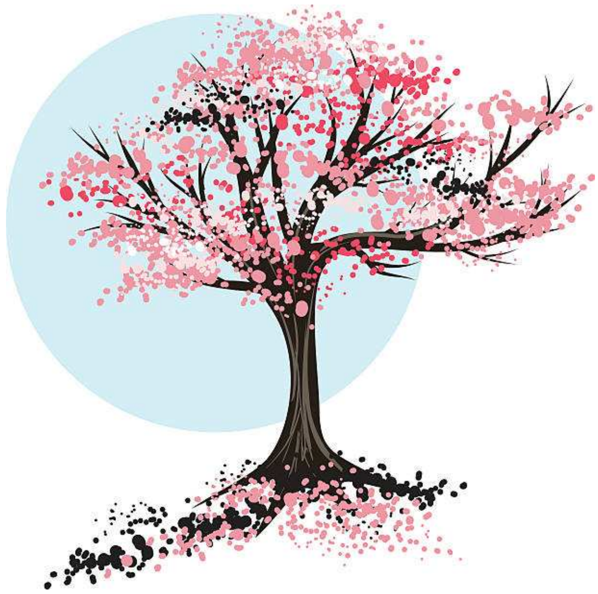
Lycée Mariette Boulogne-sur-Mer



Exercices de Mathématiques

Première générale Nicolas Perpète

Table des matières

I. Le second degré : équations et paraboles

Exercice 1.
Résoudre les équations :

1. $x^2+2x=0$.
2. $x^2-16=0$.
3. $(2x-1)(x-5)=0$.
4. $x^2+7=0$.

Exercice 2 (🏛).
Résoudre les équations :

1. $x^2-3x-4=0$
2. $2x^2-12x=-18$
3. $x^2-4x+5=0$
4. $x^2+2x-4=0$.
5. $x^2=-6x$

Exercice 3.
Les côtés adjacents à l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent x et $x+7$, l'hypoténuse mesure 17. Déterminer la valeur de x.

Exercice 4 (🏛).
Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Une allée de 3 mètres de large entoure cette pelouse. L'aire totale de l'ensemble formé par la pelouse et l'allée est de 360 m^2.

1. On note x la largeur de la pelouse. Faire une figure.
2. Traduire l'énoncé par une équation, puis déterminer la valeur de x et les dimensions du terrain.

Exercice 5 (🏅).
Déterminer les dimensions d'un champ rectangulaire dont le périmètre est $P=54$ m et dont la surface est $S=180$ m^2.

Exercice 6 (🏅).
Un groupe d'amis décide de louer une maison de vacances pour un montant total de 2 400 €. Deux des amis doivent annuler leur participation à la dernière minute, obligeant chacun des autres à payer 40 € de plus pour la location.
Combien d'amis sont-ils partis en définitive ?

Exercice 7 (🏛).
Dans chaque cas, dire si la parabole est vers le haut ou vers bas, déterminer les coordonnées de son sommet, puis construire la parabole à l'aide d'un tableau de valeurs.

1. $P_1 : y=x^2-6x+5$.
2. $P_2 : y=-0{,}5x^2-x+4$.

Exercice 8.
Soit f une fonction de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$, et soit P sa courbe représentative.

1. Donner l'allure de P sachant que :
   - l'équation $f(x)=0$ a deux solutions $x_1=-1$, $x_2=3$.
   - le sommet de P est le point $S(1;2)$.
2. On pose $\Delta=b^2-4ac$. Déterminer les signes de a et de Δ.

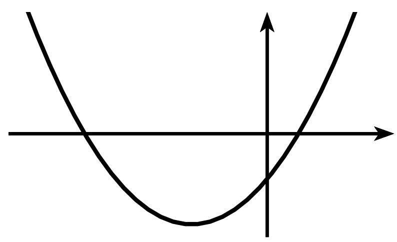
Exercice 9 (🏛).
Après plusieurs relevés, un scientifique a modélisé une passe de volley-ball, la passe de Clément à son coéquipier Florian. La hauteur du ballon $h(t)$ en fonction du temps t est

$$h(t)=-0{,}525t^2+2{,}1t+1{,}9,$$

où $h(t)$ est exprimée en mètres et t en secondes.

1. À quelle hauteur Clément commence-t-il sa passe au temps $t=0$?
2. Déterminer la hauteur maximale du ballon.
3. Florian ne réussit pas à toucher le ballon que Clément lui passe. Combien de temps après la passe de Clément le ballon tombe-t-il au sol ?

Exercice 10 (🏛).
On a tracé une parabole $P : y=ax^2+bx+c$.



1. Déterminer les signes de a, c et Δ.
2. On note S le sommet de P. Prouver que

$$b=-2a\times x_S.$$

En déduire le signe de b.

Exercice 11 (🏅).
Soit $P : y=ax^2+bx+c$ une parabole et S son sommet. Démontrer que $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$.

Exercice 12 (🏛).
Une entreprise fabrique entre 0 et 50 objets par jour. Chaque objet est vendu 300 € et toute la production est vendue.
On estime par ailleurs que le coût $C(x)$ de fabrication de x objets, en euros, est donné par la formule

$$C(x) = x^2 + 230x + 325.$$

1. Exprimer en fonction de x le bénéfice $B(x)$ de l'entreprise lorsqu'elle produit et vend x objets.
2. Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ?

Exercice 13 (🏅).
1. Résoudre l'équation

$$x^3 = 2x.$$

2. a. Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right).$$

   b. Résoudre l'équation

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0.$$

II. Probabilités

Exercice 14.
Les 280 pensionnaires d'une maison de retraite peuvent s'abonner à deux journaux, *Le Soir* et *Le Matin*, qu'ils reçoivent chaque jour dans leur chambre. Le matin, la personne chargée de la distribution des journaux apporte *Le Matin* à 70 pensionnaires ; et le soir, elle distribue *Le Soir* à 100 pensionnaires. Par ailleurs, 160 pensionnaires de la maison de retraite ne sont abonnés à aucun journal.

1. Représenter la situation par un tableau d'effectif.
2. On choisit un pensionnaire au hasard. On considère les événements :
   S : « le pensionnaire est abonné au *Soir* »,
   M : « le pensionnaire est abonné au *Matin* »
   a. Donner les valeurs de $P(S)$ et de $P\left(\overline{M}\right)$.
   b. Quelle est la probabilité que le pensionnaire soit abonné aux deux journaux ? À au moins l'un des deux journaux ?
   c. On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. Quelle est la probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* ?

Exercice 15.
Un candidat à un examen connaît trois questions d'histoire sur les six possibles et deux questions de géographie sur les cinq possibles. Un examinateur lui pose une question d'histoire et une question de géographie. On considère les événements :
H : « le candidat connaît la question d'histoire »
G : « le candidat connaît la question de géo. ».

1. Donner sans calcul les valeurs de $P(H)$ et $P(G)$.
2. En utilisant un tableau à double entrée, calculer $P(H \cap G)$.
3. Quelle est la probabilité que le candidat connaisse au moins l'une des deux questions ?

Exercice 16.
Deux dés ont chacun 2 faces rouges, 2 faces bleues et 2 faces blanches. On lance simultanément les 2 dés. Quelle est la probabilité qu'ils montrent tous les deux la même couleur ?

Exercice 17.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 60 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose. Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. On sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 95 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 90 % des cas.

On choisit un coyote au hasard. On considère les événements :
M : « le coyote est malade »,
T : « le test est positif ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer $P(M \cap T)$ et $P(T)$.

Exercice 18.
Une entreprise vendant des parquets flottants s'approvisionne auprès de deux fournisseurs A et B. Le fournisseur A livre 70 % du stock de l'entreprise. On sait que 2 % des pièces livrées par A présentent un défaut et 3 % des pièces livrées par B présentent un défaut.
On prélève au hasard une pièce du stock de l'entreprise, on note A l'événement « la pièce provient du fournisseur A » et D l'événement « la pièce a un défaut ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(D)$.

