Lycée Mariette

Boulogne-sur-Mer

Cours de Mathématiques

Première technologique

Nicolas Perpète

Table des matières

CHAPITRE 1

Proportionnalité

Plan de ce chapitre

Exemple 1

Il y a 80 % de filles dans une classe de 30 élèves. Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

On complète un tableau de proportionnalité.

Élèves	30	?
%	100	80

$? = 30 \times 80 \div 100 = 24$. Il y a 24 filles dans la classe.

Exemple 2

200 g de cabillaud coûtent 3,20 €. Quel est le prix au kg ?

On complète un tableau de proportionnalité, sachant que 1 kg = 1000 g.

Masse (en g)	200	1000
Prix (en €)	3,20	?

$? = 3,20 \times 1000 \div 200 = 16$. Le prix au kg est de 16 €.

Exemple 3

Combien de temps mettrai-je pour parcourir 52 km à la vitesse moyenne de 20 km/h ?

On complète un tableau de proportionnalité. On travaille « en minutes ».

Temps (en min)	60	?
Distance (en km)	20	52

$? = 52 \times 60 \div 20 = 156$, donc je mettrai 156 min – soit, puisque $156 = 120 + 36$, 2 h 36 min.

CHAPITRE 2

Droites et suites de nombres

Plan de ce chapitre

Dans le paragraphe 1, on introduit la notion de suite de nombres en étudiant quelques exemples. Dans le paragraphe 2, on fait des rappels sur les équations de droites. Le paragraphe 3 fait la synthèse des deux précédents, avec l'étude des suites arithmétiques.

I. Suites de nombres.

Déf.1 Une suite est une liste, finie ou infinie, de nombres réels.

Exemples 1

1. La suite des nombres pairs
$$0\,;2\,;4\,;6\,;8\,;\cdots$$
2. La suite périodique
$$-1\,;1\,;-1\,;1\,;\cdots$$

Exemple 2

On s'intéresse au prix du timbre (en €) pour une lettre prioritaire, en France, entre 2013 et 2019 :

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Numéro année : n	0	1	2	3	4	5	6
Prix du timbre : u_n	0,63	0,66	0,76	0,80	0,85	0,95	1,05

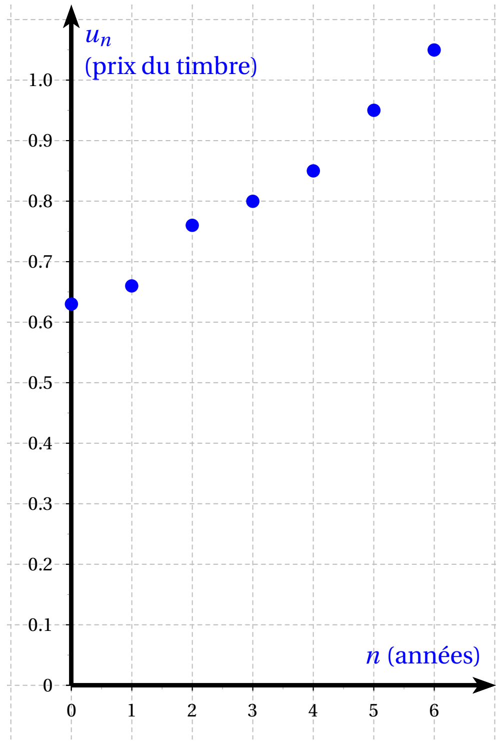
On note les années 0, 1, 2, etc. Le prix du timbre l'année n est noté u_n. Par exemple :

- u_0 = prix du timbre en 2013 $= 0,63$.
- u_4 = prix du timbre en 2017 $= 0,85$.

La suite des termes est notée u.

Exemple 2 – Suite

On représente graphiquement les termes de la suite en mettant n en abscisse et u_n en ordonnée. On obtient ce que l'on appelle un *nuage de points :*



Remarques.

- Dans l'exemple 2, la suite u est croissante : le prix du timbre augmente au cours du temps.
- La différence par rapport à la courbe d'une fonction, c'est qu'on ne relie pas les points, puisque n ne peut valoir que 0, 1, 2, 3, etc. (pas de nombre strictement négatif, ni de nombre à virgule).
- Les suites sont souvent appelées u, v ou w, comme les fonctions sont souvent appelées f, g ou h.

On rappelle que les entiers naturels sont 0, 1, 2, 3, $\cdots$, et que l'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

Exemple 3

La suite u est définie par $u_n = 2 \times n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
On a donc

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \times 0 = 0, \\ u_1 &= 2 \times 1 = 2, \\ u_2 &= 2 \times 2 = 4, \\ u_3 &= 2 \times 3 = 6, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

C'est la suite des nombres pairs de l'exemple 1.

II. Équations de droites.

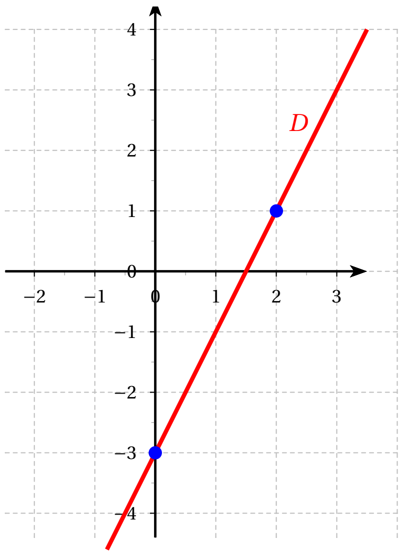
Exemple 4

On trace la droite D d'équation $y = 2x - 3$.
On fait un tableau de valeurs avec deux valeurs, on place les points correspondants (en bleu), puis on construit la droite (en rouge) :

x	0	2
y	-3	1

- Pour $x = 0$, $y = 2 \times 0 - 3 = -3$.
- Pour $x = 2$, $y = 2 \times 2 - 3 = 1$.

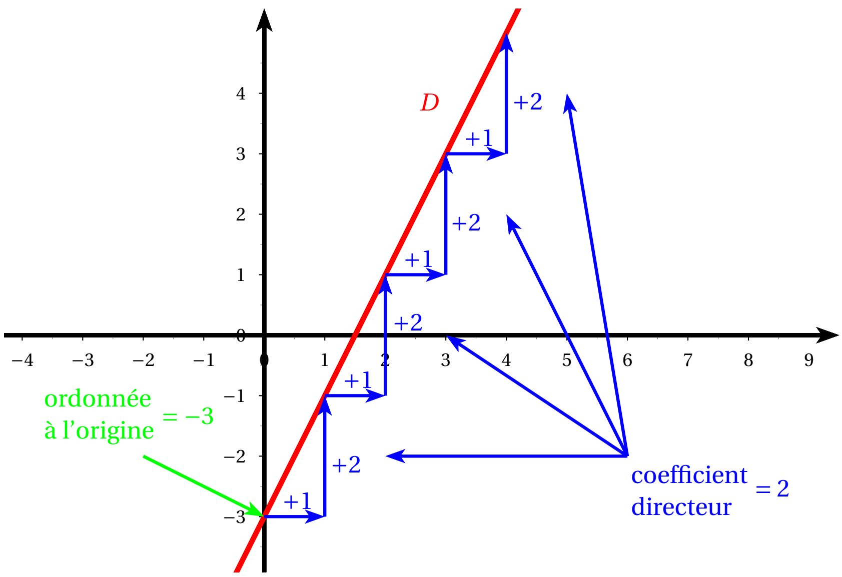
(On a choisi les valeurs 0 et 2, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs.)



