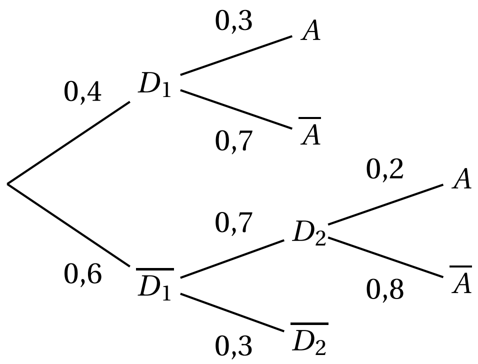
Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1

Partie A

1. On complète ci-contre l'arbre pondéré à partir des données de l'énoncé.



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,204.$$

3. On sait que la personne a acheté le produit. La probabilité qu'elle ait décroché au premier appel est

$$P_A(D_1) = \frac{P(A \cap D_1)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} \approx 0,588.$$

Partie B

1. (a) On répète 30 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre 0,204, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$, $p = 0,204$.

   (b) La probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit est

   $$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx 0,179.$$

   (c) L'espérance de X est

   $$E(X) = n \times p = 30 \times 0,204 = 6,12.$$

   En moyenne, sur 30 personnes, 6,12 achètent le produit.

2. On répète n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre 0,204, donc d'après le cours, la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit est

   $$1 - (1 - 0,204)^n = 1 - 0,796^n.$$

   On cherche par tâtonnement, avec la calculatrice, le plus petit entier naturel n tel que

   $$1 - 0,796^n \geq 0,99.$$

   On obtient $1 - 0,796^{20} = 0,989\cdots$ et $1 - 0,796^{21} = 0,991\cdots$, donc le plus petit entier naturel qui convienne est $n = 21$.

Exercice 2

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x+2 & , & v(x) = \mathrm{e}^{-x}, \\ u'(x) = 1 & , & v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}. \end{array}$$

   On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} - x \times \mathrm{e}^{-x} - 2 \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= (1 - x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-x-1)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

2. On étudie le signe de f' et on en déduit les variations de f :

x	∞		-2		α		-1		$+\infty$
$(-x-1)$				$+$			0	$-$	
e^{-x}				$+$				$+$	
$f'(x)$				$+$			0	$-$	
$f(x)$			0		2		e		

3.
   - La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-2;-1]$;
   - $f(-2) = 0$, $f(-1) = \mathrm{e}$;
   - $2 \in [0;\mathrm{e}]$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ a exactement une solution α dans $[-2;-1]$.

4. Grâce à la calculatrice, on obtient :

$$-1{,}60 < \alpha < -1{,}59.$$