Exercice 19.
Un sachet contient 26 jetons sur lesquels sont inscrites les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement deux jetons du sachet, sans avoir remis le premier avant de tirer le deuxième.
On note V_1 l'événement « le 1er jeton est une voyelle » et V_2 l'événement « le 2e jeton est une voyelle » .
En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité de tirer une voyelle et une consonne (dans n'importe quel ordre).

Exercice 20 (🏅).
Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'événement

A_i : « la i-ème boule tirée est blanche ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'événement

B : « on a tiré au moins une boule noire ».

Exercice 21 (🏛).
Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53 % de chances que ce soit un tir à 2 points et 47 % de chances que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est 52 % contre 44 % à 3 points.
On choisit un tir au hasard. On considère les événements :
D : « Stephen Curry tire à 2 points »,
M : « Stephen Curry marque ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque.
3. Montrer que $P(M) = 0,4824$.
4. Calculer $P_M(D)$. Arrondir au centième.

Exercice 22 (🏛).
Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité qu'un appareil fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$. On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison. On constate que :

- un appareil en parfait état de fonctionnement est toujours accepté à l'issue du test;
- un appareil qui n'est pas en parfait état peut néanmoins être accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note F et T, respectivement, les événements « l'appareil fonctionne parfaitement » et « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

1. Calculer $P\left(\overline{F} \cap T\right)$ et $P(T)$.
2. Sachant qu'un appareil a été accepté à l'issue du test, calculer la probabilité qu'il ne fonctionne pas parfaitement.

Exercice 23 (🏛).
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.
On interroge une personne au hasard et on note :
R : « la personne utilise régulièrement les transports en commun »,
J : « la personne est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré – on ne peut pas le compléter en entier pour l'instant.
2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française. Calculer $P\left(\overline{R} \cap J\right)$.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun. (Arrondir au millième.)

Exercice 24.
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 25 (🏅).
On reprend l'énoncé de l'exercice 20. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 26 (🏛).
Les joueurs de jeux de rôles utilisent parfois des dés à 100 faces, numérotées de 1 à 100. On suppose qu'on dispose d'un tel dé, et qu'il est équilibré. On le lance et on note le résultat obtenu.
On considère les événements :
A : « le résultat obtenu est pair » ;
B : « le résultat obtenu est multiple de 5 ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 27.
Un sac contient trois jetons rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jetons verts numérotés 1 et 2 et un jeton bleu numéroté 1. On tire au hasard un jeton du sac.
On désigne respectivement par R, U et D les événements « le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».
Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?

Exercice 28 (🏛).
Les trois questions sont indépendantes.

1. Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$ et $P(A \cup B) = 0,9$.
   Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. On suppose à présent que $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,7$; et que les événements A et B sont indépendants. Déterminer la valeur de $P(B)$.
3. Déterminer les événements indépendants d'eux-mêmes.

III. Suites numériques

Exercice 29 (🏛).

Calculer les premiers termes de chacune des suites :

1. $u_n = 0,5n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 10 - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
4. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = 4u_n.$$
5. $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, où $f(x) = (x+1)^2$.
7. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $f(x) = x^2 - 2x$.

Exercice 30 (🏛).
Une plaque en verre teinté atténue de 15 % l'intensité lumineuse d'un rayon qui la traverse.
On note u_n l'intensité lumineuse (mesurée en lumens) d'un rayon à la sortie si on superpose n plaques identiques ($n \geq 1$).
On suppose que l'intensité lumineuse à l'entrée de la première plaque est $u_0 = 12$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. À l'aide du tableur, déterminer le nombre minimal de plaques à superposer pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 10.

Exercice 31 (🏛).
On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. On programme une machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament ;
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

1. Combien vaut w_0 ? Calculer w_1, w_2 et w_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
3. À l'aide du tableur, conjecturer le comportement de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le long terme.

Exercice 32.

Le 01/01/2020, on emprunte 10 000 € à la banque au taux d'intérêt mensuel de 2 %. À chaque fin de mois on rembourse 300 €.

Comment ça marche ?... Le 01/01/2020 on emprunte 10 000 € au taux d'intérêt mensuel de 2 %, donc à la fin du mois de janvier 2020 la somme à rembourser est passée à

$$1{,}02 \times 10000 = 10200 \text{ €}.$$

À ce moment on rembourse 300 €, donc le 01/02/2020 il reste à rembourser

$$10200 - 300 = 9900 \text{ €}.$$

On note u_n la somme à rembourser le 1er jour du n^e mois (en convenant que janvier 2020 est le mois 0, février 2020 le mois 1, etc.). On a donc $u_0 = 10000$ et $u_1 = 9900$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. En utilisant le tableur, déterminer la durée du crédit et la somme totale remboursée.

Exercice 33 ().

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. Construire sur un même graphique, sur l'intervalle $[0;1]$, la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction f (on prendra 8 cm ou 8 carreaux comme unité graphique).
2. Construire les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses.
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 34 ().

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0{,}5u_n + 1.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Tracer dans un même repère les droites d'équations $y = x$ et $y = -0{,}5x + 1$ sur l'intervalle $[-1;3]$ (on prendra 2 cm ou 2 carreaux comme unité graphique).
3. Construire les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses.
4. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 35 ().

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1{,}5u_n - 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Tracer dans un même repère les droites d'équations $y = x$ et $y = 1{,}5x - 1$ sur l'intervalle $[0;6]$ (on prendra 1 cm ou 1 carreau comme unité graphique).
3. Construire les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses.
4. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 36.

Dans chaque cas, exprimer u_{n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. $u_n = 2n + 5$.
2. $u_n = n^2 + 3n - 5$.
3. $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Exercice 37 ().

Dans chaque cas, étudier les variations de la suite de terme général :

1. $u_n = -2n + 4$.
2. $v_n = n^2 - n$.

Exercice 38 ().

Étudier les variations de la suite définie par $\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_{n+1} & = x_n + n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exercice 39 ( ).

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_n = \frac{n}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $w_{n+1} - w_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire le sens de variations de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 40 ( ).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $u_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que $u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

IV. Le second degré : signe et factorisation

Exercice 41.
Construire les tableaux de signes de :

1. $2x-6$.
2. $-2x-3$.
3. x^2-3x.
4. $16x^2-9$.

Exercice 42 (🏛).
Construire les tableaux de signes de :

1. x^2-5x+7.
2. $-x^2+6x-8$.

Exercice 43 (🏛).
Résoudre les inéquations :

1. $x^2 \leq -2x+1$.
2. $x \leq x^2$.
3. $x^3 > 2x^2+3x$.

Exercice 44 (🏛).

1. Tracer dans un même repère la droite $D : y = x-1$ et la parabole $P : y = x^2-2x-5$.
2. Étudier les positions relatives de P et D. (Quand les courbes se coupent-elles, quand P est-elle au-dessus de D ? En dessous ?)

Exercice 45.
Construire les paraboles $P : y = -x^2+1$ et $Q : y = x^2-2x-3$ avec la calculatrice.
Étudier leurs positions relatives par le calcul.

Exercice 46.

1. Développer $-2(x+1)(x-3)$.
2. Déterminer les racines de $-2x^2+4x+6$.
3. Construire le tableau de signe de $-2x^2+4x+6$ en utilisant deux techniques différentes :
   - en utilisant le théorème 1 du cours ;
   - en utilisant le signe d'un produit (cf cours de 2^{de}).

Exercice 47 (🏛).
Factoriser les expressions du second degré :

1. x^2-3x-4.
2. $-2x^2+20x-50$.

Exercice 48 (🏛).
La parabole $P : y = ax^2+bx+c$ coupe l'axe des abscisses en 1 et en 5. Elle passe par le point $M(0;2)$.

1. Faire une figure où on donnera l'allure de P.
2. On pose $f(x) = ax^2+bx+c$ pour tout réel x.
   Écrire $f(x)$ sous forme factorisée, puis déterminer la valeur de a en utilisant le point M.
3. Développer l'expression obtenue dans la question précédente pour déterminer b et c.