Définition 2

Dans $y = 2x - 3$:

1. 2 s'appelle coefficient directeur, ou pente : quand on avance de 1 en abscisse, on monte de 2 en ordonnée.
2. -3 s'appelle ordonnée à l'origine. C'est là que la droite coupe l'axe des ordonnées.



III. Suites arithmétiques.

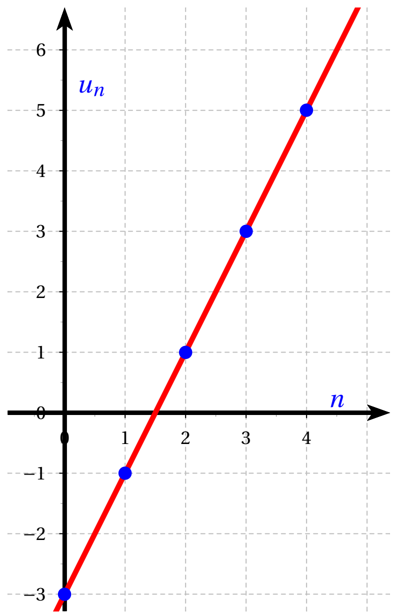
Déf.3 Une suite infinie u est dite arithmétique de raison r si tout terme se déduit du précédent en ajoutant r.

Exemple 5

La suite u est arithmétique, $u_0 = -3$ et $r = 2$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_0 &= -3, \\ u_1 &= -3+2 = -1, \\ u_2 &= -1+2 = 1, \\ u_3 &= 1+2 = 3, \\ u_4 &= 3+2 = 5, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On représente graphiquement les termes de la suite :



Les points sont alignés sur la droite d'équation $y = 2x - 3$.

- 2 correspond à la valeur de r.
- -3 correspond à la valeur de u_0.

Pour conclure cette leçon, on explique comment on obtient les termes de la suite de l'exemple 5 avec un tableur.

On entre les formules

$$= \text{B1} + 1$$

dans la cellule C1,

$$= \text{B2} + 2$$

dans la cellule C2, puis on étire vers la droite.

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	= B1 + 1			
2	u_n	−3	= B2 + 2			

Résultat final :

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	u_n	−3	−1	1	3	5

CHAPITRE 3
Études de fonctions

Plan de ce chapitre

Dans cette leçon, on rappelle un certain nombre de choses qui ont été vues au collège et en seconde : courbe de fonction, image, antécédents, tableaux de signe et de variations.

I. Courbe représentative.

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par

$$f(x) = x^2 - 4x - 2.$$

On fait un tableau de valeurs pour f sur $[-1;4]$ avec un pas de $0,5$.

x	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$
$f(x)$	3	$0,25$	-2	$-3,75$	-5	$-5,75$

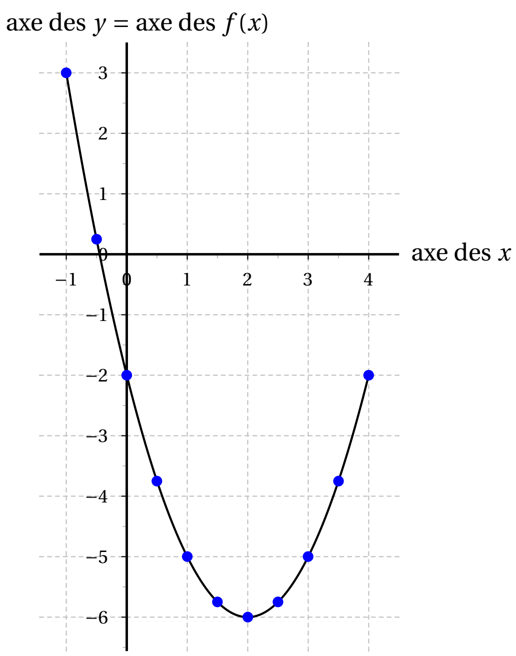
x	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	-6	$-5,75$	-5	$-3,75$	-2

Détail de deux calculs :

- $f(-1) = (-1)^2 - 4 \times (-1) - 2 = 1 + 4 - 2 = 3.$
- $f(1,5) = 1,5^2 - 4 \times 1,5 - 2 = 2,25 - 6 - 2 = -5,75.$

Dans l'appendice du cours, on rappelle comment on peut obtenir le tableau ci-dessus avec la calculatrice sans faire aucun calcul.

On place les points correspondant au tableau de valeurs (x en abscisse et $f(x)$ en ordonnée) et on construit la courbe en reliant ces points.

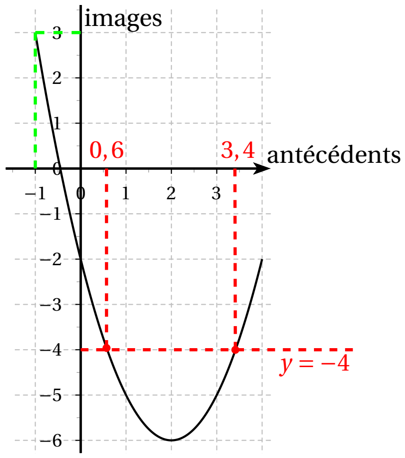


II. Images, antécédents, variations et signe d'une fonction.

On rappelle maintenant les notions d'image, d'antécédents, de tableau de variations et de tableau de signe avec des exemples :

Image. L'image de -1 par f est $f(-1) = 3$ (pointillés verts).

Antécédents. Les antécédents de -4 par f sont $3,4$ et $0,6$ environ (pointillés rouges). On peut aussi dire que les solutions de l'équation $f(x) = -4$ sont $3,4$ et $0,6$ environ.



Variations. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;2]$ (partie bleue) et strictement croissante sur l'intervalle $[2;4]$ (partie rouge).
On résume ces informations dans le tableau de variations :

x	-1		2		4
$f(x)$	3	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2

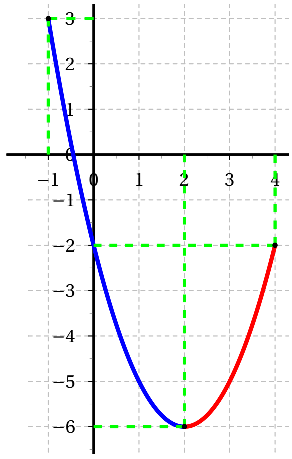
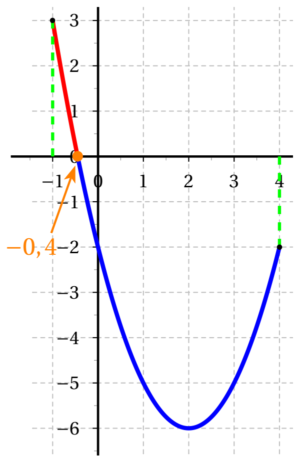


Tableau de signe. $f(x) = 0$ lorsque $x = -0,4$ environ (point orange). La fonction f est positive sur l'intervalle $[-1;-0,4]$ environ (partie rouge) et négative sur l'intervalle $[-0,4;4]$ environ (partie bleue).
On résume ces informations dans le tableau de signe :

x	-1		-0.4		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	



Appendice : tableau de valeurs avec la calculatrice.

