 5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -3 & -2 & 6\end{pmatrix},$$

$$2A-3B=2\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 3 & 5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 1 & -5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -8 & 6 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 3 & -15 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-(-6) & 0-9 & 2-0\\ -8-3 & 6-(-15) & 10-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -9 & 2\\ -11 & 21 & 7\end{pmatrix}.$$

Exercice 55 Le terme général de A est $a_{ij}=\frac{2i}{i+j}$, donc

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2\times1}{1+1} & \frac{2\times1}{1+2}\\ \frac{2\times2}{2+1} & \frac{2\times2}{2+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3} & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 56 Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles et des garçons par filière dans un lycée. En supprimant les intitulés, on obtient la matrice A :

	Filles	Garçons
Général	124	96
Techno	45	112
Pro	13	84

$$A=\begin{pmatrix}124 & 96\\ 45 & 112\\ 13 & 84\end{pmatrix}$$

1. Le nombre total de filles du lycée est

$$124+45+13=a_{11}+a_{21}+a_{31}=\sum_{i=1}^{3}a_{i1}.$$

2. Le nombre total d'élèves en série technologique est

$$45+112=a_{21}+a_{22}=\sum_{j=1}^{2}a_{2j}.$$

Exercice 57 On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 29\\ 16 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1,2 & 1,8\\ 1 & 1,5\end{pmatrix}$$

La matrice A donne les teneurs en glucides, protides, lipides pour une portion de 100 g de chaque aliment; la matrice B donne le nombre de portions de chaque aliment consommées par Marie et Mathéo.

Commençons par deux exemples :

- Marie a consommé 1,2 portion de poisson et 1 portion de riz, donc sa consommation en lipides est de

$$16\times1,2+3\times1=22,2\text{ g};$$

- Mathéo a consommé 1,8 portion de poisson et 1,5 portion de riz, donc sa consommation en glucides est de

$$0\times1,8+29\times1,5=43,5\text{ g}.$$

Pour obtenir l'ensemble des réponses rapidement, on présente les calculs sous forme de croix :

			Marie	Mathéo
			$1,2$	$1,8$
			1	$1,5$
Glucides	0	29	$0\times1,2+29\times1=29$	$0\times1,8+29\times1,5=43,5$
Lipides	16	3	$16\times1,2+3\times1=22,2$	$16\times1,8+3\times1,5=33,3$
Protides	1	0	$1\times1,2+0\times1=1,2$	$1\times1,8+0\times1,5=1,8$

On vient de faire le produit des matrices A et B (voir définition du cours) :

$$A\times B=\begin{pmatrix}29 & 43,5\\ 22,2 & 33,3\\ 1,2 & 1,8\end{pmatrix}.$$

Exercice 58 On considère les matrices

$$K=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix},\ K'=\begin{pmatrix}4&1\\-1&5\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}8&5&2\\1&-4&0\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}.$$

Le produit matriciel $A\times B$ n'est possible que lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Les seuls produits autorisés sont donc $K\times K'$, $K'\times K$, $K\times L$ et $L\times V$.

On détaille le premier calcul $K\times K'$:

		4	1
		-1	5
2	0	$2\times4+0\times(-1)$	$2\times1+0\times5$
-1	3	$-1\times4+3\times(-1)$	$-1\times1+3\times5$

$$K\times K'=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&1\\-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&2\\-7&14\end{pmatrix}$$

On obtient de même :

$$K'\times K=\begin{pmatrix}4&1\\-1&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\\-7&15\end{pmatrix}$$

$$K\times L=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8&5&2\\1&-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&10&4\\-5&-17&-2\end{pmatrix}$$

$$L\times V=\begin{pmatrix}8&5&2\\1&-4&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-2\end{pmatrix}$$

Exercice 59 Soit $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. On obtient

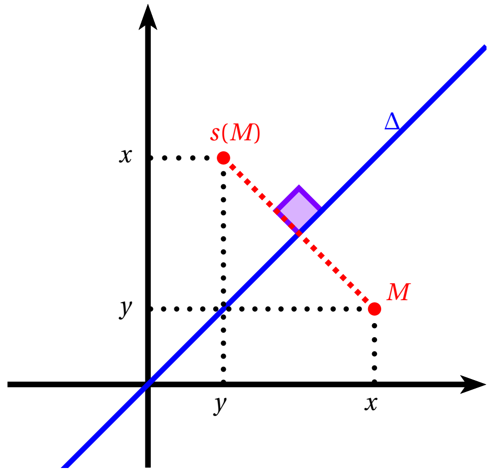
$$J^2=J\times J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3J.$$

Exercice 60 Soit $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$.

1. Le produit
$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$$
est égal à la 2^e colonne de A. Donc $X=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est solution du problème (c'est la seule matrice qui convienne).
2. Le produit
$$\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$
est égal à la 3^e ligne de A. Donc $Y=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$ est solution du problème (c'est la seule matrice qui convienne).

Exercice 61 On identifiera chaque point du plan de coordonnées $(x;y)$ à la matrice colonne $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1. La transformation s est la symétrie axiale par rapport à la droite $\Delta : y=x$.

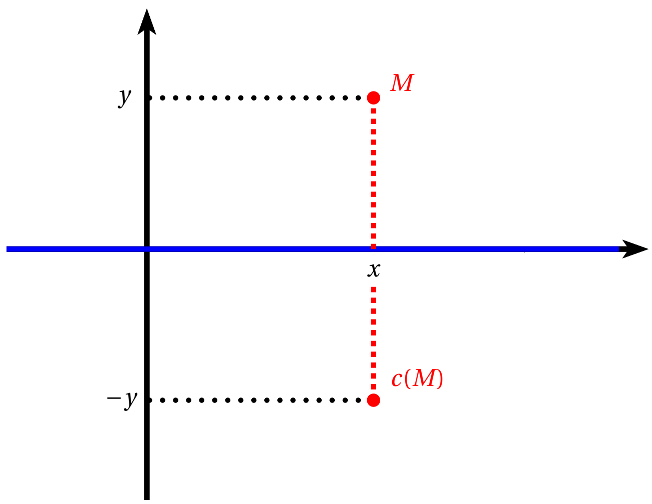


2. La matrice de la transformation s est $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$: pour toute matrice colonne $V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ on a

$$S\times V=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}.$$

3. L'image d'une matrice colonne $V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ par la matrice C est

$$C\times V=C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}.$$



La transformation c de matrice C est donc la symétrie par rapport à l'axe des abscisses [3].

Exercice 62 Soit $D=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$. D'après le cours, pour tout entier naturel n :

$$D^n=\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&1^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 63 Soit $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

1.

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3a\\0&1\end{pmatrix}.$$

3. Dans le plan complexe, c'est la transformation qu'on appelle conjugaison : $c(z)=\overline{z}$.

2. On démontre par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$.

   D'abord la formule est vraie pour $n = 1$ par définition de A. Ensuite, si la formule est vraie pour un entier $n \geq 1$, alors

$$A^{n+1} = A^n \times A \underset{\text{H.R}}{=} \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La formule est donc varie pour l'entier $n+1$, ce qui achève la récurrence.

   Remarque : La formule est également vraie pour $n = 0$, car $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \times a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 64 On définit une suite de matrices par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = AU_n,$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après la proposition 3 du cours, pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n U_0.$$

Or $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'après l'exercice 63, donc

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+na \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 65 On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit une suite de matrices par $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = MX_n + R.$$

1. $X_1 = MX_0 + R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On note $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On vérifie :

$$MS + R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = S.$$

3. On déduit de la question précédente que, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} - S = (MX_n + R) - (MS + R) = MX_n + \cancel{R} - MS - \cancel{R} = M(X_n - S).$$

4. Si l'on pose $V_n = X_n - S$ pour tout entier naturel n, l'égalité de la question précédente s'écrit

$$V_{n+1} = M \times V_n.$$

   Donc d'après la proposition 3 du cours, pour tout entier naturel n :

$$V_n = M^n \times V_0.$$

   Autrement dit :

$$X_n - S = M^n (X_0 - S),$$

   et donc

$$X_n = M^n (X_0 - S) + S.$$

5. D'une part
$$X_0 - S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$
d'autre part l'énoncé nous donne
$$M^4 = \begin{pmatrix} 206 & 115 \\ 575 & 321 \end{pmatrix}.$$
Donc d'après la question précédente :
$$X_4 = M^4 (X_0 - S) + S = \begin{pmatrix} 206 & 115 \\ 575 & 321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 \\ 388 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 \\ 387 \end{pmatrix}.$$

Exercice 66 On utilisera la proposition 4 du cours.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant
$$\det(A) = 2 \times (-5) - (-3) \times 4 = 2$$
n'est pas nul. Son inverse est
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & 1{,}5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
- $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son déterminant
$$\det(B) = -2 \times (-6) - 3 \times 4 = 0$$
est nul.
- $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant
$$\det(C) = 2 \times (-3) - 0 \times 0 = -6$$
n'est pas nul. Son inverse est
$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
D'une manière générale, si a, d sont non nuls, la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$.

Exercice 67 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On calcule chaque terme de la somme séparément :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix},$$
$$5A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -5 & 15 & -5 \\ -5 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\text{et} \qquad 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
donc
$$A^2 - 5A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -5 & 15 & -5 \\ -5 & -5 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

2. L'égalité de la question précédente se réécrit $A^2-5A=-4I_3$, ou encore $(A-5I_3)A=-4I_3$; et enfin

$$-\frac{1}{4}(A-5I_3)A=I_3.$$

On en déduit que A est inversible et que son inverse est

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}(A-5I_3).$$

On calcule : $A-5I_3=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$, donc finalement

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Exercice 68 On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1.

$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$N^3=N^2\times N=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3.$$

2. $A=I_3+N$, donc $N=A-I_3$. Comme $A\times I_3=I_3\times A=A$ et $I_3^2=I_3$, on obtient en développant :

$$\begin{aligned}N^3&=(A-I_3)^3=(A-I_3)\times(A-I_3)\times(A-I_3)=\left(A^2-A\times I_3-I_3\times A+I_3^2\right)(A-I_3)=\left(A^2-A-A+I_3\right)(A-I_3)\\&=\left(A^2-2A+I_3\right)(A-I_3)=A^2\times A-A^2\times I_3-2A\times A+2A\times I_3+I_3\times A-I_3^2=A^3-A^2-2A^2+2A+A-I_3\\&=A^3-3A^2+3A-I_3.\end{aligned}$$

3. On a vu dans la question 1 que $N^3=O_3$, donc l'égalité de la question 2 donne

$$A^3-3A^2+3A-I_3=O_3.$$

Cette égalité se réécrit $A^3-3A^2+3A=I_3$, ou encore

$$\left(A^2-3A+3I_3\right)\times A=I_3.$$

On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1}=A^2-3A+3I_3.$$

Remarque : On peut faire le calcul explicite. On obtient $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 69 Soient $A=\begin{pmatrix}11&-15\\6&-8\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1. La matrice P est inversible, car son déterminant $\det(P)=5\times2-3\times3=1$ est non nul, et son inverse est

$$P^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite le produit :

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&3\\6&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-15\\6&-8\end{pmatrix}.$$

On a bien $A=PDP^{-1}$.

2. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

D'abord la propriété est vraie pour $n = 0$, puisque $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Ensuite, si la propriété est vraie pour un entier naturel n, alors

$$A^{n+1} = A^n \times A \underset{\text{H.R.}}{=} PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^n \times I_3 \times DP^{-1} = P\left(D^n \times D\right)P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est donc vraie pour l'entier $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Remarque : Une façon plus élégante, mais moins rigoureuse, de prouver la formule, est d'utiliser un « produit télescopique » :

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \cdots \times PDP^{-1} \times PDP^{-1}}_{n \text{ fois}} \\ &= P \times D \times {\color{red}P^{-1}P} \times D \times {\color{red}P^{-1}P} \times D \times {\color{red}P^{-1} \times P} \times \cdots \times {\color{red}P^{-1}P} \times D \times {\color{red}P^{-1}P} \times D \times P^{-1}. \end{aligned}$$

Les termes ${\color{red}P^{-1}P}$ se télescopent : il valent tous I_3, élément neutre de la multiplication. Il reste alors :

$$A^n = P \times \underbrace{D \times D \times D \times \cdots \times D \times D}_{n \text{ fois}} \times P^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

3. Soit n un entier naturel. La matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonale, donc

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2^n & 3 \\ 3 \times 2^n & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 2^n \times 2 - 9 & 5 \times 2^n \times (-3) + 15 \\ 3 \times 2^n \times 2 - 6 & 3 \times 2^n \times (-3) + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2^{n+1} - 9 & -15 \times 2^n + 15 \\ 3 \times 2^{n+1} - 6 & -9 \times 2^n + 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 70 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1.

$$\begin{aligned} u_2 &= 5u_1 - 6u_0 = 5 \times 1 - 6 \times 1 = -1, \\ u_3 &= 5u_2 - 6u_1 = 5 \times (-1) - 6 \times 1 = -11. \end{aligned}$$

2. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a donc aussi $C_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

On sait que

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n,$$

donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $C_{n+1} = A \times C_n$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, d'après la proposition 3 du cours, pour tout entier naturel n :

$$C_n = A^n C_0.$$

3. La matrice P est inversible, car son déterminant $\det(P) = 2\times 1 - 3\times 3 = -1$ est non nul, et son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   On calcule ensuite le produit :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On obtient bien $A = PDP^{-1}$.
4. L'égalité $A^n = PD^nP^{-1}$ se démontre de la même façon qu'à la question 2 de l'exercice 69. On y renvoie le lecteur.
5. La matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale, donc pour tout entier naturel n :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, d'après la question précédente :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix}.$$

6. D'après les questions 2 et 5, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
C_n &= A^n C_0 \\
\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} + 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n + 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\times 2^{n+1} - 3^{n+1} \\ 2\times 2^n - 3^n \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   On en déduit la formule :

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

Exercice 71 1. On considère le système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}.$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'inconnue du problème est le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le système ci-dessus est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

autrement dit :

$$AX = B.$$

Or A est inversible, car son déterminant est non nul :

$$\det(A) = 2\times 5 - 3\times 3 = 1 ;$$

de plus, $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc le système a une unique solution, définie par

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. On considère le système

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = -1 \end{cases}.$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'inconnue du problème est le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le système ci-dessus est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

autrement dit :

$$AX = B.$$

Or A est inversible, car son déterminant est non nul :

$$\det(A) = 2 \times 1 - 3 \times (-1) = 5 ;$$

de plus, $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Donc le système a une unique solution, définie par

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ -2,2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 72 1. • La somme totale dans la tirelire est 77 €, donc

$$x + 2y + 5z = 77.$$

• Il y a en tout 34 pièces dans la tirelire, donc

$$x + y = 34.$$

• Si l'on remplaçait les pièces de 2 € par des billets de 5 €, la somme dans la tirelire monterait à 146 €, donc

$$x + 5y + 5z = 146.$$

Conclusion : le problème se traduit par le système

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 77 \\ x + y = 34 \\ x + 5y + 5z = 146 \end{cases}.$$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 77 \\ 34 \\ 146 \end{pmatrix}$.

Le système de la question 1 se réécrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 34 \\ 146 \end{pmatrix},$$

soit

$$AX = Y.$$

3. On utilise la calculatrice. Elle nous dit que A est inversible, et que[4]

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 15 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Donc l'équation matricielle de la question 2 a une unique solution, donnée par

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}Y = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 15 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 77 \\ 34 \\ 146 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Conclusion : la tirelire contient 11 pièces de 1 €, 23 pièces de 2 € et 4 billets de 5 €.

Exercice 73 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) On calcule :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

   (b) On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

   On calcule :

$$M^2 + 8M + 6I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

   Conclusion : on a bien $M^3 = M^2 + 8M + 6I_3$.

   (c) On réécrit l'égalité de la question précédente :

$$M^3 - M^2 - 8M = 6I_3$$
$$\left(M^2 - M - 8I_3\right)M = 6I_3$$
$$\frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I_3\right)M = I_3$$

   On en déduit que M est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I_3\right).$$

   Le calcul explicite (que je ne détaille pas) donne

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Dire que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par le point $A(1\,;\,1)$, c'est dire que

$$a \times 1^2 + b \times 1 + c = 1.$$

   Autrement dit :

$$a + b + c = 1.$$

   Avec les points B et C, on obtient de la même façon

$$a - b + c = -1,$$
$$4a + 2b + c = 5.$$

4. Il est possible que la calculatrice donne A sous forme décimale. À vous de voir dans ce cas qu'il faut mettre $\frac{1}{15}$ en facteur pour avoir des coefficients entiers... Cela n'a rien d'évident !

La parabole passe donc par A, B, C si, et seulement si :

$$\begin{cases} a+\ \ b+c=1 \\ a-\ \ b+c=-1 \\ 4a+2b+c=5 \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si l'on note $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, le système s'écrit de façon matricielle sous la forme $MX = Y$. Or M est inversible, donc il y a une unique solution, donnée par

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}Y = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$, donc l'unique parabole qui passe par les points A, B, C a pour équation

$$y = x^2 + x - 1.$$

4 Congruences, applications

Exercice 74 1. • $14 \equiv 2\,[3]$
VRAI. Car $14 - 2 = 12$ est multiple de 3.
- $37 \equiv 19\,[10]$
FAUX. Car $37 - 19 = 18$ n'est pas multiple de 10.
- $5 \equiv -2\,[7]$
VRAI. Car $5 - (-2) = 7$ est multiple de 7.

2. • $23 \equiv \mathbf{3}\,[5]$, car $23 - 3 = 20$ est multiple de 5.

Remarques :
— 3 est aussi le reste dans la division euclidienne : $23 = 4 \times 5 + \mathbf{3}$.
— comme on complète avec un entier naturel le plus petit possible, en travaillant modulo 5, les seules réponses possibles sont 0, 1, 2, 3 ou 4.
- $-12 \equiv \mathbf{4}\,[8]$, car $-12 - 4 = -16$ est multiple de 8.

Remarque : On peut aussi écrire la division euclidienne[5] : $-12 = -2 \times 8 + \mathbf{4}$.
- $234 \equiv \mathbf{4}\,[10]$, car $234 - 4 = 230$ est multiple de 10, ou car $234 = 23 \times 10 + \mathbf{4}$.
- $1\,209 \equiv \mathbf{1}\,[2]$, car $1\,209 - 1 = 1\,208$ est multiple de 2, ou car $1\,209 = 604 \times 2 + 1$.

Remarque : $n \equiv 0\,[2]$ lorsque n est pair ; et $n \equiv 1\,[2]$ lorsque n est impair.

Exercice 75 • $23 = 3 \times 7 + 2$ et $37 = 5 \times 7 + 2$ donc $23 \equiv 2\,[7]$ et $37 \equiv 2\,[7]$. On en déduit

$$\begin{aligned} 23 \times 37 &\equiv 2 \times 2\,[7] \\ 23 \times 37 &\equiv 4\,[7]. \end{aligned}$$

- $23 = 4 \times 5 + 3$ et $37 = 7 \times 5 + 2$ donc $23 \equiv 3\,[5]$ et $37 \equiv 2\,[5]$. On en déduit $23 \equiv 3\,[5]$ et $37 \equiv 2\,[5]$, donc

$$\begin{aligned} 23 \times 37 &\equiv 3 \times 2\,[5] \\ 23 \times 37 &\equiv 6\,[5] \\ 23 \times 37 &\equiv 1\,[5]. \end{aligned}$$

- $2^2 = 4$, et $4 \equiv 1\,[3]$, donc $2^2 \equiv 1\,[3]$
- D'après le point précédent :

$$\begin{aligned} & 2^2 \equiv 1\,[3] \\ \text{donc} \qquad & \left(2^2\right)^{50} \equiv 1^{50}\,[3] \\ & 2^{100} \equiv 1\,[3]. \end{aligned}$$

5. Avec un dividende négatif !

Exercice 76 On considère le nombre $N = 2^{2026} - 1$.

1. $N = 2^{2026}$ est pair, donc N est impair et n'est pas divisible par 2.
2. On part de $2 \equiv -1\,[3]$ et on élève à la puissance 2 026 :

$$\begin{aligned} 2 &\equiv -1\,[3] \\ \text{donc} \qquad 2^{2\,026} &\equiv (-1)^{2\,026}\,[3] \\ 2^{2\,026} &\equiv 1\,[3] \\ \text{puis} \qquad 2^{2\,026} - 1 &\equiv 1 - 1\,[3] \\ N &\equiv 0\,[3]\,. \end{aligned}$$

   On en déduit que N est divisible par 3.
3. (a) On remarque que $2^3 \equiv 1\,[7]$ et que $2\,025 = 3 \times 675$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} 2^3 &\equiv 1\,[7] \\ \text{donc} \qquad \left(2^3\right)^{675} &\equiv 1^{675}\,[7] \\ 2^{2\,025} &\equiv 1\,[7]\,. \end{aligned}$$

   (b) On reprend le calcul de la question précédente :

$$\begin{aligned} 2^{2\,025} &\equiv 1\,[7] \\ \text{donc} \qquad 2^{2\,025} \times 2 &\equiv 1 \times 2\,[7] \\ 2^{2\,026} &\equiv 2\,[7] \\ \text{puis} \qquad 2^{2\,026} - 1 &\equiv 2 - 1\,[7] \\ \text{finalement} \qquad N &\equiv 1\,[7]\,. \end{aligned}$$

   On en déduit que N n'est pas divisible par 7.
4. On part de $2^2 \equiv -1\,[5]$ et on élève à la puissance 1 013 :

$$\begin{aligned} 2^2 &\equiv -1\,[5] \\ \text{donc} \qquad \left(2^2\right)^{1\,013} &\equiv (-1)^{1\,013}\,[5] \\ 2^{2\,026} &\equiv -1\,[5] \\ \text{puis} \qquad 2^{2\,026} - 1 &\equiv -1 - 1\,[5] \\ N &\equiv 3\,[5] \qquad (\text{car } -2 \equiv 3\,[5])\,. \end{aligned}$$

   On en déduit que N n'est pas divisible par 5.

   Remarque : Dans chaque question, on a trouvé un petit entier naturel n tel que $2^n \equiv \pm 1\,[\cdots]$, avant d'élever à une puissance adéquate pour faire apparaître $2^{2\,026}$ (ou s'y ramener), sachant que $(-1)^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$

Exercice 77 1. On écrit la division euclidienne :

$$41 = 3 \times 13 + 2.$$

   Le reste, $m = 2$, vérifie les deux conditions :
   - $0 \leq 2 < 13$,
   - $41 \equiv 2\,[13]$.

2. On raisonne par équivalences :

$$m \equiv 1\,[2] \iff 2 \text{ divise } (m-1) \iff m - 1 \text{ pair} \iff m \text{ impair.}$$

   L'ensemble des entiers vérifiant $m \equiv 1\,[2]$ est donc l'ensemble des entiers impairs (positifs comme négatifs).

3. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} m \equiv 3\,[10] &\iff 10 \text{ divise } (m-3) \iff \text{le chiffre des unités de } m-3 \text{ est } 0 \\ &\iff \text{le chiffre des unités de } m \text{ est } 3. \end{aligned}$$

L'ensemble des entiers naturels vérifiant $m \equiv 3\,[10]$ est donc l'ensemble des entiers qui « se terminent par 3 ».

Exercice 78 On travaille modulo 10 : on remarque que $3^2 \equiv -1\,[10]$, donc en élevant à la puissance 1 013 :

$$\begin{aligned} \left(3^2\right)^{1013} &\equiv (-1)^{1013}\,[10] \\ 3^{2026} &\equiv -1\,[10]. \end{aligned}$$

Autrement dit $3^{2026} \equiv 9\,[10]$, et donc le chiffre des unités de 3^{2026} est 9.

Remarque : On voit se répéter un « motif » dans le chiffre des unités des puissances successives de 3 :

$$3^1 = \mathbf{3} \qquad 3^2 = \mathbf{9} \qquad 3^3 = 2\mathbf{7} \qquad 3^4 = 8\mathbf{1} \qquad 3^5 = 24\mathbf{3} \qquad 3^6 = 72\mathbf{9} \qquad 3^7 = 218\mathbf{7} \qquad 3^8 = 656\mathbf{1} \qquad \ldots$$

Exercice 79

1. Si n était congru à 0, 2, 4 ou 6 modulo 8, alors n serait de la forme $8k+0$, $8k+2$, $8k+4$ ou $8k+6$, donc il serait pair. Par contraposée, puisque n est impair, il est nécessairement congru à 1, 3, 5 ou 7 modulo 8.
2. On distingue quatre cas, en allant un peu plus vite que dans les exercices précédents :
   - Si $n \equiv 1\,[8]$, alors $n^2-1 \equiv 1^2-1\,[8]$, donc $n^2-1 \equiv 0\,[8]$.
   - Si $n \equiv 3\,[8]$, alors $n^2-1 \equiv 3^2-1\,[8]$, donc $n^2-1 \equiv 0\,[8]$.
   - Si $n \equiv 5\,[8]$, alors $n^2-1 \equiv 5^2-1\,[8]$, donc $n^2-1 \equiv 0\,[8]$.
   - Si $n \equiv 7\,[8]$, alors $n^2-1 \equiv 7^2-1\,[8]$, donc $n^2-1 \equiv 0\,[8]$.

   Dans tous les cas, n^2-1 est congru à 0 modulo 8, donc il est divisible par 8.