Exercice 49.
On suppose que la parabole $P : y = ax^2+bx+c$ passe par les points $A(3;0)$ et $B(-2;0)$; et que son sommet S a pour coordonnées $(0,5\ ;\ 1)$.
En vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer les valeurs de a, b, c.

Exercice 50 (🏛).
On pose $f(x) = 0,25x^2 - x - 3$ pour tout réel x. On note P la parabole qui représente f.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer les coordonnées du sommet S de P, puis donner l'allure de P.
3. Donner l'écriture factorisée de $f(x)$.

Exercice 51 (🏅).

1. On suppose que ax^2+bx+c a deux racines x_1, x_2. Prouver que :
   a. $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$.
   b. $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
2. Dans chacun des cas suivants, l'expression du second degré a deux racines, dont l'une est « évidente ». Sans utiliser le discriminant, déterminer les deux racines.
   a. $x^2+15,5x-16,5$.
   b. $3x^2-4x-4$.
3. On suppose que ax^2+bx+c a deux racines x_1, x_2. En utilisant la question 1, justifier la factorisation :
$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Exercice 52 (🏅).
Soit m un nombre réel. Dans chaque cas déterminer, suivant la valeur de m, le nombre de solutions de l'équation.

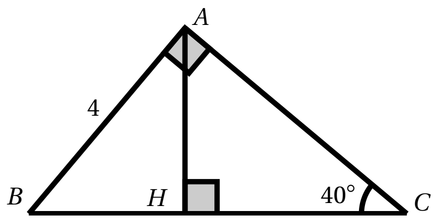
1. $x^2+2x = m$.
2. $x^2+mx = -1$.

V. Trigonométrie

Exercice 53.
ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. On pose $\theta = \widehat{ACB}$.

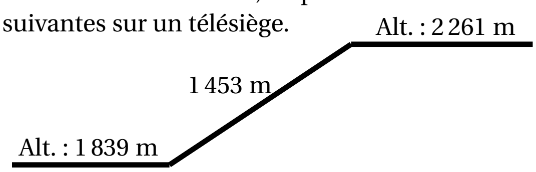
1. Prouver que ABC est un triangle rectangle et faire une figure.
2. Calculer $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$. Écrire les réponses sous forme de fractions.
3. Vérifier que :
   - $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$;
   - $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Exercice 54 (🏛).
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $\widehat{BCA} = 40°$. On note H le pied de la hauteur issue de A.



Calculer la longueur AB, puis la longueur AH, arrondies au centième.

Exercice 55 (🏛).
Dans une station de ski, on peut lire les informations suivantes sur un télésiège.



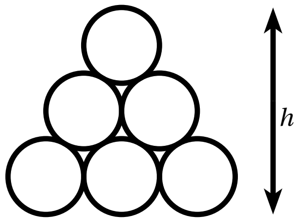
Calculer l'angle formé par le télésiège avec l'horizontale. On arrondira au dixième de degré.

Dans tous les exercices qui suivent, prendre 4 carreaux ou 4 cm comme unité de longueur.

Exercice 56.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O, de rayon 1, et soit N le point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{ION} = 60°$ et $y_N > 0$. Le point H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle OIN.

1. Faire une figure et déterminer la nature du triangle OIN.
2. En déduire la longueur OH, puis calculer HN.
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos 60°$ et $\sin 60°$.

Exercice 57.
Les six cercles de rayon 1 ci-dessous sont tangents. Calculer la hauteur h.



Exercice 58.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O, de rayon 1, et soit N le point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{ION} = 45°$ et $y_N > 0$. Le point H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle OIN.

1. Faire une figure et déterminer la nature du triangle OHN.
2. Calculer les longueurs OH et HN.
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos 45°$ et $\sin 45°$.

Exercice 59.

1. Tracer le cercle trigonométrique et placer les points associés à π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, 2π.
2. Sur un nouveau cercle, placer les points associés à $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 60 (🏛).
Tracer le cercle trigonométrique et placer les points associés à
$$\frac{0\pi}{3}, \frac{1\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \ldots, \frac{5\pi}{3}.$$
Relier les points deux à deux. Quelle figure forme-t-on ?

Exercice 61 (🏛).
Tracer le cercle trigonométrique et placer les points associés à
$$\frac{0\pi}{4}, \frac{1\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \ldots, \frac{7\pi}{4}.$$
Relier les points deux à deux. Quelle figure forme-t-on ?

Exercice 62 (🏛).
Tracer le cercle trigonométrique et placer les points associés à
$$\frac{0\pi}{6}, \frac{1\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \ldots, \frac{11\pi}{6}.$$
Relier les points deux à deux. Quelle figure forme-t-on ?

Exercice 63 (🏛).

Dans chaque question, on expliquera les réponses en faisant un cercle trigonométrique.

1. Calculer le cos et le sin de π, $\frac{\pi}{2}$, 0, -5π, $\frac{31\pi}{2}$.
2. Calculer le cos et le sin de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$.
3. Calculer le cos et le sin de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.
4. Calculer le cos et le sin de $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2025\pi}{4}$.

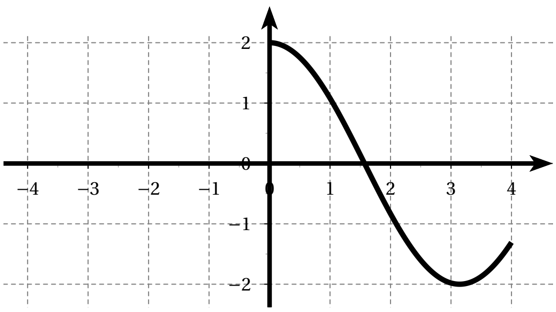
Exercice 64.

Soit x un nombre réel. Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos(x+\pi) \qquad , \qquad \sin(x+\pi).$$

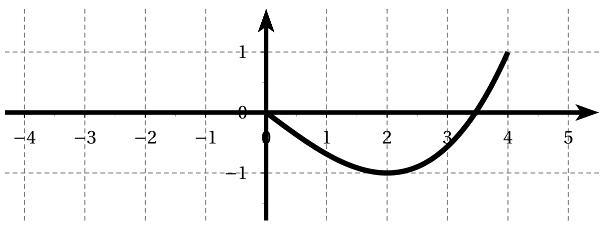
Exercice 65 (🏛).

Compléter la courbe de la fonction sachant qu'elle est paire.



Exercice 66 (🏛).

Compléter la courbe de la fonction sachant qu'elle est impaire.



Exercice 67 (🏛).

Étudier la parité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^2 - 1$.
2. $g(x) = 5x$
3. $h(x) = x^4 - 5x^2 + 3$.
4. $i(x) = x^3 - 6x$.
5. $j(x) = |x|$.
6. $k(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

Exercice 68 (🏅).

Existe-t-il des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à la fois paires et impaires ? Si oui, déterminer lesquelles.

Exercice 69 (🏅).

1. Soit ABC un triangle, avec $\widehat{A}$ aigu, et soit H le pied de la hauteur issue de C. En calculant $\sin\widehat{A}$ dans le triangle AHC, prouver que l'aire du triangle ABC est égale à

$$\frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\widehat{A}.$$

2. Dans un repère orthonormé (O, I, J), $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique, N est le point associé à $\frac{\pi}{4}$ et A le point associé à $\frac{\pi}{8}$.

   a. Donner les coordonnées de N, puis prouver que $IN = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

   b. En calculant de deux façons différentes l'aire du quadrilatère $OIAN$, prouver que

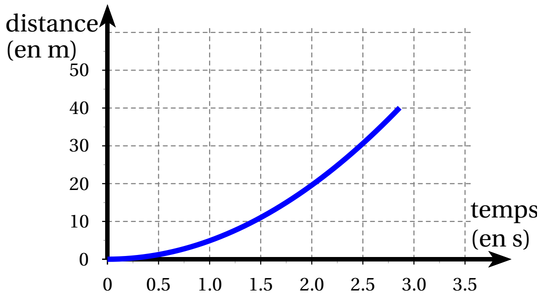
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

   c. En déduire

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

VI. Dérivation

Exercice 70.
La distance (en m) parcourue au temps t (en s) par une pierre en chute libre est $d(t) = 4,9t^2$.
On lance cette pierre d'une hauteur de 40 m.



