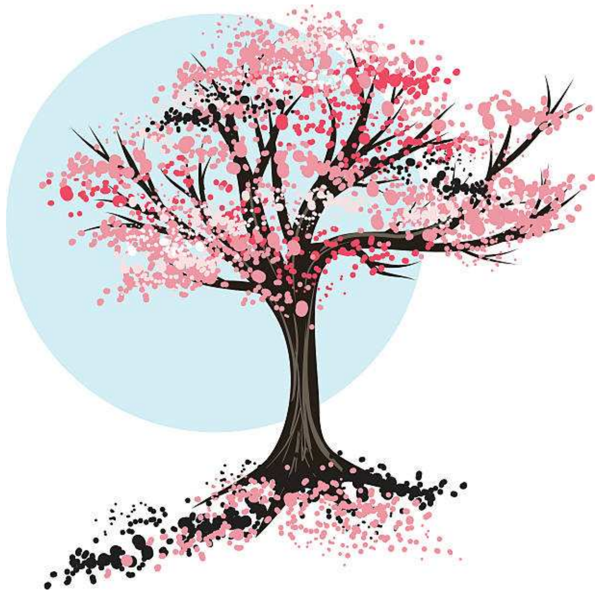
Lycée Mariette Boulogne-sur-Mer



Cours de Mathématiques

Première générale Nicolas Perpète

Table des matières

CHAPITRE 1

Le second degré : équations et paraboles

Plan de ce chapitre

Dans toute cette leçon, on s'intéresse aux expressions dites *du second degré*, c'est-à-dire qui sont de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont trois nombres réels, avec $a \neq 0$. On résout l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x (paragraphe 1), puis on s'intéresse aux courbes d'équations $y = ax^2 + bx + c$, qu'on appelle paraboles (paragraphe 2). Les démonstrations des théorèmes sont données dans le paragraphe 3.

Dans tous les énoncés, a, b, c désignent trois nombres réels, avec $a \neq 0$.

I. L'équation du second degré

On considère l'équation d'inconnue x

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0.$$

Déf.1 Le discriminant de (E) est

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème 1 (l'équation du 2nd degré)

Pour résoudre (E), on distingue trois cas :

1. Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. Si $\Delta = 0$, (E) a une solution :
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$
3. Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution.

Remarque.
Les solutions, lorsqu'elles existent, sont appelées racines de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 1

On résout l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

- $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{4-2}{2} = 1,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Exemple 2

On résout l'équation $-2x^2 + 6x - 5 = 0$.

- $a = -2$, $b = 6$, $c = -5$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = -4$.
- $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solution.

Remarque.
Pour certaines équations simples, on peut se passer du théorème 1. Par exemple, pour résoudre l'équation $x^2 - 2x = 0$, on factorise : $x(x-2) = 0$; et on en déduit immédiatement les deux solutions : $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

II. Paraboles

Déf.2 Les courbes d'équations $y = ax^2 + bx + c$ s'appellent des paraboles.

Exemple 3

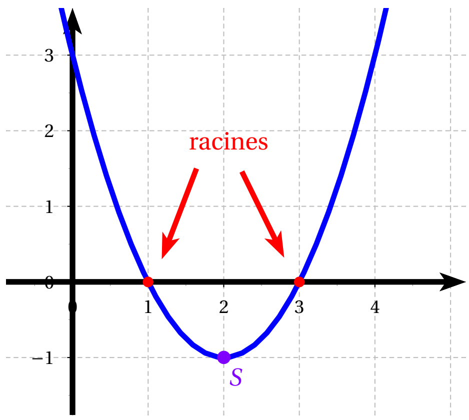
On trace $P : y = x^2 - 4x + 3$ à l'aide d'un tableau de valeurs [a] :

x	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3

On retrouve les racines de $x^2 - 4x + 3$: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ (voir exemple 1).

Intéressons-nous au sommet, c'est-à-dire au point le plus bas S de la parabole.
Ce point S a pour abscisse 2. Par raison de symétrie, cette abscisse est la moyenne des racines ; autrement dit :

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$



a. Détail des deux premiers calculs :

- si $x = 0$, alors $y = 0^2 - 4 \times 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$;
- si $x = 1$, alors $y = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$.

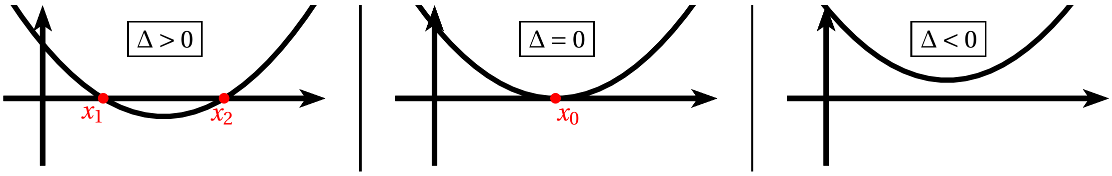
On rappellera en exercice comment obtenir directement tout le tableau de valeurs avec une calculatrice.

Remarques.

- Une parabole est orientée vers le haut (c'est-à-dire en forme de $\cup$) si $a > 0$; et vers le bas (c'est-à-dire en forme de $\cap$) si $a < 0$.

  La démonstration de ce résultat ne sera accessible que plus tard dans l'année, lorsque nous aurons traité le chapitre 9.

- Lorsque ax^2+bx+c a deux racines x_1, x_2, la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ coupe l'axe des abscisses en x_1 et en x_2. Lorsqu'il y a une seule racine x_0, la parabole est *tangente* à l'axe des abscisses en x_0 ; et lorsqu'il n'y a pas de racine, la parabole est située entièrement au-dessus ou entièrement en-dessous de l'axe des abscisses.



Déf.3

Le sommet d'une parabole $P : y = ax^2 + bx + c$ est :

- le point le plus bas si $a > 0$;
- le point le plus haut si $a < 0$.

La démonstration du théorème ci-dessous ne sera elle aussi accessible qu'après avoir traité le chapitre 9.

Théorème 2 (sommet d'une parabole)

Soit $P : y = ax^2 + bx + c$. L'abscisse de son sommet S est

$$x_S = -\frac{b}{2a}.$$

Exemple 4

Reprenons l'exemple 3, avec la parabole $P : y = x^2 - 4x + 3$.
$a = 1$, $b = -4$, $c = 3$. Donc l'abscisse du sommet est

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times 1} = 2,$$

conformément à ce que nous avions trouvé.
Pour calculer l'ordonnée du sommet, il suffit de remplacer (comme nous l'avons déjà fait dans le tableau de valeurs) :

$$y_S = 2^2 - 4\times 2 + 3 = -1.$$

III. Démonstrations

Démonstration (du théorème 1)

On doit résoudre l'équation
$$ax^2+bx+c=0.$$
Comme a est différent de 0, on peut multiplier par $4a$:
$$4a\left(ax^2+bx+c\right)=4a\times 0,$$
soit
$$4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$
On ajoute b^2-4ac dans chaque membre :
$$4a^2x^2+4abx+4ac{\color{red}+b^2-4ac}=0{\color{red}+b^2-4ac},$$
donc en se rappelant que $\Delta=b^2-4ac$:
$$4a^2x^2+4abx+\cancel{4ac}+b^2-\cancel{4ac}=b^2-4ac$$
$$4a^2x^2+4abx+b^2=\Delta.$$

Si l'on a fait tout cela, c'est pour obtenir une identité remarquable dans le membre de gauche : l'équation peut en effet se réécrire
$$(2ax)^2+2\times 2ax\times b+b^2=\Delta.$$
Donc en utilisant $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$, avec $A=2ax$ et $b=B$:
$$(2ax+b)^2=\Delta.$$

On distingue alors trois cas :

1. Si $\Delta>0$, il y a deux possibilités :
$$2ax+b=\sqrt{\Delta}\text{ ou }2ax+b=-\sqrt{\Delta}.$$
On résout séparément :
$$\begin{aligned}2ax+b&=\sqrt{\Delta}\\2ax&=-b+\sqrt{\Delta}\\x&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}\qquad\Bigg|\qquad\begin{aligned}2ax+b&=-\sqrt{\Delta}\\2ax&=-b-\sqrt{\Delta}\\x&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}$$
On obtient les deux solutions attendues : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta=0$, l'équation se réécrit
$$(2ax+b)^2=0.$$
Donc $2ax+b=0$, puis $x=-\frac{b}{2a}$. C'est, là encore, la solution attendue.
3. Si $\Delta<0$, il est impossible que $(2ax+b)^2=\Delta$, car un carré est positif. L'équation n'a donc pas de solution.

Démonstration (du théorème 2)

On pose $f(x)=ax^2+bx+c$ pour $x\in\mathbb{R}$ et on étudie les variations de f.
Pour tout réel x,
$$f'(x)=a\times 2x+b\times 1+0=2ax+b.$$
La solution de l'équation $2ax+b=0$ est $x=-\frac{b}{2a}$.

Démonstration (du théorème 2) – Suite

Il faut distinguer deux cas suivant le signe de a :

Premier cas : $a < 0$.
Dans ce cas, $2a < 0$ et le + est « à gauche du 0 ».

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Deuxième cas : $a > 0$.
Dans ce cas, $2a > 0$ et le + est « à droite du 0 ».

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x) = 2ax + b$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dans les deux cas, le point plus haut (ou le plus bas) – c'est-à-dire le sommet – a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$.

CHAPITRE 2
Probabilités

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, on introduit les deux « grands concepts » du calcul des probabilités au lycée : les arbres pondérés et les probabilités conditionnelles.

I. Arbres pondérés

Exemple 1

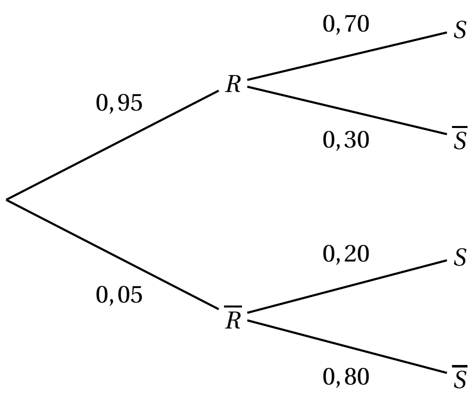
Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension d'un lycée. Les résultats révèlent que :

- 95 % des élèves déclarent manger régulièrement à la cantine, et parmi ceux-ci, 70 % sont satisfaits de la qualité des repas;
- 20 % des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.
On note les événements suivants :

- R l'événement : « l'élève mange régulièrement à la cantine »;
- S l'événement : « l'élève est satisfait ».

On peut résumer la situation par un arbre pondéré :



$P(R \cap S) = 0,95 \times 0,70 = 0,665$

$P\left(R \cap \overline{S}\right) = 0,95 \times 0,30 = 0,285$

$P\left(\overline{R} \cap S\right) = 0,05 \times 0,20 = 0,01$

$P\left(\overline{R} \cap \overline{S}\right) = 0,05 \times 0,80 = 0,04$

Pour calculer la probabilité que l'élève mange régulièrement à la cantine et soit satisfait de la qualité des repas (événement $R \cap S$), on multiplie les probabilités des deux branches du haut [a] :

$$P(R \cap S) = 0,95 \times 0,70 = 0,665.$$

a. C'est une conséquence des règles de calcul avec les pourcentages : 70% de 95% valent 70% × 95% = $0,70 \times 0,95 = 0,665$ = 66,5%

Exemple 1 – Suite

Pour calculer la probabilité que l'élève soit satisfait de la qualité des repas, on ajoute la probabilité de chacun des deux chemins correspondants :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(R\cap S) + P\left(\overline{R}\cap S\right) \\ &= 0,95\times 0,70 + 0,05\times 0,20 = 0,665 + 0,01 = 0,675. \end{aligned}$$

Remarque.
La somme de toutes les probabilités rouges vaut 1 :

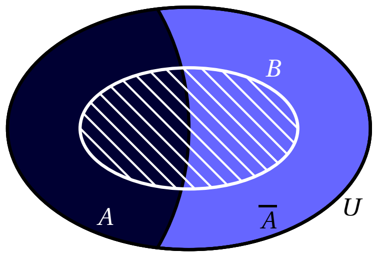
$$0,665 + 0,285 + 0,01 + 0,04 = 1.$$

La méthode utilisée ci-dessus pour calculer $P(S)$ se généralise :

Théorème 1 (formule des probabilités totales)

Pour tous événements A, B :

$$P(B) = P(A\cap B) + P\left(\overline{A}\cap B\right).$$



Remarque.
La probabilité d'être dans la zone hachurée (événement B) est la somme des probabilités d'être dans la zone de gauche (événement $A\cap B$) et dans la zone de droite (événement $\overline{A}\cap B$).