La fonction f est celle étudiée précédemment dans le cours :

$$f(x) = x^2 - 4x - 2.$$

Les calculatrices permettent d'obtenir directement le tableau de valeurs sur l'intervalle $[-1;4]$ avec un pas de $0,5$:

Calculatrices collège

- $\boxed{\text{MODE}}$ ou $\boxed{\text{MENU}}$
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=X^2-4X-2 $\boxed{\text{EXE}}$

  (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? -1 $\boxed{\text{EXE}}$
- Fin ? 4 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas ? $0,5$ $\boxed{\text{EXE}}$

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{x}}$

- 
- Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$ puis choisir Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$
- f(x)=x^2-4x-2 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Tableau $\boxed{\text{EXE}}$ puis Régler l'intervalle $\boxed{\text{EXE}}$
- X début -1 $\boxed{\text{EXE}}$
- X fin 4 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas 0.5 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Valider

TI graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{x,t,\theta,n}$

- $\boxed{f(x)}$
- $Y_1 = X^2-4X-2$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{déf table}}$
- DébTable=$(-)1$ $\boxed{\text{EXE}}$
- PasTable=0.5 $\boxed{\text{EXE}}$

  ou

  ΔTbl=0.5 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{table}}$

CASIO graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{X,\theta,T}$

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis choisir TABLE $\boxed{\text{EXE}}$
- $Y_1 : X^2-4X-2$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{F5}}$ (on choisit donc SET)
- Start :$(-)1$ $\boxed{\text{EXE}}$
- End :4 $\boxed{\text{EXE}}$
- Step :0.5 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{EXIT}}$
- $\boxed{\text{F6}}$ (on choisit donc TABLE)

CHAPITRE 4

Tableaux d'effectifs et probabilités conditionnelles

Plan de ce chapitre

Dans cette leçon, on rappelle la notion de tableau d'effectif, que l'on utilise pour calculer des probabilités conditionnelles.

Exemple 1

Dans une classe de 30 élèves, deux voyages scolaires ont été organisés dans l'année : un voyage en Allemagne et un voyage en Italie. 20 élèves ont participé au voyage en Allemagne, 12 ont participé au voyage en Italie et 6 élèves de la classe n'ont participé à aucun voyage.

Remarque.
Comme $20+12+6=38$, il est clair que certains élèves ont participé à plusieurs voyages : certains sont partis à la fois en Allemagne et en Italie.

On construit le tableau d'effectifs suivant (que l'on remplit avec les données de l'énoncé, puis en faisant des additions/soustractions) :

	Partis en Italie	Pas partis en Italie	Total
Partis en Allemagne	8	12	20
Pas partis en Allemagne	4	6	10
Total	12	18	30

On interroge un élève au hasard. On considère les événements :

$$A : \text{« l'élève est parti en Allemagne »},$$
$$I : \text{« l'élève est parti en Italie »}.$$

On a

$$P(A) = \frac{20}{30} \qquad , \qquad P(I) = \frac{12}{30}.$$

On reprend l'exemple 1 et on rappelle ce que sont la réunion et l'intersection de deux événements, ainsi que l'événement contraire.

Exemple 2

On définit les événements[a] :

$$A \cap I : \text{« l'élève est parti en Allemagne **ET** en Italie ».}$$

$A \cap I$: « l'élève est parti en Allemagne **ET** en Italie ».

$A \cup I$: « l'élève est parti en Allemagne **OU** en Italie »

: « l'élève a fait au moins un voyage ».

$\overline{A}$: « l'élève **N'EST PAS** parti en Allemagne ».

8 élèves ont fait les deux voyages, donc

$$P(A \cap I) = \frac{8}{30}.$$

$8+12+4=24$ élèves ont fait au moins un voyage, donc

$$P(A \cup I) = \frac{24}{30}.$$

10 élèves ne sont pas partis en Allemagne, donc

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{10}{30}.$$

a. **Rappel :** $\cap$ se lit "inter" et correspond au mot français "ET".
$\cup$ se lit "union" et correspond au mot français "OU". Ce "OU" est inclusif, à ne surtout pas confondre donc avec un "OU BIEN".

Déf.1 Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $P_A(B)$, est la probabilité que B se produise, sachant que A s'est produit.

Exemple 3

On reprend l'exemple 1. Parmi les 20 élèves partis en Allemagne, 8 ont fait le voyage en Italie. Donc la probabilité qu'un élève parti en Allemagne ait aussi fait le voyage en Italie est $\frac{8}{20}$. Avec la notation de la définition 1 :

$$P_A(I) = \frac{8}{20}.$$

On peut aussi calculer $P_I(A)$, mais la réponse n'est pas la même ! Parmi les 12 élèves partis en Italie, 8 ont fait le voyage en Allemagne, donc

$$P_I(A) = \frac{8}{12}.$$

CHAPITRE 5

Taux d'évolution, suites géométriques

Plan de ce chapitre

Dans le premier paragraphe, on s'intéresse à l'effet d'une hausse ou d'une baisse exprimée en pourcentage; on apprend des techniques qui permettent de faire des calculs rapides. Cela nous amène naturellement aux suites géométriques, étudiées dans le paragraphe 2.

I. Taux d'évolution.

Exemple 1

En 2016, un timbre coûtait 0,80 €. Entre 2016 et 2018, ce prix a augmenté de 31,25 %. Quel est le prix du timbre en 2018?

$100\ \% + 31,25\ \% = 131,25\ \% = \dfrac{131,25}{100} = 1{,}3125$, donc pour augmenter un nombre de 31,25 %, il faut le multiplier par 1,3125. On complète donc le schéma :

$$\underset{\text{Prix 2016}}{\boxed{0{,}80}} \xrightarrow{\times\ 1{,}3125} \underset{\text{Prix 2018}}{\boxed{???}}$$

Conclusion : le prix du timbre en 2018 est

$$0,80 \times 1{,}3125 = 1,05\ €.$$

On dit que le taux d'évolution est de $+31,25$ %.

Exemple 2

D'après une étude de l'INSEE, le salaire net annuel moyen des hommes en France était de :

- 21 498 € en 2000;
- 26 831 € en 2010.

Quel a été le pourcentage d'augmentation du salaire moyen entre ces deux dates?

Pour le savoir, on complète le schéma :

$$\boxed{21\,498} \xrightarrow{\times\ ?\,?\,?} \boxed{26\,831}$$

Salaire 2000 Salaire 2010

Connaître le pourcentage d'augmentation revient à savoir par combien il faut multiplier pour passer de 21 498 à 26 831. Pour cela on effectue la division :

$$26\,831 \div 21\,498 \approx 1,2481 = 124,81\ \%.$$

Conclusion : le salaire moyen a augmenté de 24,81 % environ. Autrement dit, le taux d'évolution est de +24,81 %.

Exemple 3

Un vendeur nous accorde une remise de 15 % sur un téléviseur dont le prix initial est de 170 €. Quel est le prix après la remise?

$100\ \% - 15\ \% = 85\ \% = \dfrac{85}{100} = 0,85$, donc pour baisser un nombre de 15 %, il faut le multiplier par 0,85. On complète donc le schéma :

$$\boxed{170} \xrightarrow{\times 0,85} \boxed{?\,?\,?}$$

Prix avant remise Prix après remise

Conclusion : le prix après la remise est

$$170 \times 0,85 = 144,50\ €.$$

On dit que le taux d'évolution est de −15 %.

