Mathématiques – Maths expertes

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Divisibilité, nombres premiers

Exercice 1 1. • On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 20 :

$$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5,$$

donc les diviseurs de 20 sont

$$1, 2, 4, 5, 10 \text{ et } 20.$$

• On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 36 :

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6,$$

donc les diviseurs de 36 sont

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 \text{ et } 36.$$

2. Le nombre 1 452 est :
   - divisible par 2, car il est pair ;
   - divisible par 3, car la somme de ses chiffres, $1+4+5+2 = 12$, est divisible par 3 ;
   - non divisible par 5, car il ne se termine ni par 0, ni par 5 ;
   - non divisible par 9, car la somme de ses chiffres, 12, n'est pas divisible par 9.

Exercice 2 On factorise : l'égalité $x^2 - 2xy = 14$ se réécrit

$$x(x-2y) = 14.$$

x et y sont des entiers naturels, donc $x-2y$ est un entier. C'est même un entier naturel, car x et 14 sont positifs, donc par la règle des signes, $x-2y$ est positif.
Or les différentes manières d'écrire 14 comme un produit d'entiers naturels sont :

$$14 = 1 \times 14 = 2 \times 7 = 7 \times 2 = 14 \times 1.$$

Il y a donc quatre possibilités :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ x-2y &= 14 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x &= 2 \\ x-2y &= 7 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x &= 7 \\ x-2y &= 2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x &= 14 \\ x-2y &= 1 \end{cases}.$$

On résout de tête chacun des quatre systèmes :

$$(x = 1, y = -6,5) \quad , \quad (x = 2, y = -2,5) \quad , \quad (x = 7, y = 2,5) \quad , \quad (x = 14, y = 6,5).$$

Aucun couple n'est un couple d'entiers naturels, donc le problème n'a aucune solution.

Exercice 3 1. Trois entiers consécutifs sont de la forme n, $n+1$, $n+2$, avec n entier (dans $\mathbb{Z}$), donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1).$$

$n+1$ est un entier, donc $n + (n+1) + (n+2)$ est un multiple de 3.

2. Quatre entiers consécutifs sont de la forme n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, avec n entier, donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 4(n+1,5).$$

Or $n+1,5$ n'est pas un entier, donc la somme des quatre entiers consécutifs n'est pas un multiple de 4.

Exercice 4 On factorise :

$$n^2 - 2n = n(n-2).$$

D'après le point 1 de la proposition 1, si 5 divise n, il divise aussi $n(n-2)$.

Exercice 5 Commençons par rappeler que les nombres pairs sont les multiples de 2.

Pour démontrer le résultat de l'énoncé, on factorise

$$n^2 + n = n(n+1),$$

puis on distingue deux cas :

- Si n est pair, il est multiple de 2, donc $n(n+1)$ est également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair, donc multiple de 2 ; $n(n+1)$ est donc également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.

Dans tous les cas, n^2+n est un multiple de 2, donc un nombre pair.

Exercice 6 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 1.

1. Si $a|b$, alors $a|ub$ pour tout $u \in \mathbb{Z}$.
2. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(ub+vc)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

On commence par le point 1. Si $a|b$, on peut écrire $b = k \times a$, où k est un entier. Donc

$$ub = u(k \times a) = (uk) \times a,$$

qui est donc bien un multiple de a (car uk est un entier).

On démontre ensuite le point 2. Par hypothèse $a|b$ et $a|c$, donc on peut écrire $b = k \times a$ et $c = j \times a$, où k et j sont deux entiers. Mais alors

$$ub + vc = u(k \times a) + v(j \times a) = a(uk + vj).$$

Il s'agit bien d'un multiple de a, puisque $uk + vj$ est un entier (du fait que u, v, k, j sont des entiers).

Remarque : Une façon agréable d'énoncer le point 2 de la proposition 1 est de dire que

« Si a divise b et c, alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de b et c »

($ub + vc$ est ce que l'on appelle une combinaison linéaire de b et c).

