Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions des équations.

Exercice 1 1. On résout l'équation $x^2+2x=0$:

On factorise :

$$x(x+2)=0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{array}{lcl} x=0 & \text{ou} & x+2=0 \\ & & x+\cancel{2}-\cancel{2}=0-2 \\ & & x=-2 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=-2$. Autrement dit :

$$\mathscr{S}=\{0;-2\}.$$

2. On résout l'équation $x^2-16=0$:

On « isole » x^2 :

$$\begin{aligned} x^2-16&=0 \\ x^2-\cancel{16}+\cancel{16}&=0+16 \\ x^2&=16 \end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x=\sqrt{16}=4 \qquad \text{ou} \qquad x=-\sqrt{16}=-4.$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\{4;-4\}.$$

3. On résout l'équation $(2x-1)(x-5)=0$:

$$\begin{array}{rcl} 2x-1=0 & \text{ou} & x-5=0 \\ 2x-\cancel{1}+\cancel{1}=0+1 & \text{ou} & x-\cancel{5}+\cancel{5}=0+5 \\ \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\dfrac{1}{2} & \text{ou} & x=5 \\ x=\dfrac{1}{2} & & \end{array}$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2};5\right\}.$$

4. On résout l'équation $x^2+7=0$:

$$\begin{aligned} x^2+7&=0 \\ x^2+\cancel{7}-\cancel{7}&=0-7 \\ x^2&=-7 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre x ne peut avoir un carré égal à -7).

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\emptyset.$$

(On rappelle que $\emptyset$ désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

Exercice 2 Dans chaque cas, on note Δ le discriminant.

1. On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$:
   - $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3-5}{2} = -1,$$
   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4.$$

   Conclusion :

   $$\mathscr{S} = \{-1; 4\}.$$

2. On résout l'équation $2x^2 - 12x = -18$:
   On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$) en « transposant -18 » :

   $$2x^2 - 12x + 18 = -\cancel{18} + \cancel{18}$$
   $$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

   - $a = 2$, $b = -12$, $c = 18$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$.
   - $\Delta = 0$, donc il y a une seule solution :

   $$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

   Conclusion :

   $$\mathscr{S} = \{3\}.$$

3. On résout l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$:
   - $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$.
   - $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solution.

   Conclusion :

   $$\mathscr{S} = \emptyset.$$

4. On résout l'équation $x^2 + 2x - 4 = 0$:
   - $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$.
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2},$$
   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2}.$$

   Conclusion :

   $$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} ; \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \right\}.$$

   Remarque : On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que

   $$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5},$$

   on trouve

   $$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{\cancel{2}} = -1 + \sqrt{5}.$$

   De même, $x_1 = -1 - \sqrt{5}$.

5. On résout l'équation $x^2 = -6x$:
À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le « $-6x$ » dans le membre de gauche, qui devient « $+6x$ ».

$$\begin{aligned} x^2 &= -6x \\ x^2 + 6x &= 0. \end{aligned}$$

Ici, il y a deux méthodes possibles :
- soit on utilise le discriminant, avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 0$ (puisque $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$) ;
- soit on factorise.

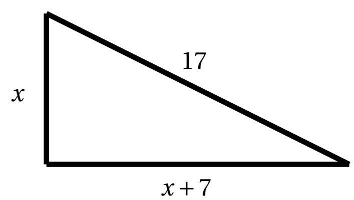
On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide [1] :

$$\begin{aligned} x(x+6) &= 0 \\ x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x+6 &= 0 \\ x &= -6. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathscr{S} = \{0; -6\}.$$

Exercice 3 On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas x.



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe $(x+7)^2$ avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 &= 289 \\ 2x^2 + 14x + 49 - 289 &= 0 \\ 2x^2 + 14x - 240 &= 0. \end{aligned}$$

- $a = 2$, $b = 14$, $c = -240$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1\,920 = 2\,116$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{2\,116}}{2 \times 2} = \frac{-14 - 46}{4} = -15, \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{2\,116}}{2 \times 2} = \frac{-14 + 46}{4} = 8. \end{aligned}$$

Or x désigne une longueur, donc la première solution (x_1) est impossible. On a donc $x = 8$.

Remarque : Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

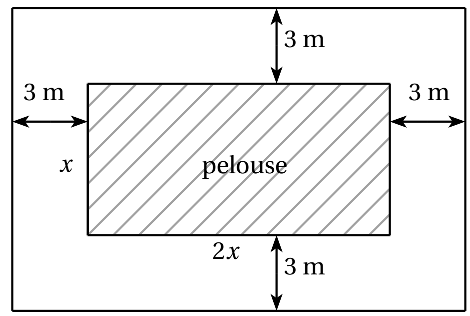
$$x = 8, \qquad x + 7 = 8 + 7 = 15 \qquad \text{et} \qquad 17.$$

On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec Δ dans le cas où b ou c valent 0.

Exercice 4 1. Voici un schéma du terrain en notant x la largeur de la pelouse (donc la longueur est $2x$) :



2. La longueur du terrain (en m) est

$$2x+3+3=2x+6,$$

sa largeur est

$$x+3+3=x+6.$$

Donc la surface du terrain (en m²) est

$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x+6)\times(x+6).$$

Or on sait que cette surface vaut 360 m^2, donc

$$(2x+6)\times(x+6)=360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente[2] :

$$\begin{aligned}
&(2x+6)\times(x+6) &&= 360\\
\iff\ & 2x\times x+2x\times 6+6\times x+6\times 6 &&= 360\\
\iff\ & 2x^2+12x+6x+36 &&= 360\\
\iff\ & 2x^2+18x+36-360 &&= 0\\
\iff\ & 2x^2+18x-324 &&= 0.
\end{aligned}$$

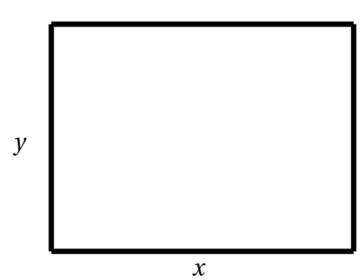
Il s'agit d'une équation du second degré.

- $a=2,\ \ b=18\ ,\ c=-324.$
- $\Delta = 18^2-4\times 2\times(-324)=2916.$
- $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18-\sqrt{2916}}{2\times 2}=\frac{-18-54}{4}=\frac{-72}{4}=-18,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18+\sqrt{2916}}{2\times 2}=\frac{-18+54}{4}=\frac{36}{4}=9.$$

Or x désigne une longueur, donc x ne peut pas être négatif et seule la solution $x_2=9$ est valable.
Conclusion : $x=9$, donc la longueur du terrain (en m) est $2\times 9+3+3=24$, sa largeur est $9+3+3=15$.

Exercice 5 On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note x et y les dimensions du champ.



2. Les « $\iff$ » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est

$$x+y=27.$$

- L'aire est 180, donc

$$x\times y=180.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x+y=27 & L_1 \\ xy=180 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie L_1 par x :

$$(x+y)\times x=27\times x, \qquad \text{soit} \qquad x^2+xy=27x.$$

Or d'après L_2, $xy=180$, donc

$$x^2+180=27x, \qquad \text{et ainsi} \qquad x^2-27x+180=0.$$

On aboutit à une équation du 2^d degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) : $x_1=12$, $x_2=15$.

On sait que $x+y=27$, donc si $x=12$, alors $y=27-x=27-12=15$; et si $x=15$, alors $y=27-x=27-15=12$.
Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

Exercice 6 On note n le nombre d'amis initialement présents, et p le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc

$$n\times p=2400. \tag{1}$$

- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas $(n-2)$ amis, et chacun paye alors $(p+40)$ €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit

$$(n-2)\times(p+40)=2400.$$

En développant, cela donne encore

$$np+40n-2p-80=2400. \tag{2}$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2400 dans les deux cas, on obtient l'égalité

$$\cancel{np}=\cancel{np}+40n-2p-80,$$

soit

$$40n-2p-80=0.$$

Finalement, le couple (n,p) est solution du système

$$\begin{cases} n\times p=2400 \\ 40n-2p-80=0. \end{cases}$$

On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient

$$n=12 \qquad , \qquad p=200.$$

Conclusion : comme $12-10=2$, ce sont 10 amis qui sont finalement partis.

Exercice 7 1. $P_1 : y=x^2-6x+5$.

- $a=1$, $b=-6$, $c=5$.
- a est ⊕, donc P_1 est vers le haut.
- On note S le sommet de P_1. D'après le cours

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 1}=\frac{6}{2}=3.$$

On en déduit

$$y_S=3^2-6\times 3+5=9-18+5=-4.$$

On a donc $S(3;-4)$.

Venons-en au tracé de la parabole. On fait un tableau de valeurs sur $[0;6]$, avec un pas de 1 [3]. Pour cela, on utilise la calculatrice :

3. Nous choisissons un intervalle symétrique par rapport à l'abscisse du sommet, et qui ne soit ni trop court, ni trop long. On choisit un pas de 1 par facilité, mais le graphique serait bien sûr plus précis avec un pas plus petit.

Calculatrices collège

- $\boxed{\text{MODE}}$ ou $\boxed{\text{MENU}}$
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=X^2-6X+5 $\boxed{\text{EXE}}$ (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- Fin ? 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas ? 1 $\boxed{\text{EXE}}$

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{x}}$

-
- Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$ puis choisir Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$
- f(x)=x^2-6x+5 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Tableau $\boxed{\text{EXE}}$ puis Régler l'intervalle $\boxed{\text{EXE}}$
- X début 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- X fin 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas 1 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Valider

TI graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{x,t,\theta,n}$

- $\boxed{f(x)}$
- $Y_1=X^2-6X+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{déf table}}$
- DébTable=0 $\boxed{\text{EXE}}$
- PasTable=1 $\boxed{\text{EXE}}$ ou ΔTbl=1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{table}}$

CASIO graphiques

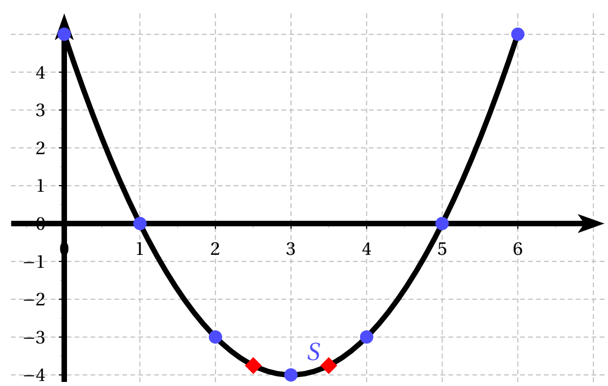
X s'obtient avec la touche $\boxed{X,\theta,T}$

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis choisir TABLE $\boxed{\text{EXE}}$
- $Y_1:X^2-6X+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{F5}}$ (on choisit donc SET)
- Start :0 $\boxed{\text{EXE}}$
- End :6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Step :1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{EXIT}}$
- $\boxed{\text{F6}}$ (on choisit donc TABLE)

On obtient le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Enfin on construit le graphique (j'ai un peu « écrasé » l'axe des ordonnées pour gagner de la place) :



Remarque : On peut avoir intérêt à ajouter des points près du sommet pour obtenir un tracé plus précis. C'est ce que l'on a fait ci-dessus avec les deux losanges rouges, correspondant au tableau de valeurs ci-dessous.

x	2,5	3,5
y	$-3,75$	$-3,75$

2. $P_2 : y=-0,5x^2-x+4$.
   - $a=-0,5$, $b=-1$, $c=4$.
   - a est $\ominus$, donc P_2 est vers le bas.
   - On note S le sommet de P_2. D'après le cours

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times(-0,5)}=\frac{1}{-1}=-1.$$

   On en déduit

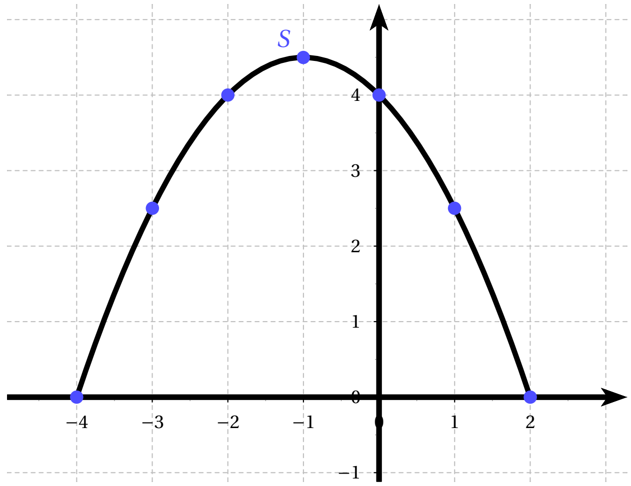
$$y_S=-0,5\times(-1)^2-(-1)+4=-0,5+1+4=4,5.$$

   On a donc $S(-1\ ;\ 4,5)$.

Tableau de valeurs :

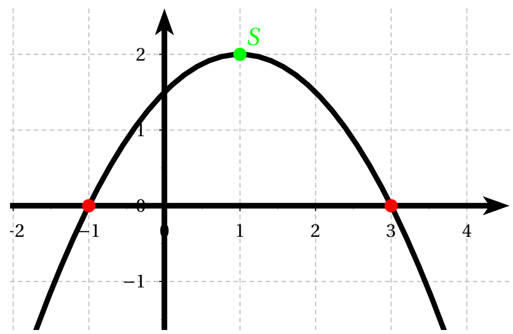
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

Tracé de la parabole :



Exercice 8 1. On trace la parabole P :

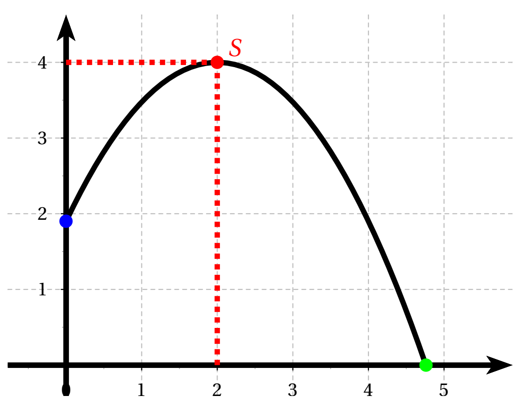
- qui coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -1$ et en $x_2 = 3$.
- dont le sommet est le point $S(1;2)$.



Remarque : Il est difficile de faire un tracé hyper précis avec si peu d'informations. L'élève intéressé peut essayer de prouver – en faisant un bel effort – que $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$. Auquel cas, il pourra faire un tableau de valeurs et obtenir une courbe presque aussi parfaite que celle dessinée ci-dessus avec l'ordinateur.

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Comme P est vers le bas, a est du signe $\ominus$.
   - Comme P coupe l'axe des abscisses en deux points, il y a deux racines et Δ est du signe $\oplus$.

Exercice 9 La trajectoire de la balle en fonction du temps est la parabole $P : y = -0,525t^2 + 2,1t + 1,9$, tracée ci-dessous :



1. Clément commence sa passe à la hauteur

$$h(0) = -0,525 \times 0 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9 \text{ mètres.}$$

   Cela correspond au point bleu sur la figure.

2. La hauteur maximale de la balle est l'ordonnée du sommet S de la parabole, en rouge sur la figure.

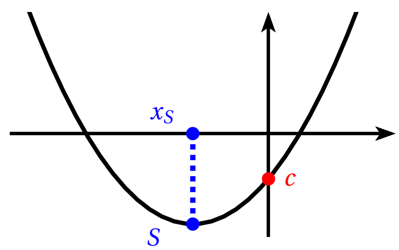
- $a=-0,525$, $b=2,1$, $c=1,9$.
- On calcule avec la formule :
$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{2,1}{2\times(-0,525)}=\frac{-2,1}{-1,05}=2.$$
  On en déduit
$$y_S=-0,525\times 2^2+2,1\times 2+1,9=4,$$
  et donc la hauteur maximale de la balle est de 4 mètres.

3. Pour déterminer le temps de vol de la balle, on cherche à quel moment elle retombe au sol (point vert sur la figure). On résout donc l'équation
$$-0,525t^2+2,1t+1,9=0.$$
   - $\Delta=2,1^2-4\times(-0,525)\times 1,9=8,4$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :
$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2,1-\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)}\approx 4,76,$$
$$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2,1+\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)}\approx -0,76.$$

   La deuxième solution est impossible, car le temps cherché est positif.

   Conclusion : la balle retombe au sol après 4,76 secondes environ.

Exercice 10 On a tracé une parabole $P : y=ax^2+bx+c$.



1. - $a>0$, car P est vers la haut.
   - Si $x=0$, alors $y=a\times 0^2+b\times 0+c=c$, donc la P passe par le point de coordonnées $(0;c)$ – autrement dit, elle coupe l'axe des ordonnées en c.
     Par lecture graphique, on obtient donc $c<0$.
   - Il y a deux racines, car P coupe l'axe des abscisses deux fois. On a donc $\Delta>0$.
2. D'après le cours, $x_S=-\frac{b}{2a}$, donc
$$x_S\times 2a=-\frac{b}{\cancel{2a}}\times\cancel{2a}$$
$$x_S\times 2a=-b$$
$$-x_S\times 2a=b.$$

   On sait que $x_S<0$ et $a>0$, donc $b=-\underbrace{x_S}_{\ominus}\times\underbrace{2a}_{\oplus}$ est du signe $\oplus$: $b>0$.