Exercice 80 7 est un nombre premier et $\text{PGCD}(39,7) = 1$, donc d'après le petit théorème de Fermat :

$$\begin{aligned} 39^{7-1} &\equiv 1\,[7] \\ 39^6 &\equiv 1\,[7]. \end{aligned}$$

On élève à la puissance 10 :

$$\begin{aligned} \left(39^6\right)^{10} &\equiv 1^{10}\,[7] \\ 39^{60} &\equiv 1\,[7]. \end{aligned}$$

On en déduit que le reste dans la division de 39^{60} par 7 est 1.

Exercice 81 11 est un nombre premier et $\text{PGCD}(6,11) = 1$, donc d'après le petit théorème de Fermat :

$$\begin{aligned} 6^{11-1} &\equiv 1\,[11] \\ 6^{10} &\equiv 1\,[1]. \end{aligned}$$

On élève à la puissance 2 et à la puissance 3 :

$$\begin{aligned} \left(6^{10}\right)^2 &\equiv 1^2\,[11] \\ 6^{20} &\equiv 1\,[11]. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \left(6^{10}\right)^3 &\equiv 1^3\,[11] \\ 6^{30} &\equiv 1\,[11]. \end{aligned}$$

Donc par différence :

$$\begin{aligned} 6^{30} - 6^{20} &\equiv 1 - 1\,[11] \\ 6^{30} - 6^{20} &\equiv 0\,[11]. \end{aligned}$$

On en déduit que $6^{30} - 6^{20}$ est divisible par 11.

Exercice 82 Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant : « Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1[er] août ! ».

1. La réponse du magicien est cohérente : le mois d'août est le 8[e] mois de l'année et

$$12 \times 1 + 37 \times 8 = 308.$$

2. (a) On a $z = 12j + 37m$. Or $12 \equiv 0\,[12]$ et $37 \equiv 1\,[12]$, puisque $37 - 1 = 36$ est multiple de 12. Donc

$$\left.\begin{array}{ll} 12j & \equiv 0j\,[12] \\ 37m & \equiv 1m\,[12] \end{array}\right\} \Longrightarrow 12j + 37m \equiv 0j + 1m\,[12] \Longrightarrow z \equiv m\,[12].$$

   (b) On a $z = 474$, donc d'après la question précédente, $474 \equiv m\,[12]$. Or la division euclidienne de 474 par 12 s'écrit $474 = 12 \times 39 + 6$, donc $m = 6$.

   Puis $z = 12j + 37m$, donc
$$j = \frac{z - 37m}{12} = \frac{474 - 37 \times 6}{12} = 21.$$

   Conclusion : le spectateur est né le 21 juin.

Exercice 83 On associe à chaque lettre de l'alphabet un nombre entre 0 et 25, le A étant associé à 0, le B à 1, $\cdots$, le Z à 25 comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On considère l'application ϕ, qui à chaque nombre n, associe le reste dans la division euclidienne de $3n + 2$ par 26.
Chaque lettre de l'alphabet est codée par la lettre associée à $\phi(n)$ et un mot est codé en codant chacune de ses lettres.

1. Prenons la lettre R, associée au nombre 17 – donc $n = 17$. On calcule

$$3n + 2 = 3 \times 17 + 2 = 53,$$

   puis on effectue la division euclidienne
$$53 = 2 \times 26 + 1,$$

   si bien que « R » est codée par « B ».

   On fait le même travail pour les autres lettres du mot « ROSE » :

lettre	R	O	S	E
nombre associé (n)	17	14	18	4
$3n+2$	53	44	56	14
$\phi(n)$ (reste dans la division par 26)	2	18	4	14
codage	B	S	E	O

   Finalement, « ROSE » est codé par « BSEO ».

2. Il faut prouver que l'application ψ permet le décodage des mots. Dans le schéma ci-dessous, en considérant les résultats « modulo 26 », il faut prouver que $9p + 8 = n$ (on part de la lettre numéro n et on retombe sur cette lettre à la fin).

$$n \xrightarrow[\phi]{} p = 3n + 2 \xrightarrow[\psi]{} 9p + 8$$

   Or
$$9p + 8 = 9(3n + 2) + 8 = 27n + 26,$$

   et comme $27 \equiv 1\,[26]$ et $26 \equiv 0\,[26]$, on a bien $9p + 8 \equiv 1n + 0\,[26]$, soit $9p + 8 \equiv n\,[26]$. L'application ψ permet donc le décodage des mots.

3. On présente à nouveau sous forme de tableau :

lettre	M	C	H	X
nombre associé (p)	12	2	7	23
$9p+8$	116	26	71	215
$\psi(p)$ (reste dans la division par 26)	12	0	19	7
décodage	M	A	T	H

Finalement, « MCHX » se décode en « MATH ».

Exercice 84 1. Voici comment on remplit ces tableaux : par exemple, lorsque $x \equiv 3\,[5]$, on a

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv 3^2\,[5] \\ x^2 &\equiv 9\,[5] \\ \text{puis} \quad 7x^2 &\equiv 7\times 9\,[5] \\ \text{soit} \quad 7x^2 &\equiv 3\,[5] \end{aligned}$$

Le nombre 3 à la fin vient du fait que $7\times 9 = 63$ est congru à 3 modulo 5 ($63 = 12\times 5+3$).

On complète ainsi case par case :

modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, $7x^2$ est congru à	0	2	3	3	2

modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, y^2 est congru à	0	1	4	4	1

2. On considère l'équation (E) $7x^2 = 5 + y^2$.

Si un couple (x, y) est solution, alors $7x^2 - y^2 = 5$, donc $7x^2$ et y^2 sont congrus modulo 5. Or dans les tableaux de la question précédente, l'examen des 2e lignes montre que ce n'est possible que si $x \equiv 0\,[5]$ et $y \equiv 0\,[5]$. Autrement dit, x et y sont nécessairement multiples de 5.

3. On fait un raisonnement par l'absurde : si (E) avait une solution (x, y), alors d'après la question précédente, x et y devraient être multiples de 5. On pourrait donc écrire $x = 5k$ et $y = 5j$, avec k, j dans $\mathbb{Z}$. Mais en remplaçant dans (E), cela donnerait

$$\begin{aligned} 7\times(5k)^2 &= 5+(5j)^2 \\ 175k^2 &= 5+25j^2 \\ 175k^2 - 25j^2 &= 5 \\ 25\left(7k^2 - j\right) &= 5. \end{aligned}$$

Donc 25 diviserait 5, ce qui est bien sûr faux. Cela prouve que (E) n'a aucune solution.

Exercice 85 1. On remplit un tableau avec des entiers compris entre 0 et 5, en utilisant la même technique que dans l'exercice précédent.

modulo 6, n est congru à	0	1	2	3	4	5
modulo 6, $n^2 - n$ est congru à	0	0	2	0	0	2

Les nombres de la 2e ligne sont les restes dans la division euclidienne de $n^2 - n$ par 6.

2. On complète le tableau :

modulo 5, n est congru à	0	1	2	3	4
modulo 5, $n^4 - 1$ est congru à	4	0	0	0	0

Remarque : On en déduit que $n^4 - 1$ est divisible par 5 lorsque n est congru à 1, 2, 3 ou 4 modulo 5. C'était prévisible, car c'est une conséquence du petit théorème de Fermat :

$$n^4 \equiv 1\,[5] \text{ dès que } n \text{ est premier avec 5.}$$

Exercice 86 1. On complète le tableau de congruences :

modulo 4, x est congru à	0	1	2	3
modulo 4, x^2 est congru à	0	1	0	1

2. D'après la question précédente, lorsque x et y sont deux entiers, x^2 et y^2 ne peuvent être congrus qu'à 0 ou 1 modulo 4. Donc par somme, $x^2 + y^2$ ne peut être congru qu'à $0+0=0$, $0+1=1$ ou $1+1=2$ modulo 4. Il est donc impossible que $x^2 + y^2 = n$, sachant que n est congru à 3 modulo 4.

   Remarque : Les entiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés s'appellent les *entiers de Gauss*. Les nombres complexes sont un outil pertinent pour leur étude, comme l'exercice 53 le laisse deviner : on y a prouvé l'identité

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2,$$

   qui montre que si deux nombres s'écrivent comme une somme de deux carrés, il en est de même de leur produit.

Exercice 87 1. On note $(E)\ :\ 5u+3v=1$.

- **Analyse.** Supposons que (u, v) soit une solution de (E). On a donc

$$5u+3v=1.$$

  On travaille modulo 5 : $5 \equiv 0\,[5]$, donc

$$\begin{aligned} 0u+3v &\equiv 1\,[5] \\ 3v &\equiv 1\,[5]\,. \end{aligned}$$

  Puis on multiplie par 2, pour « éliminer » le 3 :

$$\begin{aligned} 2\times 3v &\equiv 2\times 1\,[5] \\ 6v &\equiv 2\,[5] \\ v &\equiv 2\,[5] \qquad (\text{car } 6 \equiv 1\,[5]). \end{aligned}$$

  Par conséquent, il existe un entier k tel que $v = 2+5k$.
  On remplace dans (E) :

$$\begin{aligned} 5u+3v &= 1 \\ 5u+3(2+5k) &= 1 \\ 5u+6+15k &= 1 \\ u = \frac{1-6-15k}{5} &= \frac{-5-15k}{5} = -1-3k. \end{aligned}$$

- **Synthèse.** Réciproquement, si on prend $u=-1-3k$ et $v=2+5k$, on a bien

$$5u+3v = 5(-1-3k)+3(2+5k) = -5-15k+6+15k = 1,$$

  donc (u, v) est solution de (E).
- **Conclusion.** Les solutions de (E) sont les couples de la forme

$$u=-1-3k \qquad , \qquad v=2+5k,$$

  avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. On note $(E)\ :\ 13u-9v=3$.
- **Analyse.** Supposons que (u, v) soit une solution de (E). On a donc

$$13u-9v=3.$$

  On travaille modulo 13 : $13 \equiv 0\,[13]$ et $-9 \equiv 4\,[13]$, donc

$$\begin{aligned} 0u + 4v &\equiv 3\,[13] \\ 4v &\equiv 3\,[13]\,. \end{aligned}$$

Puis on multiplie par 10, pour « éliminer » le 4 :

$$\begin{aligned} 10 \times 4v &\equiv 10 \times 3\,[13] \\ 40v &\equiv 30\,[13] \\ v &\equiv 4\,[13] \qquad (\text{car } 40 \equiv 1\,[13] \text{ et } 30 \equiv 4\,[13]). \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un entier k tel que $v = 4 + 13k$.
On remplace dans (E) :

$$\begin{aligned} 13u - 9v &= 3 \\ 13u - 9(4 + 13k) &= 3 \\ 13u - 36 - 117k &= 3 \\ u = \frac{3 + 36 + 117k}{13} &= \frac{39 + 117k}{13} = 3 + 9k. \end{aligned}$$

- **Synthèse.** Réciproquement, si on prend $u = 3 + 9k$ et $v = 4 + 13k$, on a bien

$$13u - 9v = 13(3 + 9k) - 9(4 + 13k) = 39 + 117k - 36 - 117k = 3,$$

donc (u, v) est solution de (E).
- **Conclusion.** Les solutions de (E) sont les couples de la forme

$$u = 3 + 9k \qquad , \qquad v = 4 + 13k,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 88 Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, $(J_0 + 6)$, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

1. Entre J_0 et J_1, le corps céleste A a effectué p périodes, donc

$$J_1 = J_0 + 105p.$$

Entre $J_0 + 6$ et J_1, le corps céleste B a effectué q périodes, donc

$$J_1 = J_0 + 6 + 81q.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} J_0 + 105p &= J_0 + 6 + 81q \\ 105p &= 6 + 81q \\ \text{on divise par 3 :} \qquad 35p &= 2 + 27q \\ 35p - 27q &= 2. \end{aligned}$$

Le couple (p, q) est donc solution de l'équation

$$35u - 27v = 2. \qquad (E)$$

2. $35 \times 17 = 595$ et $595 = 27 \times 22 + 1$, donc on a bien $35 \times 17 \equiv 1\,[27]$.