II. Probabilité conditionnelle

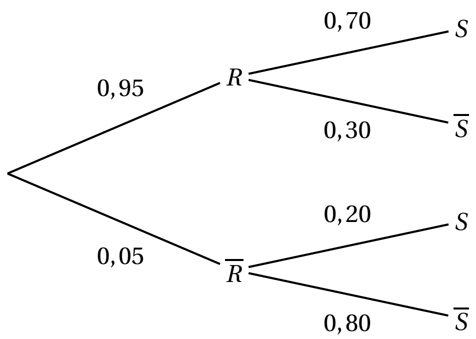
Déf.1 Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A)\neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $P_A(B)$, est la probabilité que B se produise, sachant que A s'est produit.

Exemple 2

On reprend l'exemple 1 : on avait noté

- R l'événement : « l'élève mange régulièrement à la cantine »,
- S l'événement : « l'élève est satisfait »,

et on avait résumé la situation par un arbre pondéré :



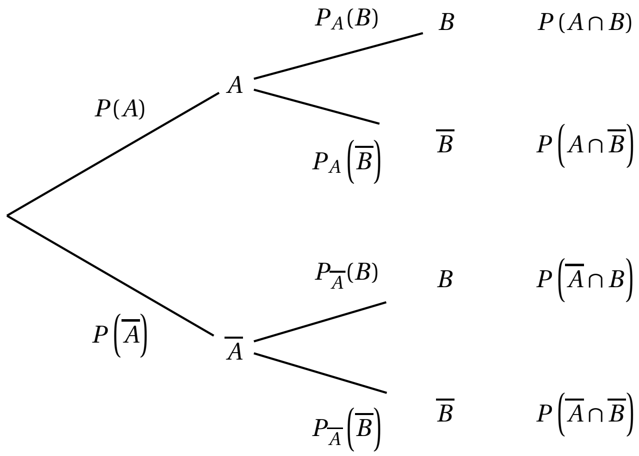
Sachant qu'un élève mange régulièrement à la cantine, il y a 70 % de chances qu'il soit satisfait de la qualité du repas :

$$P_R(S) = 0,70.$$

De même :

$$P_R\left(\overline{S}\right) = 0,30 \qquad P_{\overline{R}}(S) = 0,20 \qquad P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = 0,80.$$

Comme le suggère l'exemple précédent, on utilise des probabilités conditionnelles à chaque fois qu'on construit un arbre pondéré :



En prenant les branches tout en haut de l'arbre, on obtient

$$P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B),$$

puis le théorème :

Théorème 2 (probabilité conditionnelle)

Pour tous événements A, B tels que $P(A)\neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 3

On revient à notre exemple avec la cantine. On souhaite calculer $P_S(R)$. On a déjà calculé

$$P(S\cap R) = 0,665, \qquad P(S) = 0,675.$$

On en déduit

$$P_S(R) = \frac{P(S\cap R)}{P(S)} = \frac{0,665}{0,675}\approx 0,985.$$

Sachant qu'un élève est satisfait de la qualité des repas, il y a (environ) 98,5 % de chances qu'il mange régulièrement à la cantine.

III. Indépendance

Commençons par un raisonnement informel : intuitivement, dire que deux événements A et B sont indépendants, c'est dire que la réalisation de A n'a pas d'incidence sur celle de B, et réciproquement. Ou encore : si je sais que A a été réalisé, cela ne change pas la probabilité que B se réalise ; et réciproquement. Avec le vocabulaire du paragraphe précédent, cela se traduit par les égalités

$$P_A(B) = P(B) \qquad \text{et} \qquad P_B(A) = P(A).$$

Et grâce à la formule des probabilités conditionnelles

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B) \qquad \text{et} \qquad \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A).$$

Chacune de ces deux égalités se réécrit

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B),$$

ce qui nous conduit à la définition :

Déf.2 Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

Exemple 4

On tire une carte dans un jeu de 32. On considère les événements :

A : « la carte est un cœur » ;

B : « la carte est une dame » ;

$A \cap B$: « la carte est la dame de cœur ».

On a

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

On remarque que $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$. Les événements A et B sont donc indépendants, conformément à l'intuition : la valeur de la carte est indépendante de sa couleur.

CHAPITRE 3

Suites numériques

Plan de ce chapitre

Ce chapitre est consacré aux suites, c'est-à-dire aux listes infinies de nombres réels. On présente d'abord les deux modes de définition principaux, puis on s'intéresse aux représentations graphiques. C'est l'occasion d'introduire la notion de limite, au cœur du programme de terminale. On termine avec l'étude des variations.

I. Les deux modes de définition

Exemple 1

De façon informelle, une suite est une liste infinie de nombres réels. On a par exemple :

- la suite des nombres pairs
$$0\,;2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;\cdots$$
- la suite périodique
$$2\,;5\,;2\,;5\,;2\,;5\,;\cdots$$

Pour définir le concept de suite de façon plus rigoureuse (et exploitable), on fait le lien avec les fonctions :
Une fonction f associe, à tout nombre x appartenant à l'ensemble de définition (généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles), un unique nombre que l'on note $f(x)$. La seule véritable différence entre une suite et une fonction est que l'ensemble de définition d'une suite est $\mathbb{N}$ (ou parfois $\mathbb{N}^*$) [1]. Précisons cela avec un exemple :

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 2x.$$
On a donc par exemple $f(0) = 2\times 0 = 0$, $f(-3) = 2\times(-3) = -6$, ou encore $f(1{,}5) = 2\times 1{,}5 = 3$.
D'une façon naturelle, on peut aussi s'intéresser à la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par
$$u(n) = 2n.$$
On a
$$u(0) = 2\times 0 = 0,\ u(1) = 2\times 1 = 2,\ u(2) = 2\times 2 = 4,\ \text{etc.}$$
On reconnaît la suite des nombres pairs évoquée plus haut.
Il est d'usage de noter u_n plutôt que $u(n)$ l'image d'un nombre n. Avec la suite ci-dessus, on notera donc plutôt :
$$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ \text{etc.}$$

1. On rappelle que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\cdots\}$; et que $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;\cdots\}$ (on a enlevé 0).

Remarques.

- L'ensemble de définition de u est $\mathbb{N}$, donc n est nécessairement un entier naturel. On ne peut par exemple pas donner de sens $u_{1,5}$ ou à u_{-3}.
- Pour nommer les suites, on utilise souvent les lettres u, v, w ; et la variable est souvent notée n. Cela permet de voir du premier coup d'œil la différence avec les fonctions (et leur fameux $f(x)$).

Définition 1

- Une suite est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{N}^*$.
- Au lieu de $u(n)$, l'image d'un entier n est souvent notée u_n. Le nombre u_n s'appelle terme de rang n, ou terme d'indice n.
- La suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 3

1. Pour la suite des nombres pairs :

$$u_0 = 0\ ;\ u_1 = 2\ ;\ u_2 = 4\ ;\ u_3 = 6\ ;\ \cdots$$

La formule générale est $u_n = 2n$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = 2n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_0 = 2\times 0+1 = 1\ ;\ u_1 = 2\times 1+1 = 3\ ;\ u_2 = 2\times 2+1 = 5\ ;\ u_3 = 2\times 3+1 = 7\ \ldots$$

C'est la suite des nombres impairs.

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $v_n = \frac{2n+1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on notera que l'on « démarre » à $n = 1$) :

$$v_1 = \frac{2\times 1+1}{1} = \frac{3}{1} = 3\ ;\ v_2 = \frac{2\times 2+1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ ;\ v_3 = \frac{2\times 3+1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33\ ;\ v_4 = \frac{2\times 4+1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\ \ldots$$

Les termes successifs d'une suite peuvent également être définis de proche en proche grâce à ce que l'on appelle une relation de récurrence :

Exemple 4

On définit une suite par

$$\begin{cases} u_0 & = 4 \\ u_{n+1} & = 2u_n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \leftarrow \text{relation (ou formule) de récurrence.}$$

Étant donné un terme u_n d'une suite, le terme suivant est u_{n+1}. La relation de récurrence peut donc se réécrire en français :

« Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par 2 puis on enlève 3. »

On calcule de proche en proche les premiers termes de la suite :

Avec $n = 0$:	Avec $n = 1$:	Avec $n = 2$:
$u_{0+1} = 2u_0 - 3$	$u_{1+1} = 2u_1 - 3$	$u_{2+1} = 2u_2 - 3$
$u_1 = 2\times 4 - 3$	$u_2 = 2\times 5 - 3$	$u_3 = 2\times 7 - 3$
$u_1 = 5.$	$u_2 = 7.$	$u_3 = 11$

Exemple 5

On définit une suite par

$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 7 - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On calcule les premiers termes :

Avec $n = 0$:	Avec $n = 1$:	Avec $n = 2$:
$u_{0+1} = 7 - u_0$	$u_{1+1} = 7 - u_1$	$u_{2+1} = 7 - u_2$
$u_1 = 7 - 2$	$u_2 = 7 - 5$	$u_3 = 7 - 2$
$u_1 = 5$	$u_2 = 2$	$u_3 = 5$

On obtient la suite périodique évoquée dans l'exemple 1.

II. Représentations graphiques

Exemple 6

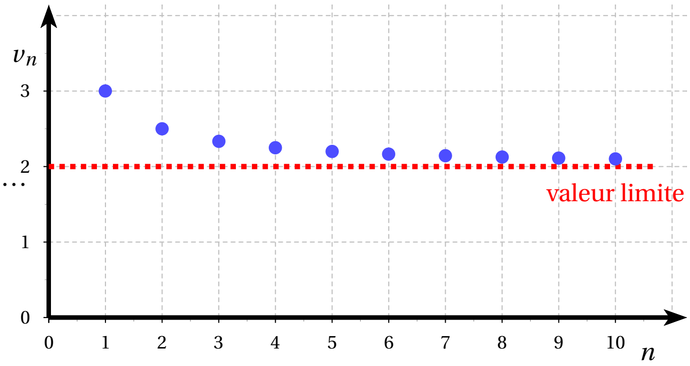
On reprend la suite de l'exemple 3.3 : $v_n = \frac{2n+1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que $v_1 = 3$, $v_2 = 2{,}5$ $v_3 \approx 2{,}33$, etc.
On peut se demander ce qui se passe pour les « grandes » valeurs de n :

$v_{10} = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$; $v_{100} = \dfrac{201}{100} = 2{,}01$; $v_{1000} = \dfrac{2\,001}{1000} = 2{,}001\ldots$

On a l'impression que les termes de la suite se rapprochent de 2. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 2, ou qu'elle a pour limite 2. On écrit

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2.$$

Cette limite est bien visible ci-contre dans la représentation de la suite par un nuage de points.