Exemple 4

Selon le JDN (journal du net), le prix médian au m^2 pour l'achat d'un T1 à Saint-Martin-Boulogne était de :

- 1 520 € en 2017;
- 1 390 € en 2018.

Quel a été le pourcentage de baisse en un an?

Pour le savoir, on complète le schéma :

$$\boxed{1\,520} \xrightarrow{\times\ ?\,?\,?} \boxed{1\,390}$$

Prix 2017 Prix 2018

Connaître le pourcentage de baisse revient à savoir par combien il faut multiplier pour passer de 1 520 à 1 390. Pour cela on effectue la division :

$$1\,390 \div 1\,520 \approx 0,9145 = 91,45\ \%.$$

Conclusion : comme 100 % − 91,45 % = 8,55 %, le prix médian au m^2 pour l'achat d'un T1 a baissé de 8,55 % environ. Autrement dit, le taux d'évolution est de −8,55 %.

II. Suites géométriques.

Déf.1 Une suite infinie v est dite géométrique de raison q si tout terme se déduit du précédent en le multipliant par q.

Exemple 5

La suite v est géométrique, $v_0 = 3$ et $q = 2$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_0 &= 3, \\ v_1 &= 3 \times 2 = 6, \\ v_2 &= 6 \times 2 = 12, \\ v_3 &= 12 \times 2 = 24, \\ v_4 &= 24 \times 2 = 48, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Exemple 6

Le 01/01/2019, on place 100 € à la banque au taux d'intérêt annuel de 2 % (c'est-à-dire que la somme sur le compte augmente tous les ans de 2 %).

Augmenter un nombre de 2 % revient à le multiplier par 1,02. On peut donc compléter le schéma :

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 1,02} \boxed{102} \xrightarrow{\times 1,02} \boxed{104,04} \xrightarrow{\times 1,02} \boxed{106,12}$$

01/01/2019	01/01/2020	01/01/2021	01/01/2022

On note v_n la somme sur ce compte après n années, le 1er janvier. On a donc

$$\begin{aligned} v_0 &= 100 \\ v_1 &= 102 \\ v_2 &= 104,04 \\ v_3 &= 106,12 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On peut dire que :

- La suite v est géométrique de raison $q = 1,02$.
- La somme sur le compte le 01/01/2029, donc après 10 ans, est

$$v_{10} = 100 \underbrace{\times 1,02 \times 1,02 \times \cdots \times 1,02}_{10 \text{ fois}} = 100 \times 1,02^{10} \approx 121,90 \text{ €}.$$

On obtient les termes de la suite avec un tableur :

On entre les formules

$$= \text{B1} + 1$$

dans la cellule C1,

$$= \text{B2} * 1,02$$

dans la cellule C2, puis on étire vers la droite.

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	= B1 + 1			
2	v_n	100	= B2 ∗ 1,02			

Résultat final :

	A	B	C	D	E
1	n	0	1	2	3
2	v_n	100	102	104,4	106,12

CHAPITRE 6

Dérivation et variations des fonctions du 2nd degré

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, on apprend une technique, appelée dérivation, qui permet d'obtenir très rapidement les tableaux de variations des fonctions du second degré.

I. Dérivée d'une fonction.

Déf. 1 Étant donnée une fonction f, on lui associe une autre fonction, notée f' et appelée fonction dérivée.

Théorème 1

La fonction dérivée s'obtient en utilisant les règles de calcul suivantes :

Dérivées des fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
c (constante)	0
x	1
x^2	$2x$

Règles de calcul.
u et v étant deux fonctions, k étant un réel, on a les formules :

1. $(u+v)' = u' + v'$.
2. $(u-v)' = u' - v'$.
3. $(k \times u)' = k \times u'$.

Exemples 1

1. On pose $f(x) = 6x + 4$. On a $f(x) = 6 \times x + 4$, donc
$$f'(x) = 6 \times 1 + 0 = 6.$$
2. On pose $g(x) = -3x + 5$. On a $g(x) = -3 \times x + 5$, donc
$$g'(x) = -3 \times 1 + 0 = -3.$$
3. On pose $h(x) = 4x^2$. On a $h(x) = 4 \times x^2$, donc
$$h'(x) = 4 \times 2x = 8x.$$

Exemples 2

1. On pose $i(x) = x^2 + 4x - 1$. Alors
$$i'(x) = 2x + 4 \times 1 - 0 = 2x + 4.$$
2. On pose $j(x) = 5x^2 - 9x + 2$. Alors
$$j'(x) = 5 \times 2x - 9 \times 1 + 0 = 10x - 9.$$

II. Rappels sur le signe du 1^er^ degré.

Théorème 2

Soient a et b deux nombres réels, avec $a \neq 0$.

1. Si $a > 0$, le tableau de signe de $ax + b$ est de la forme $\boxed{- \; \phi \; +}$
2. Si $a < 0$, le tableau de signe de $ax + b$ est de la forme $\boxed{+ \; \phi \; -}$

Exemple 3

On fait le tableau de signe de $-4x + 2$.
On résout l'équation :

$$-4x + 2 = 0 \qquad -4x + \cancel{2} - \cancel{2} = 0 - 2 \qquad -4x = -2 \qquad \frac{\cancel{-4}x}{\cancel{-4}} = \frac{-2}{-4} \qquad x = 0,5$$

$a = -4$, a est ⊖ donc le signe est de la forme $\boxed{+ \; \phi \; -}$

x	$-\infty$		0.5		$+\infty$
$-4x + 2$		$+$	0	$-$	

III. Variations des fonctions du 2^nd^ degré.

Théorème 3

Soit f une fonction.

1. Si f' est strictement positive sur un intervalle I, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si f' est strictement négative sur un intervalle I, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple 4

On considère la fonction f définie sur $[-1; 4]$ par
$$f(x) = x^2 - 3x - 2.$$

On souhaite obtenir le tableau de variations de f à partir de la dérivée. Il y a trois étapes :

1^re^ étape : calcul de la dérivée.

$$f'(x) = 2x - 3 \times 1 - 0 = 2x - 3.$$

Exemple 4 – Suite

2ᵉ étape : signe de la dérivée.
La dérivée est du premier degré, donc il faut résoudre une équation, puis regarder le signe de a :

$$2x-3=0 \qquad 2x-\cancel{3}+\cancel{3}=0+3 \qquad 2x=3 \qquad \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\frac{3}{2} \qquad x=1,5.$$

$a=2$, a est $\oplus$ donc le signe est de la forme $\boxed{-\ \phi\ +}$

On en déduit le tableau de signe :

x	-1		1.5		4
$f'(x) = 2x-3$		$-$	0	$+$	

3ᵉ étape : variations de la fonction.
D'après le théorème 3 :

- Quand f' est strictement positive, f est strictement croissante. Autrement dit, un signe + donne une flèche qui monte.
- Quand f' est strictement négative, f est strictement décroissante. Autrement dit, un signe − donne une flèche qui descend.