On en vient à la résolution de (E) :

- **Analyse.** Comme $27 \equiv 0\,[27]$, la relation (E) entraîne

$$\begin{aligned}
& 35u - 0v \equiv 2\,[27] \\
\text{on multiplie par 17 :} \quad & 17 \times 35u \equiv 17 \times 2\,[27] \\
& 595u \equiv 34\,[27] \\
& u \equiv 7\,[27] \qquad (\text{car } 595 \equiv 1\,[27] \text{ et } 34 \equiv 7\,[27]).
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un entier k tel que $u = 7 + 27k$.
On remplace dans (E) :

$$\begin{aligned}
& 35u - 27v = 2 \\
& 35(7+27k) - 27v = 2 \\
& 245 + 945k - 27v = 2 \\
& v = \frac{2 - 245 - 945k}{-27} = \frac{-243 - 945k}{-27} = 9 + 35k.
\end{aligned}$$

- **Synthèse.** Réciproquement, si on prend $u = 7 + 27k$ et $v = 9 + 35k$, on a bien

$$35u - 27v = 35(7+27k) - 27(9+35k) = 245 + 945k - 243 - 945k = 2,$$

donc (u, v) est solution de (E).
- **Conclusion.** Les solutions de (E) sont les couples de la forme

$$u = 7 + 27k \qquad , \qquad v = 9 + 35k,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour déterminer J_1, on cherche les couples d'entiers naturels solutions de (E) les plus petits possibles, car on cherche à minimiser le nombre de périodes. On sait que ces solutions sont de la forme $u = 7 + 27k$, $v = 9 + 35k$, donc on prend $k = 0$. On obtient
$$p = 7 + 27 \times 0 = 7 \qquad , \qquad q = 9 + 35 \times 0 = 9,$$
si bien qu'entre J_0 et J_1, l'objet A effectue 7 périodes, tandis que B en effectue 9 entre $J_0 + 6$ et J_1.
4. D'après la question précédente,
$$J_1 = J_0 + 105p = J_0 + 105 \times 7 = J_0 + 735.$$
On a bien également
$$J_0 + 6 + 81q = J_0 + 6 + 81 \times 9 = J_0 + 735.$$
Il s'écoulera donc 735 jours entre J_0 et J_1.

5 Applications des nombres complexes

Dans tous les exercices où il faut calculer des valeurs remarquables de cos et sin, il est conseillé de faire un cercle trigonométrique.

Exercice 89
- $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$.
- $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 90 Pour rappel, $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$, et $\sin^2 x$ signifie $(\sin x)^2$.

1. - Si $\cos x = \frac{3}{5}$, alors
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - \frac{25}{25} = \frac{18 - 25}{25} = -\frac{7}{25}.$$
   - Si $\sin x = \frac{2}{3}$, alors
$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{9} - 2 \times \frac{4}{9} = \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9}.$$

2. Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{4}$.

   On calcule d'abord $\sin x$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \implies \frac{1}{16} + \sin^2 x = 1 \implies \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

   Or $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin x \geq 0$ et finalement

$$\sin x = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

   ⚠Si l'on n'explique pas que $\sin x \geq 0$, il y a deux possibilités : $\sin x = \sqrt{\frac{15}{16}}$ ou $\sin x = -\sqrt{\frac{15}{16}}$.

   On peut maintenant calculer $\sin(2x)$:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Exercice 91 1. $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. Donc

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

2. On prend $a = \frac{\pi}{12}$ dans la formule

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a \ :$$

$$\begin{aligned}
\cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
\cos \frac{\pi}{6} &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \\
\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

   Or $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$, donc

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

3. Les valeurs obtenues pour $\sin \frac{\pi}{12}$ dans les questions 1 et 2 sont en réalité les mêmes (heureusement!). Comme ce sont des nombres positifs, pour le prouver, il suffit de voir qu'ils ont le même carré :

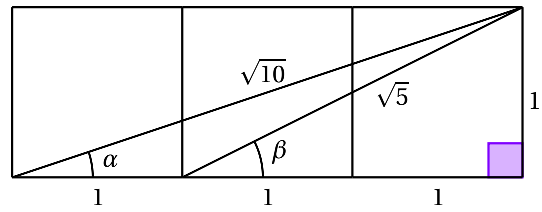
$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2}{4^2} = \frac{\sqrt{6}^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{16} = \frac{6 - 2 \times \sqrt{12} + 2}{16} = \frac{8 - 2 \times 2 \times \sqrt{3}}{16} = \frac{8 - 4 \times \sqrt{3}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

$$\left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}^2}{2^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

   Conclusion : les réponses sont cohérentes. On a bien

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 92 On choisit le côté des carrés comme unité de longueur. On calcule deux hypoténuses grâce au théorème de Pythagore.



1. On calcule dans des triangles rectangles avec les formules du collège (pour rappel, $\cos = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$, $\sin = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$) :

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2. D'après la question 1 :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{50}} - \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{5 \times \sqrt{50}}{\sqrt{50} \times \sqrt{50}} = \frac{5 \times 5\sqrt{2}}{50} = \frac{25\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Clairement α et β sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, donc

$$0 \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

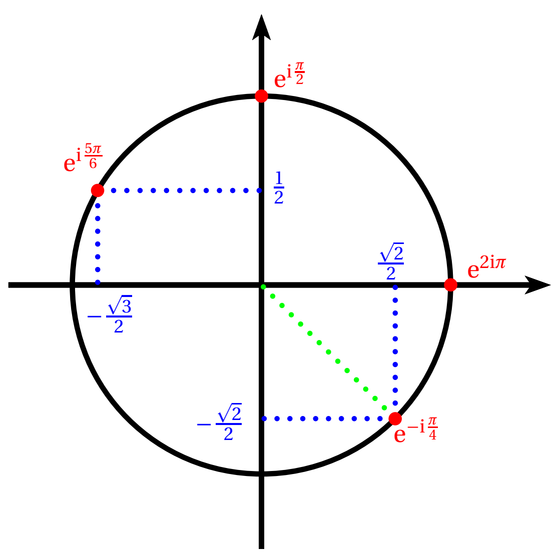
4. Comme $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0 \leq \alpha+\beta \leq \frac{\pi}{2}$, on trouve finalement

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 93

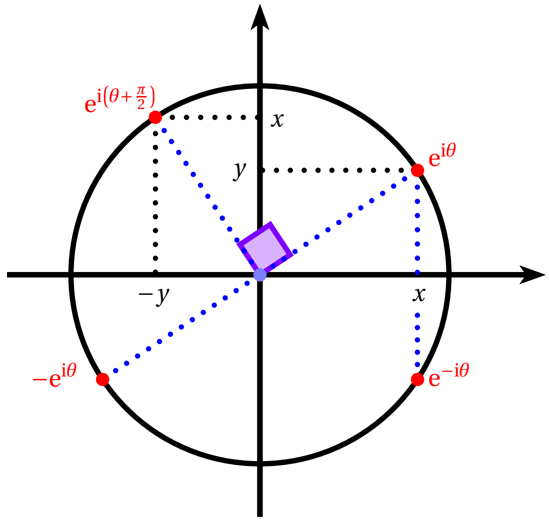
- $e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$
- $e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i.$
- $e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i \times 0 = 1.$

On indique sur le cercle les affixes des points.



Exercice 94

1. On indique sur le cercle non le nom des points (M_1, M_2, etc.), mais leurs affixes.



2. Si $z = e^{i\theta}$, alors :
   - $-e^{i\theta} = -z$.
     Géométriquement, l'application $z \mapsto -z$ est la symétrie centrale de centre O.
   - $e^{-i\theta} = \overline{z}$.
     Géométriquement, l'application $z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.
   - Si on pose $z = e^{i\theta} = x + iy$, alors l'examen de la figure montre que

     $$e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = -y + ix = i(x+iy) = iz.$$

     On peut aussi justifier cette égalité rigoureusement en anticipant sur la suite du cours (point 1 de la proposition 4) :

     $$e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\theta} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\theta} \times i = z \times i.$$

     Géométriquement, l'application $z \mapsto iz$ est la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

Exercice 95 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 4.

1. Pour tous réels θ_1, θ_2 :

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad , \qquad \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

2. Pour tout réel θ, pour tout entier $n \geq 1$: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.
   Autrement dit :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \text{(formule de Moivre).}$$

On commence par le premier point : $e^{i\theta_1} = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ et $e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$, donc

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2). \end{aligned}$$

On factorise grâce aux formules d'addition (proposition 1) :

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2).$$

On a donc bien

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

La 2e égalité du 1er point est une conséquence immédiate de ce que nous venons faire :

$$e^{i(\theta_1-\theta_2)} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2+\theta_2)} = e^{i\theta_1},$$

donc

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

On en vient à la formule de Moivre. Par définition,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = \underbrace{e^{i\theta}\times e^{i\theta}\times\cdots\times e^{i\theta}}_{n \text{ fois}}.$$

On applique plusieurs fois de suite la formule du point 1 :

$$\underbrace{e^{i\theta}\times e^{i\theta}\times\cdots\times e^{i\theta}}_{n \text{ fois}} = e^{i\overbrace{(\theta+\theta+\cdots+\theta)}^{n \text{ fois}}} = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

On a donc bien

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Remarque : Pour être parfaitement rigoureux et éviter les pointillés, il aurait fallu faire une démonstration par récurrence.

Exercice 96 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 2.

Pour tout réel a :

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
2. $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$.

On calcule de deux façons différentes :

- Avec l'IR n°1,
$$(\cos a + i\sin a)^2 = \cos^2 a + 2i\cos a\sin a + i^2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a + 2i\cos a\sin a.$$
- D'après la formule de Moivre,
$$(\cos a + i\sin a)^2 = \cos(2a) + i\sin(2a).$$

Donc par unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad , \qquad \sin(2a) = 2\sin a\cos a.$$

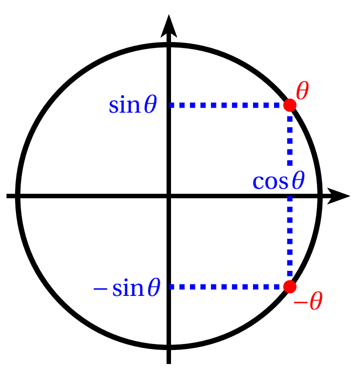
Enfin $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, donc on a aussi

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right) = 2\cos^2 a - 1\ ;$$

mais aussi

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(1 - \sin^2 a\right) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a.$$

Exercice 97 On utilise les formules $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ du cours de 1re.



On a donc :

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))}{2}=\frac{\cos\theta+\cancel{i\sin\theta}+\cos\theta-\cancel{i\sin\theta}}{2}=\frac{2\cos\theta}{2}=\cos\theta$$
$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)-(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))}{2}=\frac{\cancel{\cos\theta}+i\sin\theta-\cancel{\cos\theta}+i\sin\theta}{2i}=\frac{2i\sin\theta}{2i}=\sin\theta.$$

Exercice 98 D'après les formules d'Euler :

-
$$\begin{aligned}\cos^2 x&=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\frac{\left(e^{ix}\right)^2+2\times e^{ix}\times e^{-ix}+\left(e^{-ix}\right)^2}{2^2}=\frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4}\\&=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}\sin^2 x&=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2=\frac{\left(e^{ix}\right)^2-2\times e^{ix}\times e^{-ix}+\left(e^{-ix}\right)^2}{(2i)^2}=\frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4}\\&=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{-4}+\frac{-2}{-4}=-\frac{1}{2}\times\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

D'après les deux calculs qui précèdent :

$$\cos^2 x+\sin^2 x=\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}=1.$$

Exercice 99 On utilisera les formules

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \qquad \text{et} \qquad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

1. D'après la 2e formule d'Euler :

$$\begin{aligned}\sin^3\theta=(\sin\theta)^3&=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=\frac{\left(e^{i\theta}\right)^3-3\left(e^{i\theta}\right)^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^3}{8i^3}=\frac{e^{i3\theta}-3e^{i2\theta}\times e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\times e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}}{-8i}\\&=\frac{e^{i3\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{-8i}=-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}}{2i}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)=-\frac{1}{4}\sin(3\theta)+\frac{3}{4}\sin\theta.\end{aligned}$$

2. D'après la 1re formule d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^3\theta=(\cos\theta)^3&=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3}{8}=\frac{e^{i3\theta}+3e^{i2\theta}\times e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\times e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}}{8}\\&=\frac{e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}}{8}=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos\theta\end{aligned}$$

Exercice 100 On prend $\theta=\frac{\pi}{9}$ dans la 1re formule de l'exercice 99 :

$$\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^3=-\frac{1}{4}\sin\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)+\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{9}.$$

Or $\sin\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^3=-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{9}\,;$$

ou encore

$$\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^3-\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{8}=0.$$

Finalement, en multipliant par 8 :

$$8\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^3 - 6\sin\frac{\pi}{9} + \sqrt{3} = 0.$$

Cela prouve que $\sin\frac{\pi}{9}$ est racine du polynôme $8X^3 - 6X + \sqrt{3}$.

Remarque : En utilisant ce résultat et le fait que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on peut prouver, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\sin\frac{\pi}{9}$ est lui aussi irrationnel.

Exercice 101 On indique sur la figure les affixes des points.