Exemple 7

On reprend la suite de l'exemple 4 :

$$\begin{cases} u_0 & = 4 \\ u_{n+1} & = 2u_n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

À moins de calculer les termes successifs de la suite, il est impossible de les représenter graphiquement comme on l'a fait dans l'exemple précédent. Il y a cependant une technique qui permet d'obtenir une représentation graphique rapide et éclairante, et sans faire de calcul. Elle repose sur l'idée suivante : la relation de récurrence peut s'écrire

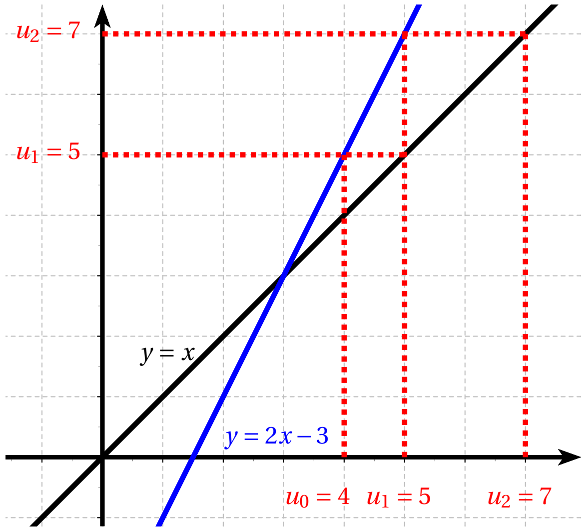
$$u_{n+1} = f(u_n),$$

où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
On trace alors dans un même repère la droite d'équation $y = 2x - 3$ (c'est-à-dire la courbe de la fonction f) et la droite d'équation $y = x$.
Refaisons le calcul des premiers termes :

$u_1 = 2u_0 - 3$	$u_2 = 2u_1 - 3$	$u_3 = 2u_2 - 3$
$u_1 = 2 \times 4 - 3 = 5$	$u_2 = 2 \times 5 - 3 = 7$	$u_3 = 2 \times 7 - 3 = 11$

Exemple 7 – Suite

Prenons le terme $u_0 = 4$ de la suite et plaçons-le sur l'axe des abscisses. Son image par f est $f(u_0) = u_1 = 5$, donc on l'obtient à partir de u_0 en montant jusqu'à la courbe de f, puis en allant jusqu'à l'axe des ordonnées. On le retrouve alors en abscisse grâce à la droite d'équation $y = x$.
Finalement, sachant placer le terme u_0 sur l'axe des abscisses, on peut placer le terme suivant u_1, également sur l'axe des abscisses. Bien sûr, cette méthode se généralise : elle permet de construire u_2 (on l'a fait sur le graphique) puis, de proche en proche, les termes suivants.



Il est assez clair que l'on va obtenir une sorte d'escalier qui va « monter vers l'infini ». On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

III. Variations

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

- croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.

Lorsqu'une suite est croissante ou lorsqu'elle est décroissante, on dit qu'elle est monotone.

Remarque.
Une suite croissante, c'est donc une suite qui vérifie

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots,$$

et une suite décroissante, une suite qui vérifie

$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots$$

Pour étudier les variations d'une suite, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on étudie son signe :

- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est croissante ;
- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante ;
- dans toute autre situation, la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

Exemple 8

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) - 2n \\ &= 2n + 2 - 2n \\ &= 2. \end{aligned}$$

Or $2 \geq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

C'était prévisible : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres pairs (voir début du cours) et il est clair que ces nombres vont en augmentant.

Exemple 9

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par
$$v_n = \frac{2n+1}{n}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On l'a déjà rencontrée dans l'exemple 6. Ici on étudie ses variations.

À la lumière de la représentation graphique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il semble qu'elle soit décroissante (les points sont de plus en plus bas). Mais il faut le prouver rigoureusement ; pour cela, on fait le calcul : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)} - \frac{2n+1}{n} \\
&= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} \\
&= \frac{(2n+3)\times n}{(n+1)\times n} - \frac{(2n+1)\times(n+1)}{n\times(n+1)} \\
&= \frac{2n^2+3n}{(n+1)n} - \frac{2n^2+2n+n+1}{n(n+1)} \\
&= \frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{n(n+1)} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{-1}{n(n+1)} \leq 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

CHAPITRE 4

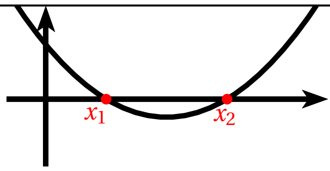
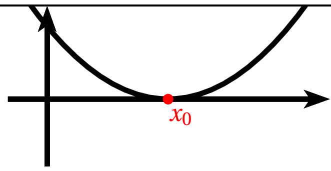
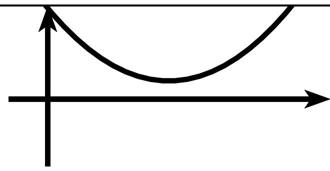
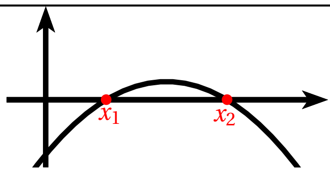
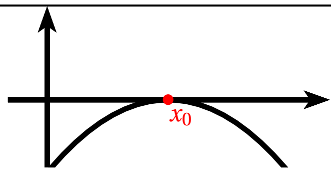
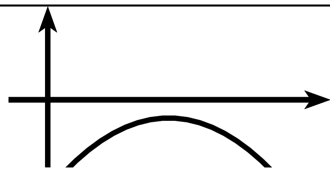
Le second degré : signe et factorisation

Plan de ce chapitre

Dans tous les énoncés, a, b, c désignent trois nombres réels, avec $a \neq 0$. On étudie le signe de $ax^2 + bx + c$, puis on apprend à résoudre une inéquation du second degré ; on s'intéresse enfin à la factorisation de $ax^2 + bx + c$ (le théorème afférent est démontré dans le paragraphe 4).

I. Signe du second degré

On s'intéresse au signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$. On distingue six situations différentes, selon le signe de a et de Δ :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	 x : x_1 x_2 $f(x)$: + 0 − 0 +	 x : x_0 $f(x)$: + 0 +	 x : $f(x)$: +
$a < 0$	 x : x_1 x_2 $f(x)$: − 0 + 0 −	 x : x_0 $f(x)$: − 0 −	 x : $f(x)$: −

On résume la situation par le théorème :

Théorème 1 (signe de l'expression du 2nd degré)

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a, sauf entre les racines, s'il y en a.

Exemple 1

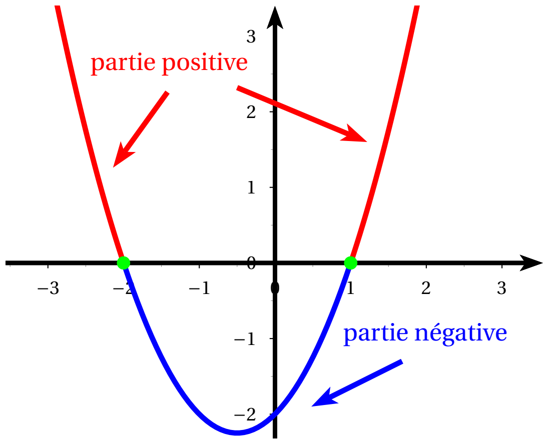
On construit le tableau de signe de x^2+x-2.

- $a=1$, $b=1$, $c=-2$;
- $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 1\times(-2)=9$;
- $\Delta>0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = -2,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

- $a=1$, a est positif.

D'après le théorème 1, x^2+x-2 est positif (c.-à-d. du signe de a), sauf entre les racines -2 et 1. On obtient donc le tableau :



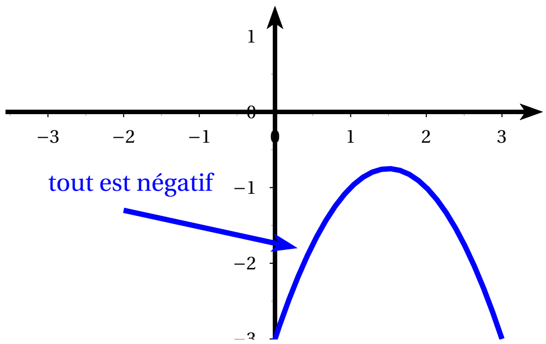
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple 2

On fait le tableau de signe de $-x^2+3x-3$.

- $a=-1$, $b=3$, $c=-3$;
- $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times(-1)\times(-3)=-3$;
- $\Delta<0$, donc il n'y a pas de racine ;
- $a=-1$, a est négatif.

D'après le théorème 1, $-x^2+3x-3$ est négatif (c.-à-d. du signe de a) partout. On obtient donc le tableau :



x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+3x-3$		$-$	

II. Inéquation

Exemple 3

On résout l'inéquation

$$x^2 \geq 2x+3. \qquad (I)$$

Il y a trois étapes :

- **On transpose.**

$$x^2-2x-3 \geq 0.$$

- **On fait un tableau de signe.**
  On étudie x^2-2x-3. On trouve (je ne détaille pas) $\Delta=16$, puis deux racines $x_1=-1$, $x_2=3$. On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple 3 – Suite

- **On lit la solution de l'inéquation dans le tableau.**
  $x^2-2x-3 \geq 0$ (c-à-d x^2-2x-3 est positif) lorsque $x \in]-\infty;-1]$ ou lorsque $x \in [3;+\infty[$. Donc l'ensemble des solutions de (I) est
  $$]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[.$$

III. Factorisation

Théorème 2 (factorisation de l'expression du 2nd degré)

Soit x un nombre réel.

1. Si $\Delta > 0$, ax^2+bx+c se factorise sous la forme
   $$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$
   (où x_1 et x_2 sont les racines).
2. Si $\Delta = 0$, ax^2+bx+c se factorise sous la forme
   $$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$
   (où x_0 est la racine).

Exemple 4

On factorise l'expression x^2-4x+3.

- $a=1$, $b=-4$, $c=3$;
- $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times1\times3 = 4$;
- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times1} = \frac{4-2}{2} = 1,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

D'après le théorème 2, pour tout nombre x :

$$x^2-4x+3 = a(x-x_1)(x-x_2) = 1(x-1)(x-3) = (x-1)(x-3).$$

Remarque.
La factorisation est cohérente avec les racines. En effet :

$$x^2-4x+3=0 \iff (x-1)(x-3)=0 \iff x-1=0 \text{ ou } x-3=0 \iff x=1 \text{ ou } x=3.$$

IV. Démonstration

Démonstration (Point 1 du théorème 2)

On suppose que $\Delta > 0$ et on note $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les deux racines.
On fait d'abord les deux calculs :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \left(\cancel{b^2} - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a} \times a} = \frac{c}{a}.$$

Remarque.
À la deuxième ligne, le développement $\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right) = (-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ vient de l'identité remarquable $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$, avec $A = -b$ et $B = \sqrt{\Delta}$.

Ensuite on développe :

$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2) &= a(x \times x - x_1 \times x - x_2 \times x + x_1 \times x_2) \\ &= a\left(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 \times x_2\right). \end{aligned}$$

Donc en utilisant les formules obtenues ci-dessus, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 - a \times \left(-\frac{b}{a}\right)x + a \times \frac{c}{a} = ax^2 + bx + c.$$

On a donc bien égalité entre la forme factorisée et la forme développée.

CHAPITRE 5

Trigonométrie

Plan de ce chapitre

Dans les paragraphes 1 et 2, on définit le cosinus et le sinus d'un nombre réel grâce au cercle trigonométrique. Ces définitions reprennent et généralisent celles du collège, où l'on a étudié le cosinus et le sinus d'un angle aigu. Le paragraphe 3 est consacré à l'étude des fonctions cosinus et sinus.

Les démonstrations des théorèmes du cours sont données en exercice.