Exercice 11 Soit $P : y=ax^2+bx+c$ une parabole et S son sommet. On sait que $x_S=-\frac{b}{2a}$, donc
$$y_S=a\times\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\cancel{a}\times\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}}-\frac{b^2\times 2}{2a\times 2}+\frac{c\times 4a}{1\times 4a}$$
$$=\frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}.$$

Exercice 12 1. Le coût de fabrication des x objets est
$$C(x)=x^2+230x+325.$$

Chaque objet est vendu 300 €, donc la recette issue de la vente des x objets est

$$R(x) = 300x.$$

On en déduit que le bénéfice est

$$B(x) = \text{Recette} - \text{Coût} = R(x) - C(x) = 300x - \left(x^2 + 230x + 325\right) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325.$$

2. Le bénéfice est une expression du second degré, avec $a < 0$. Il est donc représenté par une parabole orientée vers le bas. Maximiser le bénéfice revient donc à trouver le (l'abscisse du) sommet de cette parabole :
   - $a = -1$, $b = 70$, $c = -325$.
   - $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2\times(-1)} = \frac{-70}{-2} = 35$.

   Conclusion : le bénéfice est maximal lorsqu'on produit et vend 35 objets.

   Remarque : Le bénéfice maximal est
   $$-35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900 \text{ €}.$$

Exercice 13 1. On résout l'équation :

$$\begin{aligned}
& & x^3 &= 2x \\
&\iff & x^3 - 2x &= 0 \\
&\iff & x\left(x^2 - 2\right) &= 0 \\
&\iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2 &= 0 \\
&\iff & x^2 &= 2 \\
&\iff & x &= \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a trois solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}.$$

2. (a) Pour démontrer l'égalité, on développe et on réduit le membre de droite : pour tout nombre x,

$$\begin{aligned}
(x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right) &= x \times x^2 + x \times 3x + x \times (-4) + 1 \times x^2 + 1 \times 3x + 1 \times (-4) \\
&= x^3 + 3x^2 - 4x + x^2 + 3x - 4 \\
&= x^3 + 4x^2 - x - 4.
\end{aligned}$$

Conclusion : on a bien
$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right).$$

(b) On utilise la factorisation de la question 2.(a) pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
& & x^3 + 4x^2 - x - 4 &= 0 \\
&\iff & (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right) &= 0 \\
&\iff & x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x - 4 &= 0
\end{aligned}$$

On résout chaque équation séparément :
$$x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

L'autre équation est du second degré, on utilise le discriminant :

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

- $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$.
- $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.

- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-3-5}{2} = -4,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Conclusion : l'équation $x^3+4x^2-x-4=0$ a trois solutions :

$$\mathscr{S} = \{-1;-4;1\}.$$

2 Probabilités

Exercice 14 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectif :

	Abonnés au soir	Pas abonnés au soir	Total
Abonnés au matin	50	20	70
Pas abonnés au matin	50	160	210
Total	100	180	280

2. (a) $P(S) = \frac{100}{280} = \frac{5}{14}$ et $P\left(\overline{M}\right) = \frac{210}{280} = \frac{3}{7}$.

   (b) - L'événement « le pensionnaire est abonné aux deux journaux » s'écrit $S \cap M$[4]. On a
   $$P(S\cap M) = \frac{50}{280} = \frac{5}{28}.$$
   - L'événement « le pensionnaire est abonné à au moins un journal » s'écrit $S \cup M$[5]. Il y a plusieurs façons de dénombrer les cas favorables à cet événement :
     - ajouter les pensionnaires qui sont abonnés au *Soir* et ceux qui sont abonnés au *Matin*, puis retrancher ceux qui sont abonnés aux deux journaux (sinon ils sont comptés deux fois) : $100+70-50=120$.
     - ajouter ceux qui ne sont abonnés qu'au *Soir*, ceux qui ne sont abonnés qu'au *Matin*, et ceux qui sont abonnés aux deux journaux : $50+20+50=120$.
     - retrancher l'effectif de pensionnaires qui ne sont abonnés à aucun journal de l'effectif total : $280-160=120$.

     Quelle que soit la méthode de calcul, on obtient :
   $$P(S\cup M) = \frac{120}{280} = \frac{3}{7}.$$

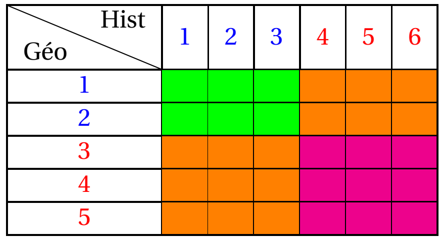
   (c) On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. La probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* est[6]
   $$P_M(S) = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}.$$

Exercice 15 1. Le candidat connaît 3 des questions d'histoire, donc $P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; et il connaît 2 des 5 questions de géographie, donc $P(G) = \frac{2}{5}$.

2. Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

   On a colorié les cases de trois couleurs :
   - en vert : le candidat connaît les deux questions ;
   - en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
   - en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

4. On rappelle que $\cap$ se lit « inter » et correspond au mot français « ET ».
5. On rappelle que $\cup$ se lit « union » et correspond au mot français « OU ».
6. On utilise la notation des probabilités conditionnelles, qui sera vue dans le paragraphe 2 du cours.



6 des 30 cases sont coloriées en vert, donc la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est

$$P(G\cap H)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}.$$

3. $6+15=21$ des 30 cases sont coloriées en vert ou en orange, donc la probabilité que le candidat connaisse au moins l'une des deux questions est

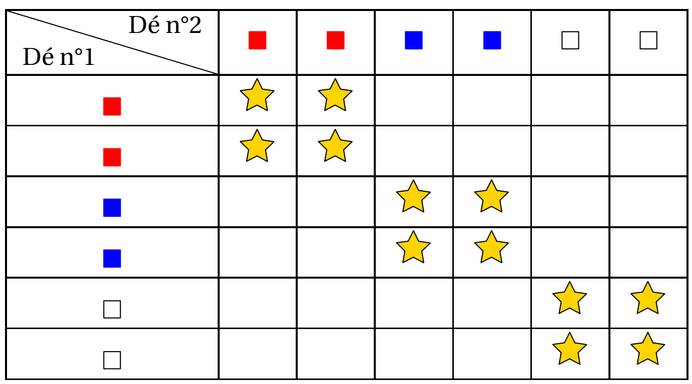
$$P(G\cup H)=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}.$$

Remarque : On peut aussi obtenir 21 avec le calcul $30-9$, ou utiliser la formule du cours de 2^{de} :

$$P(G\cup H)=P(G)+P(H)-P(G\cap H)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}-\frac{2}{10}=\frac{7}{10}.$$

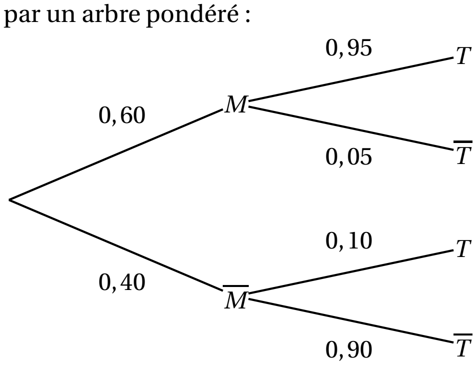
Exercice 16 On utilise un tableau à double entrée. On place un symbole dans chacune des cases favorable à l'événement

A : « les deux dés montrent la même couleur ».



Il y a 12 cases favorables à A sur 36, donc $P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

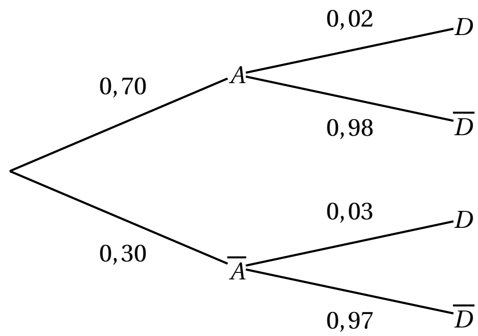
Exercice 17 1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. D'après l'arbre :
   - $P(M\cap T)=0,60\times 0,95=0,57$;
   - D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned}P(T)&=P(M\cap T)+P\left(\overline{M}\cap T\right)\\&=0,60\times 0,95+0,40\times 0,10=0,61.\end{aligned}$$

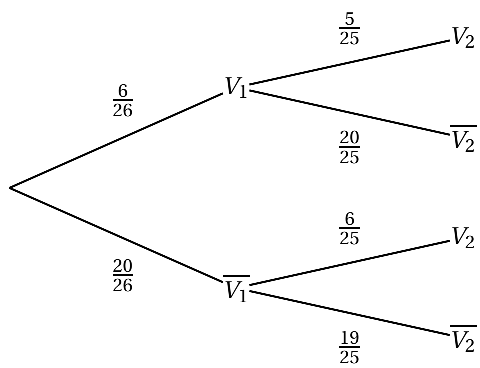
Exercice 18 1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la pièce ait un défaut est :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P\left(\overline{A} \cap D\right) \\ &= 0,70 \times 0,02 + 0,30 \times 0,03 = 0,023. \end{aligned}$$

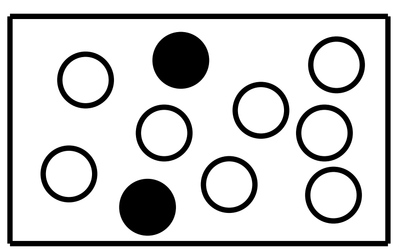
Exercice 19 Rappelons pour commencer que 6 des 26 lettres de l'alphabet sont des voyelles : A – E – I – O – U – Y.
Venons-en à l'arbre pondéré. Notons que si une première voyelle a été tirée, il reste 25 jetons dans le sac, parmi lesquels ne figurent plus que 5 voyelles. Cela explique le $\frac{5}{25}$ ci-dessous ; et avec un raisonnement similaire, on justifie tous les nombres sur les branches de droite.



L'événement A : « on tire une voyelle et une consonne (dans n'importe quel ordre) » est réalisé quand on prend l'un des deux chemins $V_1 \cap \overline{V_2}$, ou bien $\overline{V_1} \cap V_2$, donc

$$P(A) = P\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) + P\left(\overline{V_1} \cap V_2\right) = \frac{6}{26} \times \frac{20}{25} + \frac{20}{26} \times \frac{6}{25} = \frac{120}{650} + \frac{120}{650} = \frac{240}{650} = \frac{24}{65}.$$

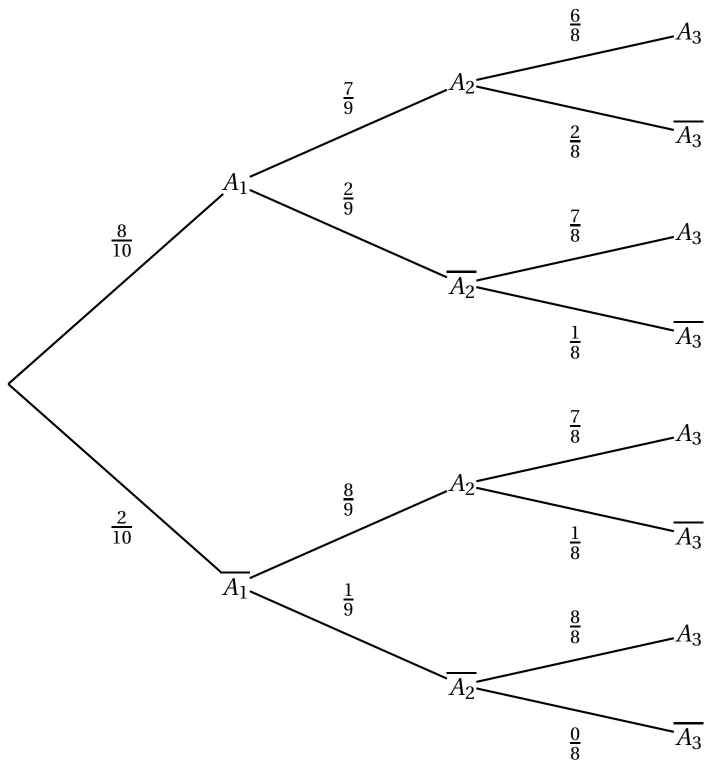
Exercice 20 Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.



Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'événement

$$A_i : \text{« la } i\text{-ème boule tirée est blanche ».}$$

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. Le contraire de

$$B : \text{« on a tiré au moins une boule noire »}$$

est

$$\overline{B} : \text{« on n'a tiré que des boules blanches ».}$$

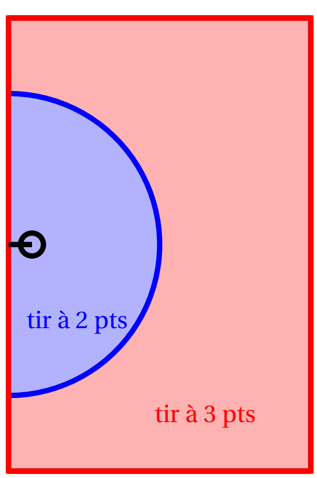
D'après l'arbre (chemin tout en haut)

$$P\left(\overline{B}\right) = \frac{\cancel{8}}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{\cancel{8}} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15},$$

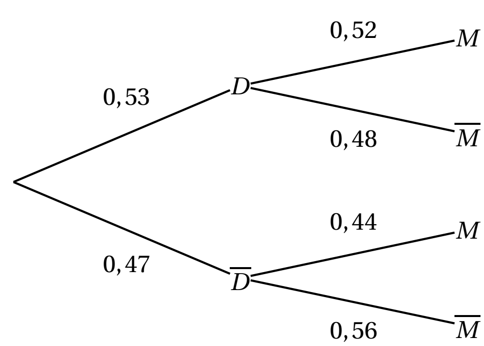
donc

$$P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Exercice 21 1. On rappelle les zones de tir à 2 et 3 points :



On représente la situation par un arbre pondéré :



Remarque : $\overline{D}$ signifie « Stephen Curry tire à 3 points ».

2. La probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque est

$$P(D \cap M) = 0,53 \times 0,52 = 0,2756.$$

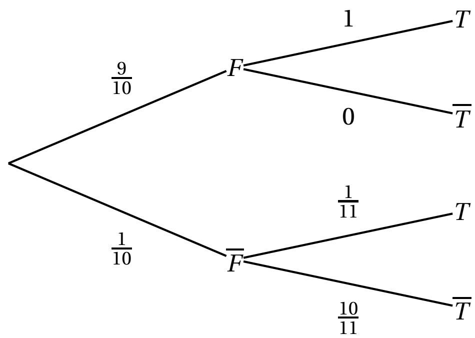
3. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que Stephen Curry marque est :

$$P(M) = P(D \cap M) + P\left(\overline{D} \cap M\right)$$
$$= 0,53 \times 0,52 + 0,47 \times 0,44 = 0,4824.$$

4. Stephen Curry a marqué. La probabilité qu'il ait tiré à deux points est

$$P_M(D) = \frac{P(M \cap D)}{P(M)} = \frac{0{,}2756}{0{,}4824} \approx 0,57.$$

Exercice 22 1. On commence par faire un arbre pondéré. Comme un appareil en parfait état de fonctionnement est toujours accepté à l'issue du test, il y a un 1 et un 0 sur les branches en haut à droite.



On en vient au calcul des probabilités demandé par l'énoncé :

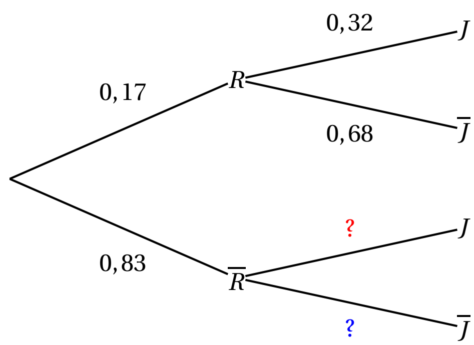
- $P\left(\overline{F} \cap T\right) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$;
- d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(F \cap T) + P\left(\overline{F} \cap T\right) = \frac{9}{10} \times 1 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{9}{10} + \frac{1}{110} = \frac{99}{110} + \frac{1}{110} = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}.$$

2. Sachant qu'un appareil a été accepté à l'issue du test, la probabilité qu'il ne fonctionne pas parfaitement est

$$P_T\left(\overline{F}\right) = \frac{P\left(T \cap \overline{F}\right)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{110}}{\frac{10}{11}} = \frac{1}{110} \times \frac{11}{10} = \frac{11}{1100} = \frac{1}{100}.$$

Exercice 23 1. On construit l'arbre et on le complète à partir des données de l'énoncé :



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0{,}0544$.
3. L'énoncé donne $P(J) = 0,11$. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(J) &= P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right)\\
0,11 &= 0{,}0544 + P\left(\overline{R} \cap J\right)\\
0,11 - 0{,}0544 &= P\left(\overline{R} \cap J\right)\\
0{,}0556 &= P\left(\overline{R} \cap J\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $P\left(\overline{R} \cap J\right) = 0{,}0556$.

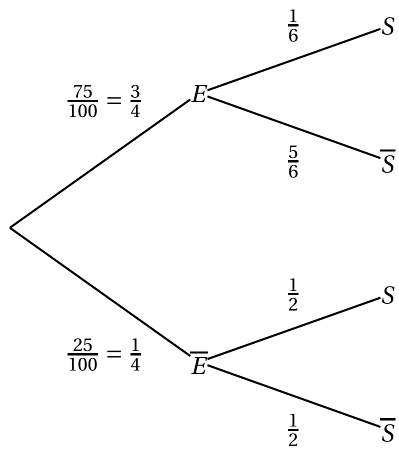
4. La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est égale à la probabilité qu'un utilisateur non régulier soit un jeune. Cette proportion vaut donc

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P\left(\overline{R} \cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{0{,}0556}{0{,}83} \approx 0{,}0670.$$

C'est le point d'interrogation rouge de l'arbre pondéré du début.

