Mathématiques – Maths expertes

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Divisibilité, nombres premiers

Exercice 1 1. • On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 20 :

$$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5,$$

donc les diviseurs de 20 sont

$$1, 2, 4, 5, 10 \text{ et } 20.$$

• On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 36 :

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6,$$

donc les diviseurs de 36 sont

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 \text{ et } 36.$$

2. Le nombre 1 452 est :
   - divisible par 2, car il est pair ;
   - divisible par 3, car la somme de ses chiffres, $1+4+5+2 = 12$, est divisible par 3 ;
   - non divisible par 5, car il ne se termine ni par 0, ni par 5 ;
   - non divisible par 9, car la somme de ses chiffres, 12, n'est pas divisible par 9.

Exercice 2 On factorise : l'égalité $x^2 - 2xy = 14$ se réécrit

$$x(x-2y) = 14.$$

x et y sont des entiers naturels, donc $x-2y$ est un entier. C'est même un entier naturel, car x et 14 sont positifs, donc par la règle des signes, $x-2y$ est positif.
Or les différentes manières d'écrire 14 comme un produit d'entiers naturels sont :

$$14 = 1 \times 14 = 2 \times 7 = 7 \times 2 = 14 \times 1.$$

Il y a donc quatre possibilités :

$$\begin{cases} x & = 1 \\ x-2y & = 14 \end{cases}, \quad \begin{cases} x & = 2 \\ x-2y & = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x & = 7 \\ x-2y & = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x & = 14 \\ x-2y & = 1 \end{cases}.$$

On résout de tête chacun des quatre systèmes :

$$(x=1, y=-6{,}5) \quad , \quad (x=2, y=-2{,}5) \quad , \quad (x=7, y=2{,}5) \quad , \quad (x=14, y=6{,}5).$$

Aucun couple n'est un couple d'entiers naturels, donc le problème n'a aucune solution.

Exercice 3 1. Trois entiers consécutifs sont de la forme $n,\ n+1,\ n+2$, avec n entier (dans $\mathbb{Z}$), donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = 3(n+1).$$

$n+1$ est un entier, donc $n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

2. Quatre entiers consécutifs sont de la forme $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$, avec n entier, donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n+6 = 4(n+1{,}5).$$

Or $n+1{,}5$ n'est pas un entier, donc la somme des quatre entiers consécutifs n'est pas un multiple de 4.

Exercice 4 On factorise :

$$n^2 - 2n = n(n-2).$$

D'après le point 1 de la proposition 1, si 5 divise n, il divise aussi $n(n-2)$.

Exercice 5 Commençons par rappeler que les nombres pairs sont les multiples de 2.

Pour démontrer le résultat de l'énoncé, on factorise

$$n^2 + n = n(n+1),$$

puis on distingue deux cas :

- Si n est pair, il est multiple de 2, donc $n(n+1)$ est également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair, donc multiple de 2 ; $n(n+1)$ est donc également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.

Dans tous les cas, n^2+n est un multiple de 2, donc un nombre pair.

Exercice 6 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 1.

1. Si $a|b$, alors $a|ub$ pour tout $u \in \mathbb{Z}$.
2. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(ub+vc)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

On commence par le point 1. Si $a|b$, on peut écrire $b = k \times a$, où k est un entier. Donc

$$ub = u(k \times a) = (uk) \times a,$$

qui est donc bien un multiple de a (car uk est un entier).

On démontre ensuite le point 2. Par hypothèse $a|b$ et $a|c$, donc on peut écrire $b = k \times a$ et $c = j \times a$, où k et j sont deux entiers. Mais alors

$$ub + vc = u(k \times a) + v(j \times a) = a(uk + vj).$$

Il s'agit bien d'un multiple de a, puisque $uk + vj$ est un entier (du fait que u, v, k, j sont des entiers).

Remarque : Une façon agréable d'énoncer le point 2 de la proposition 1 est de dire que

« Si a divise b et c, alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de b et c »

($ub + vc$ est ce que l'on appelle une combinaison linéaire de b et c).

Exercice 7 On fait un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse.** Soit n un entier naturel tel que $n+3$ divise $n+15$.
  De façon évidente, $n+3$ divise $n+3$, donc d'après la proposition 1 du cours, $n+3$ divise la combinaison linéaire

  $$1(n+15) - 1(n+3) = n + 15 - n - 3 = 12.$$

  On cherche les solutions avec n entier naturel, donc $n+3$ est supérieur ou égal à 3. Or les seuls diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à 3 sont 3, 4, 6 et 12. On a donc quatre possibilités :

  $$n+3 = 3 \quad , \quad n+3 = 4 \quad , \quad n+3 = 6 \quad , \quad n+3 = 12,$$

  qui donnent

  $$n = 0 \quad , \quad n = 1 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad n = 9.$$

- **Synthèse.** On vérifie les solutions trouvées :
  — Si $n = 0$, on on bien $n+3 = 0+3 = 3$, qui divise $n+15 = 0+15 = 15$.
  — Si $n = 1$, on on bien $n+3 = 1+3 = 4$, qui divise $n+15 = 1+15 = 16$.
  — Si $n = 3$, on on bien $n+3 = 3+3 = 6$, qui divise $n+15 = 3+15 = 18$.
  — Si $n = 9$, on on bien $n+3 = 9+3 = 12$, qui divise $n+15 = 9+15 = 24$.