Exercice 7 On fait un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse.** Soit n un entier naturel tel que $n+3$ divise $n+15$.
  De façon évidente, $n+3$ divise $n+3$, donc d'après la proposition 1 du cours, $n+3$ divise la combinaison linéaire

  $$1(n+15) - 1(n+3) = n + 15 - n - 3 = 12.$$

  On cherche les solutions avec n entier naturel, donc $n+3$ est supérieur ou égal à 3. Or les seuls diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à 3 sont 3, 4, 6 et 12. On a donc quatre possibilités :

  $$n+3=3 \quad , \quad n+3=4 \quad , \quad n+3=6 \quad , \quad n+3=12,$$

  qui donnent

  $$n=0 \quad , \quad n=1 \quad , \quad n=3 \quad , \quad n=9.$$

- **Synthèse.** On vérifie les solutions trouvées :
  — Si $n=0$, on on bien $n+3 = 0+3 = 3$, qui divise $n+15 = 0+15 = 15$.
  — Si $n=1$, on on bien $n+3 = 1+3 = 4$, qui divise $n+15 = 1+15 = 16$.
  — Si $n=3$, on on bien $n+3 = 3+3 = 6$, qui divise $n+15 = 3+15 = 18$.
  — Si $n=9$, on on bien $n+3 = 9+3 = 12$, qui divise $n+15 = 9+15 = 24$.

  Conclusion : les entiers naturels n tels que $n+3$ divise $n+15$ sont 0, 1, 3 et 9.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation

$$a^2 + 1 = 2^n, \tag{1}$$

d'inconnue $a \in \mathbb{Z}$.

1. - On commence par le cas $n=1$. Comme $2^1 = 2$, l'équation (1) s'écrit

     $$a^2 + 1 = 2.$$

     On résout :

     $$a^2 = 2 - 1 \iff a^2 = 1 \iff (a = 1 \text{ ou } a = -1).$$

     Il y a deux solutions : $a = 1$ et $a = -1$.

- Ensuite le cas $n = 2$. Comme $2^2 = 4$, l'équation (1) s'écrit
$$a^2 + 1 = 4.$$
On résout :
$$a^2 = 4 - 1 \iff a^2 = 3 \iff (a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3}).$$
Or $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ n'est pas un entier, donc il n'y a pas de solution.

2. On suppose à présent que $n \geq 3$.
   (a) On peut écrire
   $$2^n = 2^{n-3} \times 2^3 = 2^{n-3} \times 8.$$
   Par hypothèse $n \geq 3$, donc $n - 3 \geq 0$, et donc 2^{n-3} est un entier. Il s'ensuit que $2^n = \underbrace{2^{n-3}}_{\text{entier}} \times 8$ est un multiple de 8.

   (b) On raisonne par contraposée [1].
   Si a est pair, alors $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $a^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 = 2\left(2k^2\right) + 1$ est impair. D'un autre côté, 2^n est pair (car $n \in \mathbb{N}^*$). Il est donc impossible que $a^2 + 1$ (qui est impair) soit égal à 2^n (qui est pair).

   Conclusion : si a est pair, alors il n'est pas solution de (1). Donc par contraposée, si a est solution de (1), alors il est nécessairement impair.

   (c) On suppose que a est impair, donc de la forme $a = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas
   $$a^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4\left(k^2 + k\right).$$

   ⚠On a utilisé l'identité remarquable
   $$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

   D'après l'exercice 5, $k^2 + k$ est un nombre pair, donc multiple de 2 : on peut l'écrire $k^2 + k = 2m$, avec $m \in \mathbb{Z}$. Il vient donc finalement
   $$a^2 - 1 = 4\left(k^2 + k\right) = 4(2m) = 8m,$$
   ce qui prouve que $a^2 - 1$ est multiple de 8.

   (d) On suppose que $n \geq 3$ et que a est solution de (1). On a prouvé dans la question 2.(a) que 2^n était un multiple de 8, donc $a^2 + 1$ est un multiple de 8. D'un autre côté, d'après les questions 2.(b) et 2.(c), $a^2 - 1$ est également un multiple de 8. Donc d'après la proposition 1 du cours, la différence
   $$2^n - \left(a^2 - 1\right) = \left(a^2 + 1\right) - \left(a^2 - 1\right) = a^2 + 1 - a^2 + 1 = 2$$
   est un multiple de 8, ce qui est absurde.