Exercice 24 Il faut prendre l'initiative de nommer des événements et de construire un arbre pondéré. On pose ainsi :

- E : « le dé est équilibré »,
- $\overline{E}$: « le dé est pipé »,
- S : « on obtient 6 ».



La probabilité qu'il faut calculer est $P_S\left(\overline{E}\right)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_S\left(\overline{E}\right) = \frac{P\left(\overline{E} \cap S\right)}{P(S)}.$$

Or $P\left(\overline{E} \cap S\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ et $P(S) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (formule des probabilités totales), donc :

$$P_S\left(\overline{E}\right) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 25 Il faut calculer $P_B\left(\overline{A_1}\right)$. On utilise la formule du cours :

$$P_B\left(\overline{A_1}\right) = \frac{P\left(\overline{A_1} \cap B\right)}{P(B)}.$$

L'événement $\overline{A_1} \cap B$ est égal à $\overline{A_1}$, puisque si la première boule tirée est noire, alors on en a au moins une noire. On a donc $P\left(\overline{A_1} \cap B\right) = P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{2}{10}$, puis finalement[7] :

$$P_B\left(\overline{A_1}\right) = \frac{P\left(\overline{A_1} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{2}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}.$$

Exercice 26

- Les nombres pairs sont 2, 4, 6, ..., 100. Il y en a 50, donc

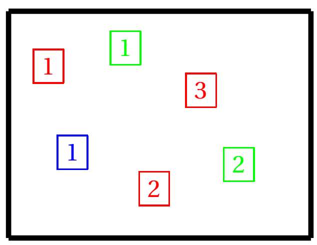
$$P(A) = \frac{50}{100} = 0{,}5.$$

7. On rappelle que $P(B)$ a été calculé dans l'exercice 20.

- Les multiples de 5 sont
$$5=5\times 1,\ 10=5\times 2,\ 15=5\times 3,\ \cdots,\ 100=5\times 20.$$
Il y en a 20, donc
$$P(B)=\frac{20}{100}=0,2.$$
- L'événement $A\cap B$ s'écrit « le nombre est pair et multiple de 5 », ou de façon plus simple (et plus explicite) « le nombre est multiple de 10 ». Or les multiples de 10 sont 10, 20, 30, ..., 100, et comme il y en a 10,
$$P(A\cap B)=\frac{10}{100}=0,1.$$
- On calcule le produit
$$P(A)\times P(B)=0,5\times 0,2=0,1.$$
On constate que
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0,1,$$
donc A et B sont indépendants.

Remarque : La raison profonde de l'indépendance de A et B est que 100 est un multiple de 2 et de 5 d'une part, et que 2 et 5 sont premiers entre eux d'autre part.

Exercice 27



- D'un côté $P(R)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $P(U)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, donc
$$P(R)\times P(U)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$
D'un autre côté, $R\cap U$ est réalisé quand on tire le jeton $\boxed{1}$, donc
$$P(R\cap U)=\frac{1}{6}.$$
Conclusion : $P(R\cap U)\neq P(R)\times P(U)$, donc les événements R et U ne sont pas indépendants.
- D'un côté $P(R)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, donc
$$P(R)\times P(U)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$
D'un autre côté, $R\cap D$ est réalisé quand on tire le jeton $\boxed{2}$, donc
$$P(R\cap D)=\frac{1}{6}.$$
Conclusion : $P(R\cap D)=P(R)\times P(D)$, donc les événements R et U sont indépendants.

Exercice 28 Les trois questions sont indépendantes.

1. D'après une formule du cours de 2^{de},
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,4+0,6-0,9=0,1.$$
D'un côté $P(A)\times P(B)=0,4\times 0,6=0,24$, de l'autre $P(A\cap B)=0,1$; donc $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$.
Conclusion : A et B ne sont pas indépendants.

2. D'après la formule du cours de 2^de déjà utilisée dans la question 1 et la propriété d'indépendance :

$$\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A)\times P(B) && \text{(on utilise l'indépendance)} \\
0,7 &= 0,4+P(B)-0,4\times P(B) \\
0,7 &= 0,4+x-0,4x && \text{(on pose } x=P(B)\text{)} \\
0,7 &= 0,4+0,6x \\
0,7-0,4 &= 0,6x && \text{(on résout l'équation)} \\
\frac{0,3}{0,6} &= \frac{\cancel{0,6}x}{\cancel{0,6}} \\
0,5 &= x.
\end{aligned}$$

Conclusion : $P(B)=0,5$.

3. Un événement A est indépendant de lui-même si, et seulement si

$$P(A\cap A)=P(A)\times P(A). \tag{3}$$

Or $A\cap A=A$, donc $P(A\cap A)=P(A)$, et l'égalité (3) ci-dessus se réécrit

$$P(A)=(P(A))^2.$$

On pose $x=P(A)$, on est ramené à résoudre l'équation $x=x^2$:

$$x=x^2 \iff x-x^2=0 \iff x(1-x)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=1.$$

Conclusion : A est indépendant de lui-même lorsque $P(A)=0$ (A est alors un événement impossible) ou lorsque $P(A)=1$ (A est alors un événement certain).

3 Suites numériques

Exercice 29 1. $u_n=0,5n-3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$u_0=0,5\times0-3$ $u_0=-3.$	$u_1=0,5\times1-3$ $u_1=-2,5.$	$u_2=0,5\times2-3$ $u_2=-2.$	$u_3=0,5\times3-3$ $u_3=-1,5.$

2. $v_n=1-\frac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$v_1=1-\dfrac{1}{1}$ $v_1=0.$	$v_2=1-\dfrac{1}{2}$ $v_2=\dfrac{1}{2}.$	$v_3=1-\dfrac{1}{3}$ $v_3=\dfrac{2}{3}.$	$v_4=1-\dfrac{1}{4}$ $v_4=\dfrac{3}{4}.$

3. $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 10-u_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

Avec $n=0$: $u_{0+1}=10-u_0$ $u_1=10-2$ $u_1=8.$	Avec $n=1$: $u_{1+1}=10-u_1$ $u_2=10-8$ $u_2=2.$	Avec $n=2$: $u_{2+1}=10-u_2$ $u_3=10-2$ $u_3=8.$	Avec $n=3$: $u_{3+1}=10-u_3$ $u_4=10-8$ $u_4=2.$

On obtient la suite périodique $(2;8;2;8;2;\cdots)$.

4. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = 4u_n.$$

Avec $n = 0$:
$$\begin{aligned} u_{0+1} &= 4u_0 \\ u_1 &= 4\times 1 \\ u_1 &= 4. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:
$$\begin{aligned} u_{1+1} &= 4u_1 \\ u_2 &= 4\times 4 \\ u_2 &= 16. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:
$$\begin{aligned} u_{2+1} &= 4u_2 \\ u_3 &= 4\times 16 \\ u_3 &= 64. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:
$$\begin{aligned} u_{3+1} &= 4u_3 \\ u_4 &= 4\times 64 \\ u_4 &= 256. \end{aligned}$$

5. $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avec $n = 0$:
$$\begin{aligned} v_{0+1} &= \frac{v_0}{v_0+2} \\ v_1 &= \frac{1}{1+2} \\ v_1 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:
$$\begin{aligned} v_{1+1} &= \frac{v_1}{v_1+2} \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+2} \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{6}{3}} \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} \\ v_2 &= \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{7} \\ v_2 &= \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:
$$\begin{aligned} v_{2+1} &= \frac{v_2}{v_2+2} \\ v_3 &= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+2} \\ v_3 &= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+\frac{14}{7}} \\ v_3 &= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{15}{7}} \\ v_3 &= \frac{1}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{15} \\ v_3 &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:
$$\begin{aligned} v_{3+1} &= \frac{v_3}{v_3+2} \\ v_4 &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+2} \\ v_4 &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{30}{15}} \\ v_4 &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{31}{15}} \\ v_4 &= \frac{1}{\cancel{15}}\times\frac{\cancel{15}}{31} \\ v_4 &= \frac{1}{31}. \end{aligned}$$

6. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, où $f(x) = (x+1)^2$.
Autrement dit, $u_{n+1} = (u_n+1)^2$.

Avec $n = 0$:
$$\begin{aligned} u_{0+1} &= (u_0+1)^2 \\ u_1 &= (0+1)^2 \\ u_1 &= 1. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:
$$\begin{aligned} u_{1+1} &= (u_1+1)^2 \\ u_2 &= (1+1)^2 \\ u_2 &= 4. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:
$$\begin{aligned} u_{2+1} &= (u_2+1)^2 \\ u_3 &= (4+1)^2 \\ u_3 &= 25. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:
$$\begin{aligned} u_{3+1} &= (u_2+1)^2 \\ u_4 &= (25+1)^2 \\ u_4 &= 676. \end{aligned}$$

7. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
⚠Il y a un gros risque de décalage dans les indices !!

Avec $n = 0$:
$$\begin{aligned} u_{0+1} &= u_0 + 0 - 3 \\ u_1 &= 4 + 0 - 3 \\ u_1 &= 1. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:
$$\begin{aligned} u_{1+1} &= u_1 + 1 - 3 \\ u_2 &= 1 + 1 - 3 \\ u_2 &= -1. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:
$$\begin{aligned} u_{2+1} &= u_2 + 2 - 3 \\ u_3 &= -1 + 2 - 3 \\ u_3 &= -2. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:
$$\begin{aligned} u_{3+1} &= u_3 + 3 - 3 \\ u_4 &= -2 + 3 - 3 \\ u_4 &= -2. \end{aligned}$$

8. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $f(x) = x^2 - 2x$.
Autrement dit, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n$.

Avec $n=0$:

$$u_{0+1}=u_0^2-2u_0$$
$$u_1=2^2-2\times 2$$
$$u_1=0.$$

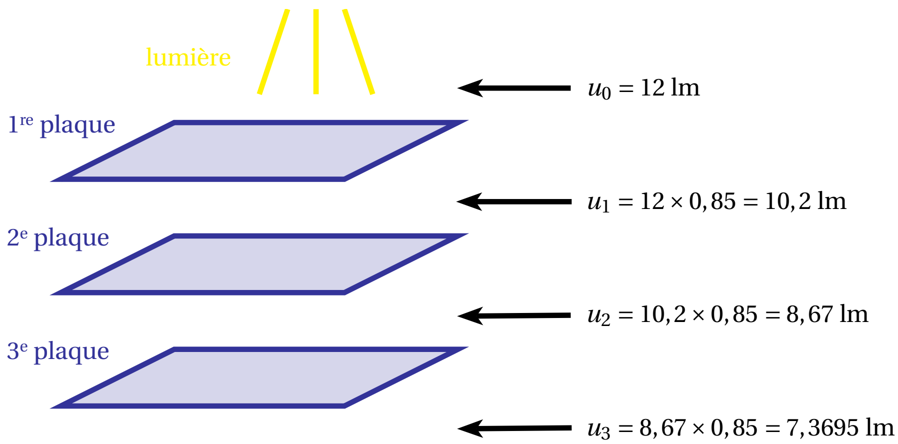
Avec $n=1$:

$$u_{1+1}=u_1^2-2u_1$$
$$u_2=0^2-2\times 0$$
$$u_2=0.$$

$$u_{2+1}=u_2^2-2u_2$$
$$u_3=0^2-2\times 0$$
$$u_3=0.$$

La suite est constante égale à 0 à partir du rang 1 : $(2;0;0;0;\cdots)$.

Exercice 30 1. 100 % − 15 % = 85 % = 0,85, donc pour diminuer un nombre de 15 %, il faut le multiplier par 0,85.
Ainsi, dans le schéma ci-dessous, l'intensité lumineuse est-elle multipliée par 0,85 à chaque nouvelle plaque :



Remarque : Le lumen est une unité de mesure du flux lumineux, utilisée notamment pour indiquer la capacité d'éclairement des ampoules électriques.

2. La relation de récurrence est
$$u_{n+1}=0,85\times u_n \text{ pour tout entier naturel } n.$$

3. L'intensité lumineuse est divisée par 10 lorsqu'on descend en dessous de $12\div 10=1,2$ lm. Pour savoir le nombre minimal de plaques à superposer pour qu'il en soit ainsi, on rentre les valeurs initiales 0 et 12 dans la colonne B, puis on rentre les formules ci-dessous dans la colonne C, que l'on étire vers la droite jusqu'à obtenir une intensité lumineuse inférieure à 1,2.

	A	B	C	···	P	Q
1	Nb de plaques	0	=B1+1	···	14	15
2	Intensité (lm)	12	=B2*0,85	···	1,23	1,05

Conclusion : il faut superposer au moins 15 plaques pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 10.

Exercice 31 On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. On programme une machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament ;
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

1. $w_0=10$. C'est la quantité injectée à l'instant 0.

D'une minute à la suivante, 20% du médicament présent dans le sang est éliminé (multiplication par 0,80), puis on injecte 1 mL, donc :

$$w_1=0,8\times w_0+1=0,8\times 10+1=9$$
$$w_2=0,8\times w_1+1=0,8\times 9+1=8,2$$
$$w_3=0,8\times w_2+1=0,8\times 8,2+1=7,56.$$

2. D'une manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = 0{,}8 \times w_n + 1.$$

3. On entre :

	A	B	C	⋯	AO	AP
1	Temps (min)	0	=B1+1	⋯	39	40
2	Qtité de médic. (mL)	10	=B2*0,8+1	⋯	5,0006⋯	5,0005⋯

Sur le long terme, la quantité de médicament se rapproche d'une valeur limite : 5 mL (elle s'en rapproche très rapidement, car elle est presque stable au bout de 30 min).

Exercice 32 Le 01/01/2020, on emprunte 10 000 € à la banque au taux d'intérêt mensuel de 2 %. À chaque fin de mois on rembourse 300 €.

Comment ça marche?... Le 01/01/2020 on emprunte 10 000 € au taux d'intérêt mensuel de 2 %, donc à la fin du mois de janvier 2020 la somme à rembourser est passée à

$$1{,}02 \times 10000 = 10200 \text{ €}.$$

À ce moment on rembourse 300 €, donc le 01/02/2020 il reste à rembourser

$$10200 - 300 = 9900 \text{ €}.$$

On note u_n la somme à rembourser le 1er jour du ne mois (en convenant que janvier 2020 est le mois 0, février 2020 le mois 1, etc.). On a donc $u_0 = 10000$ et $u_1 = 9900$.

1. On complète le schéma ci-dessous pour calculer les termes u_1 et u_2. Les sommes écrites dans chaque case sont les sommes restant à rembourser aux dates indiquées.

$$\boxed{10000} \xrightarrow{\times 1{,}02} \boxed{10200} \xrightarrow{-\ 300} \boxed{9900} \xrightarrow{\times 1{,}02} \boxed{10098} \xrightarrow{-\ 300} \boxed{9798}$$

u_0		u_1		u_2
01/01/20	31/01/20	01/02/20	28/02/20	01/03/20

Pour passer d'un terme de la suite au terme suivant, on multiplie par 1,02 (ajout des intérêts) puis on retranche 300 (remboursement mensuel). On peut donc continuer plus rapidement :

$$u_3 = 9798 \times 1{,}02 - 300 = 9693{,}96 \qquad \text{(somme à rembourser le 01/04/20)},$$
$$u_4 = 9693{,}96 \times 1{,}02 - 300 = 9587{,}84 \qquad \text{(somme à rembourser le 01/05/20)}.$$

Et plus généralement, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \times 1{,}02 - 300.$$

2. On entre les formules

=B1+1

et

=B2*1,02-300

dans les cellules C1 et C2, puis on étire vers la droite :

	A	B	C	⋯
1	Nombre de mois	0	=B1+1	⋯
2	Reste à rembourser	10000	=B2*1,02-300	⋯

On continue jusqu'à ce que la somme à rembourser soit nulle. En réalité, au bout d'un moment, elle est négative :

	A	⋯	BD	BE	BF
1	Nombre de mois	⋯	54	55	56
2	Reste à rembourser	⋯	432,69	141,35	−155,83

À la fin du 55e fois, il reste 141,35 € à rembourser ; et si on rembourse 300 € au début du 56e mois, la banque nous devra 155,83 €.

Conclusion :

- le crédit dure 56 mois ;
- on rembourse 56 fois 300 €, mais à la fin on a dépassé de 155,83 € ce que l'on devait à la banque ;
- la somme totale remboursée est donc
$$56 \times 300 - 155,83 = 16664,17 \text{ €} ;$$
- le « coût du crédit » est la différence entre ce que l'on a remboursé et ce que la banque nous a prêté :

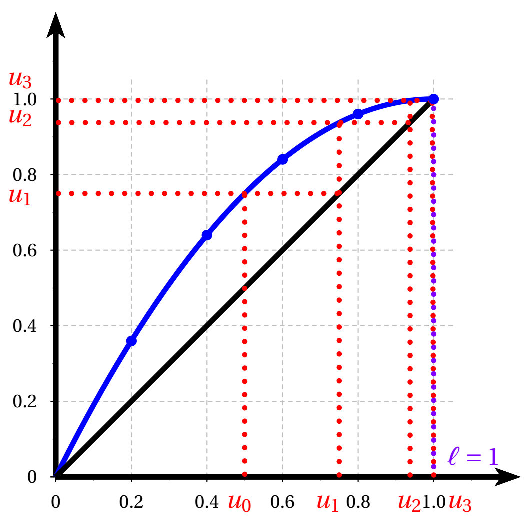
$$\text{Coût du crédit} = \text{Somme remboursée} - \text{Somme empruntée} = 16664,17 - 10000 = 6664,17 \text{ €}.$$

Exercice 33 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0,25$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. et 2.