1. Combien de temps la pierre met-elle pour arriver au sol ? (Arrondir au centième de seconde.)
2. Quelle est la vitesse moyenne de la pierre entre les temps $t = 0$ et $t = 2$? À quoi cette vitesse moyenne correspond-elle sur le graphique ?

Exercice 71 (🏅).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ de f sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. **a.** Démontrer l'égalité : pour tout $h \neq 0$,
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2+h.$$
b. En déduire $f'(1)$.
c. Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. Soit a un nombre réel. Démontrer que pour tout $h \neq 0$:
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a+h,$$
puis calculer $f'(a)$.

Exercice 72 (🏅).
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Prouver que pour tous réels x, y :
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$
2. Démontrer que pour tout $h \neq 0$:
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2.$$
3. En déduire $f'(a)$.

Exercice 73 (🏅).
La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$
Soit $a \neq 0$.

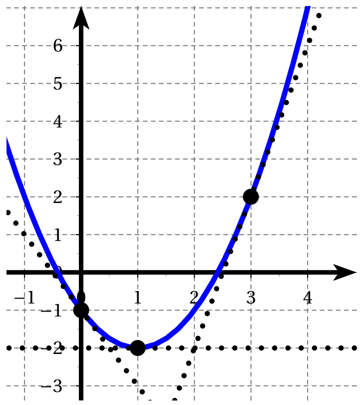
1. Démontrer que pour tout $h \neq 0$, h assez petit :
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$
2. En déduire $f'(a)$.

Exercice 74 (🏛).
Dans chaque cas, donner l'ensemble de définition de la fonction et calculer la fonction dérivée.

1. $f(x) = -3x+1$.
2. $g(x) = 4x^2+7$.
3. $h(x) = -x^2+3x-5$.
4. $i(x) = 3\left(x^2-6x+5\right)$.
5. $j(x) = x^3+6x^2-x+7$.
6. $k(x) = -2x^4+5x^3+x^2-8x+19$.
7. $\ell(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x}$.
8. $m(x) = 2\left(x+\sqrt{x}\right)$.
9. $n(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{x}$.
10. $o(x) = \frac{1}{3x^3} - \frac{0,25}{x^4}$.

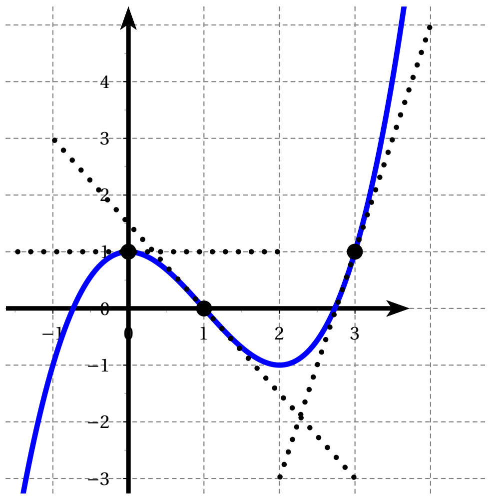
Exercice 75 (🏛).
On reprend l'énoncé de l'exercice 70. Déterminer la vitesse de la pierre au moment de l'impact au sol.

Exercice 76.
On a construit ci-dessous la courbe d'une fonction f et on a tracé trois tangentes en pointillés. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs des nombres dérivés :
$$f'(0) \quad , \quad f'(1) \quad , \quad f'(3).$$



Exercice 77 (🏛).

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f. Utiliser le graphique pour compléter le tableau de valeurs (on ne demande aucune justification).



x	0	1	3
$f(x)$			
$f'(x)$			

Exercice 78 (🏛).

La fonction f est définie sur $[1;4]$ par $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, 2, 4; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [1;4]$.
2. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de T_A.
3. Déterminer également les équations de T_B et T_C.
4. Tracer les trois tangentes dans un repère orthonormé, puis construire la courbe de la fonction f. On choisira une unité graphique adaptée et on fera un graphique soigné.

Exercice 79 (🏛).

La fonction f est définie sur $[0;4]$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0, 1, 4; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0;4]$.
2. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de T_B.
3. Déterminer également l'équation de T_C.
4. On admet que T_A a pour équation $x = 0$. Tracer les trois tangentes dans un repère orthonormé, puis construire la courbe de la fonction f.

Exercice 80.

Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = x^3 - 3x$. On note $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative.

1. Faire un tableau de valeurs pour f sur $[-2;2]$ avec un pas de 1 et placer les points correspondants dans un repère.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2;2]$.
3. Tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}f$ en chacun des cinq points placés à la question 1.
4. Construire soigneusement $\mathscr{C}f$.

Exercice 81.

1. Construire la courbe de la fonction h définie par $h(x) = |x|$ pour tout réel x.
2. Donner sans justification la dérivée de h.

Exercice 82 (🏅).

On définit deux fonctions c et r sur $[0;+\infty[$ par les formules :

$$c(x) = x^2 \qquad , \qquad r(x) = \sqrt{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de c, $\mathscr{R}$ celle de r.

1. Construire dans un même repère les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{R}$.
2. Soit $a > 0$. On note A le point de coordonnées $\left(a;\sqrt{a}\right)$, et B le point de coordonnées $\left(\sqrt{a};a\right)$. On note T_A la tangente à $\mathscr{R}$ au point A, T_B la tangente à $\mathscr{C}$ au point B.
   - **a.** Dans cette question, on prend $a = 4$. Placer A et B, puis tracer T_A et T_B sur la figure de la question 1.
   - **b.** On revient au cas général ($a > 0$). Quel est le coefficient directeur de T_B ? En déduire celui de T_A. Quel résultat du cours retrouve-t-on?
3. Justifier géométriquement la non dérivabilité de la fonction r en 0.

VII. Variables aléatoires

Exercice 83.
Un porte-monnaie contient deux pièces de 0,50 €, trois pièces de 1 € et trois pièces de 2 €. On choisit une pièce au hasard, on note X sa valeur.

1. Déterminer la loi de X.

2. On vous propose le jeu suivant : vous donnez 1 € et, en échange, vous pouvez choisir au hasard une des huit pièces. Avez-vous intérêt à jouer ? Pourquoi ?

Exercice 84 (🏛).
On lance deux dés équilibrés à 4 faces, on note X la somme des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de X à l'aide d'un tableau à double entrée.

2. Calculer $P(X \geq 6)$.

3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 85 (🏛).
Deux options sport sont proposées aux élèves d'un lycée : escalade et VTT. Il est autorisé de pratiquer les deux options à la fois. Dans une classe de 30 élèves :

- 6 élèves font à la fois de l'escalade et du VTT ;
- la moitié des élèves font de l'escalade ;
- 4 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.

1. Traduire les données de l'énoncé par un tableau d'effectif.

2. On choisit un élève au hasard. On considère les événements :
E : « il pratique l'escalade »,
V : « il pratique le VTT ».
Calculer $P(E)$ et $P(E \cap V)$.

3. Sachant qu'un élève pratique l'escalade, quelle est la probabilité qu'il pratique également le VTT ?

4. Pour pratiquer chacun des deux sports, il faut posséder une licence. La licence de VTT coûte 30 € et la licence d'escalade coûte 50 €.
On note X le coût total des licences pour un élève pris au hasard dans la classe (ce coût est nul si l'élève ne pratique aucun des deux sports).

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer l'espérance de X.

Exercice 86 (🏛).
Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53 % de chances que ce soit un tir à 2 points et 47 % de chances que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est 52 % contre 44 % à 3 points.
On choisit un tir au hasard. On considère les événements :
D : « Stephen Curry tire à 2 points »,
M : « Stephen Curry marque ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque.