   Conclusion : supposant que (1) admet une solution lorsque $n \geq 3$, on aboutit à une absurdité ; c'est donc qu'il n'y a pas de solution dans ce cas-là.

3. D'après la question 1, il y a deux solutions, $a = 1$ et $a = -1$, lorsque $n = 1$. En revanche, il n'y a aucune solution quand $n = 2$. On vient par ailleurs de démontrer qu'il n'y avait aucune solution dans le cas $n \geq 3$. On peut donc conclure avec un tableau :

n	solutions de (1)
1	$a = 1$ et $a = -1$
≥ 2	aucune solution

Exercice 9 • On effectue la division euclidienne de 587 par 13 :

$$\begin{array}{rrr|l} & 5\,8 & 7 & 1\,3 \\ - & 5\,2 & & 4\,5 \\ & 6 & 7 & \\ - & 6 & 5 & \\ & & 2 & \end{array}$$

1. Pour prouver qu'une implication de la forme
Si A alors B,
est vraie, il suffit de prouver que sa contraposée
Si (non B) alors (non A)
est vraie.

$$587 = 45 \times 13 + 2.$$

Remarque : On obtient directement la réponse avec une calculatrice en faisant les calculs $587 \div 13 = 45, \cdots$, puis $587 - 45 \times 13 = 2$.

- On effectue la division euclidienne de 10000 par 11 :

$$\begin{array}{rr|l} & 10000 & 11 \\ \cline{3-3} - & \underline{99} & 909 \\ & 100 & \\ - & \underline{99} & \\ & 1 & \end{array}$$

$$10000 = 909 \times 11 + 1.$$

Exercice 10 1. On suppose que la différence entre a et b est 538, et que le quotient dans la division de a par b est 13, le reste 34. On peut donc écrire

$$\begin{cases} a = b + 538 \\ a = 13b + 34 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$b + 538 = 13b + 34,$$

donc

$$538 - 34 = 13b - b \qquad b = \frac{504}{12} = 42.$$

Conclusion : $b = 42$ et $a = b + 538 = 42 + 538 = 580$.

2. Quand on divise n par 29 et par 27, les quotients sont les mêmes et les restes sont respectivement 1 et 25. En notant q les quotients identiques, on obtient le système

$$\begin{cases} n = 29q + 1 \\ n = 27q + 25 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$29q + 1 = 27q + 25,$$

donc

$$29q - 27q = 25 - 1 \qquad 2q = 24 \qquad q = \frac{24}{2} = 12.$$

Conclusion : $n = 29q + 1 = 29 \times 12 + 1 = 349$.

Exercice 11 On écrit tous les produits d'entiers qui donnent 48 et 84 :

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \times 48 \\ &= 2 \times 24 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 4 \times 12 \\ &= 6 \times 8. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 48 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

$$\begin{aligned} 84 &= 1 \times 84 \\ &= 2 \times 42 \\ &= 3 \times 28 \\ &= 4 \times 21 \\ &= 6 \times 14 \\ &= 7 \times 12. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.

Le PGCD est le plus grand nombre qui divise à la fois 48 et 84. L'examen des listes ci-dessus donne

$$\mathrm{PGCD}(48, 84) = 12.$$

Exercice 12
- On cherche le PGCD de 840 et 144. On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned}840 &= 5\times 144+120,\\ 144 &= 1\times 120+24,\\ 120 &= 5\times 24+0.\end{aligned}$$

  Le PGCD est le dernier reste non nul :
$$\mathrm{PGCD}(144,840)=24.$$

- On cherche le PGCD de 215 et 28. On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned}215 &= 7\times 28+19,\\ 28 &= 1\times 19+9,\\ 19 &= 2\times 9+1\\ 9 &= 9\times 1+0.\end{aligned}$$

  On a donc $\mathrm{PGCD}(215,28)=1$.