Ainsi on peut compléter le tableau de signe précédent avec le tableau de variations de f.

x	-1		1.5		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-4.25	$\nearrow$	2

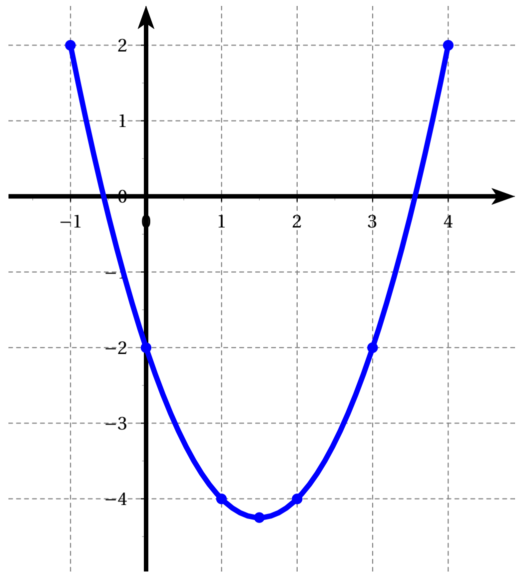
Pour les trois valeurs aux extrémités des flèches, on calcule :

- $f(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) - 2 = 2$;
- $f(1,5) = 1,5^2 - 3 \times 1,5 - 2 = -4,25$;
- $f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 2.$

Mais on peut aussi demander un tableau de valeurs à la calculatrice (cf ci-dessous).

Pour illustrer cette étude, on construit la courbe à partir d'un tableau de valeurs :

x	-1	0	1	$1,5$	2	3	4
$f(x)$	2	-2	-4	$-4,25$	-4	-2	2



La fonction f est du second degré, donc sa courbe représentative est une parabole. Le tableau de variations nous donne directement les coordonnées du sommet : $(1,5;-4,25)$.

CHAPITRE 7

Arbres de probabilités

Plan de ce chapitre

Exemple 1

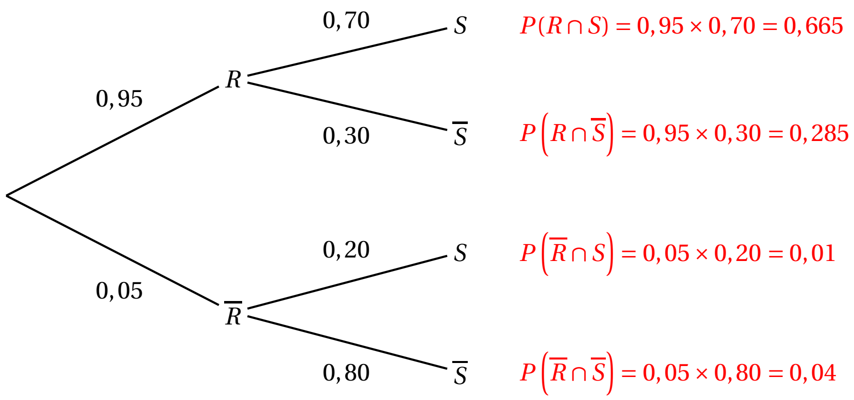
Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension d'un lycée. Les résultats révèlent que :

- 95 % des élèves déclarent manger régulièrement à la cantine et parmi ceux-ci 70 % sont satisfaits de la qualité des repas;
- 20 % des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.
On note les événements suivants :

- R l'événement : « l'élève mange régulièrement à la cantine »;
- S l'événement : « l'élève est satisfait ».

On peut résumer la situation par un arbre pondéré :



Pour calculer la probabilité que l'élève mange régulièrement à la cantine et soit satisfait de la qualité des repas (événement $R\cap S$), on multiplie les probabilités des deux branches du haut [a] :

$$P(R\cap S)=0,95\times 0,70=0,665.$$

Pour calculer la probabilité que l'élève soit satisfait de la qualité des repas, on ajoute la probabilité de chacun des deux chemins correspondants :

$$\begin{aligned}P(S)&=P(R\cap S)+P\left(\overline{R}\cap S\right)\\&=0,95\times 0,70+0,05\times 0,20=0,665+0,01=0,675.\end{aligned}$$

a. C'est une conséquence des règles de calcul avec les pourcentages : 70% de 95% valent 70% × 95% = 0,70 × 0,95 = 0,665 = 66,5%

Remarques.

- La formule $P(S)=P(R\cap S)+P\left(\overline{R}\cap S\right)$ s'appelle formule des probabilités totales
- La somme de toutes les probabilités rouges vaut 1 :

$$0,665+0,285+0,01+0,04=1.$$

CHAPITRE 8

Suites définies par récurrence

Plan de ce chapitre

On dit qu'une suite est définie par récurrence quand ses termes sont définis de proche en proche. C'est le cas par exemple des suites arithmétiques (on passe d'un terme au suivant en ajoutant la raison r) ou des suites géométriques (on passe d'un terme au suivant en multipliant par la raison q). Dans ce chapitre, on étudie des relations de récurrence plus générales et on donne quelques applications.

Exemple 1

Une suite v est définie de la façon suivante :

- $v_0 = 3$,
- on passe d'un terme au suivant en le multipliant par 4.

On a donc

$$\boxed{v_0 = 3} \xrightarrow{\times 4} \boxed{v_1 = 12} \xrightarrow{\times 4} \boxed{v_2 = 48} \xrightarrow{\times 4} \boxed{v_3 = 192}$$

La suite v est donc géométrique de raison $q = 4$.

Remarque.
Étant donné un terme u_n d'une suite, le terme suivant est u_{n+1}. Donc dans l'exemple qui précède, on peut définir v de façon équivalente en écrivant :

- $v_0 = 3$,
- pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n \times 4$.

L'égalité $v_{n+1} = v_n \times 4$ est ce que l'on appelle une *relation de récurrence*. C'est en utilisant de telles relations que nous définissons les suites des exemples suivants.

Exemple 2

Une suite u est définie de la façon suivante :

- $u_0 = 3$,
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 4$.

Autrement dit, on passe d'un terme au suivant en ajoutant 4. La suite u est donc arithmétique de raison $r = 4$. On a ainsi

$$\boxed{u_0 = 3} \xrightarrow{+4} \boxed{u_1 = 7} \xrightarrow{+4} \boxed{u_2 = 11} \xrightarrow{+4} \boxed{u_3 = 15}$$

Dans les exemples qui précédent, l'écriture « formelle » de la relation de récurrence n'est pas très utile, puisqu'on peut expliquer par une phrase simple comment on passe d'un terme au suivant. Dans l'exemple suivant, la relation de récurrence commence à prendre de l'intérêt.