3. Montrer que $P(M) = 0,4824$.

4. Calculer $P_M(D)$. Arrondir au centième.

5. On note X le nombre de points pour le tir choisi au hasard. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 87 (🏛).
Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15. La bille numérotée 1 est rouge, les billes numérotées 2 à 5 sont bleues, les autres billes sont vertes.
On choisit une bille au hasard dans l'urne.
On note R (respectivement B et V) l'événement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

1. a. Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

b. Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

2. Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.
Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ.
Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est $3 \times 3 - 10 = -1$ euro.
Calculer $P(G = 5)$, $P_R(G = 0)$ et $P_{(G=-4)}(V)$.

Exercice 88.
On lance un dé équilibré à 4 faces trois fois de suite. On note X le nombre de 4 obtenus.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 89 ().
Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H. Un jeu consiste à tirer successivement et au hasard deux lettres du sac, sans avoir remis la première avant de tirer la deuxième. On gagne 10 € par voyelle tirée. On note X le gain d'un joueur sur une partie.

1. Déterminer la loi de X à l'aide d'un arbre pondéré. On notera V_1 l'événement « la 1re lettre est une voyelle » et V_2 l'événement « la 2e lettre est une voyelle » .
2. Pour joueur à ce jeu, il faut payer 5 €. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 90 ().
On reprend l'énoncé de l'exercice 83. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 91 ().
On reprend l'énoncé de l'exercice 84. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 92 ().
On lance deux dés équilibrés à 4 faces, on note a et b les résultats obtenus, et Z le nombre de solutions de l'équation
$$ax^2 + bx + 1 = 0.$$

1. Compléter un tableau à double entrée donnant la valeur du discriminant Δ en fonction de a et b.
2. En déduire la loi de Z, puis calculer son espérance.

Exercice 93 ().
Soit X une variable aléatoire pouvant prendre deux valeurs, 0 et 1, et telle que
$$P(X=1) = p \quad , \quad P(X=0) = 1-p,$$
avec $0 \leq p \leq 1$.
On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Donner une situation concrète où une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On revient au cas général. Prouver que $E(X) = p$ et que $V(X) = p(1-p)$.
3. Démontrer que $\sigma(X) \leq \frac{1}{2}$.

VIII. Produit scalaire

Exercice 94.
On considère les points $A(0;4)$, $B(6;1)$, $C(-2;0)$ et $D(4;-3)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Faire une figure et construire le quadrilatère $ABDC$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire pour $ABDC$?
3. Calculer les longueurs AD et BC. Que peut-on en déduire pour $ABDC$? Justifier.

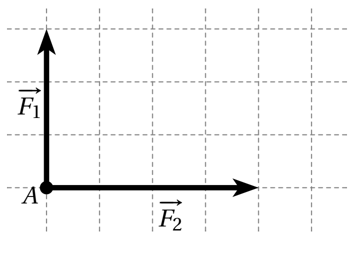
Exercice 95.
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. En utilisant la relation de Chasles, réduire les sommes vectorielles :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$; $\quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$; $\quad \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$; $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO}$

Exercice 96.
Soient $A(-1;-1)$, $B(3;0)$, $C(1;2)$ et soit I le milieu de $[BC]$.
Prouver que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ de deux façons différentes :

1. En utilisant les coordonnées.
2. En utilisant la relation de Chasles.

Exercice 97.
Un objet A subit les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ à angle droit représentées sur la figure ci-dessous, dont les intensités respectives sont $\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| = 3$ N, $\left\|\overrightarrow{F_2}\right\| = 4$ N.



Reproduire la figure, puis représenter la force résultante et calculer son intensité.

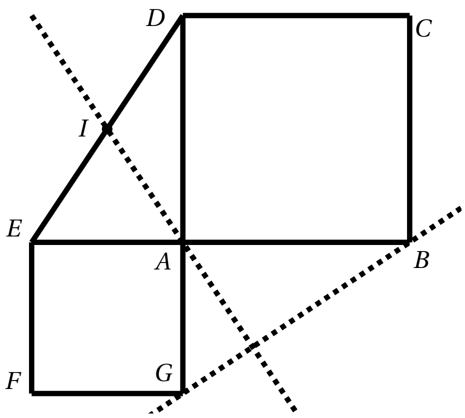
Exercice 98.
Placer les points $A(0;-1)$, $B(6;3)$, $C(1,5;6,5)$ et $H(4,5;2)$, puis calculer les produits scalaires :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$.

Exercice 99 (🏛).
Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(0;-4)$, $B(3;0,5)$, $C(-2;2)$ et $D(1;0)$.
   Prouver que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
2. Soient $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(0;2)$, $M(3;-4)$ et $M'(-4;-3)$.
   Démontrer que la médiane issue de O dans le triangle OAM est une hauteur du triangle OBM'.

Exercice 100 (🏛).
$ABCD$ est un carré de côté 3, $AEFG$ est un carré de côté 2, avec D, A et G alignés, ainsi que B, A et E comme sur la figure ci-dessous. Le point I est le milieu du segment $[DE]$.

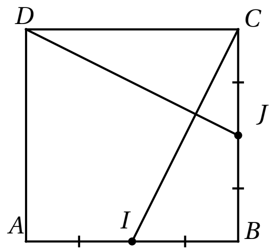


1. On travaille dans un repère de centre A dans lequel $B(3;0)$ et $D(0;3)$. Donner sans justification les coordonnées de E et G, puis calculer les coordonnées de I.
2. Démontrer que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

Exercice 101 (🏛 🏅).
On reprend l'énoncé de l'exercice précédent, que l'on va traiter sans utiliser les coordonnées.

1. Justifier que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$.
2. Développer le produit scalaire
$$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}\right).$$
3. Calculer chacun des quatre produits scalaires
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA},\qquad \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG},\qquad \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA},\qquad \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}.$$
   Justifier les réponses.
4. En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

Exercice 102 (🏛 🏅).
$ABCD$ est un carré de côté 4, I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$.



1. Démontrer que
$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}. \qquad (\star)$$
2. Calculer chacun des produits scalaires apparaissant dans le membre de droite de l'égalité $(\star)$.
3. En déduire que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.
4. En travaillant dans un repère orthonormé bien choisi, proposer une deuxième démonstration du résultat de la question 3.

Exercice 103 (🏅).
On se propose de démontrer la propriété bien connue :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

1. A, B, C, D sont quatre points du plan. Justifier l'égalité :
$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=0.$$
   Indication : Écrire $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$, développer, puis simplifier.
2. Construire un triangle ABC, puis H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C. Prouver, grâce à la question 1, que (AH) est la hauteur issue de A.

Exercice 104 (🏅).
On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$,
$$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}=\|\overrightarrow{w}\|^2.$$

1. En utilisant le rappel ci-dessus, la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, prouver que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$:
$$\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.$$
2. En déduire que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$:
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right).$$

Exercice 105.

1. En utilisant l'exercice 104, démontrer le théorème du cours : pour tous points A, B, C,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right).$$

2. **Application n°1.** ABC est un triangle tel que $AB=6$, $AC=5$, $BC=3$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
3. **Application n°2.** Démontrer le théorème du cours : si $A\neq B$ et $A\neq C$,

$$(AB)\perp(AC)\iff\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$

Exercice 106.

A, B, C sont trois points tels que $AB=4$, $AC=3$ et $\widehat{BAC}=45°$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 107.

Les deux questions sont indépendantes. On demande de donner dans chaque cas une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. **Cas n°1.** $A(0;-1)$, $B(6;3)$ et $C(2;4)$.
2. **Cas n°2.** ABC est un triangle tel que $AB=4$, $AC=5$, $BC=6$.

Exercice 108.

ABC est un triangle tel que $AB=4$, $BC=\sqrt{21}$, $\widehat{A}=60°$. Calculer AC.

Exercice 109.