  Remarque : Comme $\mathrm{PGCD}(215,28)=1$, on dit que 215 et 28 sont premiers entre eux – leur seul diviseur positif commun est 1.

Exercice 13 Le côté de chaque dalle (exprimé en cm) doit être un entier qui divise 840 et 350; on veut de plus que ce côté soit le plus grand possible. On cherche donc le PGCD de 840 et 350 :

$$\begin{aligned}840 &= 2\times 350+140,\\ 350 &= 2\times 140+70,\\ 140 &= 2\times 70+0.\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{PGCD}(840,350)=70$, donc chaque dalle a un côté de 70 cm.
De plus, il y a $840\div 70=12$ dalles en longueur; et $350\div 70=5$ dalles en largeur, donc un total de

$$12\times 5=60 \text{ dalles.}$$

Exercice 14 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 2.

Dans la division euclidienne
$$a=bq+r,$$

(i) si $r\neq 0$, $\mathrm{PGCD}(a,b)=\mathrm{PGCD}(b,r)$;

(ii) si $r=0$, $\mathrm{PGCD}(a,b)=b$.

1. Dans la situation de la division euclidienne $a=bq+r$, si l'entier k divise a et b, alors d'après la proposition 1 du cours, il divise la combinaison linéaire
$$r=a\times 1-b\times q.$$
   Par conséquent, on a l'implication
$$k \text{ divise } a \text{ et } b \Longrightarrow k \text{ divise } b \text{ et } r.$$
   Réciproquement, si k divise b et r, alors k divise a, puisque $a=b\times q+r\times 1$ (on utilise à nouveau la proposition 1). Il divise donc a et b.
   On a finalement l'équivalence
$$k \text{ divise } a \text{ et } b \Longleftrightarrow k \text{ divise } b \text{ et } r.$$

2. D'après l'équivalence de la question 1, la liste des diviseurs communs à a et b est la même que la liste des diviseurs communs à b et r. Il s'ensuit que le plus grand élément de chacune des deux listes est le même. Autrement dit :

$$\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r).$$

3. Si $r = 0$, alors $a = bq$, donc b est un diviseur de a. Le plus grand diviseur commun à a et b est donc b :

$$\text{PGCD}(a,b) = b.$$

Exercice 15 1. On développe et on réduit :

$$2(3n+2) - 3(2n+1) = 6n+4-6n-3 = 1.$$

2. Si un entier naturel k divise à la fois $3n+2$ et $2n+1$, alors il divise la combinaison linéaire $2(3n+2)-3(2n+1) = 1$. On a donc nécessairement $k = 1$, c'est-à-dire que $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. La fraction

$$\frac{3n+2}{2n+1}$$

est donc irréductible.

Exercice 16 Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = 3n+1$ et $b_n = 3n-1$.

1. On présente avec un tableau :

n	a_n	b_n	PGCD (a_n, b_n)	1ers entre eux
1	4	2	2	non
2	7	5	1	oui
3	10	8	2	non
4	13	11	1	oui

On constate que le PGCD vaut 1 ou 2, suivant que n est pair ou impair. On va le démontrer rigoureusement dans les questions suivantes.

2. Si un entier naturel k divise a_n et b_n, alors il divise la combinaison linéaire

$$a_n - b_n = (3n+1)-(3n-1) = 3n+1-3n+1 = 2.$$

Cet entier k ne peut donc être que 1 ou 2.

3. D'après la question précédente, le PGCD de a_n et b_n ne peut être que 1 ou 2. On distingue alors deux cas :
   - Si n est impair, alors $3n$ est impair (comme produit de deux nombres impairs – facile à justifier). Donc $3n-1$ et $3n+1$ sont pairs, et leur PGCD est égal à 2.
   - Si n est pair, alors $3n$ est pair (cf le point 1 de la proposition 1). Donc $3n-1$ et $3n+1$ sont impairs; ils ne sont pas divisibles par 2 et leur PGCD est nécessairement égal à 1.

Finalement, on a bien l'équivalence :

$$a_n \text{ et } b_n \text{ premiers entre eux} \iff n \text{ pair}.$$