Exemple 3

On définit une suite par

$$\begin{cases} u_0 & = 4, \\ u_{n+1} & = 2u_n - 3 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases} \qquad \leftarrow \text{relation (ou formule) de récurrence}$$

La relation de récurrence peut se réécrire en français :

« Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 2 puis on enlève 3. »

On calcule de proche en proche les premiers termes de la suite :

$$u_1 = 2u_0 - 3$$
$$u_1 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

$$u_2 = 2u_1 - 3$$
$$u_2 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

$$u_3 = 2u_2 - 3$$
$$u_3 = 2 \times 7 - 3 = 11$$

Exemple 4

Un parc d'attractions propose à ses visiteurs des pass annuels donnant un accès illimité au site. En 2019, 5 000 visiteurs achètent ce pass. Le directeur du parc estime que chaque année, 90 % des clients renouvelleront leur pass et que 800 nouveaux visiteurs en achèteront un.
On note u_n le nombre de visiteurs ayant un pass l'année $2019 + n$. En particulier

$$u_0 = \text{nombre de pass en 2019} = 5\,000.$$

- On calcule u_1 et u_2 :

  u_1 désigne le nombre d'abonnés en 2020. Entre 2019 et 2020, 90 % des clients renouvellent leur pass, donc il faut prendre 90 % de 5 000 (multiplication par 0,90). Mais il y a aussi 800 nouveaux abonnés. Finalement

  $$u_1 = 0,90 \times 5\,000 + 800 = 5\,300.$$

  De même

  $$u_2 = 0,90 \times 5\,300 + 800 = 5\,570.$$

  Conclusion : il y aura 5 300 abonnés en 2020, puis 5 570 en 2021.
- La relation de récurrence générale est

  $$u_{n+1} = 0,90u_n + 800.$$

- En utilisant un tableur, on peut étudier le comportement de la suite u sur le long terme. On constate que l'on se rapproche de 8 000 abonnements annuels (voir exercices pour la méthode avec le tableur).

Remarque.

On dit qu'une suite u est arithmético-géométrique [a] lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

C'est le cas de la suite de l'exemple 4, avec $a = 0,9$ et $b = 800$; mais aussi de la suite de l'exemple 3, avec $a = 2$ et $b = -3$.

a. C'est une sorte de mélange entre suite arithmétique et suite géométrique.

Définition 1

- Une suite u est dite croissante si
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots$$
- Une suite u est dite décroissante si
$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots$$

Lorsqu'une suite est croissante ou lorsqu'elle est décroissante, on dit qu'elle est monotone.

Exemples 5

1. u est arithmétique de premier terme $u_0 = 7$, de raison $r = -2$.
$$u_1 = 7-2 = 5,\ u_2 = 5-2 = 3,\ u_3 = 3-2 = 1,\ \text{etc.}$$
La suite u est décroissante.
2. v est géométrique de premier terme $v_0 = 4$, de raison $q = 1{,}5$.
$$v_1 = 4 \times 1{,}5 = 6,\ v_2 = 6 \times 1{,}5 = 9,\ v_3 = 9 \times 1{,}5 = 13{,}5,\ \text{etc.}$$
La suite v est croissante.
3. w est géométrique de premier terme $w_0 = 16$, de raison $q = 0{,}75$.
$$w_1 = 16 \times 0{,}75 = 12,\ w_2 = 12 \times 0{,}75 = 9,\ w_3 = 9 \times 0{,}75 = 6{,}75,\ \text{etc.}$$
La suite w est décroissante.
4. x est géométrique de premier terme $x_0 = 5$, de raison $q = -2$.
$$x_1 = 5 \times (-2) = -10,\ x_2 = -10 \times (-2) = 20,\ x_3 = 20 \times (-2) = -40,\ \text{etc.}$$
La suite x n'est ni croissante, ni décroissante. Elle n'est pas monotone.

Théorème 1

1. Une suite arithmétique de raison r est :
   - Croissante si $r \geq 0$.
   - Décroissante si $r \leq 0$.
2. Une suite géométrique de premier terme $v_0 \geq 0$ et de raison q est :
   - Croissante si $q \geq 1$.
   - Décroissante si $0 \leq q \leq 1$.

Remarque.
Dans le cas d'une suite géométrique, on laisse le lecteur curieux réfléchir à ce qui se passe dans le cas où $q < 0$ et dans le cas où $v_0 < 0$.

CHAPITRE 9

Dérivation et variations des fonctions du 3e degré

Plan de ce chapitre

On étend le concept de dérivée aux fonctions de degré 3 puis, après des rappels sur les tableaux de signes pour les produits, on étudie les variations d'une fonction de degré 3.

I. Dérivée de la fonction cube.

On rappelle les dérivées déjà vues dans le chapitre 6 et on complète avec la dérivée de la fonction cube.

Théorème 1

$f(x)$	$f'(x)$
c (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Exemples 1

1. On pose $f(x) = 2x^3$. Alors
$$f'(x) = 2 \times 3x^2 = 6x^2.$$
2. On pose $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$. Alors
$$g'(x) = 3x^2 - 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0 = 3x^2 - 8x + 5.$$

II. Rappels sur le signe d'un produit.

On rappelle la méthode avec un exemple :

Exemple 2

On fait le tableau de signe de

$$(-2x+4)(4x+6).$$

On résout : $-2x+4=0$	On résout : $4x+6=0$
$-2x+\cancel{4}-\cancel{4}=0-4$	$4x+\cancel{6}-\cancel{6}=0-6$
$\dfrac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\dfrac{-4}{-2}$	$\dfrac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\dfrac{-6}{4}$
$x=2$	$x=-1,5$
$a=-2$, a est $\ominus$ donc $\boxed{+ \ \phi \ -}$	$a=4$, a est $\oplus$ donc $\boxed{- \ \phi \ +}$

x	$-\infty$		-1.5		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+4)(4x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

III. Variations des fonctions du 3ᵉ degré.

Exemple 3

On considère la fonction g définie sur $[-2;4]$ par

$$g(x)=0,25x^3-0,75x^2-2,25x+2,5.$$

1ʳᵉ étape : calcul de la dérivée.

$$g'(x)=0,25\times 3x^2-0,75\times 2x-2,25\times 1+0=0,75x^2-1,5x-2,25.$$

2ᵉ étape : on démontre une égalité.

On prouve que

$$g'(x)=(3x+3)(0,25x-0,75).$$

Pour cela, on développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}(3x+3)(0,25x-0,75)&=3x\times 0,25x+3x\times(-0,75)+3\times 0,25x+3\times(-0,75)\\&=0,75x^2-2,25x+0,75x-2,25\\&=0,75x^2-1,5x-2,25.\end{aligned}$$

Conclusion : on retombe sur l'expression de $g'(x)$ obtenue précédemment. On a donc bien

$$g'(x)=(3x+3)(0,25x-0,75).$$

Exemple 3 – Suite

3^e^ étape : signe de la dérivée et variations de la fonction.
On étudie le signe de $g'(x) = (3x+3)(0,25x-0,75)$ et on en déduit les variations de g.

$3x+3=0$
$3x+\cancel{3}-\cancel{3}=0-3$
$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{-3}{3}$
$x=-1$
$a=3,\ a$ est $\oplus$ donc $\boxed{-\ \phi\ +}$

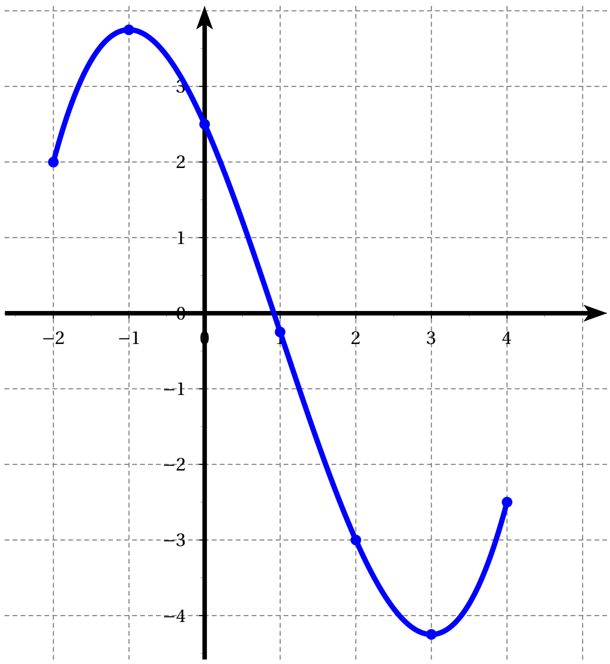
$0,25x-0,75=0$
$0,25x-\cancel{0,75}+\cancel{0,75}=0+0,75$
$\frac{\cancel{0,25}x}{\cancel{0,25}}=\frac{0,75}{0,25}$
$x=3$
$a=0,25,\ a$ est $\oplus$ donc $\boxed{-\ \phi\ +}$

x	-2		-1		3		4
$3x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$0.25x-0.75$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	3.75	$\searrow$	-4.25	$\nearrow$	-2.5