  Conclusion : les entiers naturels n tels que $n+3$ divise $n+15$ sont 0, 1, 3 et 9.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation

$$a^2 + 1 = 2^n, \tag{1}$$

d'inconnue $a \in \mathbb{Z}$.

1. - On commence par le cas $n = 1$. Comme $2^1 = 2$, l'équation (1) s'écrit

     $$a^2 + 1 = 2.$$

     On résout :

     $$a^2 = 2 - 1 \iff a^2 = 1 \iff (a = 1 \text{ ou } a = -1).$$

     Il y a deux solutions : $a = 1$ et $a = -1$.

- Ensuite le cas $n = 2$. Comme $2^2 = 4$, l'équation (1) s'écrit

$$a^2 + 1 = 4.$$

On résout :

$$a^2 = 4 - 1 \iff a^2 = 3 \iff (a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3}).$$

Or $\sqrt{3} \approx 1,732$ n'est pas un entier, donc il n'y a pas de solution.

2. On suppose à présent que $n \geq 3$.

(a) On peut écrire

$$2^n = 2^{n-3} \times 2^3 = 2^{n-3} \times 8.$$

Par hypothèse $n \geq 3$, donc $n - 3 \geq 0$, et donc 2^{n-3} est un entier. Il s'ensuit que $2^n = \underbrace{2^{n-3}}_{\text{entier}} \times 8$ est un multiple de 8.

(b) On raisonne par contraposée [1].
Si a est pair, alors $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $a^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 = 2\left(2k^2\right) + 1$ est impair. D'un autre côté, 2^n est pair (car $n \in \mathbb{N}^*$). Il est donc impossible que $a^2 + 1$ (qui est impair) soit égal à 2^n (qui est pair).

Conclusion : si a est pair, alors il n'est pas solution de (1). Donc par contraposée, si a est solution de (1), alors il est nécessairement impair.

(c) On suppose que a est impair, donc de la forme $a = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas

$$a^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4\left(k^2 + k\right).$$

⚠On a utilisé l'identité remarquable

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'après l'exercice 5, $k^2 + k$ est un nombre pair, donc multiple de 2 : on peut l'écrire $k^2 + k = 2m$, avec $m \in \mathbb{Z}$. Il vient donc finalement

$$a^2 - 1 = 4\left(k^2 + k\right) = 4(2m) = 8m,$$

ce qui prouve que $a^2 - 1$ est multiple de 8.

(d) On suppose que $n \geq 3$ et que a est solution de (1). On a prouvé dans la question 2.(a) que 2^n était un multiple de 8, donc $a^2 + 1$ est un multiple de 8. D'un autre côté, d'après les questions 2.(b) et 2.(c), $a^2 - 1$ est également un multiple de 8. Donc d'après la proposition 1 du cours, la différence

$$2^n - \left(a^2 - 1\right) = \left(a^2 + 1\right) - \left(a^2 - 1\right) = a^2 + 1 - a^2 + 1 = 2$$

est un multiple de 8, ce qui est absurde.

Conclusion : supposant que (1) admet une solution lorsque $n \geq 3$, on aboutit à une absurdité ; c'est donc qu'il n'y a pas de solution dans ce cas-là.

3. D'après la question 1, il y a deux solutions, $a = 1$ et $a = -1$, lorsque $n = 1$. En revanche, il n'y a aucune solution quand $n = 2$. On vient par ailleurs de démontrer qu'il n'y avait aucune solution dans le cas $n \geq 3$. On peut donc conclure avec un tableau :

n	solutions de (1)
1	$a = 1$ et $a = -1$
≥ 2	aucune solution

Exercice 9 • On effectue la division euclidienne de 587 par 13 :

$$\begin{array}{rr|l} & 587 & 13 \\ - & 52 & 45 \\ & 67 & \\ - & 65 & \\ & 2 & \end{array}$$

1. Pour prouver qu'une implication de la forme

Si A alors B,

est vraie, il suffit de prouver que sa contraposée

Si (non B) alors (non A)

est vraie.

$$587 = 45 \times 13 + 2.$$

Remarque : On obtient directement la réponse avec une calculatrice en faisant les calculs $587 \div 13 = 45, \cdots$, puis $587 - 45 \times 13 = 2$.

- On effectue la division euclidienne de 10000 par 11 :

$$\begin{array}{rr|l}
 & 1\,0\,0\,0\,0 & 1\,1 \\ \cline{3-3}
- & \underline{9\,9} & 9\,0\,9 \\
 & 1\,0\,0 & \\
- & \underline{9\,9} & \\
 & 1 &
\end{array}$$

$$10000 = 909 \times 11 + 1.$$

Exercice 10

1. On suppose que la différence entre a et b est 538, et que le quotient dans la division de a par b est 13, le reste 34. On peut donc écrire

$$\begin{cases} a = b + 538 \\ a = 13b + 34 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$b + 538 = 13b + 34,$$

donc

$$538 - 34 = 13b - b \qquad b = \frac{504}{12} = 42.$$

Conclusion : $b = 42$ et $a = b + 538 = 42 + 538 = 580$.

2. Quand on divise n par 29 et par 27, les quotients sont les mêmes et les restes sont respectivement 1 et 25. En notant q les quotients identiques, on obtient le système

$$\begin{cases} n = 29q + 1 \\ n = 27q + 25 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$29q + 1 = 27q + 25,$$

donc

$$29q - 27q = 25 - 1 \qquad 2q = 24 \qquad q = \frac{24}{2} = 12.$$

Conclusion : $n = 29q + 1 = 29 \times 12 + 1 = 349$.