1. On note r le module et θ l'argument principal de $2\mathrm{i} = 0 + 2\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$.
   - $\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} = \frac{0}{2} &= 0 \\ \sin\theta &= \frac{b}{r} = \frac{2}{2} &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

On en déduit

$$2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

2. On note r le module et θ l'argument principal de $2+2\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   - $\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{b}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

On en déduit

$$2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

3. On note r le module et θ l'argument principal de $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.
   - $\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{b}{r} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{5\pi}{6}$

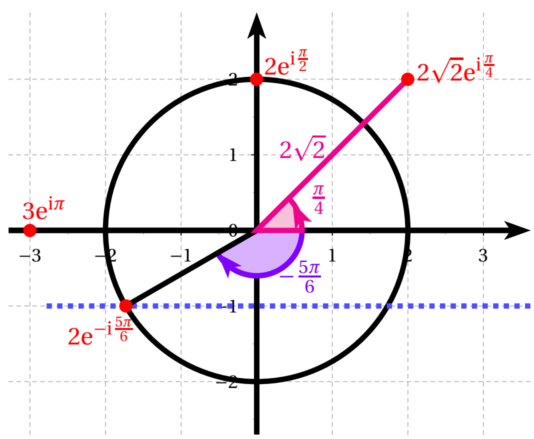
On en déduit

$$-\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}.$$

4. On note r le module et θ l'argument principal de $-3 = -3 + 0\mathrm{i}$.
   - $r = \sqrt{(-3)^2+0^2} = \sqrt{9} = 3$.
   - $\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} &= -\frac{3}{3} = -1 \\ \sin\theta &= \frac{b}{r} &= \frac{0}{3} = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta = \pi$

On en déduit

$$-3 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}.$$



Exercice 102 Soit $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. On pose $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
   - $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.
   - $\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{b}{r} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

   On en déduit
   $$z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

2. On utilise les règles de calcul avec l'exponentielle complexe :
   $$z^{15} = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{15} = 2^{15}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times 15} = 2^{15}\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi}.$$
   Or
   $$\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi} = \cos(-5\pi) + \mathrm{i}\sin(-5\pi) = -1 + \mathrm{i}\times 0 = -1,$$
   donc $z^{15} = -2^{15}$. Il s'agit bien d'un nombre réel.

Exercice 103 1. (a) On pose $r = |z_1|$ et $\theta = \arg(z_1)$. On a alors :

- $r=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=2$,
- $$\left.\begin{array}{ll}\cos\theta & =\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta & =\frac{b}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

Conclusion : l'écriture de z_1 sous forme exponentielle est

$$z_1=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

(b) On pose $r=|z_2|$ et $\theta=\arg(z_2)$. On a alors :

- $r=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$,
- $$\left.\begin{array}{ll}\cos\theta & =\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta & =\frac{b}{r}=-\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta=-\frac{\pi}{6}$$

Conclusion : l'écriture de z_2 sous forme exponentielle est

$$z_2=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

(c) $Z=z_1\times z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$.

$$Z=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

2. On écrit Z sous forme algébrique :

$$Z=z_1\times z_2=\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}-\mathrm{i}^2\sqrt{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

Or on a vu dans la question 1.c. que $Z=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$, donc

$$Z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\frac{\pi}{12}+4\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12},$$

et par unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique :

$$4\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}+\sqrt{2}\qquad,\qquad 4\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

On obtient finalement

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\qquad,\qquad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 104 Soient $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $z'=r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ deux nombres complexes écrits sous forme exponentielle. On a donc

$$|z|=r,\qquad |z'|=r',\qquad \arg(z)=\theta,\qquad \arg(z')=\theta'.$$

D'après les règles de calcul avec l'exponentielle complexe :

$$z\times z'=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}=rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}.$$

On en déduit :

1. $\left|z\times z'\right|=rr'=|z|\times\left|z'\right|$.
2. $\arg\left(z\times z'\right)=\theta+\theta'=\arg(z)+\arg\left(z'\right)$.

Exercice 105 On travaille dans le plan complexe où l'on considère les points O et I d'affixes respectives 0 et 1.

1. $|z-1|=1\iff IM=1$, donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon 1.
2. (a) Soit $z\in\mathscr{C}\setminus\{0\}$. On écrit sous forme exponentielle : $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a donc $\overline{z}=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, puis

$$z'=\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Par conséquent

$$\arg(z')=\theta=\arg(z).$$

On en déduit que les points O, M, M' sont alignés.

(b) On a besoin des cinq résultats suivants :

(i) Pour tout complexe $z = a + \mathrm{i}b$:

$$\left|\overline{z}\right| = |a - \mathrm{i}b| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

(ii) $\overline{1} = 1$.

(iii) D'après le cours, pour tous complexes tels que l'opération ait un sens : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

(iv) A nouveau d'après le cours, pour tous complexes z, z' : $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$.

(v) Si $z \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, alors $|1 - z| = |z - 1| = 1$.

En tenant compte de ces résultats on obtient, pour tout $z \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$:

- D'une part,

$$\left|z' - 1\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}} - 1\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1 - \overline{z}}{\overline{z}}\right| = \frac{\left|1 - \overline{z}\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{\left|\overline{1} - \overline{z}\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{\left|\overline{1 - z}\right|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{|1 - z|}{|z|} = \frac{1}{|z|}.$$

- D'autre part,

$$\left|z'\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{|1|}{\left|\overline{z}\right|} = \frac{1}{|z|}.$$

On a donc bien

$$\left|z' - 1\right| = \left|z'\right|.$$

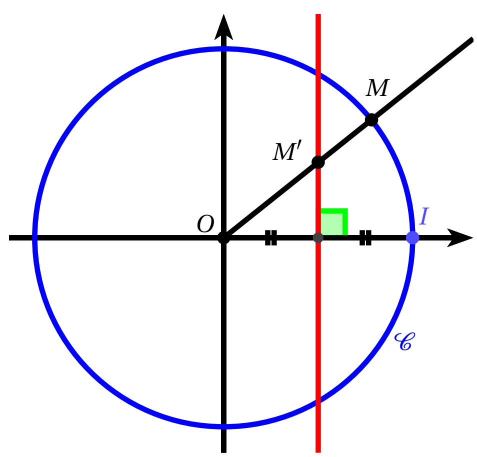
Cette égalité se réécrit $\left|z' - 1\right| = \left|z' - 0\right|$, donc avec les longueurs : $IM' = OM'$. On en déduit que

M' appartient à la médiatrice de $[OI]$.

(c) D'après les questions précédentes, si M est un point de $\mathscr{C}$ distinct de O, alors :

- O, M, M' sont alignés ;
- le point M' appartient à la médiatrice de $[OI]$.

Conclusion : M' est le point d'intersection de (OM) avec la médiatrice de $[OI]$.

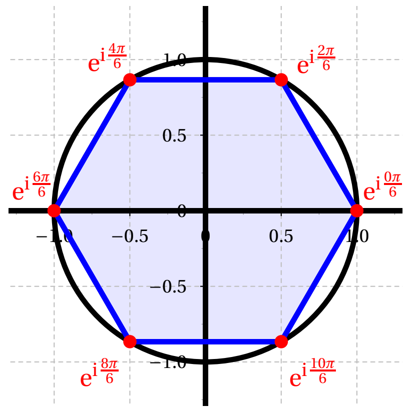


Exercice 106 On utilisera le théorème 2 : les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0; n-1]\!]$.

1. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 1$. sont

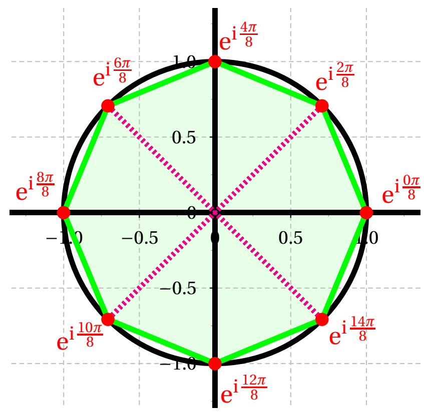
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0\pi}{6}} = 1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}.$$

Leurs images forment un hexagone régulier.



2. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^8 = 1$. sont

$$e^{i\frac{0\pi}{8}} = 1, \quad e^{i\frac{2\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\frac{6\pi}{8}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad e^{i\frac{8\pi}{8}} = e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{10\pi}{8}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad e^{i\frac{12\pi}{8}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i\frac{14\pi}{8}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$



Leurs images forment un octogone régulier.

Exercice 107 Résoudre l'équation $z^3 = 1$, c'est déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^3 - 1$.

1 est racine évidente, donc P est divisible par $z - 1$. On écrit la division euclidienne :

$$\begin{array}{rl|l}
 & z^3 + 0z^2 + 0z - 1 & z - 1 \\ \cline{3-3}
- & z^3 - z^2 & z^2 + z + 1 \\ \cline{2-2}
 & z^2 + 0z - 1 & \\
- & z^2 - z & \\ \cline{2-2}
 & z - 1 & \\
- & z - 1 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $z^3 - 1 = (z - 1)\left(z^2 + z + 1\right)$, donc

$$z^3 = 1 \iff z^3 - 1 = 0 \iff \left(z = 1 \text{ ou } z^2 + z + 1 = 0\right).$$

On résout l'équation $z^2 + z + 1 = 0$:

- Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
- $\Delta < 0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{|-3|}}{2 \times 1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion : les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont

$$1 \quad , \quad \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Ce sont les racines troisièmes (ou cubiques) de l'unité (théorème 2, puis exemple 6.1 du cours).

Exercice 108 On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$.

1. (a) $\omega^5 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}\right)^5 = \mathrm{e}^{\frac{10\mathrm{i}\pi}{5}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1.$

   Remarque : ω est une racine cinquième de l'unité.

   (b) $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$, donc d'après l'une des formules d'Euler :

$$\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

2. On développe :

$$\left(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\right)(1-\omega) = 1-\omega+\omega-\omega^2+\omega^2-\omega^3+\omega^3-\omega^4+\omega^4-\omega^5 = 1-\omega^5$$

   (les termes s'annulent deux à deux, on parle de somme télescopique – comme on a déjà rencontré des produits télescopiques avec les matrices).

   Or on sait que $\omega^5 = 1$, donc $\left(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\right)(1-\omega) = 0$. Puis comme $1-\omega \neq 0$, on trouve finalement

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0.$$

3. On sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)$, donc en remplaçant x par $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ on obtient :

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\omega^2+2\times\omega\times\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2\right) + \frac{1}{4}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\omega^2+2+\frac{1}{\omega^2}+\omega+\frac{1}{\omega}-1\right).$$

   On met $\frac{1}{\omega^2}$ en facteur :

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} = \frac{1}{4\omega^2}\left(\omega^4+2\omega^2+1+\omega^3+\omega-\omega^2\right) = \frac{1}{4\omega^2}\left(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\right).$$

   Or $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$ (cf question 2), donc $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} = 0$.

   Conclusion :

$$\cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) \text{ est bien racine de } x^2+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}.$$

   Il reste à résoudre cette équation :
   - $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times1\times\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$.
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

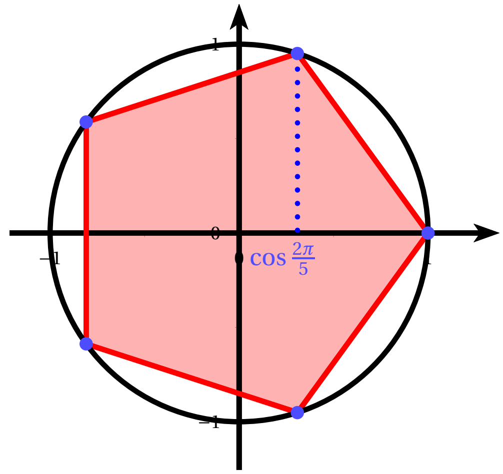
$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}}{2\times1} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4},$$
$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

   Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

   Remarque : On peut, partant de ce résultat, construire un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique avec la règle et le compas. Le 1er sommet a pour coordonnées $(1;0)$. Pour placer le 2e, on construit $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ sur l'axe des abscisses[6]. On reporte ensuite les longueurs au compas pour les sommets suivants.

6. L'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droite mesurent 1 et 2 vaut $\sqrt{5}$. Pour construire un segment de longueur $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, il reste à retrancher 1 et à diviser par 4 en faisant deux médiatrices.



Exercice 109 On fixe un entier naturel n non nul et on considère l'équation

$$z^n = 1. \qquad (E)$$

1. Les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0; n-1]\!]$, sont solutions de (E), car

$$\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 + i \times 0 = 1.$$

2. Le polynôme $P(Z) = z^n - 1$ est de degré n, donc il a au plus n racines dans $\mathbb{C}$ (théorème 2 du chapitre 2). On a prouvé dans la question 1 que les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0; n-1]\!]$, étaient racines de P. Ces racines sont au nombre de n, donc ce sont **les** racines de P.

   Conclusion : les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0; n-1]\!]$, sont les solutions de (E).

Exercice 110 Soient A, B, C les points du plan complexe d'affixes respectives $a = 4-3i$, $b = 1-i$, $c = 5+5i$.