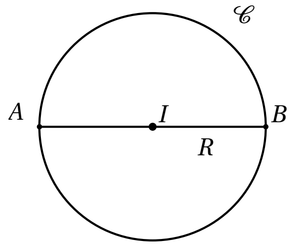
Dans chaque cas, faire une figure et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1. ABC est un triangle tel que $AB=3$, $AC=2$, $\widehat{BAC}=30°$.
2. $A(2;2)$, $B(-1;0)$, $C(3;0)$.
3. ABC est isocèle en C et $AB=3$.
4. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=4$, $AC=6$, $AD=3$.
5. $ABCD$ est un carré de côté 5.
6. $BCKL$ est un rectangle tel que $BC=4$ et $BL=3$, A est défini par $\overrightarrow{LA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{LK}$.
   Indication : Travailler dans un repère orthonormé.
7. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB=5$, $AD=2$ et $\widehat{BAD}=120°$.
   Indication : Développer

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right).$$

Exercice 110.

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre I, de rayon R et de diamètre $[AB]$.



1. Soit M un point du plan. En remarquant que $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$, démontrer que

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-R^2.$$

2. En déduire l'équivalence :

$$M\in\mathscr{C}\iff\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$$

Exercice 111.

1. Démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2.$$

2. $ABCD$ est un parallélogramme. Démontrer l'identité, dite *du parallélogramme* :

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.$$

IX. Variations des fonctions

Exercice 112 (🏛).
Dans chaque cas, construire le tableau de variations de la fonction. Lorsqu'il y a l'icône ★, on vous demande aussi de construire la courbe représentative.

1. ★ $f(x) = -x^2 + 4x - 3,\ x \in \mathbb{R}$.

2. $g(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}5x^2 - 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

3. ★ $h(x) = x + \frac{4}{x},\ x \in \mathbb{R}^*$.

Indication : Vous devez trouver $h'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$.

Exercice 113.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

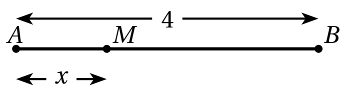
1. Étudier les variations de f.

2. **a.** Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative (C) de la fonction f au point d'abscisse 0.

b. Étudier les positions relatives de (T) et (C).

3. Construire (C) et (T) dans un même repère.

Exercice 114 (🏛).
On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 et un point mobile M pouvant se déplacer librement sur ce segment.

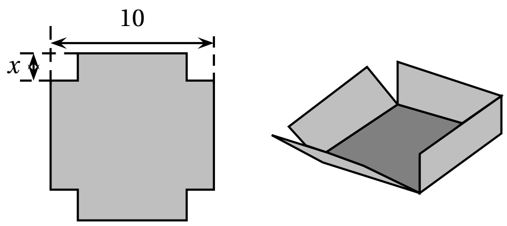


On note x la longueur du segment $[AM]$ et $f(x)$ le produit des longueurs $AM \times BM$.

1. Prouver que $f(x) = 4x - x^2$.

2. Où faut-il placer le point M pour que le produit des longueurs $AM \times BM$ soit maximal ?

Exercice 115 (🏛).
On dispose d'un carré de métal de 10 cm de côté. Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords par pliage.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ? Démontrer que le volume de la boîte (en cm^3) est égal à

$$4x^3 - 40x^2 + 100x.$$

2. Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

Exercice 116 (🏛).
Dans chaque cas, construire le tableau de variations de la fonction. Lorsqu'il y a l'icône ★, on vous demande aussi de construire la courbe représentative.

1. ★ $f(x) = \frac{3x-2}{2x-1},\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. $g(x) = \left(x^2 - x - 2\right)^2,\ x \in \mathbb{R}$.

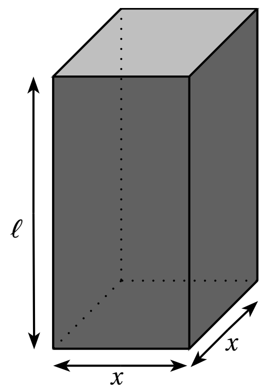
3. $h(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-3},\ x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

4. $i(x) = (x-12)\sqrt{x},\ x \in [1; +\infty[$.

Indication : Vous devez trouver $i'(x) = \frac{3x-12}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 117 (🏅).

On veut fabriquer une cuve à ciel ouvert, pouvant recueillir de l'eau de pluie. Cette cuve a la forme d'un pavé droit à base carrée de côté x, en mètres, avec $x \in [1\ ;\ 6]$. Elle a un volume de 4 m^3. On utilise une peinture antirouille pour traiter les **parois intérieures**.



1. **a.** On note ℓ la hauteur de la cuve, en mètres. Justifier l'égalité

$$\ell = \frac{4}{x^2}.$$

b. On note $S(x)$ l'aire en m^2 de la surface à peindre. Prouver que pour tout $x \in [1\ ;\ 6]$:

$$S(x) = x^2 + \frac{16}{x}.$$

2. **a.** Calculer $S'(x)$ pour $x \in [1\ ;\ 6]$, puis démontrer que pour tout $x \in [1\ ;\ 6]$:

$$S'(x) = \frac{2(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x^2}.$$

b. Établir les variations de la fonction S sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$.

c. Quelles sont les dimensions de la cuve qui permettent d'utiliser le moins de peinture possible ?

Exercice 118 (🏛).
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. Étudier les variations de g.
2. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative (C) de la fonction g au point d'abscisse 0.
   b. Étudier les positions relatives de (T) et (C).
3. Construire (C) et (T) dans un même repère.

Exercice 119.
Dans chaque cas, calculer la dérivée et étudier les variations de la fonction.

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5,\ x \in \mathbb{R}.$
2. $g(x) = x + \frac{5}{x},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}.$
3. $h(x) = \frac{-x+0,5}{x+1},\ x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$
4. $i(x) = (2x-9)\sqrt{x},\ x \in [1;+\infty[.$

X. Suites arithmétiques, suites géométriques

Exercice 120 (🏛).
Dans chaque question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.

1. $u_0 = 2$ et $r = 4$. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. $u_0 = 5$ et $r = 2$. Calculer u_{100}.
3. $u_0 = -2$ et $r = 3$. Calculer u_1, u_2, u_3, puis exprimer u_n en fonction de n. Enfin, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 100$.
4. $u_2 = 3$ et $u_{10} = -21$. Calculer r et u_0, puis u_5.
5. $u_3 = 7$ et $u_{15} = 37$. Calculer r, puis u_{100}.

Exercice 121 (🏛).
Les côtés d'un triangle rectangle sont en progression arithmétique (c'est-à-dire que ce sont les termes successifs d'une suite arithmétique) et son hypoténuse mesure 20.
Déterminer la mesure des côtés de l'angle droit.

Exercice 122.
Les pages d'un livre pour enfants sont numérotées dans l'ordre, de 1 à $\cdots$
La somme de tous les numéros de pages du livre est 666. Combien y a-t-il de pages numérotées dans ce livre ?

Exercice 123 (🏛).

1. En mettant 5 en facteur, calculer la somme
$$S_1 = 5 + 10 + 15 + \cdots + 1000$$
(multiples de 5 compris entre 5 et 1000).
2. a. Calculer de même :
$$S_2 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 100$$
(nombres pairs de 2 à 100).
   b. En déduire la somme
$$S_3 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$$
(nombres impairs de 1 à 99).

Exercice 124 (🏛).
Dans chaque question, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.

1. $v_0 = 2$ et $q = 3$. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. $v_0 = 108$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer v_1, v_2 et v_3.
3. $v_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer v_7.
4. $v_0 = 1000$ et $q = 0,95$. Exprimer v_n en fonction de n $(n \in \mathbb{N})$.
5. $v_1 = 6$ et $v_2 = -30$. Calculer q et v_3, puis v_0.
6. $v_3 = 24$ et $v_5 = 96$. Calculer q, puis v_0.

Exercice 125.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** telle que $u_2 = 63$ et $u_4 = 567$. Calculer la raison r, u_0 puis u_8.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** telle que $v_2 = 63$ et $v_4 = 567$. Calculer la raison q, v_0 puis v_8.
   Attention ! Il y a plusieurs possibilités pour q.

