Mathématiques – Maths expertes

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Divisibilité, nombres premiers

Exercice 1 1. • On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 20 :

$$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5,$$

donc les diviseurs de 20 sont

$$1, 2, 4, 5, 10 \text{ et } 20.$$

• On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 36 :

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6,$$

donc les diviseurs de 36 sont

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 \text{ et } 36.$$

2. Le nombre 1 452 est :
   - divisible par 2, car il est pair ;
   - divisible par 3, car la somme de ses chiffres, $1+4+5+2=12$, est divisible par 3 ;
   - non divisible par 5, car il ne se termine ni par 0, ni par 5 ;
   - non divisible par 9, car la somme de ses chiffres, 12, n'est pas divisible par 9.

Exercice 2 On factorise : l'égalité $x^2 - 2xy = 14$ se réécrit

$$x(x-2y) = 14.$$

x et y sont des entiers naturels, donc $x-2y$ est un entier. C'est même un entier naturel, car x et 14 sont positifs, donc par la règle des signes, $x-2y$ est positif.
Or les différentes manières d'écrire 14 comme un produit d'entiers naturels sont :

$$14 = 1 \times 14 = 2 \times 7 = 7 \times 2 = 14 \times 1.$$

Il y a donc quatre possibilités :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ x-2y &= 14 \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= 2 \\ x-2y &= 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= 7 \\ x-2y &= 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= 14 \\ x-2y &= 1 \end{cases}.$$

On résout de tête chacun des quatre systèmes :

$$(x=1, y=-6,5) \quad , \quad (x=2, y=-2,5) \quad , \quad (x=7, y=2,5) \quad , \quad (x=14, y=6,5).$$

Aucun couple n'est un couple d'entiers naturels, donc le problème n'a aucune solution.

Exercice 3 1. Trois entiers consécutifs sont de la forme n, $n+1$, $n+2$, avec n entier (dans $\mathbb{Z}$), donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = 3(n+1).$$

$n+1$ est un entier, donc $n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

2. Quatre entiers consécutifs sont de la forme n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, avec n entier, donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n+6 = 4(n+1,5).$$

Or $n+1,5$ n'est pas un entier, donc la somme des quatre entiers consécutifs n'est pas un multiple de 4.

Exercice 4 On factorise :

$$n^2 - 2n = n(n-2).$$

D'après le point 1 de la proposition 1, si 5 divise n, il divise aussi $n(n-2)$.

Exercice 5 Commençons par rappeler que les nombres pairs sont les multiples de 2.

Pour démontrer le résultat de l'énoncé, on factorise

$$n^2 + n = n(n+1),$$

puis on distingue deux cas :

- Si n est pair, il est multiple de 2, donc $n(n+1)$ est également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair, donc multiple de 2 ; $n(n+1)$ est donc également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.

Dans tous les cas, $n^2 + n$ est un multiple de 2, donc un nombre pair.

Exercice 6 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 1.

1. Si $a|b$, alors $a|ub$ pour tout $u \in \mathbb{Z}$.
2. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(ub+vc)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

On commence par le point 1. Si $a|b$, on peut écrire $b = k \times a$, où k est un entier. Donc

$$ub = u(k \times a) = (uk) \times a,$$

qui est donc bien un multiple de a (car uk est un entier).

On démontre ensuite le point 2. Par hypothèse $a|b$ et $a|c$, donc on peut écrire $b = k \times a$ et $c = j \times a$, où k et j sont deux entiers. Mais alors

$$ub + vc = u(k \times a) + v(j \times a) = a(uk + vj).$$

Il s'agit bien d'un multiple de a, puisque $uk + vj$ est un entier (du fait que u, v, k, j sont des entiers).

Remarque : Une façon agréable d'énoncer le point 2 de la proposition 1 est de dire que

« Si a divise b et c, alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de b et c »

($ub + vc$ est ce que l'on appelle une combinaison linéaire de b et c).

Exercice 7 On fait un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse.** Soit n un entier naturel tel que $n+3$ divise $n+15$.
  De façon évidente, $n+3$ divise $n+3$, donc d'après la proposition 1 du cours, $n+3$ divise la combinaison linéaire

  $$1(n+15) - 1(n+3) = n + 15 - n - 3 = 12.$$

  On cherche les solutions avec n entier naturel, donc $n+3$ est supérieur ou égal à 3. Or les seuls diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à 3 sont 3, 4, 6 et 12. On a donc quatre possibilités :

  $$n+3 = 3 \quad , \quad n+3 = 4 \quad , \quad n+3 = 6 \quad , \quad n+3 = 12,$$

  qui donnent

  $$n = 0 \quad , \quad n = 1 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad n = 9.$$

- **Synthèse.** On vérifie les solutions trouvées :
  — Si $n = 0$, on on bien $n+3 = 0+3 = 3$, qui divise $n+15 = 0+15 = 15$.
  — Si $n = 1$, on on bien $n+3 = 1+3 = 4$, qui divise $n+15 = 1+15 = 16$.
  — Si $n = 3$, on on bien $n+3 = 3+3 = 6$, qui divise $n+15 = 3+15 = 18$.
  — Si $n = 9$, on on bien $n+3 = 9+3 = 12$, qui divise $n+15 = 9+15 = 24$.

  Conclusion : les entiers naturels n tels que $n+3$ divise $n+15$ sont 0, 1, 3 et 9.