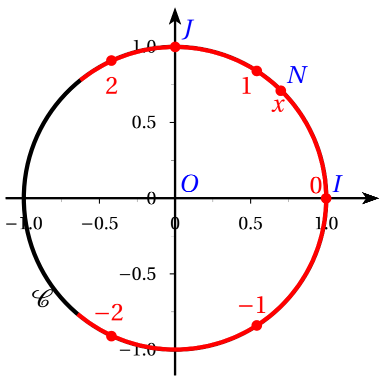
I. Le cercle trigonométrique

Définition 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1.

En utilisant la même unité de longueur que celle du repère (O, I, J), on gradue le cercle $\mathscr{C}$, de $-\infty$ à $+\infty$, en plaçant la graduation 0 au point I et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (= sens direct = sens trigonométrique).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit N le point de $\mathscr{C}$ situé à la graduation x. On dit alors que N est le point de $\mathscr{C}$ associé à x.



Le théorème suivant montre toutes les valeurs remarquables du cercle trigonométrique :

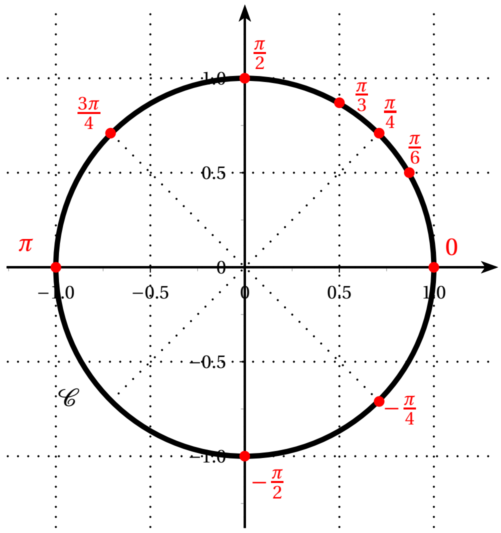
$$0 \quad , \quad \frac{\pi}{6} \quad , \quad \frac{\pi}{4} \quad , \quad \frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{\pi}{2} \quad , \quad \pi.$$

À titre informatif, on a ajouté les valeurs $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On notera que le point associé à $\frac{\pi}{3}$ a pour abscisse $\frac{1}{2}$;

tandis que celui associé à $\frac{\pi}{6}$ a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.

Théorème 1 (cercle trigonométrique)

Point N associé à...	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\widehat{ION}$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$



Remarques.

- Tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de valeurs. Par exemple, le point associé à 0 est aussi associé à 2π (on fait 1 tour de cercle dans le sens direct), 4π (2 tours dans le sens direct), 6π (3 tours dans le sens direct), ..., -2π (1 tour dans le sens indirect), -4π (2 tours dans le sens indirect), -6π (3 tours dans le sens indirect), ...
- Le radian est une unité de mesure des angles proportionnelle au degré. Par définition, un angle de $180°$ mesure π radians. Donc par exemple, sur la figure de la définition 1 :

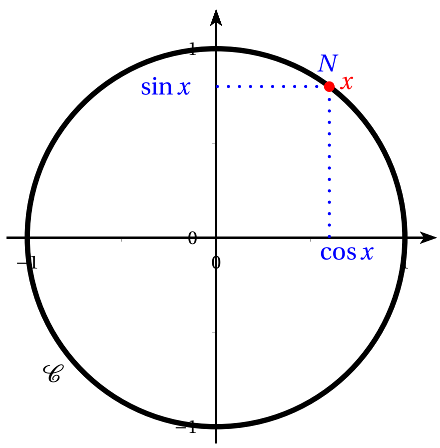
$$\widehat{IOJ} = 90° = \frac{\pi}{2} \text{ radians.}$$

II. Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 2

Soit x un nombre réel et soit N le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé à x. On pose :

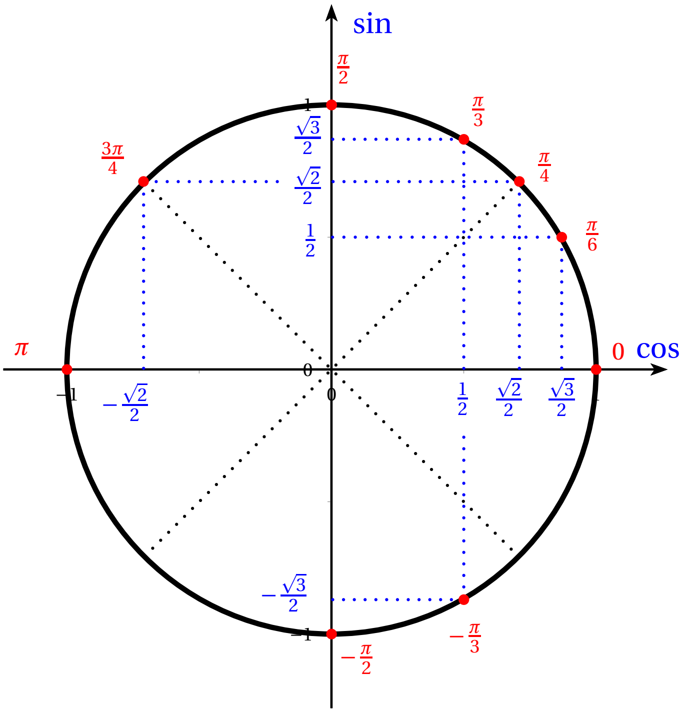
- $\cos x = x_N$.
- $\sin x = y_N$.



Le théorème 2 recense les valeurs remarquables du cos et du sin :

Théorème 2 (cosinus et sinus remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0



Exemple 1

On place les points associés à $\frac{3\pi}{4}$ et à $-\frac{\pi}{3}$. Par simple lecture du cercle trigonométrique on obtient :

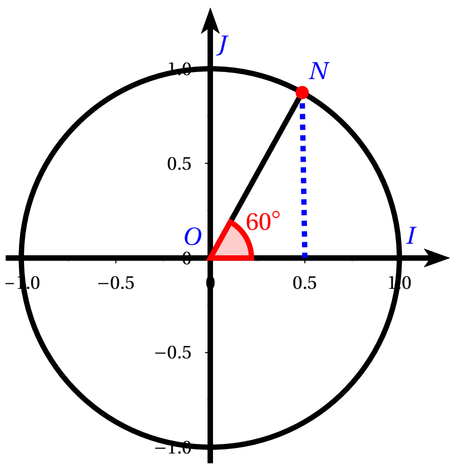
- $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\quad\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarques.

- Notre définition du cos et du sin étend aux nombres réels la définition du cos et du sin donnée au collège pour les angles géométriques. Notant par exemple N le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$, on a :

$$\cos(60°) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Lorsqu'on utilise la calculatrice, il faut mettre en mode degré ou en mode radian suivant la situation : pour calculer $\cos(60°)$, il faut mettre en mode degrés; et pour $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, en mode radians.



III. Fonctions cosinus et sinus

On commence par un rappel sur la parité et sur la périodicité.

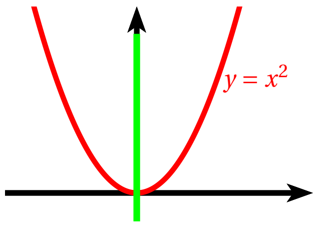
Définition 3

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite :

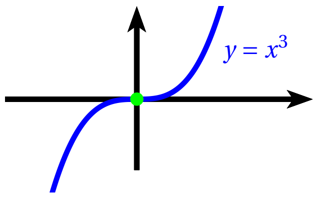
1. Paire si pour tout réel x,
$$f(-x) = f(x).$$
2. Impaire si pour tout réel x,
$$f(-x) = -f(x).$$

Exemples 2

1. On pose $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel x :
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$
donc f est paire.

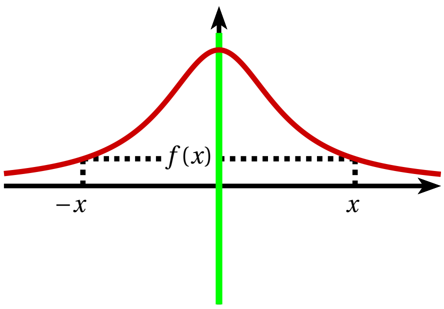


2. On pose $g(x) = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel x :
$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x),$$
donc g est impaire.

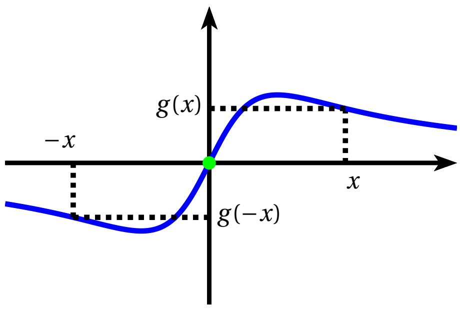


Théorème 3 (courbes des fonctions paires ou impaires)

1. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



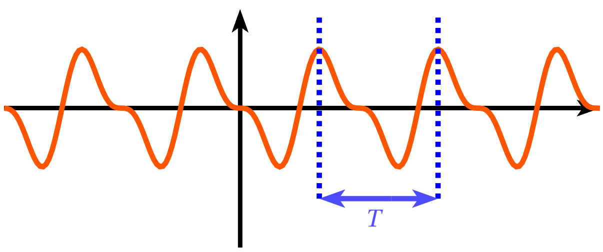
Fonction paire.



Fonction impaire.

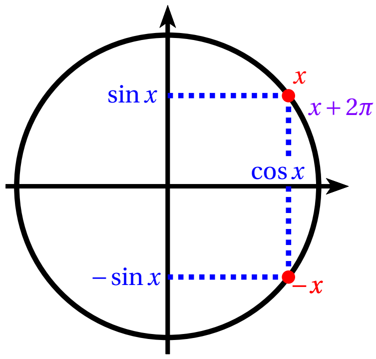
Définition 4

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite T−périodique si pour tout réel x,
$$f(x+T) = f(x).$$
La courbe d'une fonction T−périodique se reproduit identique à elle-même tous les T.



Exemple 3 (fonctions cos et sin)

- La fonction cos est paire : pour tout réel x,
$$\cos(-x) = \cos x.$$
- La fonction sin est impaire : pour tout réel x,
$$\sin(-x) = -\sin x.$$
- Les fonctions cos et sin sont 2π−périodiques : pour tout réel x,
$$\cos(x+2\pi) = \cos x \quad , \quad \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

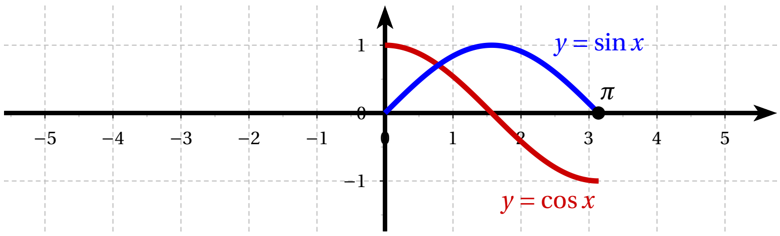


Pour illustrer ces résultats, on trace les courbes représentatives des fonctions cos et sin. On fait cela en trois étapes :

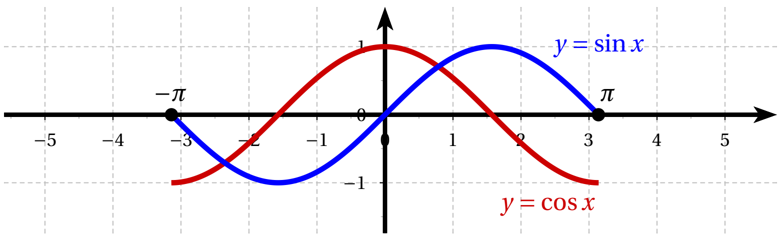
- On commence par tracer les courbes sur l'intervalle $[0;\pi]$ grâce à un tableau de valeurs :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

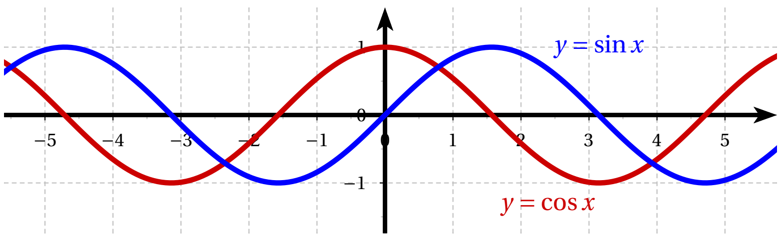
On utilise les valeurs approchées :
$$\pi \approx 3,14 \quad , \quad \frac{\pi}{2} \approx 1,57 \quad , \quad \frac{\pi}{4} \approx 0,78 \quad , \quad \frac{3\pi}{4} \approx 2,36 \quad , \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71.$$



- On complète par symétrie grâce à la parité (théorème 3) : la courbe de la fonction cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées; tandis que celle de la fonction sin est symétrique par rapport à l'origine du repère. On obtient ainsi les courbes sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ – intervalle dont la longueur est égale à 2π.