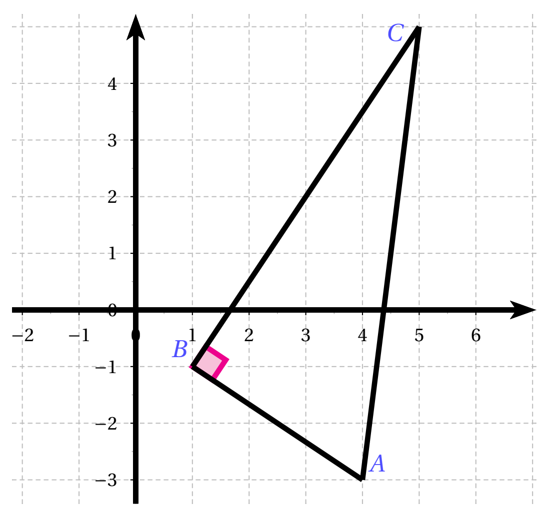
1. On écrit sous forme algébrique :

$$Z = \frac{c-b}{a-b} = \frac{5+5i-(1-i)}{4-3i-(1-i)} = \frac{4+6i}{3-2i} = \frac{(4+6i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{12+8i+18i+12i^2}{3^2+2^2} = \frac{\cancel{12}+26i-\cancel{12}}{13} = 2i.$$

2. On en déduit

$$\frac{BC}{BA} = \left|\frac{c-b}{a-b}\right| = |Z| = |2i| = 2 \qquad \text{et} \qquad \widehat{ABC} = \left|\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)\right| = \left|\arg(Z)\right| = \left|\arg(2i)\right| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}.$$

   Donc ABC est rectangle en B (mais pas isocèle).



Exercice 111 On note A, B, C les points d'affixes respectives $a = -\sqrt{3}+i$, $b = \sqrt{3}+i$, $c = -2i$.

1. On écrit sous forme algébrique :

$$Z=\frac{a-c}{b-c}=\frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}-(-2\mathrm{i})}{\sqrt{3}+\mathrm{i}-(-2\mathrm{i})}=\frac{-\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}=\frac{\left(-\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right)}{\left(\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right)}=\frac{-3+3\mathrm{i}\sqrt{3}+3\mathrm{i}\sqrt{3}-9\mathrm{i}^2}{\sqrt{3}^2+3^2}=\frac{6+6\mathrm{i}\sqrt{3}}{12}=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

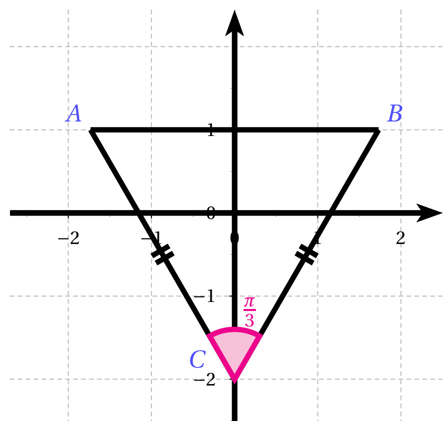
   On en déduit la forme exponentielle :

$$Z=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

2. D'après la question précédente,

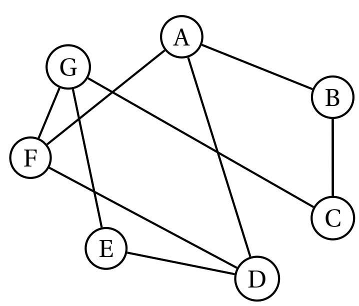
$$\frac{CA}{CB}=\left|\frac{a-c}{b-c}\right|=|Z|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=1 \qquad \text{et} \qquad \widehat{BCA}=\left|\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)\right|=\left|\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\right|=\left|\frac{\pi}{3}\right|=\frac{\pi}{3}.$$

   Donc ABC est équilatéral.



6 Graphes, applications

Exercice 112 On considère le graphe non orienté Δ suivant.



1. Le graphe Δ est d'ordre 7. Les degrés des sommets sont donnés par le tableau :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	2	2	3	2	3	3

2. Il y a 9 arêtes en tout.
3. Une chaîne possible de longueur 8 reliant F à D est

   F – G – C – B – A – F – G – E – D

4. Un exemple de cycle d'origine A est

   A – D – F – G – C – B – A

5. Le graphe Δ est connexe, puisque la chaîne de la question 3 passe par tous les sommets (donc chacun des sommets peut être relié à tous les autres).

Exercice 113 1. Considérons un graphe non orienté G dont toutes les arêtes ont été effacées; les sommets sont donc tous de degré 0. Nous rajoutons alors progressivement les arêtes que nous avions effacées. On note S la somme des degrés des différents sommets – donc au départ, $S = 0$.

Chaque rajout d'arête A – B augmente de 1 le degré de A, ainsi que le degré de B, donc elle augmente de 2 la valeur de S.

Une fois toutes les arêtes remises, la valeur de S est donc égale au double du nombre d'arêtes.

2. Imaginons un réseau de 7 ordinateurs tel que chaque appareil est relié avec exactement trois autres. Chaque appareil est donc de degré 3, et la somme des degrés des sommets est égale à $7 \times 3 = 21$.

C'est absurde, puisque d'après la question précédente, cette somme est un nombre pair (c'est le double du nombre d'arêtes).

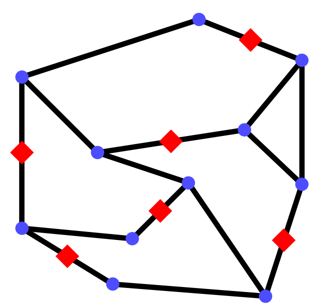
Exercice 114 On peut représenter la relation d'amitié au sein de la classe par un graphe : deux élèves sont amis lorsqu'une arête les relie.

Notons n le nombre d'élèves et supposons qu'ils aient tous un nombre d'amis différents.

Le nombre d'amis d'un élève est dans l'intervalle $[\![0; n-1]\!]$. Cet intervalle compte n nombres, et il faut y choisir n valeurs distinctes. Il est donc nécessaire qu'un élève ait 0 ami, un autre élève en ait 1, un élève en ait 2, ..., un élève en ait $n-1$. C'est absurde, car l'élève qui a $n-1$ amis est ami avec tout le monde, donc aucun élève ne devrait avoir 0 ami.

Exercice 115 1. Il y a 11 carrefours et chaque gardien peut en surveiller deux, donc il faut au moins $11 \div 2 = 5,5$ gardiens – c'est-à-dire 6!

On peut par exemple les placer de la façon suivante (losanges rouges) :



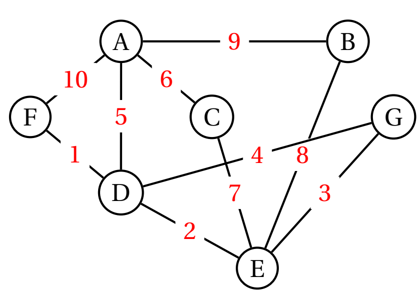
2. Il y a 6 gardiens, et chacun d'eux surveille 2 carrefours, donc $6 \times 2 = 12$ sont surveillés. Comme il n'y a que 11 carrefours, l'un d'entre eux sera surveillé 2 fois.

En revanche, aucun carrefour ne peut être surveillé 3 fois. Si c'était le cas, trois gardiens seraient pris sur ce carrefour, donc ils en surveilleraient au plus $1 + 3 = 4$ à eux trois. Les trois autres gardiens ne pourraient pas surveiller plus de $2 \times 3 = 6$ carrefours, donc au total, au plus $4 + 6 = 10$ carrefours seraient surveillés, ce qui est insuffisant.

Exercice 116 1. Le cycle

F – D – E – G – D – A – C – E – B – A – F

est eulérien : il passe par chaque arête une fois et une seule.



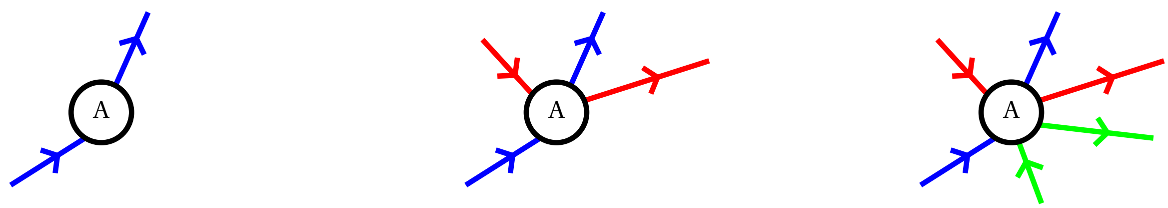
Pour convaincre le lecteur, on a numéroté les arêtes dans l'ordre du parcours.

2. Supposons qu'il existe un cycle eulérien dans un graphe non orienté G et considérons un sommet A de ce graphe.

   Deux cas de figure sont possibles : ou bien A est le point de départ (et d'arrivée) du cycle, ou bien il ne l'est pas. C'est alors un sommet « intermédiaire ».

   Supposons que A soit un sommet intermédiaire. Lorsque la chaîne arrive en A, elle doit nécessairement pouvoir en repartir (en bleu sur la figure de gauche ci-dessous), sinon A serait le point d'arrivée. Ou bien la chaîne ne passe plus par A, ou bien elle y repasse une deuxième fois. Dans ce cas, elle doit à nouveau pouvoir en repartir (en rouge ci-dessous). Cela continue ainsi de suite (on a codé un troisième passage en vert).

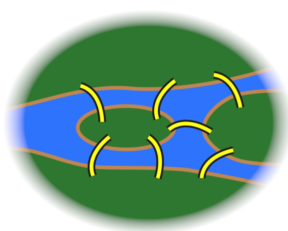
   Dans tous les cas, les arêtes adjacentes au sommet A sont en nombre pair (puisqu'elles vont deux par deux). Le degré de A est donc un nombre pair.

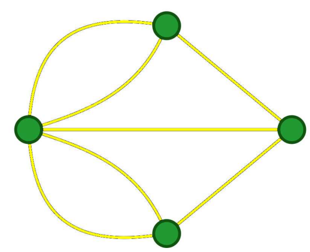


   Si A est le point de départ et d'arrivée, le raisonnement est le même, mais il faut rajouter la première arête (départ du point A) et la dernière (retour au point A). Le degré de A est donc également pair dans ce cas-là.

   Pour la réciproque lorsque G est connexe, on renvoie à la page Wikipédia sur le théorème d'Euler.

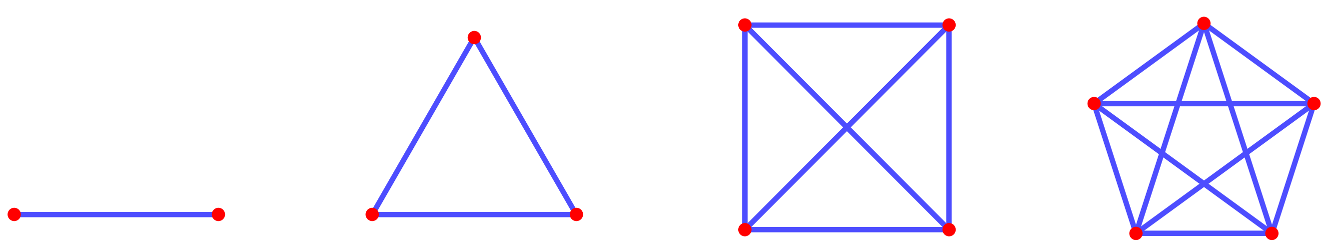
3. Si on associe chaque berge (ou île) à un sommet et chaque pont à une arête, il s'agit de savoir si le graphe obtenu est eulérien[7].





   Ce n'est pas le cas, puisque tous les sommets sont de degré impair (3 ou 5)[8].

Exercice 117 On représente, de gauche à droite, les graphes complets d'ordres 2, 3, 4 et 5. On indique à chaque fois le nombre d'arêtes.



$\boxed{n = 2 \implies 1 \text{ arête}}$ $\boxed{n = 3 \implies 3 \text{ arêtes}}$ $\boxed{n = 4 \implies 6 \text{ arêtes}}$ $\boxed{n = 5 \implies 10 \text{ arêtes}}$

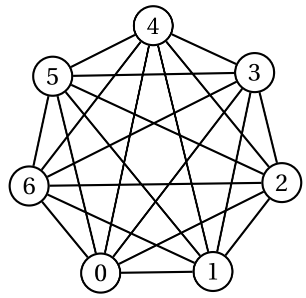
Dans un graphe complet d'ordre n, chaque sommet est relié aux $n-1$ autres. Attention cependant, il n'y a pas $n(n-1)$ arêtes en tout, car chaque arête est comptée deux fois (on a compté A→B et B→A). Il y a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes en tout.

7. On laisse le lecteur se convaincre que le graphe correspond bien à la situation des ponts de Königsberg : l'île de gauche correspond au sommet à gauche, l'île de droite au sommet à droite ; et les berges nord et sud aux sommets en haut et en bas. Quant aux ponts, ce sont les arêtes en jaune.

8. On utilise la propriété de la question 2 : pour qu'il existe une promenade qui passe une fois et une seule par chaque pont et qui revienne au point de départ, il est nécessaire que tous les sommets soient de degré pair.

Remarque : Il y a d'autres façons de calculer le nombre total d'arêtes.Le lecteur pourra notamment réfléchir au fait qu'il est égal à $1+2+3+\cdots+(n-1)$, ou encore à $\binom{n}{2}$.

