

Devoir surveillé n°4

- Le soin, la rédaction et l'orthographe seront pris en compte dans l'évaluation des copies.
- On demande aux élèves de rendre le sujet du devoir avec leur copie.

Exercice 1

5 points

Écrire sur votre copie lesquels sont corrects parmi les énoncés A, B, C, D, E, F, G, H suivants. Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte rapporte 1 pt, une réponse fausse enlève 0,5 pt.

- A. $14 \equiv 2 [3]$.
 B. $6 \equiv -4 [4]$.
 C. $6^{100} \equiv 1 [2]$.
 D. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n + 1 \equiv 1 [n]$.
 E. $\forall k \in \mathbb{Z}, 39k \equiv 4k [5]$.
 F. Soient a, b, q, r dans \mathbb{N}^* . Si $a = bq + r$, alors $a \equiv r [b]$.
 G. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \equiv 3 [9]$, alors n est divisible par 3.
 H. Le seul entier $0 \leq n \leq 12$ qui vérifie $n \equiv -5 [6]$ est $n = 1$.

Exercice 2

6 points

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Recopier et compléter le tableau de congruence ci-dessous, avec les entiers 0, 1 ou 2 :

modulo 3, n est congru à	0	1	2
modulo 3, $n^2 - 1$ est congru à			

Justifier chaque réponse.

2. Démontrer l'affirmation suivante :

Si n n'est pas multiple de 3, alors $n^2 - 1$ est multiple de 3.

3. Prouver que la propriété de la question précédente est aussi une conséquence du petit théorème de Fermat.

Exercice 3

5 points

1. Justifier l'égalité $7^2 \equiv -1 [10]$.
 2. En déduire le chiffre des unités de 7^{100} .
 3. Déterminer le chiffre des unités de 7^{99} . (Indication : écrire $7^{100} \equiv 7^{99} \times 7 [10]$ et multiplier par 3.)

Exercice 4

6 points

Déterminer les couples d'entiers (u, v) solutions de l'équation

$$13u - 5v = 2.$$

(Indication : on aura intérêt à travailler modulo 5.)