- On complète par périodicité. On obtient les courbes sur $\mathbb{R}$ tout entier.



CHAPITRE

6 Dérivation

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, on considère une fonction f et on étudie son taux de variation sur un intervalle de temps $[t; t+\Delta t]$, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Pour le physicien, cette quantité correspond à une vitesse moyenne : par exemple, si $f(t)$ désigne le volume d'eau s'étant écoulé dans un réservoir au temps t, alors $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ donne la vitesse moyenne de remplissage entre les temps t et $t+\Delta t$.
On franchit un pas supplémentaire en faisant tendre le pas de temps Δt vers 0 : on considère ensuite

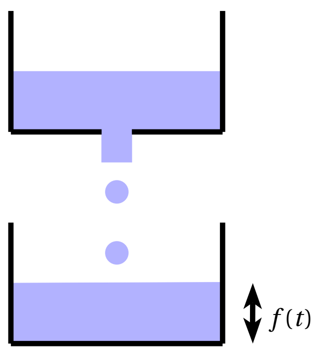
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

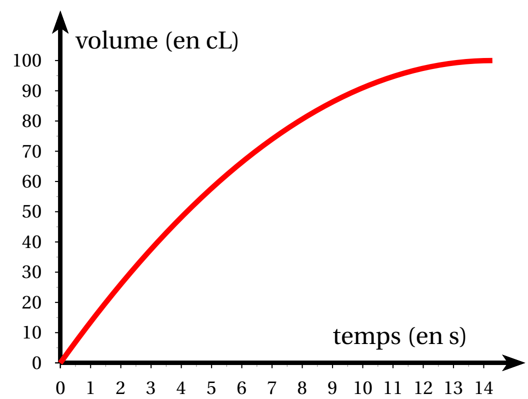
Ce nombre, noté $f'(t)$, est appelé nombre dérivé de f en t. Pour le physicien, il correspond à la vitesse instantanée au temps t.

Dans le paragraphe 1 du chapitre, les considérations physiques évoquées ci-dessus nous conduisent au concept de nombre dérivé; on fait également le lien avec la tangente à une courbe. Ces notions sont reprises et formalisées pour aboutir à la fonction dérivée dans le paragraphe 2, puis on retrouve les tangentes dans le paragraphe 3. Certains théorèmes du cours sont démontrés dans le paragraphe 4, d'autres sont démontrés en exercice.

I. Introduction

On reprend l'exemple donné en préambule : le fond d'un petit réservoir cubique de 1 L est percé d'un trou carré de 1 cm de côté duquel l'eau s'écoule dans un autre réservoir de mêmes dimensions. On note $f(t)$ le volume d'eau (en cL) dans le réservoir du bas au temps t (en secondes).





Ce phénomène a été étudié par Bernoulli et Torricelli notamment. En utilisant leur travail, on établit la formule :

$$f(t) = 14t - 0,49t^2.$$

Dans la suite de cette introduction, on répond à quatre questions :

- Quelle est la durée de remplissage du réservoir du bas ?
- Quelle est la vitesse moyenne d'écoulement pendant les 5 premières secondes ?
- Quelle est la vitesse moyenne d'écoulement entre le temps $t = 5$ et le temps $t = 10$?
- Quelle est la vitesse instantanée d'écoulement au temps $t = 5$?

I. 1. Réponse à la première question

Les deux réservoirs ont une contenance de 1 L, soit 100 cL. Pour déterminer la durée de remplissage, il faut donc résoudre l'équation $14t - 0,49t^2 = 100$. C'est une équation du second degré, qui se réécrit

$$-0,49t^2 + 14t - 100 = 0.$$

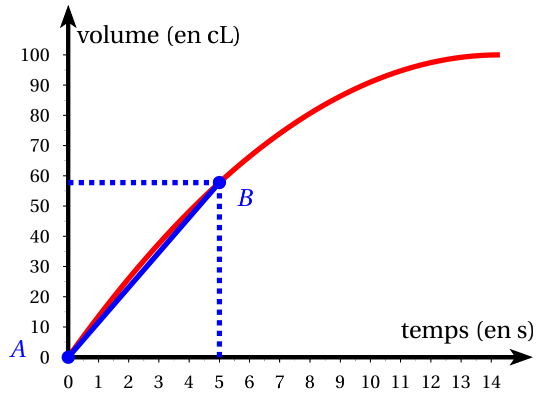
Le discriminant est $\Delta = 14^2 - 4 \times (-0,49) \times (-100) = 0$, donc il y a une seule solution $t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{2\times(-0,49)} \approx 14,29$. Conclusion : le réservoir se remplit en 14,29 s environ.

I. 2. Réponse à la deuxième question

La vitesse moyenne d'écoulement pendant les 5 premières secondes est [1]

$$\begin{aligned}\frac{\text{Quantité écoulée}}{\text{Durée}} &= \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}\\ &= \frac{57,75 - 0}{5 - 0}\\ &= 11,55 \text{ cL/s.}\end{aligned}$$

Cette vitesse moyenne correspond au coefficient directeur (ou pente) de la droite (AB) sur la figure ci-contre.

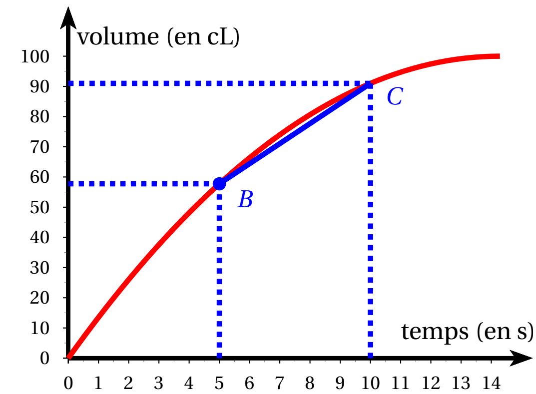


I. 3. Réponse à la troisième question

La vitesse moyenne d'écoulement entre le temps $t = 5$ et le temps $t = 10$ est

$$\begin{aligned}\frac{\text{Quantité écoulée}}{\text{Durée}} &= \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5}\\ &= \frac{91 - 57,75}{10 - 5}\\ &= 6,65 \text{ cL/s.}\end{aligned}$$

Cette vitesse moyenne correspond au coefficient directeur (ou pente) de la droite (BC) sur la figure ci-contre.



On note que la vitesse moyenne entre les temps $t = 5$ et $t = 10$ est inférieure à la vitesse moyenne entre les temps $t = 0$ et $t = 5$, ce qui était prévisible : l'eau s'écoule de moins en moins vite à mesure que le niveau diminue dans le réservoir du haut.

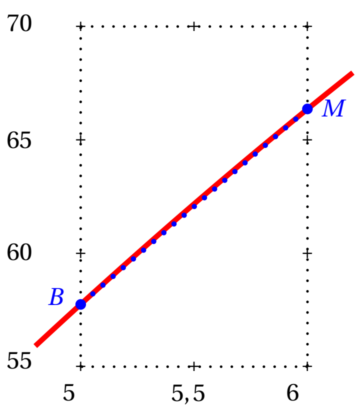
1. On n'utilise rien d'autre que la formule $v = \frac{d}{t}$, où ici la « distance » est la quantité d'eau écoulée.

I. 4. Réponse à la quatrième question

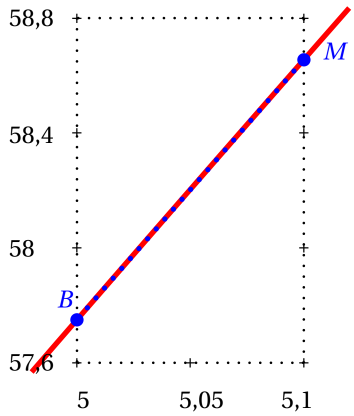
Pour déterminer les vitesses moyennes dans les deux questions précédentes, on a calculé des quotients de la forme

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{6.1}$$

Pour calculer la vitesse instantanée au temps $t=5$, on pourrait prendre une « petite » valeur de Δt dans l'équation (6.1) : sur les deux figures ci-dessous, on a fait un zoom de plus en plus important sur le point B. On a respectivement pris $\Delta t = 1$, puis $\Delta t = 0,1$. On a indiqué sur chaque graphique la vitesse moyenne que l'on obtenait. Elle correspond au coefficient directeur de chacune des droites (BM), que l'on a tracées en pointillés parce qu'elles se confondent presque avec la courbe de la fonction f.



$$\Delta t = 1$$
$$\text{Vit. moy.} = \frac{f(6)-f(5)}{1} = \frac{66,36-57,75}{1} = 8,61 \text{ cL/s}$$



$$\Delta t = 0,1$$
$$\text{Vit. moy.} = \frac{f(5,1)-f(5)}{0,1} = \frac{58,6551-57,75}{0,1} = 9,051 \text{ cL/s}$$

Mais pourquoi s'arrêter là? On définit la vitesse instantanée au temps $t=5$ comme la limite des vitesses moyennes lorsque Δt tend vers 0 :

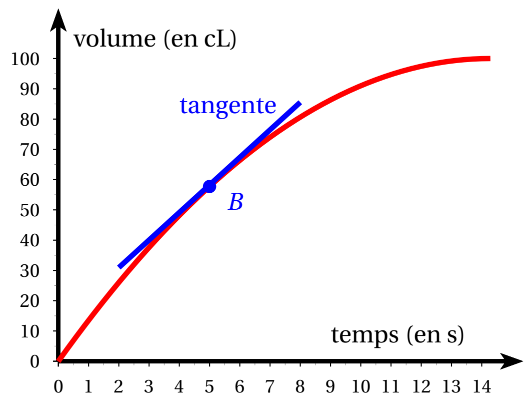
$$v(5) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(5+\Delta t)-f(5)}{\Delta t}.$$

Pour faire référence à la fonction f, on note $f'(5)$ cette vitesse instantanée :

$$f'(5) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(5+\Delta t)-f(5)}{\Delta t}.$$

Le nombre $f'(5)$ s'appelle nombre dérivé de f en 5.

On a vu que les vitesses moyennes étaient les coefficients directeurs des droites (BM). La vitesse instantanée correspond au coefficient directeur d'une droite « limite » que l'on appelle la tangente au point B.



Remarques.

- Nous n'avons pas obtenu la valeur exacte de $v'(5)$, c'est un problème que l'on réserve pour le paragraphe 3 – on verra que $v'(5) = 9,1$ (valeur qui s'exprime en cL/s).
- On a travaillé jusqu'à présent sur des intervalles de temps de la forme $[t; t+\Delta t]$, mais on aurait tout aussi bien pu travailler sur $[t-\Delta t; t]$. Les résultats (valeur de $v'(5)$ et tangente) auraient été les mêmes.