Exercice 118 1. On dessine un graphe complet d'ordre 7, avec les entiers de 0 à 6 aux sommets. Chaque arête du graphe représente un domino du jeu : par exemple, l'arête $2-5$ représente le domino | 2 | 5 |.



D'après l'exercice 117, il y a $\frac{7(7-1)}{2} = 21$ arêtes, donc 21 dominos.

2. Chaque arête est de degré 6, donc le graphe est eulérien d'après la propriété réciproque de l'exercice 116. Il est donc possible d'arranger les dominos en formant une boucle fermée.
3. Si l'on inclut les numéros doubles, il suffit d'ajouter des « boucles » aux sommets. Par exemple, si on a l'enchaînement | 2 | 5 | | 5 | 0 |, on intercale le double | 5 | 5 | au milieu :

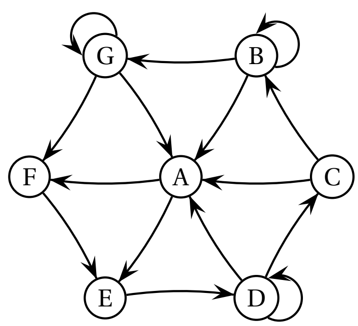
| 2 | 5 | | 5 | 5 | | 5 | 0 |

Mais le double | 5 | 5 | peut aussi être intercalé ailleurs (à n'importe quel endroit où le 5 apparaît).

Il est donc encore possible d'arranger les dominos en formant une boucle fermée.

Remarque : Le lecteur pourra se demander si le résultat persiste avec un jeu de dominos duquel on a enlevé tous les dominos marqués d'un 0.

Exercice 119 On considère le graphe orienté Γ suivant.



1. Le graphe Γ est d'ordre 7. Les degrés des sommets sont donnés par le tableau :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	6	5	3	5	3	3	5

On notera qu'on ne se préoccupe pas du sens des arcs à ce stade. On rappelle également que les boucles sont comptées deux fois.

2. Par analogie avec la relation dans les graphes non orientés, on a

$$\text{somme des degrés des sommets} = 2\times \text{ (nombre d'arcs)}.$$ [9]

Or la somme des degrés est

$$6+5+3+5+3+3+5 = 30,$$

donc il y a $30 \div 2 = 15$ arcs.

Bien sûr, il est aussi possible de compter les arcs un à un.

9. Grâce au fait que les boucles comptent deux fois dans le calcul du degré des sommets.

3. Un chemin possible de longueur 5 reliant G à C est

$$G \to F \to E \to D \to D \to C$$

4. Un circuit possible d'origine A est

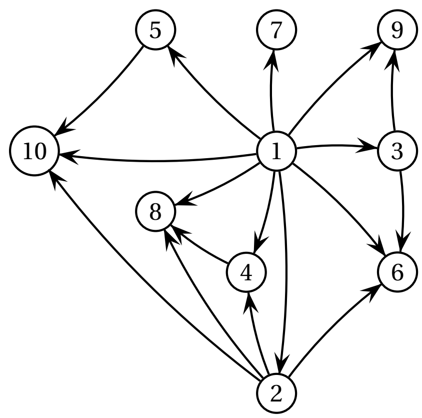
$$A \to E \to D \to C \to A$$

5. Le graphe Γ est fortement connexe, comme le montre le circuit suivant :

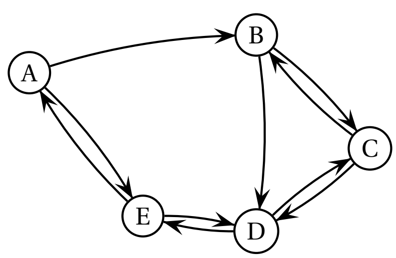
$$A \to F \to E \to D \to C \to B \to G \to A$$

Il passe par tous les sommets et, en le suivant, on relie n'importe quel sommet à n'importe quel autre [10].

Exercice 120 Voici un exemple possible.



Exercice 121 Une exposition est organisée dans un parc. On décide d'y instaurer un plan de circulation : certains allées sont à sens unique, d'autres sont à double sens. Le graphe ci-dessous modélise la situation.



1. La matrice d'adjacence du graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On calcule avec la calculatrice :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit qu'il existe $M^5_{1,4} = 6$ chemins de longueur 5 permettant de se rendre de A à D. Les voici tous :

A→B→D→C→B→D A→B→C→B→C→D A→B→C→D→C→D A→B→C→D→E→D A→E→A→B→C→D A→E→D→C→B→D

10. Bien sûr, arrivé à l'extrémité droite A, on peut repartir de la gauche.

3. $M^5_{1,1} = 1$, donc il existe un seul chemin de longueur 5 qui part de A et arrive en A. Il existe donc au plus un circuit de longueur 5 partant de A. Comme c'est le cas du circuit

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{A},$$

il existe bien un seul circuit de longueur 5 partant de A.

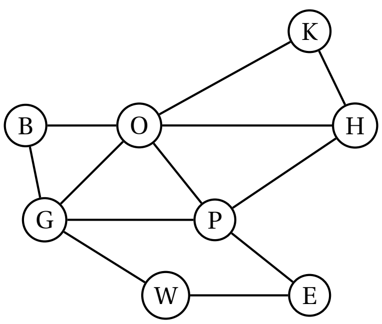
Ce circuit peut être transformé en un circuit partant de B : il suffit de « faire tourner les sommets » :

$$\mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B}.$$

Il n'existe pas d'autre circuit de longueur 5 partant de B ; sinon, en faisant de nouveau tourner les sommets, on aurait un nouveau circuit de longueur 5 partant de A – or on a prouvé qu'il n'en existait qu'un seul.

⚠Le piège est de croire que puisque $M^5_{2,2} = 5$, il y a 5 circuits partant de B. C'est faux : il y a certes 5 chemins fermés allant de B à B, mais 4 d'entre eux empruntent plusieurs fois le même arc.

Exercice 122 On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. En examinant les degrés des sommets, on constate qu'ils sont tous pairs, à l'exception de H (degré 3) et O (degré 5). En reprenant le raisonnement de l'exercice 116, on en déduit que O et H sont forcément les points de départ et d'arrivée de la chaîne. Sachant cela, il est facile de deviner une solution au problème :

$$\mathrm{O} - \mathrm{H} - \mathrm{P} - \mathrm{E} - \mathrm{W} - \mathrm{G} - \mathrm{P} - \mathrm{O} - \mathrm{G} - \mathrm{B} - \mathrm{O} - \mathrm{K} - \mathrm{H}$$

Remarque : On a parcouru chaque arête une seule fois, mais sans revenir au point de départ. On parle de graphe semi-eulérien.

2. En écrivant les sommets par ordre alphabétique, la matrice d'adjacence du graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec la calculatrice, on obtient $M^4_{2,7} = 5$, donc il existe 5 trajets possibles de Embankment à Piccadilly Circus passant par 3 stations intermédiaires.

⚠En passant par 3 stations intermédiaires, on a une chaîne de longueur 4, donc c'est la matrice M^4 qu'il faut utiliser – et non M^3.

Les 5 trajets possibles sont

E – W – G – O – P E – P – G – O – P E – P – H – O – P E – P – O – G – P E – P – O – H – P

3. La calculatrice donne $M^5_{3,8} = 47$, donc il y a 47 trajets possibles de Green Park à Westminster passant par 4 stations intermédiaires.

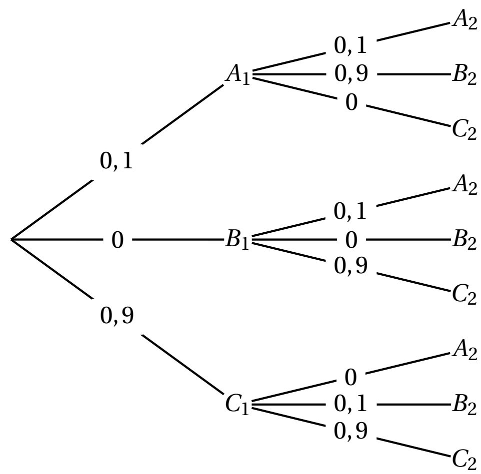
Exercice 123 1. La 1re année, l'assuré payé le tarif B, donc

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il a 10 % de chances de passer au tarif A et 90 % de chances de passer au tarif C, donc

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer P_2, on utilise un arbre pondéré.

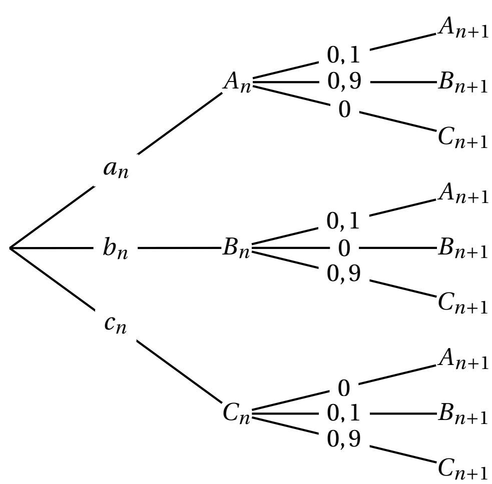


D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
a_2 &= P(A_2) = 0,1 \times 0,1 + 0 \times 0,1 + 0,9 \times 0 = 0,01,\\
b_2 &= P(B_2) = 0,1 \times 0,9 + 0 \times 0 + 0,9 \times 0,1 = 0,18,\\
c_2 &= P(C_2) = 0,1 \times 0 + 0 \times 0,9 + 0,9 \times 0,9 = 0,81.
\end{aligned}$$

Donc $P_2 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,18 & 0,81 \end{pmatrix}$.

2. On généralise le raisonnement de la question 1 :



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = a_n \times 0,1 + b_n \times 0,1 + c_n \times 0,\\
b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = a_n \times 0,9 + b_n \times 0 + c_n \times 0,1,\\
c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times 0,9 + c_n \times 0,9.
\end{aligned}$$

Donc

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}}_{T} = P_n T.$$

Remarque : On dit que T est une matrice stochastique : tous ses coefficients sont positifs et la somme de chaque ligne vaut 1.

3. On en déduit que, pour tout entier naturel n :

$$P_n = P_0 \times T^n.$$

4. On estime que la valeur de P_{20} donne une bonne indication de la répartition des assurés dans les différentes catégories sur le long terme. Or la calculatrice nous donne
$$P_{20} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{91} & \frac{9}{91} & \frac{81}{91} \end{pmatrix},$$
donc la cotisation moyenne d'un assuré pris au hasard devrait être de

$$\frac{1}{91} \times 455 + \frac{9}{91} \times 364 + \frac{81}{91} \times 273 = 284 \text{ €}.$$

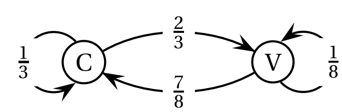
Cette cotisation est supérieure à la dépense moyenne de remboursement (280 €), donc le barème mis en place est viable sur le long terme (la compagnie gagne, en moyenne, 4 € par abonné et par an).

Remarque : On dit que $\begin{pmatrix} \frac{1}{91} & \frac{9}{91} & \frac{81}{91} \end{pmatrix}$ est la répartition stable de probabilité.

Exercice 124 Vers 1910, le mathématicien russe Andreï Markov étudie l'alternance des voyelles et des consonnes dans l'œuvre en vers de Pouchkine *Eugénie Onéguine*. En observant la suite des 20 000 premières lettres, il constate que :

- quand la lettre est une consonne, il y a 2 chances sur 3 que la suivante soit une voyelle ;
- quand la lettre est une voyelle, il y a 7 chances sur 8 que la suivante soit une consonne.

1. On représente la situation par le graphe :



2. Pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & v_n \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}_{T} = P_n T.$$

3. On en déduit que, pour tout entier naturel n :

$$P_n = P_0 \times T^n.$$

4. La première lettre est une voyelle, donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. La calculatrice nous donne alors

$$P_{20} \approx \begin{pmatrix} \frac{21}{37} & \frac{16}{37} \end{pmatrix},$$

donc les proportions de consonnes et de voyelles dans l'ouvrage sont respectivement égales à $\frac{21}{37}$ et à $\frac{16}{37}$.

Remarque : Pour obtenir la répartition stable $\begin{pmatrix} \frac{21}{37} & \frac{16}{37} \end{pmatrix}$, on peut la chercher sous la forme $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$, en résolvant l'équation $P = P \times T$ (on se ramène alors à la résolution d'une équation du 1er degré).

7 Algorithme d'Euclide, applications

Exercice 125

1. On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 840 &= 5 \times 144 + 120 \qquad (L_1)\\ 144 &= 1 \times 120 + 24 \qquad (L_2)\\ 120 &= 5 \times 24 + 0 \qquad (L_3)\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{PGCD}(144, 840) = 24.$$

2. On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 215 &= 7 \times 28 + 19 \qquad (L_1)\\ 28 &= 1 \times 19 + 9 \qquad (L_2)\\ 19 &= 2 \times 9 + 1 \qquad (L_3)\\ 9 &= 9 \times 1 + 0 \qquad (L_4)\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{PGCD}(215, 28) = 1.$$

215 et 28 sont premiers entre eux.