Exercice 126 (🏛).
Une plaque en verre teinté atténue de 15 % l'intensité lumineuse d'un rayon qui la traverse.
On note v_n l'intensité lumineuse (mesurée en lumens) d'un rayon à la sortie si on superpose n plaques identiques $(n \geq 1)$.
On suppose que l'intensité lumineuse à l'entrée de la première plaque est $v_0 = 12$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis exprimer v_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Combien de plaques faut-il superposer pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 100 ?

Exercice 127.

Pour soigner son cancer de la thyroïde, un patient doit ingérer une unique gélule contenant 10 μg (microgrammes) d'iode 131. Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8 %. On note v_n la masse (en μg) d'iode 131 après n jours.

1. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Calculer la masse d'iode 131 après 4 jours (arrondir à 0,1 μg près).
3. Déterminer la demi-vie de l'iode 131 (c-à-d le temps nécessaire pour que la moitié des atomes se désintègrent).

Exercice 128 (🏛).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 3u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On pose $v_n = u_n - 0,5$ pour tout entier naturel n.
   - **a.** Calculer v_0, v_1 et v_2.
   - **b.** Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déduire de la question 2.b l'expression de v_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Exprimer enfin u_n en fonction de n.

Exercice 129 (🏛).

Le 01/01/2020, on emprunte 10 000 € à la banque au taux d'intérêt mensuel de 2 %. À chaque fin de mois on rembourse 300 €.

On note u_n la somme à rembourser le 1$^{\text{er}}$ jour du n^{e} mois (en convenant que janvier 2020 est le mois 0, février 2020 le mois 1, etc.). On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Vérifier que $u_1 = 9\,900$ et calculer u_2 et u_3. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 15\,000$.

   Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
4. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer la durée du crédit. Calculer la somme totale remboursée.

Exercice 130 (🏛).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 3 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On propose deux méthodes pour déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. **Méthode n°1 : construction graphique.**
   - **a.** Calculer les termes u_1 à u_4.
   - **b.** Construire sur un même graphique, sur l'intervalle $[0;8]$, les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,5x + 3$ (on prendra 1 cm ou 1 carreau comme unité graphique).
   - **c.** Construire les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses.
   - **d.** **[H.P.]** Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. **Méthode n°2 : suite géométrique annexe.**
   - **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 6$.

     Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   - **b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   - **c.** **[H.P.]** Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 131 (🏛).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les termes u_1 à u_3.
2. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

   $$v_n = u_n - n + 1$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 132 (🏅).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose également $v_n = \frac{4}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 133.
Dans cet exercice, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de raison q.

1. **a.** On suppose $v_0 = 3$ et $q = 1,4$. Déterminer les variations de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. On suppose $v_0 = 2$ et $q = 0,75$. Déterminer les variations de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Généraliser : on suppose $v_0 \geq 0$ et $q \geq 0$. Discuter les variations de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant la valeur de q.

Exercice 134 (🏛).

1. Calculer $S_1 = 1+4+4^2+\cdots+4^8$.
2. Calculer $S_2 = 1+0,5+0,5^2+\cdots+0,5^{10}$.
3. Calculer $S_3 = 1-2+2^2-2^3+\cdots-2^{19}+2^{20}$.

Exercice 135 (🏅).

1. Exprimer grâce à la formule du cours :
$$S = 1+2^3+\left(2^3\right)^2+\left(2^3\right)^3+\cdots+\left(2^3\right)^{12}.$$
2. En déduire que 7 divise $2^{39}-1$

Exercice 136 (🏅).

1. Ci-contre une table de multiplication pour les entiers de 1 à 3.
   Vérifier que la somme des neuf nombres apparaissant dans la table est 36.

×	**1**	**2**	**3**
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

2. On imagine maintenant la même table, mais pour les entiers de 1 à 10. Calculer astucieusement la somme des cent nombres apparaissant dans cette nouvelle table.

XI. Géométrie repérée

Exercice 137.

1. Tracer les droites $D_1 : y = -2x+3$ et $D_2 : x = -3$.
2. Placer les points $A(-1;-2)$ et $B(2;\ 2,5)$, et déterminer l'équation de (AB).
3. Cette droite (AB) coupe l'axe des abscisses en N. Calculer les coordonnées de N.

Exercice 138.
Dans cet exercice, on répondra aux questions de deux façons différentes :

- en utilisant le déterminant;
- en utilisant une équation de droite.

Soient $O(0;0)$, $A(3;2)$, $B(4,5\ ;3)$, $C(3;-2,5)$ et $D(7;-1,5)$.

1. Les points O, A, B sont-ils alignés?
2. Les droites (OC) et (AD) sont-elles parallèles?

Exercice 139 (🏛).
On considère les points $A(-2;1)$, $B(1;3)$ et $C(0;-3)$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).
3. Tracer la parallèle Δ à (AB) passant par C et déterminer son équation cartésienne.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection M de la droite Δ avec l'axe des abscisses.

Exercice 140 (🏛).
Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(-1;0)$, $B(2;4)$ et $C(5;-1)$. Déterminer l'équation cartésienne de la perpendiculaire Δ à (BC) passant par A.
2. Soient $A(0;-2)$ et $B(4;3)$. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

Exercice 141 (🏅).
Prouver que $(3 \Longrightarrow 1)$ et $(2 \Longrightarrow 1)$ dans le théorème 2 du cours.

Exercice 142.

1. Tracer la droite $D : 5x+4y-10 = 0$.
2. Déterminer l'équation de la perpendiculaire Δ à la droite D passant par le point $C(3;2)$.

Exercice 143 (🏛).

1. Tracer les droites $\Delta : 3x-2y+3 = 0$ et $\Delta' : 4x+6y+12 = 0$.
2. Les droites Δ et Δ' sont-elles orthogonales?
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ et Δ'.

Exercice 144 (🏛).
On considère dans un repère de centre O les points $A(8;0)$ et $B(0;6)$, le milieu I de $[AB]$ et le projeté orthogonal H de O sur (AB).

1. Faire une figure.
2. a. Déterminer les équations cartésiennes de (AB) et (OH).
   b. En déduire les coordonnées de H.
3. Le point H se projette orthogonalement en E sur l'axe des abscisses et en F sur l'axe des ordonnées.
   Démontrer que les droites (OI) et (EF) sont perpendiculaires.

Exercice 145 (🏅).
On donne les équations de deux droites D, D' sous forme réduite :

$$D : y = mx + p \qquad , \qquad D' : y = m'x + p'.$$

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D, un vecteur directeur $\vec{u}'$ de la droite D'.
2. Démontrer l'équivalence :
$$D \perp D' \iff m \times m' = -1.$$
3. **Application.** Soit $\Delta : y = 2x - 3$. Déterminer l'équation de la perpendiculaire Δ' à Δ passant par $O(0;0)$.

Exercice 146 (🏛).
On fera une figure.

1. Déterminer l'équation des cercles :
   a. $\mathscr{C}_1$ de centre $I(-2;3)$ de rayon 3.
   b. $\mathscr{C}_2$ de centre $J(1;-1)$ passant par $A(3;1)$.
   c. $\mathscr{C}_3$ de diamètre $[BC]$, où $B(2;2)$ et $C(6;0)$.
2. Le point $G(-3,5\,;\,0,5)$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}_1$?
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}_3$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 147 (🏛).
Mettre chacune des expressions suivantes sous forme canonique :

1. $x^2 + 4x + 10$.
2. $x^2 - 8x + 9$.
3. $x^2 + 5x + 10$.
4. $y^2 - 3y + 1$.

Exercice 148.

1. Soit $\mathscr{P} : y = x^2 - x - 2$.
   a. Déterminer les racines de $x^2 - x - 2$.
   b. En utilisant la dérivation, calculer les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$.
2. a. Écrire $x^2 - x - 2$ sous forme canonique.
   b. Tracer dans un même repère, de trois couleurs différentes, les paraboles
      (i) $P_1 : y = x^2$,
      (ii) $P_2 : y = (x - 0,5)^2$,
      (iii) $P_3 : y = (x - 0,5)^2 - 2,25$.