II. Nombre dérivé, fonction dérivée

En nous inspirant de l'introduction, nous donnons à présent les définitions générales. On notera ci-dessous un changement de notations par rapport à ce qui précède : le temps t est remplacé par a et le pas de temps Δt est remplacé par h, conformément à l'usage en mathématiques.

Déf. 1

Soit f une fonction et soit a un point dans son ensemble de définition. On dit que f est dérivable en a si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Dans ce cas, le nombre dérivé de f en a est défini par cette limite :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Déf. 2

Le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé taux de variation de f entre a et $a+h$.

Exemple 1

On pose $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculons $f'(3)$.

Par définition, $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.
On calcule le taux de variation et, seulement après, la limite : pour tout nombre $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2-3^2}{h}\\ &= \frac{3^2+2\times 3\times h+h^2-9}{h}\\ &= \frac{\cancel{9}+6h+h^2-\cancel{9}}{h}\\ &= \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}}\\ &= 6+h.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(6+h)\\ &= 6+0\\ &= 6.\end{aligned}$$

Remarques.

- Lorsque h se rapproche de 0, $6+h$ se rapproche de $6+0=6$. Pour calculer $\lim\limits_{h\to 0}(6+h)$, il suffit donc de remplacer h par 0.
- Quelle est l'utilité du calcul dans la colonne de gauche ? Pourquoi ne pas directement remplacer h par 0 ? Parce qu'alors on aurait $\frac{(3+0)^2-3^2}{0} = \frac{0}{0}$, ce qui n'a bien sûr aucun sens.

Le théorème ci-dessous généralise cet exemple.

Théorème 1 (nombre dérivé pour la fonction carré)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Déf. 3

Lorsque f est une fonction dérivable en tout point a d'un intervalle I, sa fonction dérivée est la fonction

$$f' : a \mapsto f'(a).$$

Exemple 2

D'après le théorème 1, si $f(x) = x^2$, on a $f'(a) = 2a$ pour tout réel a appartenant à $I = \mathbb{R}$.
Dans la suite, on notera la variable x plutôt que a. Donc avec $f(x) = x^2$ par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2x.$$

Théorème 2 (dérivées usuelles (1))

1. Si $f(x) = c$ (fonction constante), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = 0.$$

2. Si $f(x) = x^n$ (n entier supérieur ou égal à 1), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Remarque.
Si $f(x) = x$ (donc si $n = 1$ dans le point 2), alors

$$f'(x) = 1x^{1-1} = x^0 = 1.$$

On résume le théorème 2 par le tableau :

$f(x)$	$f'(x)$
constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
$\dots$	$\dots$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}

Théorème 3 (opérations sur les dérivées)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel. Alors :

1. $u + v$ est dérivable sur I et

$$(u+v)' = u' + v'.$$

2. $u - v$ est dérivable sur I et

$$(u-v)' = u' - v'.$$

3. $k \times u$ est dérivable sur I et

$$(k \times u)' = k \times u'.$$

Les théorèmes 2 et 3 permettent de justifier chacun des exemples ci-dessous.

Exemples 3

1. On pose $f(x) = -6x + 4$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = -6 \times x + 4$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -6 \times 1 + 0 = -6.$$

2. On pose $g(x) = 3x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a $g(x) = 3 \times x^2$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 3 \times 2x = 6x.$$

3. On pose $h(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = 3x^2 - 5 \times 2x + 4 \times 1 - 0 = 3x^2 - 10x + 4.$$

Dans l'exemple qui suit, on répond au problème posé dans le paragraphe 1.

Exemple 4

On pose $f(t) = 14t - 0,49t^2$ pour $t \in \mathbb{R}$. Cette fonction est celle de l'introduction.
On a

$$f'(t) = 14 \times 1 - 0,49 \times 2t = 14 - 0,98t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc en particulier

$$f'(5) = 14 - 0,98 \times 5 = 9,1.$$

Conclusion : la vitesse instantanée de remplissage du réservoir au temps $t = 5$ est $9,1$ cL/s.

On complète nos formules de dérivées :

Théorème 4 (dérivées usuelles (2))

$f(x)$	ens. de définition	dérivable sur	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(La 1[re] ligne est un cas particulier de la 2[e], dans le cas $n = 1$).

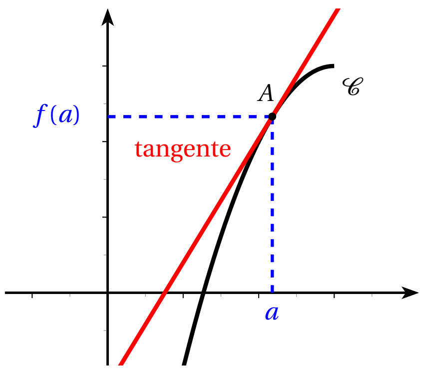
Remarques.

- $\frac{1}{x}$ (et plus généralement $\frac{1}{x^n}$) n'existe pas pour $x = 0$ – d'où les ensembles de définition égaux à $\mathbb{R}^*$ dans les deux premières lignes.
- La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$, mais elle n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$ – elle n'est pas dérivable en 0.

III. Équation de tangente

Définition 4

Soit f une fonction admettant un nombre dérivé en a, soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a. La tangente à $\mathscr{C}$ au point A est la droite qui passe par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Exemple 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On voudrait tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-2;2]$.
On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$. Cela permet de compléter les tableaux de valeurs ci-dessous :

D'abord pour la fonction f :

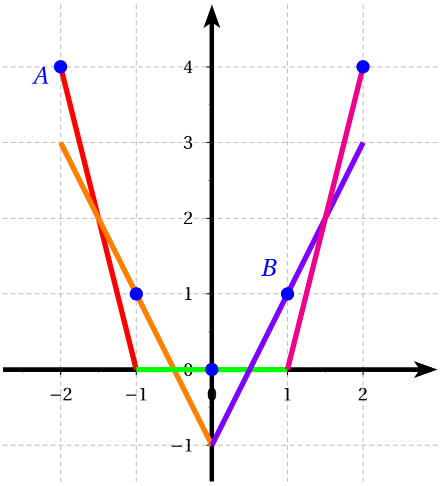
x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4

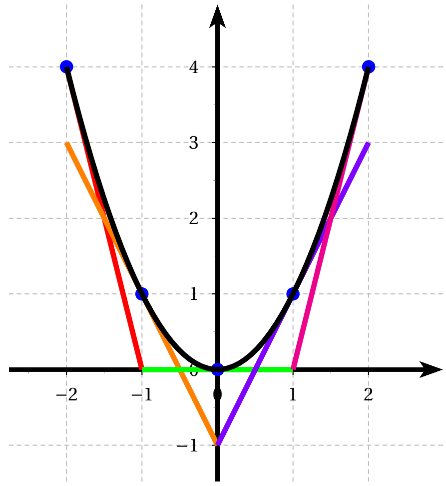
Ensuite avec les nombres dérivés :

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x) = 2x$	-4	-2	0	2	4

On place (en bleu) les points correspondant au premier tableau de valeurs. Mais on ne les relie pas tout de suite ! On trace ensuite les tangentes à la courbe grâce au deuxième tableau de valeurs. Par exemple, le résultat $f'(-2) = -4$ entraîne que le coefficient directeur de la tangente au point $A(-2;4)$ (tracée en rouge) est -4. Et le fait que $f'(1) = 2$ entraîne que le coefficient directeur de la tangente au point $B(1;1)$ (tracée en violet) est 2. Une fois les points placés et les tangentes tracées, on relie les points à main levée, en s'appuyant sur les tangentes pour avoir un bon tracé (courbe en noir).

Exemple 5 – Suite





Théorème 5 (équation de la tangente)

Soit f une fonction dérivable en a et soit A le point de la courbe de f d'abscisse a. On note T la tangente au point A. Son équation est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple 6

On reprend l'exemple 5. On s'intéresse à l'équation de la tangente T au point A d'abscisse $a = 1$.
D'après le théorème 5 :

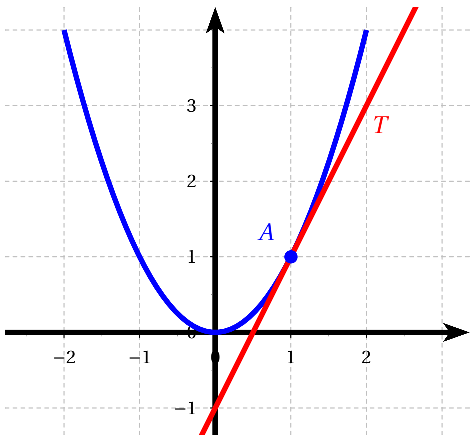
$$T : y = f'(1)(x-1) + f(1).$$

Or $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$, donc

$$T : y = 2(x-1) + 1,$$

soit

$$T : y = 2x - 1.$$



IV. Démonstrations

Démonstration (du théorème 1)

On pose $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ et on fixe un réel a.

Par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On reprend le calcul de l'exemple 1, en remplaçant 3 par a : pour tout nombre $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{\cancel{a^2} + 2 \times a \times h + h^2 - \cancel{a^2}}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} \\ &= 2a + h.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2a+h) \\ &= 2a + 0 \\ &= 2a.\end{aligned}$$

Démonstration (deux des cas du théorème 2)

On commence par la fonction définie par $f(x) = c$ (c constante).
Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $h \neq 0$. On a $f(x) = c$ pour tout réel x donc

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0,$$

et donc

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Conclusion : f' est la fonction nulle.

Ensuite la fonction définie par $f(x) = x$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $h \neq 0$. On a alors

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)-a}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

et donc

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Conclusion : f' est la fonction constante égale à 1.

> **Remarque.**
> Pour $f(x) = x^2$, on retrouve la formule du théorème 1 (démontré ci-dessus) ; et pour $f(x) = x^3$, la démonstration est donnée en exercice. Enfin, pour $f(x) = x^n$, avec $n \geq 4$, on admet la formule pour la fonction dérivée.

Démonstration (du théorème 3)

Premier point. Soit $a \in I$ et soit $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$.[a] Par définition de $u+v$:

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}.$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$, donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \right) = u'(a)+v'(a).$$

Autrement dit, $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a) = u'(a)+v'(a)$.

Troisième point. La démonstration est semblable à celle du premier point. Cette fois, par définition de $k \times u$:

$$\frac{(k\times u)(a+h)-(k\times u)(a)}{h} = \frac{k\times u(a+h)-k\times u(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}.$$

Il n'y a alors plus qu'à faire tendre h vers 0 pour pouvoir conclure.

Deuxième point. C'est une conséquence des premier et troisième points, puisque

$$(u-v)'(a) = (u+(-v))'(a) \underset{1^{\text{er}}\text{ point}}{=} u'(a)+(-v)'(a) \underset{3^{\text{e}}\text{ point}}{=} u'(a)-v'(a).$$

a. Il faut prendre la précaution $(a+h) \in I$, parce qu'on va calculer $u(a+h)$ et $v(a+h)$.

Démonstration (du théorème 5)

Par définition, le nombre dérivé est le coefficient directeur de T_A, donc cette droite a une équation de la forme

$$y = f'(a)x + c.$$

Démonstration (du théorème 5) – Suite

Pour trouver c, on remplace x et y par les coordonnées de A : comme $A(a; f(a))$,

$$f(a) = f'(a) \times a + c,$$

donc $c = f(a) - af'(a)$. On a donc

$$T_A : y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$
$$T_A : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

CHAPITRE 7
Variables aléatoires

Plan de ce chapitre

De façon informelle, une variable aléatoire est un nombre qui dépend d'une expérience aléatoire ; et son espérance est la valeur que l'on s'attend à obtenir, « en moyenne ». On définit les choses de façon plus rigoureuse dans le paragraphe 1, puis on donne deux exemples dans le paragraphe 2. Le paragraphe 3 est consacré à l'étude de deux mesures de dispersion : la variance et l'écart-type.