- $g(-2)=0,25\times(-2)^3-0,75\times(-2)^2-2,25\times(-2)+2,5=2$;
- $g(-1)=0,25\times(-1)^3-0,75\times(-1)^2-2,25\times(-1)+2,5=3,75$;
- $g(3)=0,25\times 3^3-0,75\times 3^2-2,25\times 3+2,5=-4,25$;
- $g(4)=0,25\times 4^3-0,75\times 4^2-2,25\times 4+2,5=-2,5$.

Pour illustrer cette étude, on construit la courbe à partir d'un tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	2	$3,75$	$2,5$	$-0,25$	-3	$-4,25$	$-2,5$



CHAPITRE 10
Variables aléatoires

Plan de ce chapitre

En probabilités, une variable aléatoire est un nombre qui dépend d'une expérience aléatoire. On donne un exemple et les définitions dans le paragraphe 1, puis on étudie d'autres exemples dans le paragraphe 2.

I. Loi d'une variable aléatoire, espérance.

Déf. 1

1. Une variable aléatoire est un nombre qui dépend d'une expérience aléatoire.
2. Donner la loi (de probabilité) d'une variable aléatoire X, c'est donner toutes les valeurs possibles que peut prendre X, et les probabilités avec lesquelles X prend ces valeurs.

Exemple 1

On propose à un joueur de choisir entre quatre boîtes B_1, B_2, B_3, B_4. La boîte B_3 renferme un billet de 100 €, les boîtes B_2 et B_4 contiennent chacune un billet de 50 €, la boîte B_1 est vide. Bien sûr, le joueur ne connaît pas le contenu des boîtes avant de jouer.

0	50	100	50
B_1	B_2	B_3	B_4

On note X le gain (aléatoire) du joueur [a].

Il y a une chance sur quatre que X soit égal à 0, deux chances sur quatre qu'il soit égal à 50, une chance sur quatre qu'il soit égal à 100. Autrement dit, la loi de X est donnée par le tableau :

valeurs de X	0	50	100
probabilités	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

a. On note X le gain **avant** la partie, parce qu'après avoir joué, il n'y aura plus rien d'aléatoire.

Définition 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par un tableau de la forme

valeurs de X	x_1	x_2	...	x_n
probabilités	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est le nombre

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n.$$

Exemple 2

On reprend l'exemple 1. On a :

$$E(X) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{4} \times 100 = 50.$$

Remarques.

- L'espérance est ce que l'on peut espérer gagner en jouant à ce jeu. Plus précisément, si on me propose une somme d'argent en échange d'une partie du jeu avec les boîtes, je n'ai intérêt à accepter que si cette somme dépasse l'espérance. Par exemple, si on me propose 60 € au lieu de choisir une boîte, j'ai intérêt à accepter; si on me propose 40 € au lieu de choisir une boîte, j'ai intérêt à refuser; et si on me propose 50 €, il est indifférent d'accepter cet argent ou de jouer (dans ce cas on dit que le jeu est équitable).
- Même si les définitions sont proches, il ne faut pas confondre espérance et moyenne : la première se calcule lorsqu'on fait des probabilités, donc **avant** un jeu; la deuxième se calcule lorsqu'on fait des statistiques, donc **après** avoir joué.

II. Autres exemples.

Exemple 3

Dans une classe de 32 élèves, deux voyages sont proposés aux élèves au cours de l'année : un voyage en Allemagne et un voyage en Italie. On sait que :

- 3 élèves sont partis à la fois en Allemagne et en Italie;
- au total, 10 élèves sont partis en Italie;
- il y a autant d'élèves qui sont partis en Allemagne que d'élèves qui n'y sont pas allés.

Pour partir en Allemagne, chaque élève doit payer 400 €, et pour partir en Italie, il doit payer 300 €.

On choisit au hasard un élève dans la classe, on note Z le total de ce qu'il a payé (en €) pour partir en voyage au cours de l'année.

On construit un tableau d'effectifs :

	Partis en Allemagne	Pas partis en Allemagne	Total
Partis en Italie	3	7	10
Pas partis en Italie	13	9	22
Total	16	16	32

- Les 3 élèves qui ont fait les deux voyages payent $400 + 300 = 700$ €;
- les 13 élèves qui n'ont fait que le voyage en Allemagne payent 400 €;
- les 7 élèves qui n'ont fait que le voyage en Italie payent 300 €;
- les 9 élèves qui n'ont fait aucun voyage payent 0 €.

Exemple 3 – Suite

On peut donc résumer la loi de Z par le tableau :

valeurs de Z	700	400	300	0
probabilités	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$

Finalement l'espérance de Z est :

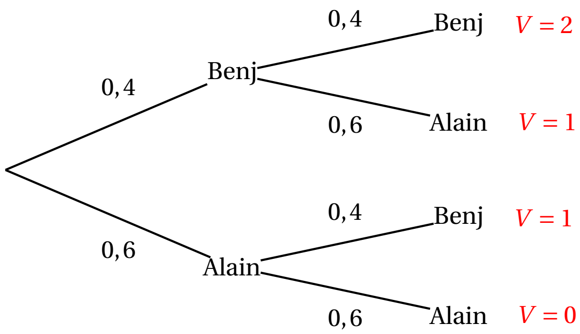
$$E(Z) = \frac{3}{32} \times 700 + \frac{13}{32} \times 400 + \frac{7}{32} \times 300 + \frac{9}{32} \times 0 = 293,75.$$

Remarque. Cette espérance est la somme moyenne dépensée par élève pour partir en voyage.

Exemple 4

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité que Benjamin gagne une rencontre est $0,4$. Les deux amis font deux parties. On note V le nombre de victoires de Benjamin.

On construit un arbre pondéré, avec de gauche à droite le vainqueur du 1er match, puis du 2e. On indique à l'extrémité droite (en rouge) le nombre V de victoires de Benjamin :



- La probabilité que Benjamin gagne deux fois est $0,4 \times 0,4 = 0,16$;
- la probabilité que Benjamin gagne une fois est $0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,48$;
- la probabilité que Benjamin gagne zéro fois est $0,6 \times 0,6 = 0,36$.