Exercice 149 (🏛).

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$: $x^2 - 4x + y^2 + y - 2 = 0$.
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}'$: $x^2 + 3x + y^2 - 6y - 1 = 0$.

Exercice 150 (🏅).

1. On considère les points $A(-2;-2)$, $B(-1;1)$, $C(1;2)$ et $D(2;0)$.
   Faire une figure, qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Prouver que $ABCD$ est un trapèze, puis que ACD est rectangle en D.
3. On note Γ le cercle circonscrit au triangle ACD, et E le centre de Γ. Calculer les coordonnées de E, construire Γ et déterminer son équation.
4. Γ recoupe l'axe des abscisses en F. Calculer les coordonnées de F.
5. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (BC), puis prouver que $F \in (BC)$.
6. Démontrer que les droites (BE) et (CD) sont parallèles.

XII. Fonction exponentielle

Exercice 151 (🏛).

Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\mathrm{e}^{0,5x+1},\ g(x)=\mathrm{e}^{-1,5x},\ h(x)=\mathrm{e}^{2x-2},\ i(x)=\mathrm{e}^{-x+1}.$$

Exercice 152.

Pour tout réel positif t, on note $f(t)$ le taux de ^{14}C t siècles après la mort d'un organisme vivant. On admet que pour tout $t \geq 0$:

$$f(t)=\mathrm{e}^{-0,0125t}.$$

1. Étudier les variations de f et (à l'aide d'un tableau de valeurs) construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[0;20]$.

On prendra 1 cm ou 1 carreau pour 2 siècles en abscisse, 1 cm ou 1 carreau pour 0,1 en ordonnée.

2. On trouve des fragments d'os dont la teneur en ^{14}C est 80 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse, pris comme témoin. À l'aide du graphique, évaluer l'âge de ces fragments.

Exercice 153 (🏛).

1. Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right).$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de la fonction f au point $O(0;0)$.

3. Construire la courbe de la fonction f (faire d'abord un tableau de valeurs).

Exercice 154 (🏛).

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x}-x-1$.

2. Démontrer que $\mathrm{e}^{x} \geq x+1$ pour tout réel x.

Exercice 155 (🏛).

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x)=(-2x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Prouver que pour tout $x \in [0;4]$:

$$f'(x)=(2x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Construire le tableau de variations de f.

Exercice 156 (🏛).

Calculer la dérivée, puis établir les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x^2\mathrm{e}^{x}.$$

Exercice 157.

Exprimer chacun des nombres ci-dessous sous la forme e^{a}, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^2\times\mathrm{e}^1\times\mathrm{e}^3},\qquad \frac{\mathrm{e}\times\mathrm{e}^2}{\left(\mathrm{e}^2\right)^2},\qquad \left(\mathrm{e}^2\right)^3\times\mathrm{e}^{-5}.$$

Exercice 158 (🏛).

Résoudre les équations :

1. $\mathrm{e}^{x}=-3$. **2.** $\mathrm{e}^{2x-1}=1$. **3.** $\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}=3$.

Exercice 159 (🏛).

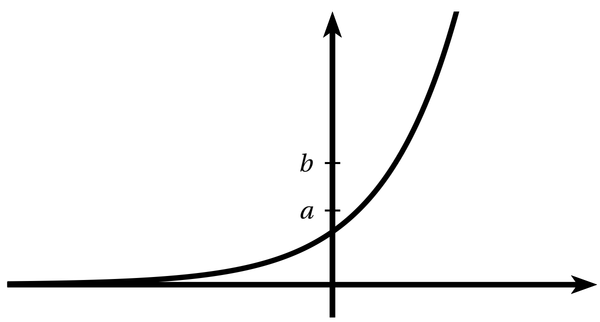
Démontrer que pour tout nombre réel x :

1. $(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})^2=\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}$.

2. $\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

Exercice 160 (🏅).

On a construit ci-dessous la courbe de la fonction exponentielle et on a placé deux nombres réels a, b sur l'axe des ordonnées. On a volontairement effacé les graduations.



Construire le nombre $c=a\times b$ sur l'axe des ordonnées.

XIII. Programmation

Exercice 161 ().
Éditer en machine un programme Python qui affiche les carrés des entiers de 1 à 5.

Exercice 162 ().
Éditer en machine un programme Python qui affiche les uns en-dessous des autres les nombres de la table de 8 :

$$8\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ \cdots\ ,\ 80.$$

Exercice 163 ().
Que calcule le programme suivant ?

```
s=0
for i in range(1,101):
    s=s+i
print(s)
```

Exercice 164.
Écrire un programme Python qui calcule :

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10.$$

Exercice 165 ().
Éditer en machine un programme Python qui affiche **la liste** des nombres de la table de 8 :

$$[8\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ \cdots\ ,\ 80]\,.$$

Exercice 166.
Quels seront les affichages des programmes suivants ?

Programme 1

```
x=3
if x==4:
    print(5*x)
else:
    print(2*x)
```

Programme 2

```
x=3
if x<=4:
    print(5*x)
else:
    print(2*x)
```

Exercice 167 ().
On rappelle que si a et b sont deux entiers, les instructions Python $a//b$ et $a\%b$ donnent respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b. Par exemple :

$$\begin{array}{r|l} 3\ 4 & 6 \\ \cline{2-2} -\ 3\ 0 & 5 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Donc, avec Python, $34//6 = 5$ et $34\%6 = 4$.

Éditer un programme Python qui renvoie la liste des diviseurs positifs de 30 (c'est-à-dire $[1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]$).

Exercice 168 ().
Éditer la fonction suivante en machine :

```
def f(x):
    return x**2
```

Quelle est la valeur renvoyée lorsqu'on entre f(3) ? Et f(−2) ?

Exercice 169.
Que fait la fonction suivante ?

```
def g():
    return 5
```

Exercice 170.
Écrire une fonction **moyenne** de façon que l'instruction

```
moyenne(a,b)
```

renvoie la moyenne des deux nombres a et b.

Exercice 171 ().
Comme les notes à un DS sont mauvaises, un professeur de mathématiques décide de multiplier toutes les notes par 1,2, mais sans dépasser 20.
Écrire une fonction **transforme** qui renvoie la nouvelle note d'un élève après transformation. Par exemple,

```
transforme(15)
```

renvoie 18, puisque $15 \times 1{,}2 = 18$; et

```
transforme(19)
```

renvoie 20, puisque $19 \times 1{,}2 = 22{,}8$.

Exercice 172.
Quel est l'affichage en sortie du programme suivant ?

```
n=10
while n<=14:
        n=n+1
print(n)
```

Exercice 173 (🖩).
Éditer en machine une fonction **div** dont le but est le suivant : on part d'un nombre réel x, que l'on divise par 2 jusqu'à avoir un résultat strictement inférieur à 1. On affiche le dernier résultat obtenu.

Par exemple, l'instruction

$$\text{div}(15)$$

renvoie 0.9375, puisque

$$15 \div 2 = 7.5\,;\; 7.5 \div 2 = 3.75\,;\; 3.75 \div 2 = 1.875\,;\; 1.875 \div 2 = 0.9375.$$

Exercice 174 (🏛).
On place 100 € sur un compte au taux d'intérêt annuel de 5 %. On a donc :

- $100 \times 1,05 = 105$ € après 1 an ;
- $105 \times 1,05 = 110,25$ € après 2 ans ;
- etc.

Écrire une fonction **seuil** qui permette de déterminer le nombre d'années nécessaires pour avoir plus de 200 € sur le compte.

Exercice 175.
On reprend l'énoncé de l'exercice précédent.
Écrire une fonction **bilan**, qui affiche une liste avec la somme sur le compte année après année, jusqu'au moment où cette somme dépasse 200 €.

L'affichage en sortie est donc une liste de la forme

$$[100, 105, 110.25, \cdots]\,.$$