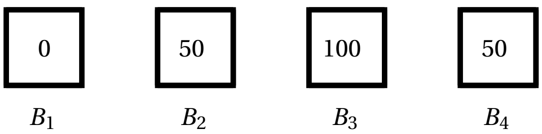
I. Variable aléatoire, loi, espérance

Déf. 1

1. Une variable aléatoire est un nombre qui dépend d'une expérience aléatoire.
2. Donner la loi (de probabilité) d'une variable aléatoire X, c'est donner toutes les valeurs possibles que peut prendre X, et les probabilités avec lesquelles X prend ces valeurs.

Exemple 1

On propose à un joueur de choisir entre quatre boîtes B_1, B_2, B_3, B_4. La boîte B_3 renferme un billet de 100 €, les boîtes B_2 et B_4 contiennent chacune un billet de 50 €, la boîte B_1 est vide. Bien sûr, le joueur ne connaît pas le contenu des boîtes avant de jouer.



On note X le gain (aléatoire) du joueur.

Il y a une chance sur quatre que X soit égal à 0, deux chances sur quatre qu'il soit égal à 50, une chance sur quatre qu'il soit égal à 100. Autrement dit, la loi de X est donnée par

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, \qquad P(X=50) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad P(X=100) = \frac{1}{4}.$$

On peut aussi présenter la loi sous forme de tableau :

x	0	50	100
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Définition 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par un tableau de la forme

valeurs de X	x_1	x_2	...	x_n
probabilités	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est le nombre

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n.$$

Exemple 2

On reprend l'exemple 1. On a :

$$E(X) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{4} \times 100 = 50.$$

Remarques.

- L'espérance est ce que l'on peut espérer gagner en jouant à ce jeu. Plus précisément, si on me propose une somme d'argent en échange d'une partie du jeu avec les boîtes, je n'ai intérêt à accepter que si cette somme dépasse l'espérance. Par exemple, si on me propose 60 € au lieu de choisir une boîte, j'ai intérêt à accepter ; si on me propose 40 € au lieu de choisir une boîte, j'ai intérêt à refuser ; et si on me propose 50 €, il est indifférent d'accepter cet argent ou de jouer.
- Même si les définitions sont proches, il ne faut pas confondre espérance et moyenne : la première se calcule lorsqu'on fait des probabilités, donc **avant** un jeu ; la deuxième se calcule lorsqu'on fait des statistiques, donc **après** avoir joué.
- Le point 1 de la définition 1 est suffisant pour un cours de lycée, mais il est un petit peu informel. De façon plus rigoureuse, U désignant l'univers, une variable aléatoire est une fonction $X : U \to \mathbb{R}$.

  Expliquons cela avec l'exemple qui précède : on pose

  $$U = \{B_1; B_2; B_3; B_4\}$$

  et on définit X par

  $$X(B_1) = 0, \qquad X(B_2) = 50, \qquad X(B_3) = 100, \qquad X(B_4) = 50.$$

  X est une fonction $U \to \mathbb{R}$, c'est donc bien une variable aléatoire.

II. Autres exemples

Exemple 3

Dans une classe de 32 élèves, deux voyages sont proposés aux élèves au cours de l'année : un voyage en Allemagne et un voyage en Italie. On sait que :

- 3 élèves sont partis à la fois en Allemagne et en Italie ;
- au total, 10 élèves sont partis en Italie ;
- il y a autant d'élèves qui sont partis en Allemagne que d'élèves qui n'y sont pas allés [a].

Pour partir en Allemagne, chaque élève doit payer 400 €, et pour partir en Italie, il doit payer 300 €.

On choisit au hasard un élève dans la classe, on note Z le total de ce qu'il a payé (en €) pour partir en voyage au cours de l'année.

a. Donc 16 élèves sont allés en Allemagne, et 16 n'y sont pas allés.

Exemple 3 – Suite

On construit un tableau d'effectif :

	Partis en Allemagne	Pas partis en Allemagne	Total
Partis en Italie	3	7	10
Pas partis en Italie	13	9	22
Total	16	16	32

- Les 3 élèves qui ont fait les deux voyages payent $400 + 300 = 700$ € ;
- les 13 élèves qui n'ont fait que le voyage en Allemagne payent 400 € ;
- les 7 élèves qui n'ont fait que le voyage en Italie payent 300 € ;
- les 9 élèves qui n'ont fait aucun voyage payent 0 €.

On peut donc résumer la loi de Z par le tableau :

x	700	400	300	0
$P(Z = x)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$

Finalement l'espérance de Z est :

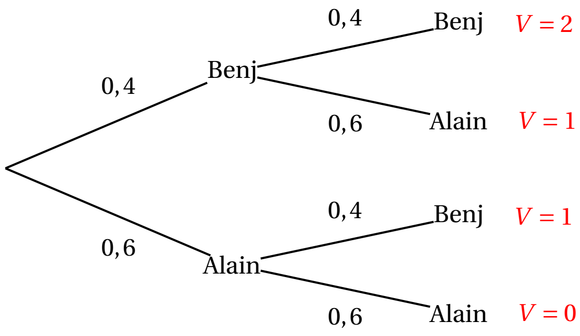
$$E(Z) = \frac{3}{32} \times 700 + \frac{13}{32} \times 400 + \frac{7}{32} \times 300 + \frac{9}{32} \times 0 = 293,75.$$

Remarque. Cette espérance est la somme moyenne dépensée par élève pour partir en voyage.

Exemple 4

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité que Benjamin gagne une rencontre est $0,4$. Les deux amis font deux parties. On note V le nombre de victoires de Benjamin.

On construit un arbre pondéré en indiquant à droite le nombre V de victoires de Benjamin :



- La probabilité que Benjamin gagne deux fois est $0,4 \times 0,4 = 0,16$;
- la probabilité que Benjamin gagne une fois est $0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,48$;
- la probabilité que Benjamin gagne zéro fois est $0,6 \times 0,6 = 0,36$.

Autrement dit, on a le tableau :

x	0	1	2
$P(V = x)$	0,36	0,48	0,16

Finalement, l'espérance de V est :

$$E(V) = 0,36 \times 0 + 0,48 \times 1 + 0,16 \times 2 = 0,80.$$

Remarque. Chaque match est ce que l'on appelle une épreuve de Bernoulli; la variable aléatoire V donne donc le nombre de succès lorsqu'on répète deux épreuves de Bernoulli indépendantes. En terminale, vous généraliserez la situation en répétant trois, quatre, cinq ... épreuves de Bernoulli, avec des applications variées et utiles, comme dans l'exemple suivant :
Avant une élection, on interroge 1 000 personnes au hasard pour savoir si elles préfèrent le candidat A ou le candidat B. Supposons par exemple que 51 % de la population préfère A. Le 1er sondé répond A ou B, puis le 2e répond A ou B, puis le 3e, etc. À chaque fois, la probabilité que le sondé réponde A est égale à 51 %. Au final, la situation est analogue à celle de nos matchs de tennis; à la différence qu'il y a beaucoup plus d'épreuves (1 000 au lieu de 2) et que la probabilité de victoire est différente (51 % au lieu de 40 %).
On a supposé que 51 % de la population préférait A, mais cela ne va pas forcément se retrouver dans notre sondage, parce que nos 1 000 personnes n'ont aucune raison de représenter fidèlement l'ensemble de la population; il se pourrait donc que B arrive en tête dans notre enquête. En terminale, vous apprendrez à calculer la probabilité que le candidat B arrive en tête du sondage – pour information, cette probabilité vaut 25 % environ.

III. Variance, écart-type

Commençons par rappeler ce qui a été vu dans le cours de statistiques de seconde avec un exemple.

Considérons la série de cinq nombres :

$$8\ ;\ 13\ ;\ 11\ ;\ 7\ ;\ 16,$$

que l'on peut voir comme les notes d'un petit groupe d'élèves à un devoir.
La moyenne des notes est

$$\overline{X} = \frac{8+13+11+7+16}{5} = \frac{55}{5} = 11.$$

On complète un tableau avec chaque note, puis on calcule l'écart entre chaque note et la moyenne. On utilise la valeur absolue :

élèves	notes	écarts à la moyenne
1	8	$\lvert 8-11\rvert = \lvert -3\rvert = 3$
2	13	$\lvert 13-11\rvert = \lvert 2\rvert = 2$
3	11	$\lvert 11-11\rvert = \lvert 0\rvert = 0$
4	7	$\lvert 7-11\rvert = \lvert -4\rvert = 4$
5	16	$\lvert 16-11\rvert = \lvert 5\rvert = 5$

L'écart moyen à la moyenne est

$$\frac{3+2+0+4+5}{5} = \frac{14}{5} = 2,8.$$

Cela signifie qu'en moyenne, chaque élève se trouve à 2,8 points de la moyenne de classe, 11. Et bien sûr, plus l'écart moyen est grand, plus les notes sont dispersées autour de la moyenne.

L'écart moyen ne se prête pas très bien aux calculs et il est peu utilisé malgré sa simplicité. On préfère calculer « l'écart quadratique moyen » [1], c'est-à-dire qu'on met tous les écarts au carré :

$$\frac{3^2+2^2+0^2+4^2+5^2}{5} = \frac{54}{5} = 10,8.$$

Pour des raisons « d'homogénéité » , on prend ensuite la racine carrée de ce nombre [2], que l'on appelle l'écart-type et que l'on note σ :

$$\sigma = \sqrt{10,8} \approx 3,29.$$

Remarques.

- Finalement, $\sigma = \sqrt{\frac{(8-11)^2+(13-11)^2+(11-11)^2+(7-11)^2+(16-11)^2}{5}}$
- On vérifiera que l'on a aussi (formule de Koenig) : $\sigma = \sqrt{\frac{8^2+13^2+11^2+7^2+16^2}{5} - 11^2}$

1. Il y a tout un tas de formules simples et pratiques avec l'écart quadratique moyen.
2. Imaginez que les nombres 8 – 13 – 11 – 7 – 16 soient des mesures de longueurs, exprimées en cm. Comme on a mis au carré, la réponse obtenue, 10,8, s'exprime en cm². Or on a mesuré des longueurs, donc il faudrait que la mesure de dispersion soit exprimée en cm également. Il faut donc calculer la racine carrée de 10,8 pour obtenir cette mesure de dispersion, exprimée en cm.

On donne des définitions analogues dans le cas des variables aléatoires :

Définition 3

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

- L'espérance de X est
$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n.$$
- La variance de X est
$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n \times (x_n - E(X))^2.$$
- L'écart-type de X est
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 5

On reprend l'exemple 1. On a :

- $E(X) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{4} \times 100 = 50.$
- $V(X) = \frac{1}{4} \times (0-50)^2 + \frac{1}{2} \times (50-50)^2 + \frac{1}{4} \times (100-50)^2 = 1\,250.$
- $\sigma(X) = \sqrt{1\,250} \approx 35.$

CHAPITRE 8

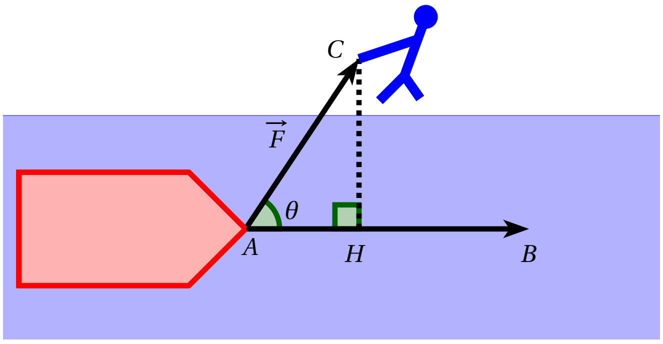
Produit scalaire

Plan de ce chapitre

Un haleur tire un bateau dans un canal avec une force constante $\vec{F} = \overrightarrow{AC}$. Par définition, lorsque le bateau se déplace de A jusqu'à B, la force $\vec{F}$ effectue un travail W défini par

$$W = AB \times AH,$$

où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).