Autrement dit, on a le tableau :

valeurs de V	0	1	2
probabilités	0,36	0,48	0,16

Finalement, l'espérance de V est :

$$E(V) = 0,36 \times 0 + 0,48 \times 1 + 0,16 \times 2 = 0,80.$$

Remarque. Chaque match est ce que l'on appelle une épreuve de Bernoulli ; la variable aléatoire V donne donc le nombre de succès lorsqu'on répète deux épreuves de Bernoulli indépendantes. En terminale, vous généraliserez la situation en répétant trois, quatre, cinq ... épreuves de Bernoulli, avec des applications concrètes et très utilisées dans la pratique, comme dans l'exemple suivant :
Avant une élection, on interroge 1000 personnes au hasard pour savoir si elles préfèrent le candidat A ou le candidat B. Supposons par exemple que 51 % de la population préfère A. Le 1er sondé répond A ou B, puis le 2e répond A ou B, puis le 3e, etc. À chaque fois, la probabilité que le sondé réponde A est égale à 51 %. Au final, la situation est analogue à celle de nos matchs de tennis ; à la différence qu'il y a beaucoup plus d'épreuves (1 000 au lieu de 2) et que la probabilité de victoire est différente (51 % au lieu de 40 %).
On a supposé que 51 % de la population préférait A, mais cela ne va pas forcément se retrouver dans notre sondage, parce que nos 1000 personnes n'ont aucune raison de représenter fidèlement l'ensemble de la population ; il se pourrait donc que B arrive en tête dans notre enquête. En terminale, vous apprendrez à calculer la probabilité que le candidat B arrive en tête du sondage – pour information, cette probabilité vaut 25 % environ.

CHAPITRE 11

Évolutions successives

Plan de ce chapitre

Quel est le taux d'évolution quand on fait deux hausses successives de 10 % ? Deux baisses de 10 % ? Une baisse de 10 %, suivie d'une hausse de 10 % ? Si on fait une baisse de 10 % , quelle hausse permet de revenir au nombre de départ ? C'est à ce type de questions que l'on répond dans cette leçon.

Exemple 1

Un prix augmente successivement deux fois de 10 %. Quel est le taux d'évolution global ?

$100\ \% + 10\ \% = 110\ \% = 1,10$. On peut donc compléter le schéma, en partant d'un prix de 100 € et en multipliant deux fois de suite par 1,10 :

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 1,10} \boxed{110} \xrightarrow{\times 1,10} \boxed{121}$$

Prix de départ — Après la 1re hausse — Après la 2e hausse

Finalement, on est passé de 100 € à 121 €, donc il y a eu une hausse globale de 21 %.

Attention

On voit donc que deux hausses successives de 10 % **ne font pas** une hausse de 20 %. Il y a le même type de piège dans l'exemple suivant.

Exemple 2

Étudions maintenant une hausse de 10 %, suivie d'une baisse de 10 %.

$100\ \% + 10\ \% = 110\ \% = 1,10$ et $100\ \% - 10\ \% = 90\ \% = 0,90$. On peut donc compléter le schéma, en partant d'un prix de 100 € :

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 0,90 \text{ }} $$

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 1,10} \boxed{110} \xrightarrow{\times 0,90} \boxed{99}$$

Prix de départ — Après la hausse — Après la baisse

Conclusion : on est passé de 100 € à 99 €, donc il y a eu une baisse globale de 1 %.

Attention

Une baisse de 10 % n'est pas compensée par une hausse de 10 %.

Terminons avec deux applications : la recherche d'un taux réciproque et celle d'un taux moyen.

Exemple 3

On baisse un nombre de 20 %. Quel est le taux à appliquer pour revenir au nombre de départ ?

Pour résoudre le problème, on part de la valeur 100 et on fait le schéma habituel, sachant qu'une baisse de 20 % revient à une multiplication par $100\,\% - 20\,\% = 80\,\% = 0,80$:

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times 0,80} \boxed{80} \xrightarrow{\times ???} \boxed{100}$$

Valeur initiale — Après la baisse — Retour à la valeur initiale

Pour déterminer le deuxième taux d'évolution, on calcule :

$$??? = 100 \div 80 = 1,25,$$

donc la baisse de 20 % est compensée par une hausse de 25 %.

On dit que -20 % et $+25$ % sont deux taux d'évolution réciproques l'un de l'autre.

Exemple 4

On effectue deux hausses successives **du même pourcentage**. On obtient au final une hausse de 44 %. On cherche le pourcentage de hausse à chaque étape.

Pour résoudre le problème, on part de la valeur 100 et on fait le schéma habituel, sachant qu'on multiplie deux fois de suite par un même nombre x inconnu (puisqu'on a deux fois le même pourcentage d'augmentation) :

$$\boxed{100} \xrightarrow{\times x} \boxed{???} \xrightarrow{\times x} \boxed{144}$$

Valeur initiale — Après la 1re hausse — Après la 2e hausse

Deux multiplications par x font une multiplication par $1,44$, donc

$$x \times x = 1,44 \qquad x^2 = 1,44 \qquad x = \sqrt{1,44} = 1,20.$$

Conclusion : à chaque étape on a multiplié par 1,20, donc on a augmenté de 20 %. On dit que 20 % est le taux d'évolution moyen.

CHAPITRE 12

Tangente à une courbe

Plan de ce chapitre

Jusqu'à présent, on a calculé des fonctions dérivées et on s'en est servi pour établir les variations. Mais à quoi correspond concrètement $f'(x)$? Voyons cela avec un exemple :

Exemple 1

On pose $f(x) = x^2 - 4x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f.
La question qui nous occupe dans cet exemple est :

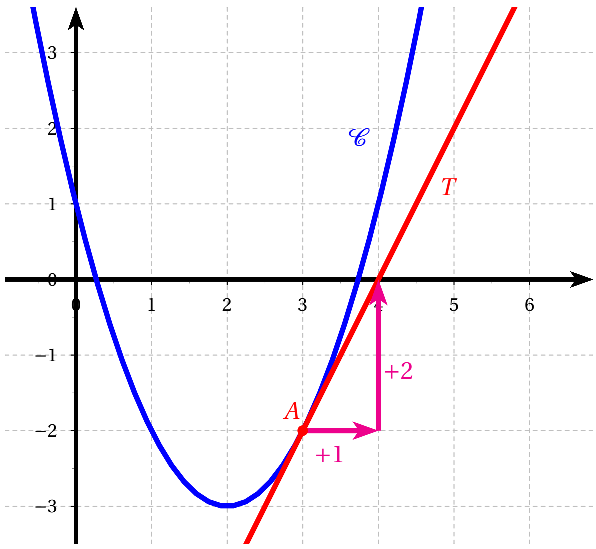
« A quoi correspond le nombre $f'(3)$ »?

- $f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 1 = -2$, donc le point $A(3; -2)$ est un point de $\mathscr{C}$.
- On a $f'(x) = 2x - 4$, donc

$$f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2.$$

- Voilà comment on interprète la valeur de $f'(3)$: la droite T passant par A et de coefficient directeur $f'(3) = 2$ s'appelle la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

  $f'(3)$ donne donc la « pente instantanée » de la courbe $\mathscr{C}$ au point A.



Théorème 1

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple 2

On reprend l'exemple 1.
T est la tangente au point d'abscisse 3, donc elle a pour équation

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3).$$

Or $f(3) = -2$ et $f'(3) = 2$, donc

$$\begin{aligned} T &: y = 2(x-3) + (-2) \\ T &: y = 2x - 6 - 2 \\ T &: y = 2x - 8. \end{aligned}$$

Remarque.
On retrouve le fait que le coefficient directeur de T est le nombre dérivé : $f'(3) = 2$.