La droite d'équation $y = x$ est tracée en noir.
La fonction f est du second degré, donc sa courbe représentative est une parabole. On la trace (en bleu) à partir d'un tableau de valeurs :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1



Parallèlement au graphique, calculons les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 0,5$$
$$u_1 = f(u_0) = f(0,5) = -0,5^2 + 2 \times 0,5 = 0,75$$
$$u_2 = f(u_1) = f(0,75) = -0,75^2 + 2 \times 0,75 = 0,9375$$
$$u_3 = f(u_2) = f(0,9375) = -0,9375^2 + 2 \times 0,9375 \approx 0,996$$

($u_3 \approx 0,996$ et $\ell = 1$ se confondent presque.)

3. Un escalier se dessine, qui monte vers le point de coordonnées $(1;1)$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers la valeur limite $\ell = 1$. On note :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 34 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,5u_n + 1.$$

1.

Avec $n = 0$:
$$u_{0+1} = -0,5 \times u_0 + 1$$
$$u_1 = -0,5 \times 3 + 1$$
$$u_1 = -0,5.$$

Avec $n = 1$:
$$u_{1+1} = -0,5 \times u_1 + 1$$
$$u_2 = -0,5 \times (-0,5) + 1$$
$$u_2 = 1,25.$$

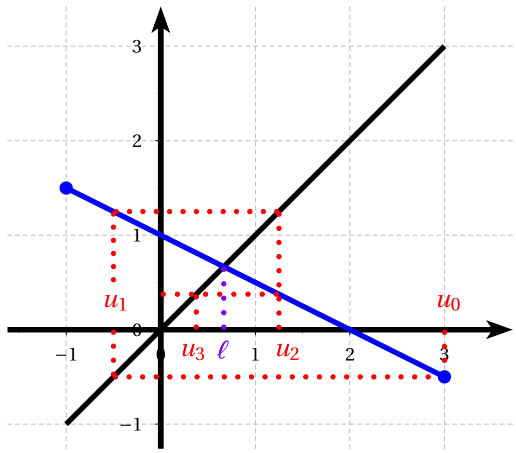
Avec $n = 2$:
$$u_{2+1} = -0,5 \times u_2 + 1$$
$$u_3 = -0,5 \times 1,25 + 1$$
$$u_3 = 0,375.$$

2. et 3. On trace la droite d'équation $y = x$ (en noir), puis la droite d'équation $y = -0,5x + 1$ grâce à un tableau de valeurs (en bleu) :

x	-1	3
y	$1,5$	$-0,5$

Calculs correspondants :

$$-0,5\times(-1)+3=1,5$$
$$-0,5\times 3+3=-0,5$$



4. On voit se dessiner une spirale, qui s'enroule autour du point d'intersection des deux droites. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble donc converger vers une limite ℓ, abscisse de ce point d'intersection. On obtient sa valeur en résolvant l'équation :

$$x=-0,5x+1 \iff x+0,5x=1 \iff 1,5x=1 \iff x=\frac{1\times 2}{1,5\times 2}=\frac{2}{3}.$$

Conclusion : $\ell=\frac{2}{3}$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{2}{3}.$$

Exercice 35 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0=3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=1,5u_n-1$.

1.

Avec $n=0$:

$$u_{0+1}=1,5\times u_0-1$$
$$u_1=1,5\times 3-1$$
$$u_1=3,5.$$

Avec $n=1$:

$$u_{1+1}=1,5\times u_1-1$$
$$u_2=1,5\times 3,5-1$$
$$u_2=4,25.$$

Avec $n=2$:

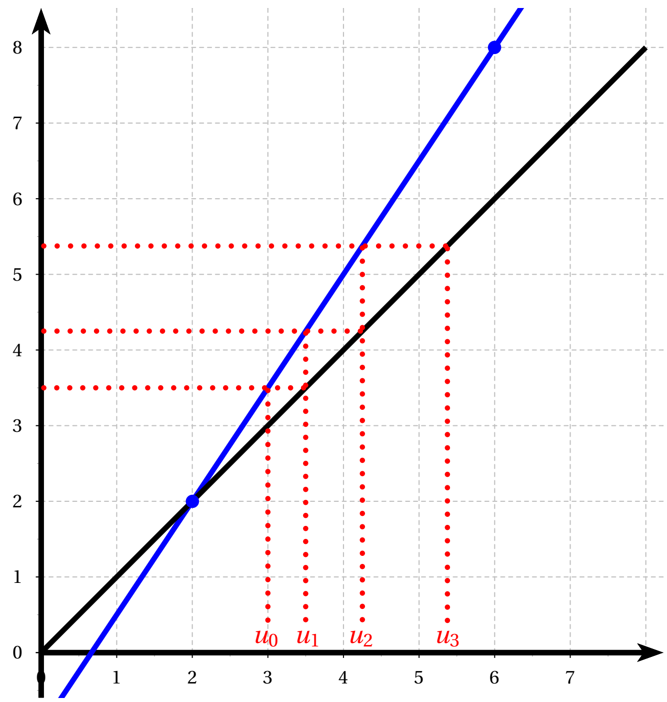
$$u_{2+1}=1,5\times u_2-1$$
$$u_3=1,5\times 4,25-1$$
$$u_3=5,375.$$

2. et 3. On trace la droite d'équation $y=x$ (en noir), puis la droite d'équation $y=1,5x-1$ grâce à un tableau de valeurs (en bleu) :

x	2	6
y	2	8

Calculs correspondants :

$$1,5\times 2-1=2$$
$$1,5\times 6-1=8$$



4. On voit se dessiner un escalier, qui « monte vers l'infini » :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 36 1. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2n+5.$$

On a donc

$$u_{n+1} = 2(n+1)+5 = 2n+2+5 = 2n+7.$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = n^2+3n-5.$$

On a donc

$$u_{n+1} = (n+1)^2+3(n+1)-5 = n^2+2n+1+3n+3-5 = n^2+5n-1.$$

3. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}.$$

On a donc

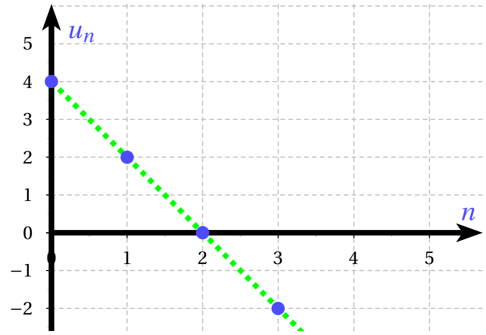
$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+2-1}{n+1+1} = \frac{2n+1}{n+2}.$$

Exercice 37 1. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -2(n+1)+4 = -2n-2+4 = -2n+2$, donc

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (-2n+2)-(-2n+4) \\ &= -2n+2+2n-4 \\ &= \underbrace{-2}_{\ominus}. \end{aligned}$$

Conclusion : $u_{n+1}-u_n \leq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

C'est bien naturel, puisque les points sont alignés sur la droite d'équation $y = -2x+4$ (tracée en pointillés verts), et que cette droite « descend » (son coefficient directeur $(a=-2)$ est négatif).

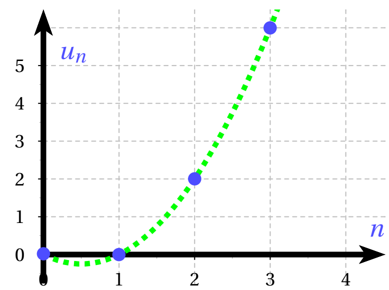


2. Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(n^2 + n\right) - \left(n^2 - n\right) \\ &= n^2 + n - n^2 + n \\ &= \underbrace{2n}_{\oplus}. \end{aligned}$$

Conclusion : $v_{n+1} - v_n \geq 0$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

C'est à nouveau visible sur la représentation graphique de la suite (points en bleu sur la parabole d'équation $y = x^2 - x$, tracée en pointillés verts).



Exercice 38 Pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} - x_n = (x_n + n) - x_n = x_n + n - x_n = \underbrace{n}_{\oplus}.$$

$x_{n+1} - x_n \geq 0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 39 La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_n = \frac{n}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+1)+2} = \frac{n+1}{n+3}$, donc

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} \\ &= \frac{(n+1)\times(n+2)}{(n+3)\times(n+2)} - \frac{n\times(n+3)}{(n+2)\times(n+3)} \\ &= \frac{n^2+2n+n+2}{(n+2)(n+3)} - \frac{n^2+3n}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^2+3n+2-n^2-3n}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

2. Soit n un entier naturel. Les trois nombres 2, $(n+2)$ et $(n+3)$ sont positifs, donc d'après la question précédente,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{\overbrace{2}^{\oplus}}{\underbrace{(n+2)}_{\oplus}\underbrace{(n+3)}_{\oplus}} \geq 0.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Exercice 40 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}\times n}{(n+1)\times n} - \frac{2^n\times(n+1)}{n\times(n+1)}\\
&= \frac{2^n\times 2^1\times n}{n(n+1)} - \frac{2^n\times(n+1)}{n(n+1)} \qquad \left(\text{rappel : } a^n\times a^m = a^{n+m}\right)\\
&= \frac{2^n\times 2n}{n(n+1)} - \frac{2^n\times(n+1)}{n(n+1)}\\
&= \frac{2^n\times(2n-n-1)}{n(n+1)}\\
&= \frac{2^n\times(n-1)}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les nombres 2^n, $(n-1)$, n et $(n+1)$ sont positifs, donc d'après la question précédente,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\overbrace{2^n}^{\oplus}\ \overbrace{(n-1)}^{\oplus}}{\underbrace{n}_{\oplus}\ \underbrace{(n+1)}_{\oplus}} \geq 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

4 Le second degré : signe et factorisation

Dans chaque exercice où on résout une inéquation, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

Exercice 41

1. On résout l'équation :

$$2x-6=0 \iff 2x=6 \iff x=\frac{6}{2}=3$$

$a=2 \oplus \implies +$ à droite :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

2. On résout l'équation :

$$-2x-3=0 \iff -2x=3 \iff x=\frac{3}{-2}=-1{,}5$$

$a=-2 \ominus \implies +$ à gauche :

x	$-\infty$		-1.5		$+\infty$
$-2x-3$		$+$	0	$-$	

3. D'abord on factorise : $x^2-3x = x(x-3)$.

On résout :

$x=0$

rien à résoudre!

$a=1 \oplus$, puisque $x = 1x+0 \implies +$ à droite

$x-3=0 \iff x=3$

$a=1 \oplus$, puisque $x-3 = 1x-3 \implies +$ à droite

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2-3x = x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. D'abord on factorise : $16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2 = (4x+5)(4x-5)$.
   (C'est l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.)

   On résout :

$$4x+5=0 \iff 4x=-5 \iff x=-\frac{5}{4}$$

$a = 4 \oplus \implies +$ à droite

$$4x-5=0 \iff 4x=5 \iff x=\frac{5}{4}$$

$a = 4 \oplus \implies +$ à droite

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$16x^2-25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 42 1. Tableau de signe de $x^2 - 5x + 7$.

- $a = 1$, $b = -5$, $c = 7$;
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3$;
- $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de racine ;
- $a = 1$, a est $\oplus$.

D'après le théorème 1, $x^2 - 5x + 7$ est positif (c.-à-d. du signe de a) partout. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-5x+7		$+$	

2. Tableau de signe de $-x^2 + 6x - 8$.

- $a = -1$, $b = 6$, $c = -8$;
- $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 36 - 32 = 4$;
- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{4}}{2\times(-1)} = \frac{-6-2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{4}}{2\times(-1)} = \frac{-6+2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

- $a = -1$, a est $\ominus$.

D'après le théorème 1, $-x^2+6x-8$ est négatif (c.-à-d. du signe de a), sauf entre les racines 2 et 4. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 43 1. On résout l'inéquation $x^2 \leq -2x+1$.

On transpose :

$$x^2 \leq -2x+1 \iff x^2+2x-1 \leq 0.$$

On construit le tableau de signe de x^2+2x-1 :

- $a=1$, $b=2$, $c=-1$;
- $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times 1\times(-1) = 4+4 = 8$;
- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{8}}{2\times 1} = \frac{-2-\sqrt{4\times 2}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(-1-\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}} = -1-\sqrt{2},$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{8}}{2\times 1} = -1+\sqrt{2}.$$

- $a=1$, a est $\oplus$.

D'après le théorème 1, x^2+2x-1 est positif (c.-à-d. du signe de a), sauf entre les racines $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit les solutions de l'inéquation dans le tableau de signe : $x^2+2x-1 \leq 0$ (c-à-d du signe $\ominus$) lorsque $x \in \left[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right]$ (case centrale du tableau), donc

$$\mathcal{S} = \left[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right].$$

2. On résout l'inéquation $x \leq x^2$.

On transpose :

$$x \leq x^2 \iff x-x^2 \leq 0.$$

On construit le tableau de signe de $x-x^2$:
Ici, il est plus rapide de factoriser pour obtenir les racines que d'utiliser le discriminant.

$$x-x^2=0 \iff x(1-x)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=1.$$

D'après le théorème 1, $x-x^2$ est négatif (c.-à-d. du signe de a, qui vaut -1 puisque $x-x^2 = -1x^2+x$ ⚠), sauf entre les racines 0 et 1. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit les solutions de l'inéquation dans le tableau de signe : $x-x^2 \leq 0$ (c-à-d du signe $\ominus$) lorsque $x \in \left]-\infty;0\right]$ (case de gauche) ou lorsque $x \in \left[1;+\infty\right[$ (case de droite), donc

$$\mathcal{S} = \left]-\infty;0\right] \cup \left[1;+\infty\right[.$$

3. On résout l'inéquation $x^3 > 2x^2+3x$.

On transpose et on factorise (à cause du degré 3) :

$$x^3 > 2x^2+3x \iff x^3-2x^2-3x > 0 \iff x\left(x^2-2x-3\right) > 0.$$

On cherche les racines de x^2-2x-3 :

- $a=1$, $b=-2$, $c=-3$;
- $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times 1\times(-3) = 4+12 = 16$;

- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{2-4}{2} = -1,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3.$$

- $a = 1$, a est $\oplus$.

On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x\left(x^2-2x-3\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les solutions de l'inéquation :

$$\mathscr{S} =]-1;0[\cup]3;+\infty[.$$

Remarque : l'inégalité $x^3-2x^2-3x>0$ est stricte, donc on écarte les valeurs $x=-1$, $x=0$ et $x=3$ de la solution (pour lesquelles x^3-2x^2-3x est égal à 0) – ainsi le crochet est-il ouvert en -1, en 0 et en 3.

Exercice 44 1. On trace $D : y = x-1$ à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs, et la parabole $P : y = x^2-2x-5$ à partir d'un tableau de valeurs symétrique par rapport au sommet :

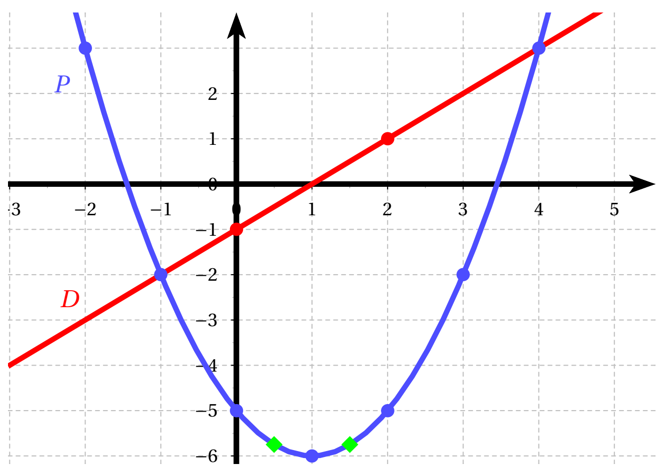
Tracé de D.

x	0	2
y	-1	1

Tracé de P.

- $a=1$, $b=-2$, $c=-5$;
- $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$.

x	-2	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3	4
y	3	-2	-5	$-5,75$	-6	$-5,75$	-5	-2	3



2. Pour étudier les positions relatives de $P : y = x^2-2x-5$ et $D : y = x-1$, on étudie **le signe de la différence** :

$$\left(x^2-2x-5\right)-(x-1).$$

- Pour les valeurs de x pour lesquelles cette différence vaut 0, les deux courbes se coupent ;
- pour les valeurs de x pour lesquelles cette différence est strictement positive, P est au-dessus de D ;

- pour les valeurs de x pour lesquelles cette différence est strictement négative, P est en-dessous de D.

