

## Bac blanc n°1

Décembre 2024 – 2 heures

*Les calculatrices sont autorisées*

Le soin, la rédaction et l'orthographe seront pris en compte dans l'évaluation des copies.

### Exercice 1

**7 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère.

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a

$$f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}.$$

2. Étudier le signe de  $f'$  et en déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
4. On admet que, pour tout réel  $x$ , on a

$$f''(x) = (x-1)(x-3)e^{-x}.$$

- (a) Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-1; 1]$ , on a  $f(x) \geq -x + 1$ .

### Exercice 2

**3 points**

Dans mon armoire, il y a 3 paires de chaussures noires et 2 paires de chaussures blanches. Un matin, mal réveillé, je choisis deux chaussures au hasard.

1. Prouver qu'il y a 45 choix possibles.
2. Calculer la probabilité des événements (on écrira les réponses sous forme de fractions irréductibles) :
  - $A$  : "j'obtiens deux chaussures de la même paire".
  - $B$  : "j'obtiens un pied gauche et un pied droit".
  - $C$  : "j'obtiens deux chaussures de la même couleur".

### Exercice 3

**10 points**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , où  $n$  désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors  $a_0 = 1\,700$  et  $b_0 = 1\,300$ .

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer une relation liant  $a_n$  et  $b_n$ .
3. Montrer que la suite  $(a_n)$  vérifie la relation suivante, pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700.$$

(b) En déduire que la suite  $(a_n)$  converge.

5. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = a_n - 1\,200$ .

(a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.

(b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

(c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200.$$

6. (a) Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .
- (b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. (a) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de  $n$  à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil():
    n=0
    A=1700
    while .....:
        n=n+1
        A=.....
    return .....
```

- (b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil. Justifier la réponse.