Exercice 126 L'écart d (en mètres) entre deux arbres doit diviser à la fois 966 et 1 008. On veut qu'il y ait le moins d'arbres possibles, donc il faut que d soit le plus grand possible. On cherche donc le PGCD de 966 et 1 008.

On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1\,008 &= 1 \times 966 + 42 \qquad (L_1)\\ 966 &= 23 \times 42 + 0 \qquad (L_2)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\text{PGCD}(1\,008, 966) = 42,$$

donc les arbres sont séparés de 42 m. Comme le périmètre du terrain mesure

$$2 \times 1\,008 + 2 \times 966 = 3\,948 \text{ m},$$

il faudra planter

$$3\,948 \div 42 = 94 \text{ arbres au minimum.}$$

Exercice 127 On remonte à chaque fois l'algorithme d'Euclide :

1.

$$\begin{aligned} 21 &= 1 \times 12 + 9 \qquad (L_1)\\ 12 &= 1 \times 9 + 3 \qquad (L_2)\\ 9 &= 3 \times 3 + 0 \qquad (L_3)\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{PGCD}(21, 12) = 3,$$

puis :

$$\begin{aligned} \text{grâce à } (L_2) : \quad & 3 = 12 - 1 \times 9,\\ \text{et grâce à } (L_1) : \quad & 3 = 12 - 1 \times (21 - 1 \times 12)\\ & 3 = 12 - 1 \times 21 + 1 \times 12\\ & 3 = 2 \times 12 - 1 \times 21.\end{aligned}$$

Conclusion : on a la relation de Bézout

$$3 = 2 \times 12 - 1 \times 21.$$

2.

$$\begin{aligned} 26 &= 3 \times 7 + 5 \qquad (L_1)\\ 7 &= 1 \times 5 + 2 \qquad (L_2)\\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \qquad (L_3)\\ 2 &= 2 \times 1 + 0 \qquad (L_4)\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{PGCD}(26, 7) = 1,$$

puis :

$$\begin{aligned} \text{grâce à } (L_3) : \quad & 1 = 5 - 2 \times 2,\\ \text{et grâce à } (L_2) : \quad & 1 = 5 - 2 \times (7 - 1 \times 5)\\ & 1 = 5 - 2 \times 7 + 2 \times 5\\ & 1 = 3 \times 5 - 2 \times 7\\ \text{enfin, grâce à } (L_1) : \quad & 1 = 3 \times (26 - 3 \times 7) - 2 \times 7\\ & 1 = 3 \times 26 - 9 \times 7 - 2 \times 7\\ & 1 = 3 \times 26 - 11 \times 7.\end{aligned}$$

Conclusion : on a la relation de Bézout

$$1 = 3 \times 26 - 11 \times 7.$$

Exercice 128 1. $8 \times 3 - 23 \times 1 = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, 23 et 8 sont premiers entre eux.

2. $105 \times 1 - 104 \times 1 = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, 104 et 105 sont premiers entre eux.
3. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$(3n+1) \times 1 - n \times 3 = 1,$$

donc n et $3n+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 129 1. 2 divise 4 et 6, donc pour tous entiers x, y, la combinaison linéaire $4x+6y$ est multiple de 2 – et ne peut donc pas être égal à 1. Il est donc impossible qu'un point à coordonnées entières (x, y) se trouve sur la droite $D : 4x+6y = 1$.

2. Il est clair que 7 et 16 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u, v tels que $7u+16v = 1$. Ce couple d'entiers fournit un point à coordonnées entières sur la droite $\Delta : 7x-16y = 1$ (on fait juste attention aux signes).

   Remarque : On trouve un couple solution par tâtonnement ou en remontant l'algorithme d'Euclide :

$$7 \times 7 - 16 \times 3 = 1,$$

   donc le point de coordonnées $(7; 3)$ est sur Δ.

Exercice 130 Soit n un entier naturel non nul.

1. On développe :

$$(2n+1)^2 - 4\left(n^2+n\right) = 4n^2+4n+1-4n^2-4n = 1.$$

2. L'égalité de la question 1 se réécrit

$$(2n+1) \times (2n+1) + \left(n^2+n\right) \times (-4) = 1,$$

   donc d'après le théorème de Bézout, les entiers naturels $2n+1$ et n^2+n sont premiers entre eux. La fraction $\frac{2n+1}{n^2+n}$ est donc irréductible.

Exercice 131 On trouve par tâtonnement une identité de Bézout :

$$3 \times 5 - 2 \times 7 = 1.$$

Voici alors comment mesurer 1 min :
On retourne 3 fois de suite le sablier de 5 min. En démarrant au même moment, on retourne 2 fois celui de 7 min. Entre le moment où le sablier de 7 min a fini ses écoulements et le moment où le sablier de 5 min a fini les siens, il s'écoule

$$3 \times 5 - 2 \times 7 = 1 \text{ min}.$$

Exercice 132 Soient a, b, c trois entiers naturels non nuls.

1. Si a est premier avec b et avec c, d'après le théorème de Bézout (partie directe), il existe des entiers u_1, v_1, u_2, v_2 tels que :

$$\begin{aligned} au_1 + bv_1 &= 1, \\ au_2 + cv_2 &= 1. \end{aligned}$$

   On multiplie membre à membre les deux lignes et on développe :

$$\begin{aligned} (au_1 + bv_1) \times (au_2 + cv_2) &= 1 \times 1 \\ a^2u_1u_2 + acu_1v_2 + abv_1u_2 + bcv_1v_2 &= 1. \end{aligned}$$

   Enfin, on factorise :

$$a\underbrace{(au_1u_2 + cu_1v_2 + bv_1u_2)}_{U} + bc\underbrace{(v_1v_2)}_{V} = 1.$$

   Conclusion : il existe deux entiers U, V tels que $aU + bcV = 1$, donc d'après le théorème de Bézout (partie réciproque, cette fois), a est premier avec le produit bc.

2. On fait une démonstration par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 1$, car par hypothèse a est premier avec b.

   Si la propriété est vraie pour un entier $n \geq 1$, alors a est premier avec b et avec b^n, donc d'après la question 1, a est premier avec le produit $b \times b^n = b^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 133 Pour tout entier naturel n, on définit le n−ième nombre de Fermat par

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1.$$

1. $$\begin{aligned} F_0 &= 2^{(2^0)} + 1 = 2^1 + 1 = 3, \\ F_1 &= 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5, \\ F_2 &= 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

   $$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2.$$

   La propriété est vraie au rang 1, car

   $$\prod_{k=0}^{1-1} F_k = \prod_{k=0}^{0} F_k = F_0 = 3,$$

   tandis que

   $$F_1 - 2 = 5 - 2 = 3.$$

   Ensuite, si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 1$, alors

   $$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2.$$

   Donc en multipliant les deux membres par F_n :

   $$\begin{aligned} \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) \times F_n &= (F_n - 2) \times F_n \\ \prod_{k=0}^{n} F_k &= F_n^2 - 2F_n. \end{aligned}$$

   On développe le membre de droite :

   $$\begin{aligned} F_n^2 - 2F_n &= \left(2^{(2^n)} + 1\right)^2 - 2 \times \left(2^{(2^n)} + 1\right) \\ &= \left(2^{(2^n)}\right)^2 + 2 \times 2^{(2^n)} \times 1 + 1^2 - 2 \times 2^{(2^n)} - 2 \\ &= 2^{(2^n)\times 2} + 1 - 2 \\ &= 2^{(2^{n+1})} - 1. \end{aligned}$$

   Rassemblant ce qui précède, on obtient

   $$\prod_{k=0}^{n} F_k = 2^{(2^{n+1})} - 1,$$

   ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence.

3. Étant donnés deux entiers $n > m \geq 1$, l'égalité de la question 2 s'écrit

   $$F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2,$$

   ou encore

   $$F_n \times 1 - F_m \times \left(\prod_{k=0, k\neq m}^{n-1} F_k\right) = 2.$$

   À présent, si un entier $d \geq 1$ divise à la fois F_m et F_n, alors il divise la combinaison linéaire ci-dessus, donc il divise 2. Le PGCD de F_m et F_n ne peut donc être que 1 ou 2. Or F_m et F_n sont impairs, donc ils ne sont pas divisibles par 2 et leur PGCD est égal à 1.

   Conclusion : les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 134 1. 4 et 7 sont premiers entre eux, donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, un entier divisible à la fois par 4 et par 7 est divisible par $4 \times 7 = 28$.

2. Un nombre pair multiple de 5 est multiple à la fois de 2 et de 5. Or 2 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, ce nombre est multiple de $2 \times 5 = 10$.

Exercice 135 Les entiers n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$ sont quatre entiers consécutifs, donc l'un d'entre eux est multiple de 4. Il s'ensuit que le produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est multiple de 4.

Avec le même raisonnement, on voit que le produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est multiple de 3 (il y a un ou deux entiers parmi n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$ qui est(sont) multiple(s) de 3).

Or 3 et 4 sont premiers entre eux, donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est multiple de $3 \times 4 = 12$.

Exercice 136 Soit p un nombre premier distinct de 2 et de 3.

1. Si le nombre premier p était congru à 0 modulo 3, alors il serait divisible par 3. Il ne pourrait donc qu'être égal à 3, ce qui est faux par hypothèse. On a ainsi $p \equiv 1\,[3]$, ou bien $p \equiv 2\,[3]$.

   - Si $p \equiv 1\,[3]$, alors $p^2 - 1 \equiv 1^2 - 1\,[3]$, c'est-à-dire $p^2 - 1 \equiv 0\,[3]$.
   - Si $p \equiv 2\,[3]$, alors $p^2 - 1 \equiv 2^2 - 1\,[3]$, donc $p^2 - 1 \equiv 0\,[3]$.

   Dans tous les cas, $p^2 - 1 \equiv 0\,[3]$, donc $p^2 - 1$ est divisible par 3.

2. Le nombre p est premier et distinct de 2, donc il est impair. D'après l'exercice 79, $p^2 - 1$ est multiple de 8.

   Conclusion : $p^2 - 1$ est multiple de 3 et de 8. Or 3 et 8 sont premiers entre eux, donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, $p^2 - 1$ est multiple de $3 \times 8 = 24$.

Exercice 137 On considère l'équation

$$3x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0 \qquad (E).$$

1. On définit la fonction $f : x \mapsto 3x^3 + 4x^2 + 2x - 4$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 9x^2 + 8x + 2.$$

   Le discriminant est $\Delta = 8^2 - 4 \times 9 \times 2 = -8$, donc f' n'a pas de racine et est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		α		1		∞
$f'(x)$			$+$					
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$-\frac{13}{8}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

   La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est la même que celle du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$$

   - La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
   - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
   - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   D'après le théorème de la bijection[11], l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution α dans $\mathbb{R}$.
   Enfin, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{8}$, et $f(1) = 5$, donc $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

11. Aussi appelé *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*.

2. Si $\alpha = \frac{p}{q}$, alors

$$3\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 4\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right) - 4 = 0,$$

donc

$$\frac{3p^3}{q^3} + 4 \times \frac{p^2}{q^2} + 2 \times \frac{p}{q} - 4 = 0.$$

On réduit au même dénominateur :

$$\frac{3p^3}{q^3} + \frac{4p^2q}{q^3} + \frac{2pq^2}{q^3} - \frac{4q^3}{q^3} = 0,$$

et donc

$$3p^3 + 4p^2q + 2pq^2 - 4q^3 = 0. \tag{4}$$

Cette égalité se réécrit

$$p\left(3p^2 + 4pq + 2q^2\right) = 4q^3,$$

donc p divise $4q^3$. Or p est premier avec q, donc il est premier avec q^3 d'après l'exercice 132. Et donc, d'après le théorème de Gauss, p divise 4.

L'égalité (4) se réécrit aussi

$$3p^3 = q\left(4q^2 - 2pq - 4p^2\right),$$

donc q divise $3p^3$. Or q est premier avec p, donc il est premier avec p^3 d'après l'exercice 132. Et donc, d'après le théorème de Gauss, q divise 3.

3. D'après la question 2, p divise 4, donc il ne peut être égal qu'à 1, 2 ou 4. On sait aussi que q divise 3, donc il ne peut être égal qu'à 1 ou 3. Les seules valeurs possibles pour la racine $\alpha = \frac{p}{q}$ sont donc $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{1}$ ou $\frac{4}{3}$.

On sait aussi (qu°1) que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, ce qui élimine toutes les possibilités à l'exception de $\alpha = \frac{2}{3}$.

On vérifie cette solution : on a bien

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) - 4 = 0,$$

donc $\alpha = \frac{2}{3}$ est la seule solution réelle de (E).