On commence par calculer la différence :

$$\left(x^2-2x-5\right)-(x-1)=x^2-2x-5-x+1=x^2-3x-4.$$

Ensuite on étudie le signe de la différence :

- $a=1$, $b=-3$, $c=-4$;
- $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25$;
- $\Delta>0$, donc il y a deux racines :

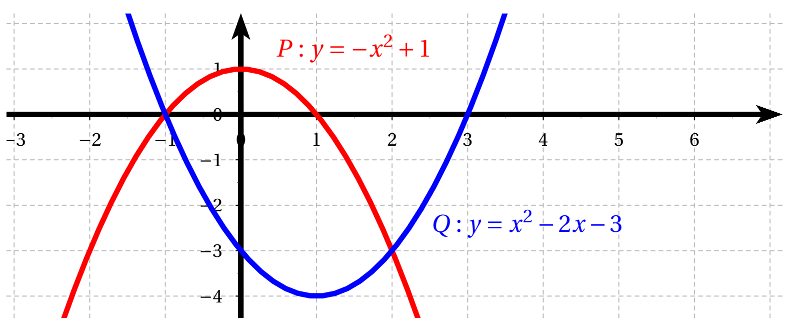
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

- $a=1$, a est $\oplus$.

On obtient donc le tableau et la position relative des courbes :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
Positions relatives des courbes		P au-dessus de D	Se coupent	P en-dessous de D	Se coupent	P au-dessus de D	

Exercice 45 On construit les paraboles $P: y=-x^2+1$ et $Q: y=x^2-2x-5$ avec la calculatrice.



On calcule la différence [8] :

$$\left(x^2-2x-3\right)-\left(-x^2+1\right)=x^2-2x-3+x^2-1=2x^2-2x-4.$$

Ensuite, on étudie le signe de cette différence :

- $a=2$, $b=-2$, $c=-4$;
- $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times(-4)=4+32=36$;
- $\Delta>0$, donc il y a deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times2}=\frac{2-6}{4}=\frac{-4}{4}=-1,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times2}=\frac{2+6}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

8. Il vaut mieux calculer « $Q-P$ » pour éviter des difficultés de calcul avec les signes.

- $a = 2$, a est $\oplus$.

On obtient donc le tableau et la position relative des courbes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x^2-2x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Positions relatives des courbes		Q au-dessus de P	Se coupent	Q en-dessous de P	Se coupent	Q au-dessus de P	

Exercice 46 1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}-2(x+1)(x-3) &= -2\left(x^2+x-3x-3\right)\\ &= -2\left(x^2-2x-3\right)\\ &= -2x^2+4x+6.\end{aligned}$$

2. On cherche les racines de $-2x^2+4x+6$:
   - $a=-2$, $b=4$, $c=6$;
   - $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times(-2)\times 6 = 16+48 = 64$;
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

   $$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times(-2)} = \frac{-4-8}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3,\\ x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times(-2)} = \frac{-4+8}{-4} = \frac{4}{-4} = -1.\end{aligned}$$

   Les deux racines sont cohérentes avec l'écriture factorisée de la question 1 :

   $$-2x^2+4x+6=0 \iff -2(x+1)(x-3)=0 \iff (x+1=0 \text{ ou } x-3=0) \iff (x=-1 \text{ ou } x=3).$$

3. On construit le tableau de signe de $-2x^2+4x+6$ en utilisant deux techniques différentes :
   - Grâce au théorème 1 du cours :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2+4x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   - En utilisant le signe d'un produit et la forme factorisée :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2(x+1)(x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Bien sûr, les deux méthodes donnent le même signe pour $-2x^2+4x+6=-2(x+1)(x-3)$.

Exercice 47 1. On factorise x^2-3x-4.

- $a=1$, $b=-3$, $c=-4$;
- $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25$;
- $\Delta>0$, donc il y a deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

D'après le théorème 2, pour tout réel x :

$$x^2-3x+4=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-(-1))(x-4)=(x+1)(x-4).$$

2. On factorise $-2x^2+20x-50$.
   - $a=-2$, $b=20$, $c=-50$;
   - $\Delta=b^2-4ac=20^2-4\times(-2)\times(-50)=400-400=0$;
   - $\Delta=0$, donc il y a une seule racine :

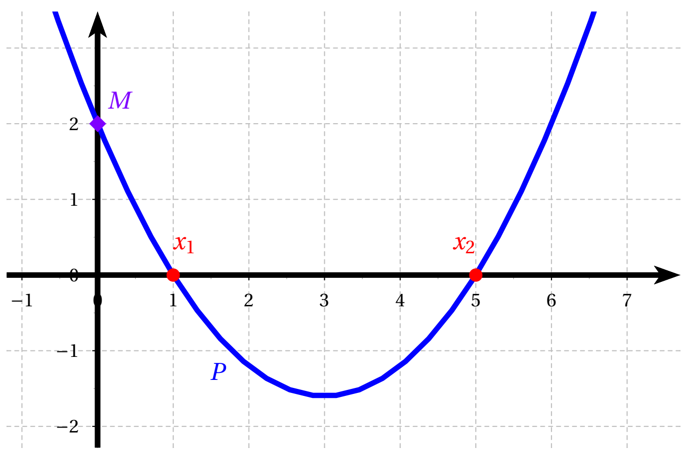
$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2\times(-2)}=\frac{-20}{-4}=5.$$

D'après le théorème 2, pour tout réel x :

$$-2x^2+20x-50=a(x-x_0)^2=-2(x-5)^2.$$

Exercice 48 La parabole $P: y=ax^2+bx+c$ coupe l'axe des abscisses en 1 et en 5. Elle passe par le point $M(0;2)$.

1. Comme dans certains exercices du chapitre 1, il est impossible de faire une figure ultra-précise avec si peu d'informations. Le lecteur ne devra donc pas être embarrassé d'avoir une parabole moins jolie que celle tracée ci-dessous avec un ordinateur.



2. La parabole P coupe l'axe des abscisses en 1 et en 5, donc ce sont les deux racines : $x_1=1$, $x_2=5$. Et donc, d'après le théorème 2 du cours, pour tout réel x :

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-1)(x-5).$$

Enfin, P passe par $M(0;2)$, donc $f(0)=2$. Autrement dit, en prenant l'écriture factorisée ci-dessus :

$$a(0-1)(0-5)=2.$$

On en déduit $5a=2$, donc $a=\frac{2}{5}=0,4$.

3. On développe l'expression obtenue dans la question précédente :

$$f(x)=a(x-1)(x-5)=0,4(x-1)(x-5)=0,4\left(x^2-5x-x+5\right)=0,4\left(x^2-6x+5\right)=0,4x^2-2,4x+2.$$

On a donc

$$a=0,4 \qquad , \qquad b=-2,4 \qquad , \qquad c=2.$$

Exercice 49 On suppose que la parabole $P : y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(3;0)$ et $B(-2;0)$; et que son sommet S a pour coordonnées $(0,5\ ;\ 1)$. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Il y a donc deux racines : $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Et d'après le théorème 2 du cours, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x-(-2))(x-3) = a(x+2)(x-3).$$

De plus, P passe par le sommet $S(0,5\ ;\ 1)$, donc $f(0,5) = 1$. Autrement dit, en prenant l'écriture factorisée ci-dessus :

$$a(0,5+2)(0,5-3) = 1.$$

Cela donne $a \times (-6,25) = 1$, donc $a = -\frac{1}{6,25} = -0,16$.

Finalement

$$f(x) = -0,16(x+2)(x-3) = 0,16\left(x^2+2x-3x-6\right) = -0,16\left(x^2-x-6\right) = -0,16x^2+0,16x+0,96.$$

Conclusion :

$$a = -0,16 \qquad , \qquad b = 0,16 \qquad , \qquad c = 0,96.$$

Exercice 50 On pose $f(x) = 0,25x^2 - x - 3$ pour tout réel x. On note P la parabole qui représente f.

1. On résout l'équation $f(x) = 0$:
   - $a = 0,25$, $b = -1$, $c = -3$;
   - $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 0,25 \times (-3) = 1 + 3 = 4$;
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{4}}{2\times 0,25} = \frac{1-2}{0,5} = \frac{-1}{0,5} = -2,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{4}}{2\times 0,25} = \frac{1+2}{0,5} = \frac{3}{0,5} = 6.$$

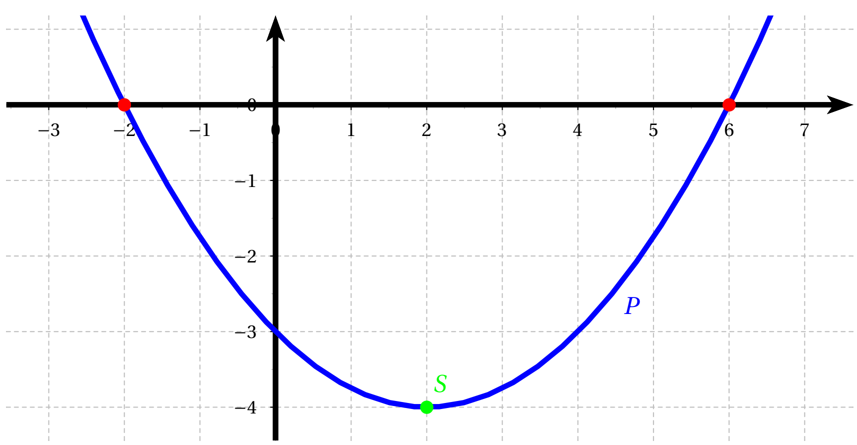
2.
   - a est $\oplus$, donc P est vers le haut.
   - D'après la formule du chapitre 1 :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\times 0,25} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

   On en déduit

$$y_S = 0,25 \times 2^2 - 2 - 3 = 1 - 5 = -4.$$

   On a donc $S(2;-4)$.



3. D'après le théorème 2 du cours, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 0,25(x-(-2))(x-6) = 0,25(x+2)(x-6).$$

Exercice 51 1. On note $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les deux racines.

(a) $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$.

(b) $x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{2a\times 2a} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-\left(\cancel{b^2}-4ac\right)}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a}\times a} = \frac{c}{a}$.

2. (a) $x_1 = 1$ est « racine évidente » de $x^2 + 15,5x - 16,5$, puisque

$$1^2 + 15,5 - 16,5 = 0.$$

D'après la question 1.(a), l'autre racine x_2 vérifie la relation

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

donc

$$1 + x_2 = -\frac{15,5}{1}\ ;$$

et finalement

$$x_2 = -15,5 - 1 = -16,5.$$

Remarques :

- Lorsqu'on cherche une racine « évidente », on essaye $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$ et $x = -2$. Si aucune ne fonctionne, c'est que ce n'est pas évident ![9]
- On aurait aussi pu utiliser la question 1.(b) pour trouver x_2 :

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \implies 1 \times x_2 = \frac{-16,5}{1} \implies x_2 = -16,5.$$

(b) Une racine « évidente » de $3x^2 - 4x - 4$ est $x_1 = 2$:

$$3 \times 2^2 - 4 \times 2 - 4 = 12 - 8 - 4 = 0.$$

D'après la question 1.(a), l'autre racine x_2 vérifie la relation $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, donc $2 + x_2 = -\frac{-4}{3}$. On a donc

$$x_2 = \frac{4}{3} - 2 = \frac{4}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{2}{3}.$$

(Là aussi, on aurait pu utiliser la question 1.(b) pour trouver x_2.)

3. On développe :

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x \times x - x_1 \times x - x_2 \times x + x_1 \times x_2) \\ &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2\right). \end{aligned}$$

D'après la question 1, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$, donc en remplaçant ci-dessus :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 - a \times \left(-\frac{b}{a}\right)x + a \times \frac{c}{a} = ax^2 + bx + c.$$

On obtient bien l'égalité attendue.

Exercice 52 1. On cherche le nombre de solutions de l'équation

$$x^2 + 2x = m \tag{4}$$

suivant la valeur de m.

On transpose :

$$x^2 + 2x = m \iff x^2 + 2x - m = 0.$$

Le nombre de solutions dépend du discriminant, qui lui-même dépend de m.
Par exemple :

- si $m = 3$, le discriminant vaut [10]

$$\Delta_3 = 2^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16.$$

Il est strictement positif, donc dans ce cas (4) a deux solutions.

9. Par exemple, personne ne peut vous demander de deviner que $x = -1 + \sqrt{3}$ est racine de $x^2 + 2x - 2$.
10. On note Δ_m le discriminant – parce qu'il dépend de m.

- si $m=-2$, le discriminant vaut
$$\Delta_{-2}=2^2-4\times 1\times(-m)=2^2-4\times 1\times 2=-4.$$
Il est strictement négatif, donc dans ce cas (4) n'a aucune solution.

Le nombre de solutions dépend du signe de Δ_m, qui dans le cas général vaut
$$\Delta_m=2^2-4\times 1\times(-m)=4+4m.$$
Il s'agit donc de savoir quand $\Delta_m>0$ (l'équation aura deux solutions), quand $\Delta_m=0$ (l'équation aura une seule solution) et quand $\Delta_m<0$ (l'équation n'aura aucune solution). Pour cela, on étudie signe de $\Delta_m=4+4m$ – en fonction de m !

m	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\Delta_m=4+4m$		$-$	0	$+$	

On peut conclure :
- si $m>-1$, $\Delta_m>0$, donc l'équation (4) a deux solutions;
- si $m=-1$, $\Delta_m=0$, donc l'équation (4) a une seule solution;
- si $m<-1$, $\Delta_m<0$, donc l'équation (4) n'a aucune solution.

2. On cherche le nombre de solutions de l'équation
$$x^2+mx=-1 \tag{5}$$
suivant la valeur de m.

On transpose :
$$x^2+mx=-1 \iff x^2+mx+1=0.$$
Le discriminant est
$$\Delta_m=m^2-4\times 1\times 1=m^2-4.$$
Il s'agit d'une expression du 2ᵈ degré, dont les racines sont évidentes :
$$m^2-4=0 \iff m^2=4 \iff (m=2 \text{ ou } m=-2).$$
On construit le tableau de signe de Δ_m (en fonction de m) :

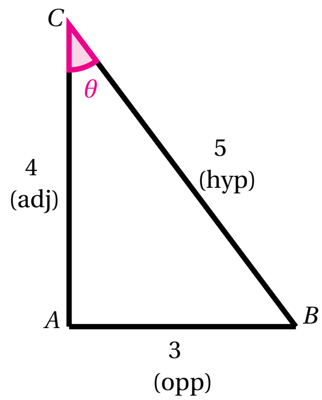
m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\Delta_m=m^2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :
- si $m<-2$ ou $m>2$, l'équation (5) a deux solutions;
- si $m=-2$ ou $m=2$, l'équation (5) a une seule solution;
- si $-2<m<2$ l'équation (5) n'a aucune solution.

5 Trigonométrie

Exercice 53 ABC est un triangle tel que $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. On pose $\theta=\widehat{ACB}$.

1.



$$\left.\begin{array}{l} BC^2 = 5^2 = 25 \\ AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 16 + 9 = 25 \end{array}\right\} BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en A.

2. Dans ABC rectangle en A :

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{4}{5} \qquad , \qquad \sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{3}{5} \qquad , \qquad \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{3}{4}.$$

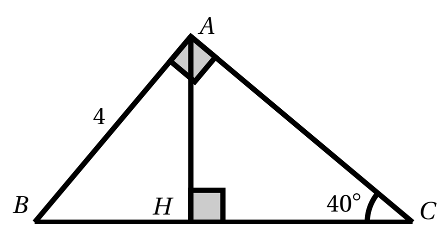
3. D'après la question précédente :

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} + \frac{3^2}{5^2} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} = \tan\theta$$

Remarques :
Les deux relations obtenues dans la question 3 sont valables quel que soit le triangle rectangle :

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = \left(\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}\right)^2 + \left(\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}\right)^2 = \frac{\text{adj}^2}{\text{hyp}^2} + \frac{\text{opp}^2}{\text{hyp}^2} = \frac{\text{adj}^2 + \text{opp}^2}{\text{hyp}^2} \overset{\text{Pythagore}}{=} \frac{\text{hyp}^2}{\text{hyp}^2} = 1$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}} = \frac{\text{opp}}{\cancel{\text{hyp}}} \times \frac{\cancel{\text{hyp}}}{\text{adj}} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \tan\theta$$

Exercice 54 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $\widehat{BCA} = 40°$. On note H le pied de la hauteur issue de A.



On commence par la longueur AC.
Dans ABC rectangle en A :

$$\tan 40° = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{4}{AC}.$$

On a donc $\tan 40° \times AC = \frac{4}{\cancel{AC}} \times \cancel{AC}$, puis $\frac{\cancel{\tan 40°} \times AC}{\cancel{\tan 40°}} = \frac{4}{\tan 40°}$.
Conclusion : on obtient grâce à la calculatrice

$$AC = \frac{4}{\tan 40°} \approx 4,77.$$

Ensuite on calcule AH.
Dans AHC rectangle en H :

$$\sin 40° = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{AH}{AC}.$$

On a donc $\sin 40° \times AC = \frac{AH}{\cancel{AC}} \times \cancel{AC}$, soit

$$AH = \sin 40° \times AC = \sin 40° \times \frac{4}{\tan 40°} \approx 3,06.$$

Remarque : Ne prenez pas de valeurs approchées dans les calculs intermédiaires, car les erreurs d'arrondis pourraient grossir au fur et à mesure des étapes de calcul, et même finir par « exploser ». Si vous voulez un exemple, entrez la formule « =1/3 » dans la cellule $A1$ d'une feuille de calcul (un tableur). Vous obtenez $0,3333333\cdots$ Ensuite, vous entrez la formule « =4*A1-1 » dans la cellule A2, puis vous étirez vers le bas. En théorie, vous devriez toujours obtenir la même réponse, puisque $4 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$. Vous verrez que ce n'est pas du tout le cas, ce qui est dû à des problèmes d'arrondis.

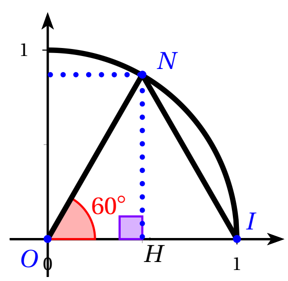
Exercice 55 La différence d'altitude entre le haut et le bas de la piste est

$$2\,261 - 1\,839 = 422 \text{ m},$$

si bien que l'on peut représenter la situation par la figure suivante :

On nous demande de calculer la mesure de l'angle θ. On utilise le sinus : $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{422}{1\,453}$, donc $\theta \approx 16,9°$.

Exercice 56 1. $[OI]$ et $[ON]$ sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}$, donc $OI = ON$ et OIN est isocèle en O.
Les angles à la base $\widehat{OIN}$ et $\widehat{ONI}$ sont donc égaux et (comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°) ils valent tous deux $\frac{180°-60°}{2} = 60°$.
Le triangle OIN a donc trois angles de 60° et par suite il est équilatéral.



2. Comme OIN est équilatéral, la hauteur $[HN]$ est aussi une médiane (propriété du triangle équilatéral), et donc H est le milieu de $[OI]$. On a donc

$$OH = \frac{1}{2}.$$

Ensuite on calcule HN : d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHN,

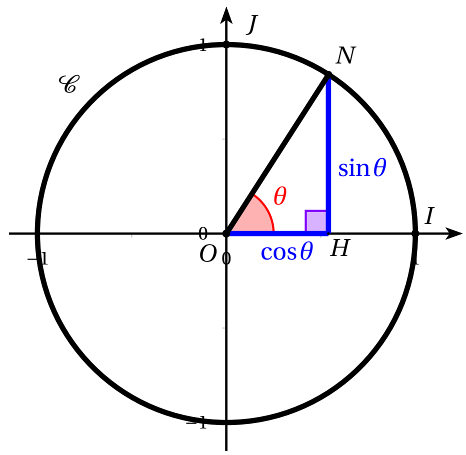
$$OH^2 + HN^2 = ON^2 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + HN^2 = 1^2 \qquad \frac{1}{4} + HN^2 = 1 \qquad HN^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad HN = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Dans le triangle OHN rectangle en H :

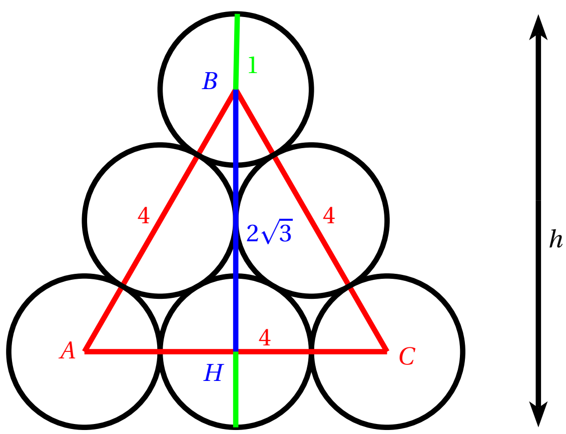
$$\cos 60° = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{OH}{ON} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60° = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{HN}{ON} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

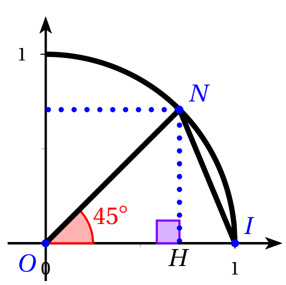
Remarque :
On constate que $\cos 60°$ est l'abscisse de N :
$$\cos 60° = \frac{1}{2} = OH = x_N\,;$$
et que $\sin 60°$ est l'ordonnée de N :
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = HN = y_N.$$
Ces propriétés se généralisent : en effet, en utilisant le fait que $ON = 1$, on démontre (avec le même calcul que dans la question 3) que si $\widehat{ION} = \theta$ (avec θ quelconque entre 0° et 90°), alors
$$\cos\theta = x_N \qquad , \qquad \sin\theta = y_N.$$



Exercice 57 Chacun des cercles a pour rayon 1, donc le triangle ABC est équilatéral de côté 4. Par conséquent, c'est **un agrandissement de rapport 4** du triangle de l'exercice précédent, et ainsi sa hauteur $[HB]$ (en bleu) mesure $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Comme chaque segment vert mesure 1, on obtient
$$h = 2 + 2\sqrt{3}.$$



Exercice 58 1. $\widehat{HON} = 45°$ et $\widehat{OHN} = 90°$, donc $\widehat{ONH} = 180° - 90° - 45° = 45°$.
Le triangle OHN a donc deux angles de 45° et par suite il est rectangle isocèle en H.



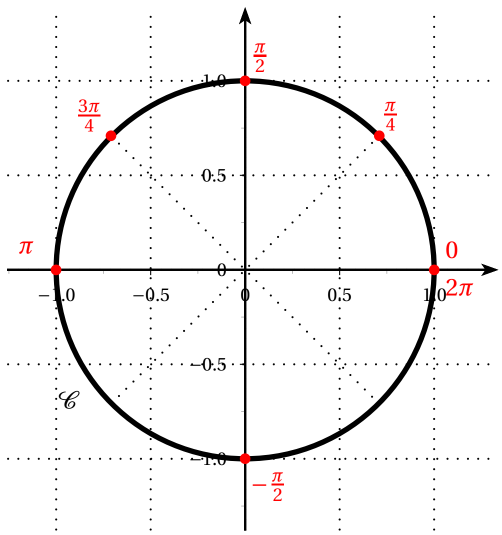
2. D'après le théorème de Pythagore dans ce triangle, $OH^2 + HN^2 = ON^2$. Mais $OH = HN$ puisque OHN est isocèle, d'où

$$OH^2 + OH^2 = ON^2 \qquad OH^2 + OH^2 = 1^2 \qquad 2OH^2 = 1 \qquad OH^2 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad OH = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. On va un peu plus vite que dans l'exercice 56, en utilisant la remarque faite à la fin :

$$\cos 45^\circ = x_N = OH = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \sin 45^\circ = y_N = HN = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 59 1.

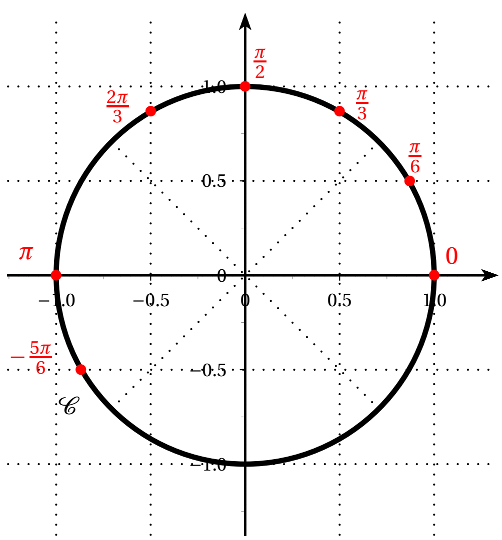


- Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$, donc le périmètre du cercle trigonométrique (rayon 1) est $2\pi \times 1 = 2\pi$.

  Sachant cela, pour placer π, on part de la graduation 0 et on fait ½ tour dans le sens direct. On arrive tout à gauche ; tandis que pour placer 2π, on fait un tour complet – le point est donc le même que celui associé à 0.
- Pour placer π, on a tourné de 180°, donc pour $\frac{\pi}{2}$, on tourne de $180^\circ \div 2 = 90^\circ$. Le point correspondant est tout en haut du cercle trigonométrique.

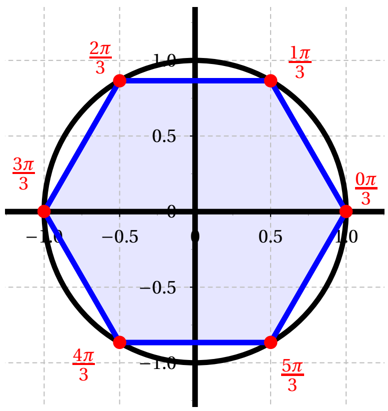
  Pour $\frac{\pi}{4}$, on tourne de $180^\circ \div 4 = 45^\circ$. Pour placer ce point, on avance en diagonale vers « en haut à droite ».
- Pour placer $\frac{\pi}{2}$, on a tourné de 90° dans le sens direct, donc pour $-\frac{\pi}{2}$, on tourne de 90° dans le sens indirect. On arrive tout en bas du cercle trigonométrique.
- Pour placer $\frac{\pi}{4}$, on a tourné de 45°, donc pour $\frac{3\pi}{4} = 3 \times \frac{\pi}{4}$, on tourne de $3 \times 45^\circ = 135^\circ$.

2.

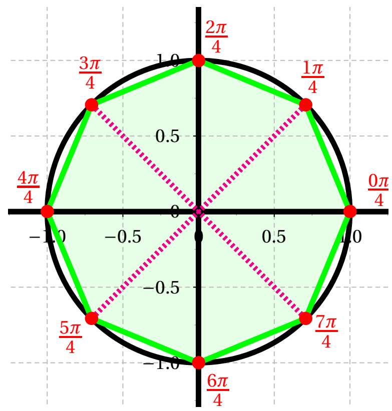


- Pour placer $\frac{\pi}{3}$, on tourne de $180^\circ \div 3 = 60^\circ$. En se rappelant de l'exercice 56, on voit que le point correspondant a pour abscisse $\frac{1}{2}$. On peut donc le placer grâce au quadrillage du cahier et sans utiliser ni compas, ni rapporteur.
- Pour placer $\frac{2\pi}{3}$, on tourne de $2 \times 60^\circ = 120^\circ$. Le point correspondant a pour abscisse $-\frac{1}{2}$.
- Pour $\frac{\pi}{6}$, on tourne de $180^\circ \div 6 = 30^\circ$. En remarquant que les angles de 60° et 30° sont complémentaires (leur somme vaut 90°), on comprend (assez) facilement que le point correspondant a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.
- Enfin, pour $-\frac{5\pi}{6}$, on tourne de $5 \times 30^\circ = 150^\circ$ dans le sens **in**direct. Le point correspondant a pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.

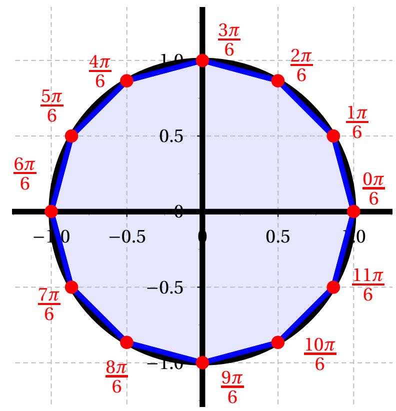
Exercice 60 Les points associés à $\frac{0\pi}{3}$, $\frac{1\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3}$, $\cdots$ forment un hexagone régulier.



Exercice 61 Les points associés à $\frac{0\pi}{4}$, $\frac{1\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\cdots$ forment un octogone régulier.



Exercice 62 Les points associés à $\frac{0\pi}{6}$, $\frac{1\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{6}$, $\cdots$ forment un dodécagone régulier.

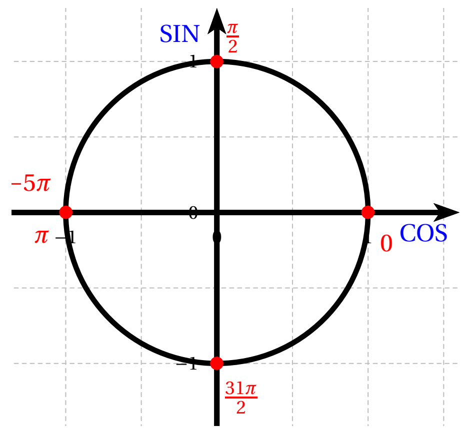


Exercice 63 1. Pour $\frac{31\pi}{2}$, on écrit

$$\frac{31\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 16\pi - \frac{\pi}{2},$$

donc on fait 8 tours dans le sens direct (car $8 \times 2\pi = 16\pi$), puis un quart de tour dans le sens indirect. On arrive tout en bas du cercle trigonométrique.

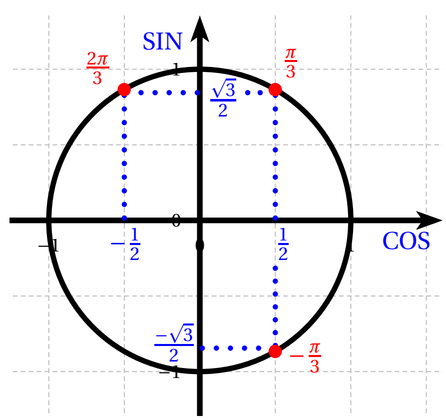
Pour -5π, on fait 5 demi-tours dans le sens indirect. On arrive tout à gauche.



Par lecture du cercle trigonométrique :

$\cos 0 = 1$	$\cos\pi = -1$	$\cos 5\pi = -1$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\sin 0 = 0$	$\sin\pi = 0$	$\sin 5\pi = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

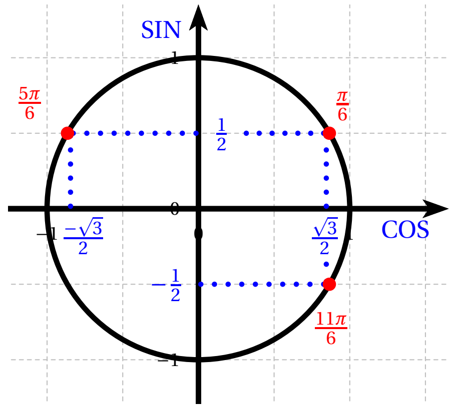
2.



Par lecture du cercle trigonométrique :

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.



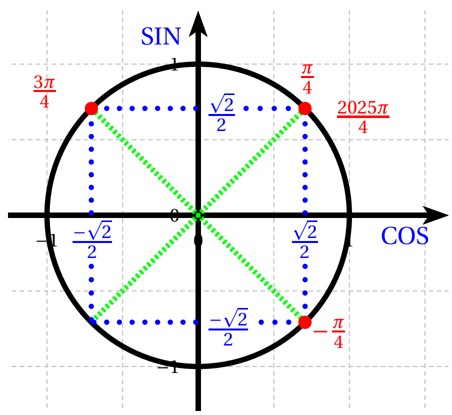
Par lecture du cercle trigonométrique :

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

4. Pour $\frac{2025\pi}{4}$, on écrit

$$\frac{2025\pi}{4} = \frac{2024\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 506\pi + \frac{\pi}{4}.$$

On fait donc 253 tours du cercle trigonométrique dans le sens direct (car $253 \times 2\pi = 506\pi$), et on tourne encore de $\frac{\pi}{4}$. Le point associé à $\frac{2025\pi}{4}$ est donc le même que celui associé à $\frac{\pi}{4}$.

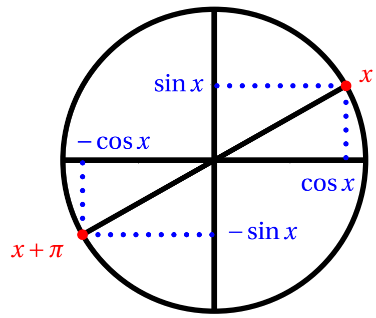


Par lecture du cercle trigonométrique :

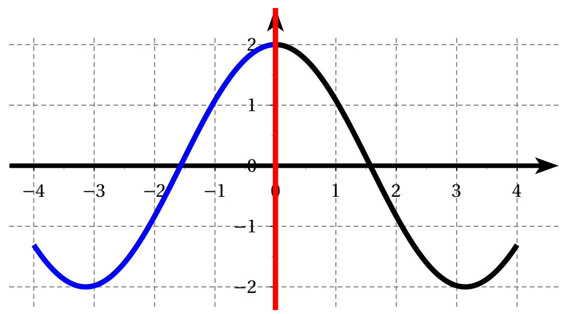
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 64 Pour tout réel x :

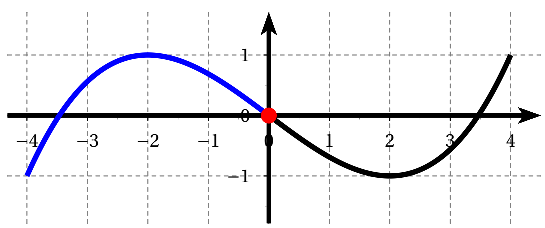
$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$



Exercice 65 Courbe d'une fonction paire (l'axe des ordonnées est axe de symétrie) :



Exercice 66 Courbe d'une fonction impaire (l'origine est centre de symétrie) :



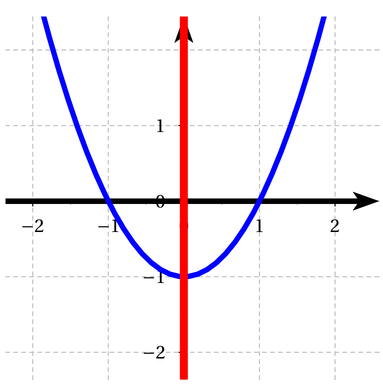
Exercice 67 Dans chaque cas, on illustre la parité en donnant l'allure de la courbe.

1. $f(x) = x^2 - 1$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x),$$

   donc f est paire.

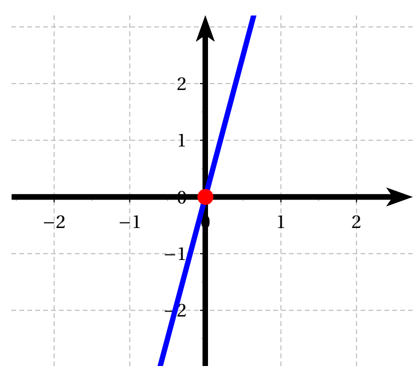


2. $g(x) = 5x$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x) = 5 \times (-x) = -5x = -g(x),$$

   donc g est impaire.

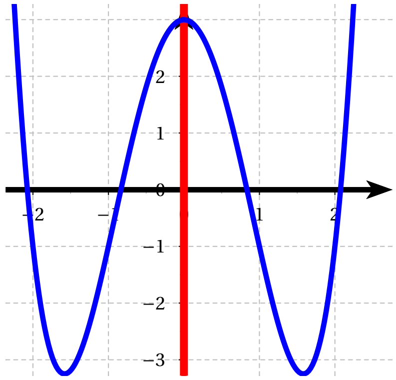


3. $h(x) = x^4 - 5x^2 + 3$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 3 = x^4 - 5x^2 + 3 = h(x),$$

   donc h est paire.

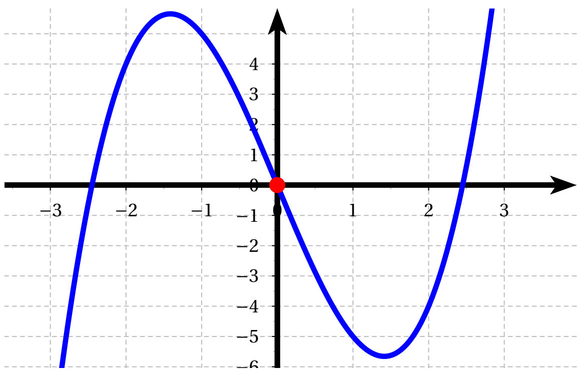


4. $i(x) = x^3 - 6x$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$i(-x) = (-x)^3 - 6 \times (-x) = -x^3 + 6x = -i(x),$$

   donc i est impaire.

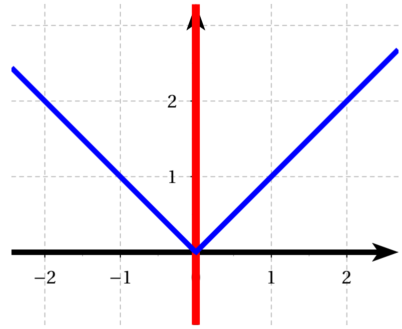


5. $j(x) = |x|$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$j(-x) = |-x| = |x| = j(x),$$

   donc j est paire.

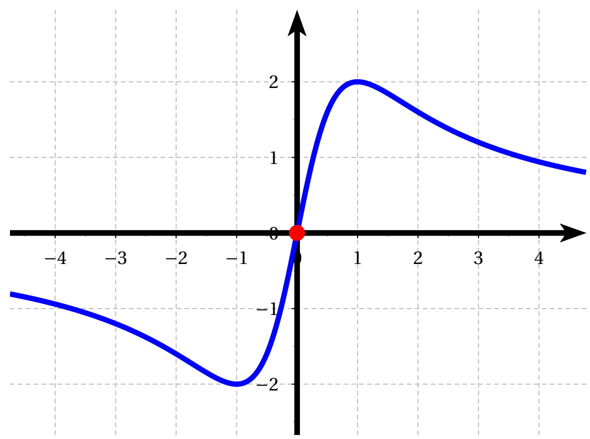


6. $k(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$k(-x) = \frac{4 \times (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2+1} = -k(x),$$

   donc k est impaire.



Exercice 68 Supposons qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ soit à la fois paire et impaire, et prenons un réel x.
Comme f est paire :

$$f(-x) = f(x).$$

Et comme f est impaire :

$$f(-x) = -f(x).$$

On en déduit $f(x) = -f(x)$, donc $f(x) + f(x) = 0$, soit $2f(x) = 0$; et finalement

$$f(x) = \frac{0}{2} = 0.$$

La fonction f est donc la fonction nulle (i.e. que $f(x) = 0$ pour tout réel x).

Réciproquement, la fonction nulle est bien à la fois paire et impaire, puisque pour tout réel x :

$$f(x) = f(-x) = -f(x) = 0.$$

Conclusion : la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

Exercice 69 1. Dans ACH rectangle en H :

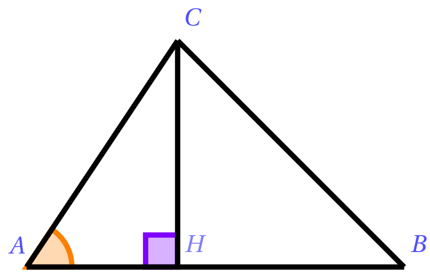
$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{HC}{AC},$$

donc

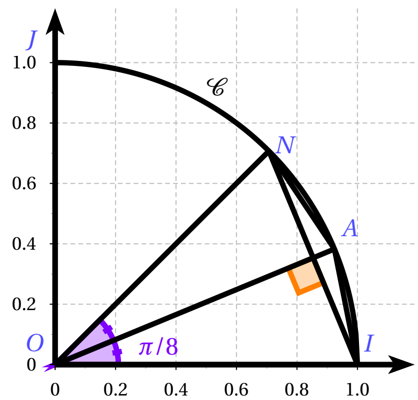
$$HC = AC \times \sin \widehat{A} ;$$

et la formule habituelle de l'aire d'un triangle donne :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AB \times HC}{2} = \frac{AB \times AC \times \sin\widehat{A}}{2} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\widehat{A}.$$



2. Dans un repère orthonormé (O, I, J), $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique, N est le point associé à $\frac{\pi}{4}$ et A le point associé à $\frac{\pi}{8}$.



(a) Le point N est associé à $\frac{\pi}{4}$, donc $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On en déduit :

$$IN = \sqrt{(x_N - x_I)^2 + (x_N - x_I)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}^2}{2^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 2 + 2^2}{2^2} + \frac{2}{2^2}} = \sqrt{\frac{2 - 4 \times \sqrt{2} + 4 + 2}{4}} = \sqrt{\frac{8 - 4 \times \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)}{\cancel{4}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

(b) On calcule de deux façons différentes l'aire du quadrilatère $OIAN$:

- D'abord, les triangles OAI et OAN sont isométriques, vu qu'ils ont tous deux un angle de $\frac{\pi}{8}$ compris entre deux côtés de longueur 1, donc d'après la question 1 :

$$\mathscr{A}_{OIAN} = 2 \times \mathscr{A}_{OAI} = 2 \times \frac{1}{2} OI \times OA \times \sin\widehat{IOA} = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}.$$

- Ensuite, (OA) est la médiatrice de $[IN]$, puisque c'est la bissectrice de l'angle $\widehat{O}$ dans le triangle ION isocèle en O. Les diagonales (OA) et (IN) du cerf-volant $OIAN$ sont donc perpendiculaires et l'on a [11]

$$\mathscr{A}_{OIAN} = \frac{OA \times IN}{2} = \frac{1 \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

En comparant les deux résultats obtenus pour l'aire de $OIAN$, il vient directement

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

(c) D'après la formule écrite en remarque dans l'exercice 53 :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1.$$

11. On utilise la formule pour l'aire d'un cerf-volant, que vous pouvez facilement retrouver seul.

Donc d'après la question précédente,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}^2}{2^2} = \frac{4}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{4-2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Or $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, donc

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

6 Dérivation

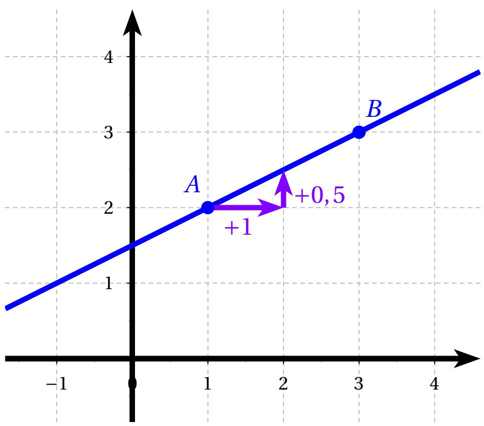
Remarque préliminaire : Rappelons que le coefficient directeur d'une droite (AB) est le « a » de $y = ax + b$; et qu'il s'obtient :

- par le calcul, avec la formule $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
- graphiquement, en regardant de combien on monte (ou descend) en ordonnée lorsqu'on avance de 1 en abscisse.

Sur la figure ci-dessous, où $A(\underset{x_A}{1} ; \underset{y_A}{2})$ et $B(\underset{x_B}{3} ; \underset{y_B}{3})$, le coefficient directeur de (AB) est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

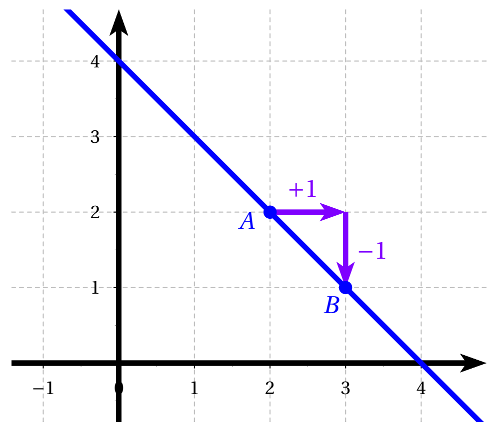
ce que confirme le codage (en violet).



Sur la figure ci-dessous, où $A(\underset{x_A}{2} ; \underset{y_A}{2})$ et $B(\underset{x_B}{3} ; \underset{y_B}{1})$, le coefficient directeur de (AB) est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1$$

ce que confirme le codage (en violet).



Exercice 70 La distance (en m) parcourue au temps t (en s) par une pierre en chute libre est $d(t) = 4,9t^2$.
On lance cette pierre d'une hauteur de 40 m.

1. Pour déterminer le temps que la pierre met pour arriver au sol, on résout l'équation $4,9t^2 = 40$:

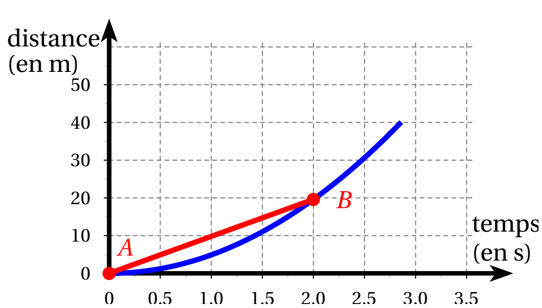
$$4,9t^2 = 40 \iff t^2 = \frac{40}{4,9} \iff t = \sqrt{\frac{40}{4,9}} \approx 2,86.$$

La pierre met environ 2,86 s pour arriver au sol.

2. Au temps $t = 2$ s, la pierre est tombée de $4,9 \times 2^2 = 19,6$ m, donc sa vitesse moyenne entre les temps $t = 0$ et $t = 2$ est

$$v_{\text{moy}} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{19,6}{2} = 9,8 \text{ m/s}.$$

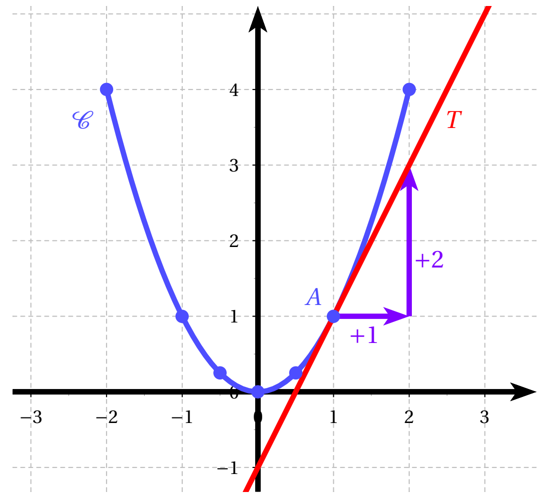
On a en fait calculé $\frac{d(2)-d(0)}{2-0}$, ce qui correspond au coefficient directeur de la droite (AB) sur le graphique.



Exercice 71 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

1. On construit la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide d'un tableau de valeurs :

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$f(x)=x^2$	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4



2. (a) Pour tout nombre $h\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}\\&=\frac{1^2+2\times 1\times h+h^2-1}{h}\\&=\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h}\\&=\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}\\&=2+h.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2+h)\\&=2+0\\&=2.\end{aligned}$$

(b) On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1. C'est la droite qui :

- passe par le point $A(1;1)$ – puisque $f(1)=1$;
- a pour coefficient directeur $f'(1)=2$ – donc quand on avance de 1 en abscisse, on monte de 2 en ordonnée (cf codage sur la figure).

3. Soit a un nombre réel. Pour tout nombre $h\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\&=\frac{\cancel{a^2}+2\times a\times h+h^2-\cancel{a^2}}{h}\\&=\frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}\\&=2a+h.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2a+h)\\&=2a+0\\&=2a.\end{aligned}$$

Exercice 72 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.
Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. Pour tous réels x,y :

$$\begin{aligned}(x+y)^3&=(x+y)^2\times(x+y)=\left(x^2+2xy+y^2\right)\times(x+y)=x^2\times x+x^2\times y+2xy\times x+2xy\times y+y^2\times x+y^2\times y\\&=x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+xy^2+y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.\end{aligned}$$

2. D'après la question 1, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \frac{\cancel{a^3}+3a^2h+3ah^2+h^3-\cancel{a^3}}{h} = \frac{\cancel{h}\left(3a^2+3ah+h^2\right)}{\cancel{h}} = 3a^2+3ah+h^2.$$

3. On en déduit

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3a^2+3ah+h^2\right) = 3a^2+3a\times 0+0^2 = 3a^2.$$

Exercice 73 La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Soit $a \neq 0$.

1. Pour tout nombre $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{1\times a}{(a+h)\times a}-\frac{1\times(a+h)}{a\times(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-\cancel{h}}{a(a+h)}}{\cancel{h}} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

2. On en déduit

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a(a+0)} = -\frac{1}{a^2}.$$

Exercice 74 L'ensemble de définition de f est noté D_f, celui de g est noté D_g, etc.

1. $f(x) = -3x+1$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = -3\times 1+0 = -3.$$
2. $g(x) = 4x^2+7$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$g'(x) = 4\times 2x+0 = 8x.$$
3. $h(x) = -x^2+3x-5$ $\qquad D_h = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$h'(x) = -2x+3\times 1-0 = -2x+3.$$
4. $i(x) = 3\left(x^2-6x+5\right)$ $\qquad D_i = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} i'(x) &= 3\,(2x-6\times 1+0) \\ &= 3(2x-6) = 6x-18. \end{aligned}$$
   On peut aussi commencer par développer :
   $$i(x) = 3x^2-18x+15,$$
   puis seulement après calculer la dérivée :
   $$i'(x) = 3\times 2x-18\times 1+0 = 6x-18.$$
5. $j(x) = x^3+6x^2-x+7$ $\qquad D_j = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$j'(x) = 3x^2+6\times 2x-1+0 = 3x^2+12x-1.$$
6. On va un peu plus vite...
   $k(x) = -2x^4+5x^3+x^2-8x+19$ $\qquad D_k = \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$k'(x) = -8x^3+15x^2+2x-8.$$
7. $\ell(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}$ $\qquad D_\ell = \mathbb{R}^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
   $$\ell'(x) = \frac{1}{3}\times 3x^2+\left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^2-\frac{1}{x^2}.$$
8. $m(x) = 2\left(x+\sqrt{x}\right)$ $\qquad D_m = [0;+\infty[$.
   ⚠La fonction racine n'est pas dérivable en 0 (voir exercice 82), donc m n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$; et pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $$m'(x) = 2\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2+\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x}} = 2+\frac{1}{\sqrt{x}}.$$
9. $n(x) = 6\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ $\qquad D_n =]0;+\infty[$.
   Pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $$n'(x) = 6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}.$$
10. $o(x) = \frac{1}{3x^3}-\frac{0{,}25}{x^4}$ $\qquad D_o = \mathbb{R}^*$.
    On peut écrire
    $$o(x) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{x^3}-0{,}25\times\frac{1}{x^4},$$
    donc o est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
    $$\begin{aligned} o'(x) &= \frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{x^4}\right)-0{,}25\times\left(-\frac{4}{x^5}\right) \\ &= -\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}. \end{aligned}$$

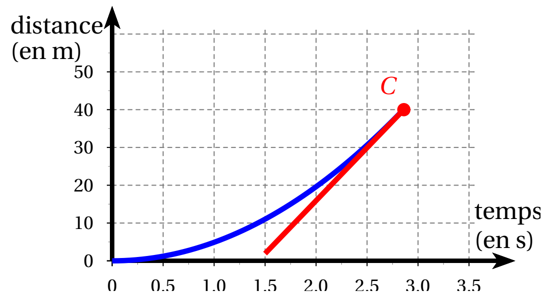
Exercice 75 On a vu que la pierre mettait environ 2,86 s pour arriver au sol. Au moment de l'impact, sa vitesse est donc $d'(2,86)$.
Or $d'(t) = 4,9 \times 2t = 9,8t$, donc $d'(2,86) = 9,8 \times 2,86 \approx 28,03$.
Conclusion : la vitesse de la pierre à l'impact est de 28,03 m/s environ.

Remarques :

- On peut être plus précis : d'après l'exercice 70, la pierre met exactement $\sqrt{\frac{40}{4,9}} = \sqrt{\frac{400}{49}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{49}} = \frac{20}{7}$ s pour arriver au sol, donc sa vitesse à l'impact est

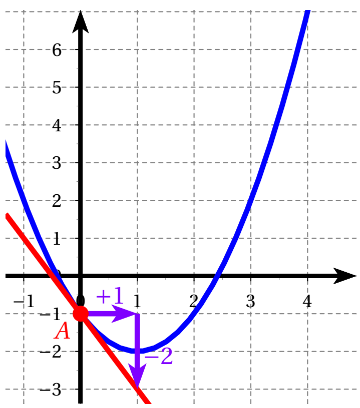
$$d'\left(\frac{20}{7}\right) = 9,8 \times \frac{20}{7} = 28 \text{ m/s}$$

(il n'y a pas d'arrondi – ça tombe « juste »).
- Cette vitesse instantanée est le coefficient directeur de la tangente au point C d'abscisse $\frac{20}{7}$ (tracée en rouge).

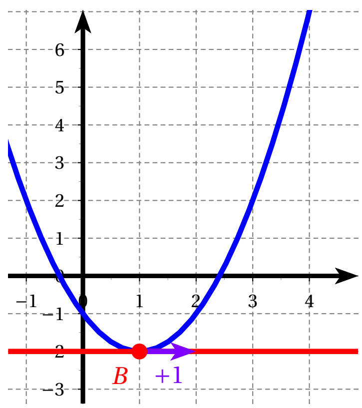


Exercice 76

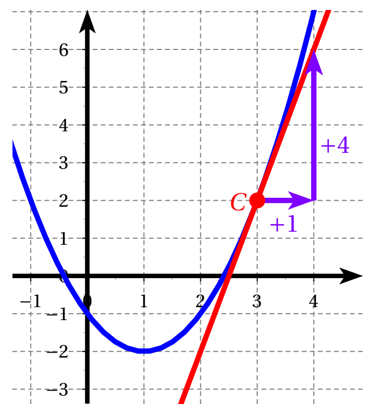
$f'(0) = -2$, c'est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 0.



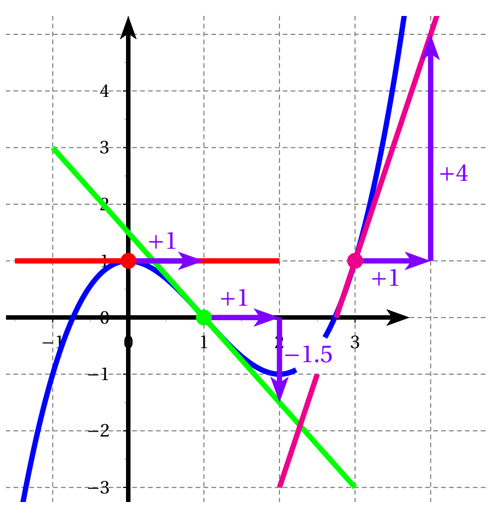
$f'(1) = 0$, c'est le coefficient directeur de la tangente au point B d'abscisse 1 (cette tangente est horizontale).



$f'(3) = 4$, c'est le coefficient directeur de la tangente au point C d'abscisse 3.



Exercice 77 On utilise la même technique que dans l'exercice précédent :



Dans chacune des trois colonnes, la couleur employée correspond à la couleur utilisée sur le graphique pour placer le point et tracer la tangente.

x	0	1	3
$f(x)$	1	0	1
$f'(x)$	0	$-1,5$	4

Exercice 78 La fonction f est définie sur $[1;4]$ par $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, 2, 4 ; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. On réécrit $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = x + 4 \times \frac{1}{x} - 3.$$
On obtient alors, pour tout $x \in [1;4]$:
$$f'(x) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 = 1 - \frac{4}{x^2}.$$

2. $f(1) = 1 + \frac{4}{1} - 3 = 1 + 4 - 3 = 2$ et $f'(1) = 1 - \frac{4}{1^2} = 1 - \frac{4}{1} = 1 - 4 = -3$

On applique la formule du cours pour l'équation d'une tangente
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$
Ici, on prend $a = 1$, puisque le point A a pour abscisse 1 :
$$\begin{aligned} T_A &: y = f'(1)(x-1) + f(1) \\ T_A &: y = -3(x-1) + 2 \\ T_A &: y = -3x + 3 + 2 \\ T_A &: y = -3x + 5. \end{aligned}$$

Remarque :
Le point A a pour coordonnées $(1;2)$, puisque $f(1) = 2$; la tangente T_A passe donc par ce point. Pour la tracer, il faut placer un deuxième point (c'est une droite) ; ce que l'on peut faire de trois façons différentes :

(a) L'ordonnée à l'origine est 5 (puisque $T_A : y = -3x + 5$), donc T_A passe par le point de coordonnées $(0;5)$.

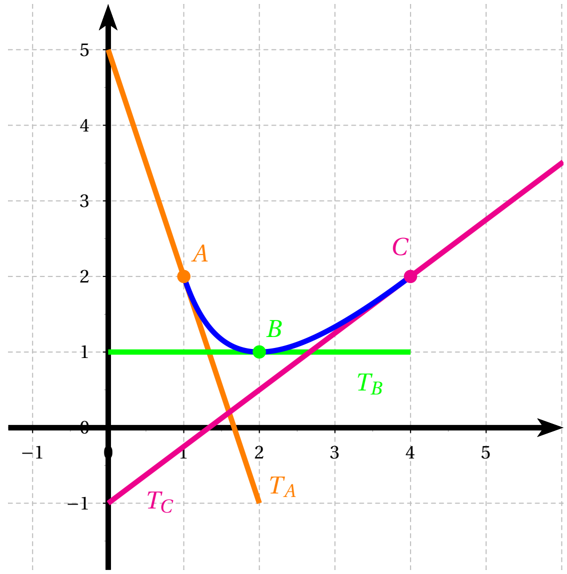
(b) Le coefficient directeur de T_A est -3 (puisque $T_A : y = -3x + 5$), donc en partant de A, il suffit d'avancer de 1 carreau en abscisse et de descendre de 3 carreaux en ordonnée – T_A passe donc par le point de coordonnées $(2;-1)$.

(c) On calcule un deuxième point avec la formule : par exemple, si $x = 2$, $y = -3 \times 2 + 5 = -1$. On obtient le point de coordonnées $(2;-1)$ (le même qu'avec la méthode (b)) et on trace la tangente.

3. • $f(2) = 1$ et $f'(2) = \frac{2^2-4}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$, donc l'équation de T_B est
$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ y &= 0(x-1) + 1 \\ y &= 1. \end{aligned}$$
Le coefficient directeur étant égal à 0, la tangente T_B est horizontale.

• $f(4) = 2$ et $f'(4) = \frac{4^2-4}{4^2} = \frac{12}{16} = 0,75$, donc l'équation de T_C est
$$\begin{aligned} y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\ y &= 0,75(x-4) + 2 \\ y &= 0,75x - 3 + 2 \\ y &= 0,75x - 1. \end{aligned}$$
On trace la tangente T_C par la même méthode que T_A (le plus simple et le plus précis est d'utiliser l'ordonnée à l'origine).

4. On place les points A, B, C, on trace les trois tangentes et on construit la courbe de la fonction f (en bleu) en s'appuyant sur ces tangentes.



Exercice 79 La fonction f est définie sur $[0;4]$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0, 1, 4 ; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

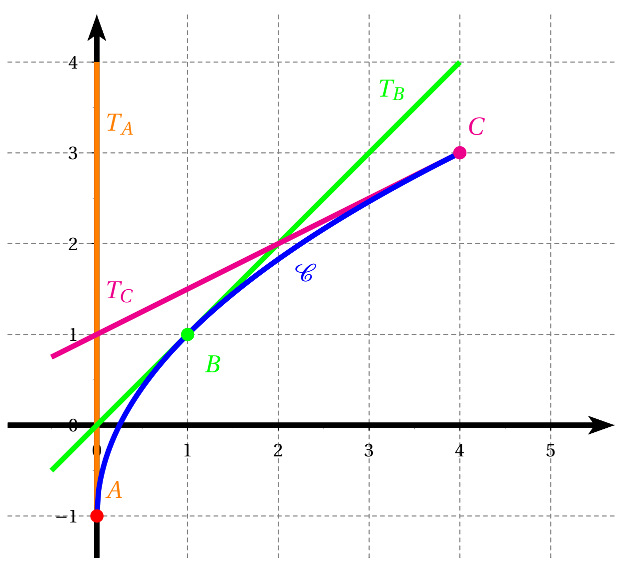
1. Pour tout $x \in \,]0;4]$, $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
2. $f(1) = 2\sqrt{1} - 1 = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$, donc

$$T_B : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$T_B : y = 1(x-1) + 1$$
$$T_B : y = x.$$

3. $f(4) = 2\sqrt{4} - 1 = 3$ et $f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$, donc

$$T_B : y = f'(4)(x-4) + f(4)$$
$$T_B : y = 0,5(x-4) + 3$$
$$T_B : y = 0,5x + 1.$$

4. La tangente T_A, d'équation $x = 0$, est verticale.



Exercice 80 Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = x^3 - 3x$. On note $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative. On regroupe les questions en une seule.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$. On a donc les tableaux de valeurs :

D'abord pour la fonction f :

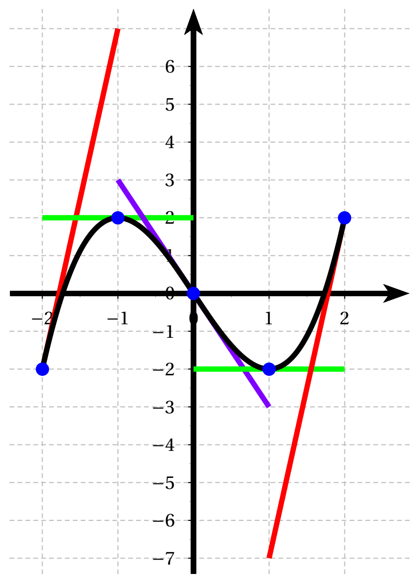
x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^3 - 3x$	-2	2	0	-2	2

Ensuite pour la fonction dérivée f' :

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x) = 3x^2 - 3$	9	0	-3	0	9

On fait le tracé en trois étapes :

1. On place (en bleu) les points correspondant au premier tableau de valeurs.
2. On trace les tangentes à la courbe grâce au deuxième tableau de valeurs. Les tangentes rouges ont un coefficient directeur égal à 9, puisque $f'(-2) = f'(2) = 9$; les tangentes vertes sont horizontales, puisque $f'(-1) = f'(1) = 0$; enfin, la tangente violette a un coefficient directeur égal à -3, car $f'(0) = -3$.
3. Pour finir, on trace (en noir) la courbe représentative de la fonction f.



Exercice 81 1. On commence par un tableau de valeurs, puis on place les points correspondants dans un repère :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3

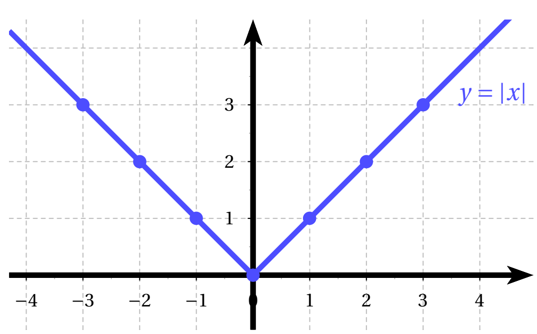
On se rappelle que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

donc la courbe est constituée de deux demi-droites :

- celle d'équation $y = x$ sur $[0; +\infty[$,
- celle d'équation $y = -x$ sur $]-\infty; 0]$.

Comme ce sont deux demi-droites, on les trace avec une règle!



2. Sur la partie droite du graphique, la courbe monte avec une pente de 1 ; et sur la partie gauche, elle descend avec une pente de 1, donc

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

En revanche, f n'est pas dérivable en 0, à cause du « pic » – ou, ce qui revient au même, de l'absence d'une tangente au point $O(0;0)$.

Exercice 82 On définit deux fonctions c et r sur $[0;+\infty[$ par les formules :

$$c(x) = x^2 \qquad , \qquad r(x) = \sqrt{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de c, $\mathscr{R}$ celle de r.

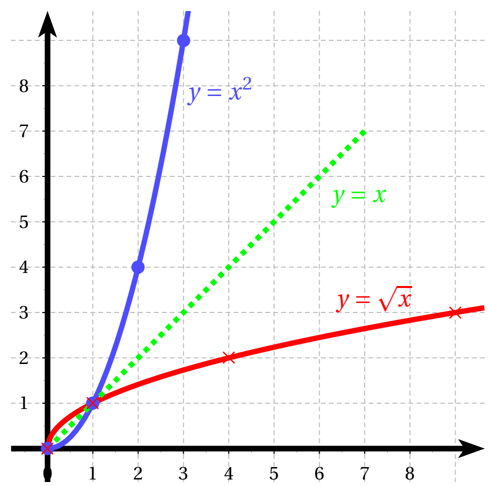
1.

On complète côte à côte un tableau de valeurs pour chacune des deux fonctions :

x	0	1	2	3
x^2	0	1	4	9

x	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	2	3

Les lignes des deux tableaux sont « inversées » : la première ligne du 1$^{\text{er}}$ est la deuxième ligne du 2$^{\text{nd}}$; et la deuxième ligne du 1$^{\text{er}}$ est la première ligne du 2$^{\text{nd}}$. Graphiquement, cela va se traduire par le fait que l'on passe de la courbe d'équation $y = x^2$ à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ « en inversant les valeurs en abscisse et en ordonnée ». Par conséquent, les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (tracée en pointillés).



2. Soit $a > 0$. On note A le point de coordonnées $(a;\sqrt{a})$, et B le point de coordonnées $(\sqrt{a};a)$. On note T_A la tangente à $\mathscr{R}$ au point A, T_B la tangente à $\mathscr{C}$ au point B.

   (a) Dans cette question, on prend $a = 4$, donc $A(4;2)$ et $B(2;4)$.
   On sait que $c'(x) = 2x$ pour tout $x \geq 0$; et que $r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$, donc :

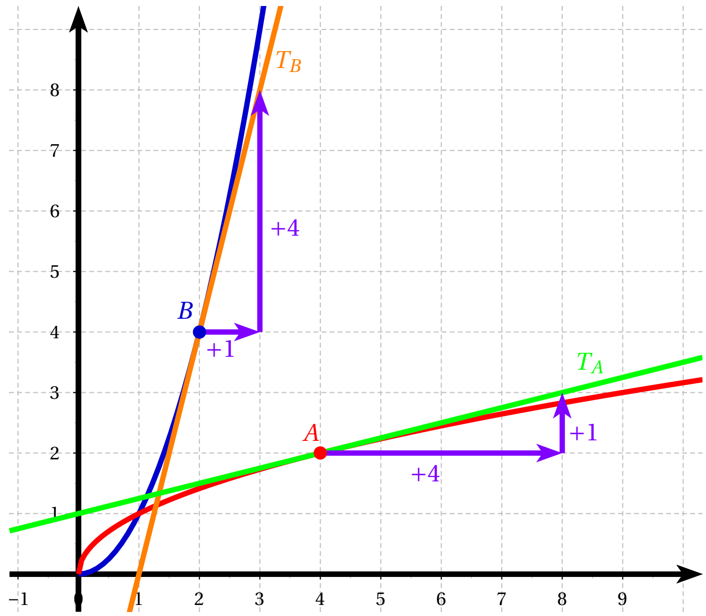
   $r(4) = \sqrt{4} = 2 \quad , \quad r'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

   $$T_A : y = r'(4)(x-4) + r(4)$$
   $$T_A : y = \frac{1}{4}(x-4) + 2$$
   $$T_A : y = \frac{1}{4}x + 1$$

   $c(2) = 2^2 = 4 \quad , \quad c'(2) = 2 \times 2 = 4$

   $$T_B : y = c'(2)(x-2) + c(2)$$
   $$T_B : y = 4(x-2) + 4$$
   $$T_B : y = 4x - 4$$

   On fait une nouvelle figure, pour plus de clarté :



On constate que les tangentes T_A et T_B ont des coefficients directeurs qui sont inverses l'un de l'autre :

- Le coefficient directeur de T_A est $\frac{1}{4}$: quand on avance de 4 en abscisse, on monte de 1 en ordonnée.
- Le coefficient directeur de T_B est 4 : quand on avance de 1 en abscisse, on monte de 4 en ordonnée.

C'est dû à la symétrie des deux courbes (inversion du rôle de x et de y).

(b) On revient au cas général ($a > 0$). Les points $A\left(a; \sqrt{a}\right)$ et $B\left(\sqrt{a}; a\right)$ sont respectivement sur $\mathscr{R}$ et $\mathscr{C}$, et ils sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le coefficient directeur de T_B est $c\left(\sqrt{a}\right) = 2\sqrt{a}$, donc par raison de symétrie (comme dans la question 2.(a)), celui de T_A est l'inverse : $r'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

On retrouve ainsi le résultat du cours sur la dérivée de la fonction racine : $r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. La tangente à $\mathscr{C}$ au point O a pour coefficient directeur 0, donc elle est horizontale : c'est l'axe des abscisses.
Par raison de symétrie, la tangente à $\mathscr{R}$ au point O est verticale : c'est l'axe des ordonnées. Cette tangente a une « pente infinie », donc r n'est pas dérivable en 0. [12]

12. On peut aussi faire le calcul :

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(0+h) - r(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$