Remarques.

- Notons que si (AC) était perpendiculaire à (AB), le travail de la force serait nul, puisque alors le point H serait confondu avec A et la longueur AH vaudrait 0. En fait, plus l'angle θ est petit, plus la force est *motrice* et plus son travail est important.
- Si l'angle θ est obtus, le travail est $-AB \times AH$. Ce travail est donc négatif et on dit que la force est *résistante*.

Le travail de la force est appelé produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. On a donc

$$W = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH.$$

Il y a quatre autres façons, équivalentes, de définir le produit scalaire : notant $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on verra au cours de cette leçon que [1]

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \pm AB \times AH && \text{(formulation avec la projection – le signe dépend de l'angle } \widehat{BAC}\text{)} \\
&= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} && \text{(formulation avec le cosinus)} \\
&= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) && \text{(formulation avec les longueurs)} \\
&= xx' + yy' && \text{(formulation avec les coordonnées).}
\end{aligned}$$

1. L'équivalence des définitions suivantes n'a rien d'évident et sa démonstration va nous demander du travail.

L'utilisation conjointe de ces formules permettra de résoudre un certain nombre de problèmes de géométrie. Par exemple, connaissant les longueurs des côtés d'un triangle ABC, on pourra calculer l'angle $\widehat{BAC}$ en combinant la formulation avec le cosinus et la formulation avec les longueurs (voir exemple 5).

Remarque.

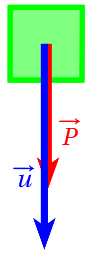
Considérons un objet en chute libre, soumis à son propre poids et à aucune autre force. On note m (en kg) la masse de l'objet.

On utilise la définition du produit scalaire avec les coordonnées : lorsque l'objet chute d'une hauteur h, donc s'il se déplace selon le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\-h\end{pmatrix}$, son poids $\overrightarrow{P}\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}$ effectue le travail

$$W = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{P} = 0\times 0 + (-h)\times(-mg) = mgh.$$

On reconnaît la variation d'énergie potentielle. On peut donc énoncer la propriété :

$$\text{Travail} = \text{variation d'énergie potentielle}$$



Dans le paragraphe 1 de la leçon, on définit le produit scalaire à l'aide des coordonnées. Dans le paragraphe 2, on prouve la bilinéarité du produit scalaire, qu'on utilise pour résoudre des problèmes de géométrie, puis pour obtenir les autres formulations, énoncées et démontrées dans le paragraphe 3. De nombreuses applications sont données en exercices; et on verra dans une prochaine leçon que le produit scalaire est aussi bien utile dans l'étude des équations de droites.

Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

I. Définition avec les coordonnées

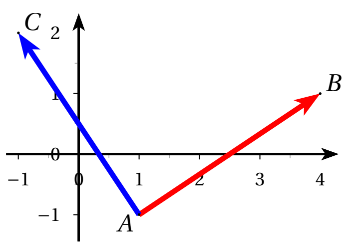
Déf. 1

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, est le nombre défini par

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

Exemple 1

Soient $A(1;-1)$, $B(4;1)$ et $C(-1;2)$. On calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$.



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}$ donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 3\times(-2) + 2\times 3 = -6 + 6 = 0$$

et

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = xx + yy = x^2 + y^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Théorème 1 (premiers résultats)

1. **(Symétrie)** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}.$$
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$:
$$\vec{u}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{u}=0.$$
3. Étant donné un vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2.$$
4. La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ (aussi appelée norme de $\vec{u}$) est notée $\|\vec{u}\|$. Pour tout vecteur $\vec{u}$:
$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2.$$

Le théorème suivant est un corollaire du théorème 5. On l'énonce dès à présent pour pouvoir l'utiliser dans les exercices.

Théorème 2 (caractérisation de l'orthogonalité)

Soient A, B, C trois points du plan tels que $A\neq B$ et $A\neq C$. On a l'équivalence
$$(AB)\perp(AC)\iff\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$

Remarques.

- Conséquence du théorème : dans l'exemple 1, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- On peut employer le mot *orthogonal* à la place de *perpendiculaire*.

II. Bilinéarité du produit scalaire

Théorème 3 (bilinéarité du produit scalaire)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pour tous réels k, j :

1. $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.
2. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.
3. $\left(k\vec{u}\right)\cdot\left(j\vec{v}\right)=k\times j\times\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.

Exemple 2

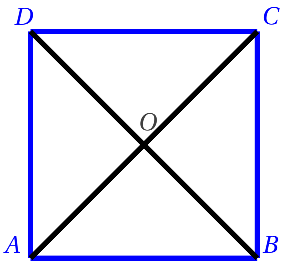
$ABCD$ est un carré de côté 4, de centre O. On calcule $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}&=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right).\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=4^2=16$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ puisque $(AB)\perp(BC)$.

Conclusion :

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\times4^2-\frac{1}{2}\times0=-8.$$

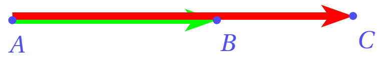


Remarque.
Dans l'exemple qui précède, il eût été plus simple d'utiliser un repère orthonormé et la formulation avec les coordonnées pour faire le calcul du produit scalaire.

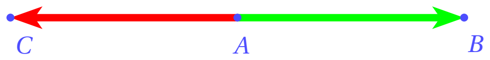
Théorème 4 (cas de deux vecteurs colinéaires)

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls colinéaires.

1. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.



2. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.



Exemple 3

Sur la figure de l'exemple 2, la diagonale du carré mesure $4\sqrt{2}$, donc comme $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires et de sens contraire,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -OA \times OC = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8.$$

III. Les autres formulations du produit scalaire

Théorème 5 (formulation avec les longueurs)

On donne deux formulations différentes (équivalentes) du produit scalaire :

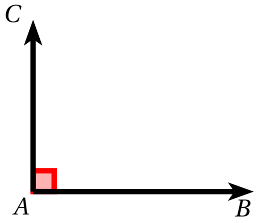
1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$
2. Étant donnés trois points A, B, C :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$

On termine par les formulations avec le projeté orthogonal et avec le cosinus :

Théorème 6 (formulations avec le projeté orthogonal et avec le cosinus)

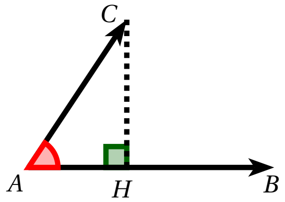
Soient A, B, C trois points distincts. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). On distingue trois cas :

Cas n°1 : $\widehat{BAC}$ droit.



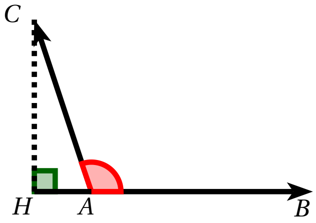
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$

Cas n°2 : $\widehat{BAC}$ aigu.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH.$

Cas n°3 : $\widehat{BAC}$ obtus.



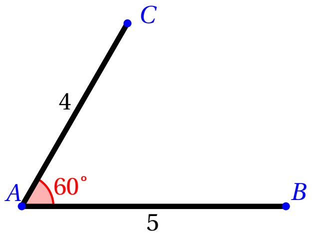
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH.$

Dans chaque cas, on a aussi

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Exemple 4

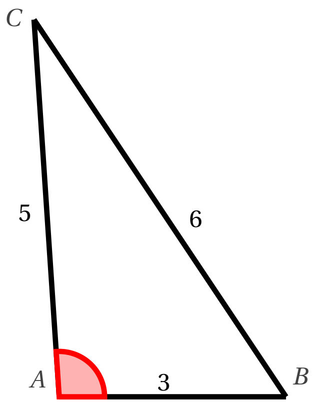
ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$.



On a
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 5 \times 4 \times \cos(60°) = 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 10.$$

Exemple 5 (théorème d'al-Kashi)

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 6$. On cherche l'angle $\widehat{BAC}$.
D'après le théorème 5 :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2 + 5^2 - 6^2\right) = -1.$$
Mais on a aussi (théorème 6) :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 3 \times 5 \times \cos(\widehat{BAC}) = 15 \cos(\widehat{BAC}).$$
On en déduit
$$15 \cos(\widehat{BAC}) = -1,$$
puis
$$\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{15}\,;$$
et grâce à la calculatrice : $\widehat{BAC} \approx 94°$.



Remarque. La méthode se généralise et elle permet d'obtenir la formule
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC},$$
connue sous le nom de *théorème d'al-Kashi*. Lorsque $\widehat{BAC} = 90°$, le cosinus vaut 0 et on retrouve le théorème de Pythagore :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

IV. Démonstrations

Démonstration (du théorème 1)

Point 1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

Point 2. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors comme $\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{0} = x\times 0 + y\times 0 = 0.$$

De même,

$$\vec{0}\cdot\vec{u} = 0\times x + 0\times y = 0.$$

Point 3. On rappelle la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$, donc d'après la formule ci-dessus

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\times(x_B - x_A) + \left(y_B - y_A\right)\times\left(y_B - y_A\right) = (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = AB^2.$$

Point 4. C'est un corollaire immédiat du point 3, puisque si l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on a $\|\vec{u}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$, donc

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

Démonstration (du théorème 3)

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$.

On démontre d'abord le point 1 : $\vec{v} + \vec{w}\begin{pmatrix}x' + x''\\y' + y''\end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\left(\vec{v} + \vec{w}\right) &= x\left(x' + x''\right) + y\left(y' + y''\right)\\ &= xx' + xx'' + yy' + yy''\\ &= \left(xx' + yy'\right) + \left(xx'' + yy''\right)\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.\end{aligned}$$

On continue avec le point 2 :

$$\begin{aligned}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\cdot\vec{w} &= \vec{w}\cdot\left(\vec{u} + \vec{v}\right) && \text{(d'après la propriété de symétrie)}\\ &= \vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{v} && \text{(d'après le point 1)}\\ &= \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} && \text{(à nouveau d'après la propriété de symétrie).}\end{aligned}$$

Et enfin le point 3 : on sait que $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ et $j\vec{v}\begin{pmatrix}jx'\\jy'\end{pmatrix}$, donc

$$\left(k\vec{u}\right)\cdot\left(j\vec{v}\right) = kx\times jx' + ky\times jy' = kj(xx' + yy') = kj\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right).$$

Démonstration (du théorème 4)

Dans les deux cas, la colinéarité entraîne l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. D'après les théorèmes 1 et 3 :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(k\overrightarrow{AB}\right) = k\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\right) = kAB^2.$$

Or en prenant les longueurs dans l'égalité $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et en tenant compte du sens des vecteurs il vient :

- $AC = k\times AB$ si les vecteurs ont même sens, donc $k = \frac{AC}{AB}$.
- $AC = -k\times AB$ si les vecteurs sont de sens contraire, donc $k = -\frac{AC}{AB}$.

Démonstration (du théorème 4) – Suite

Finalement :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = kAB^2 = \frac{AC}{AB}\times AB^2 = AC\times AB$ si les vecteurs ont même sens.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = kAB^2 = -\frac{AC}{AB}\times AB^2 = -AC\times AB$ si les vecteurs sont de sens contraire.

Démonstration (du théorème 5)

Les deux formulations sont équivalentes. En effet, si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors

$$\|\vec{u}\| = AB, \qquad \|\vec{v}\| = AC, \qquad \|\vec{u}-\vec{v}\| = \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = CB.$$

Nous n'avons donc qu'à prouver la première formule. Pour cela, on développe grâce au théorème 3 :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \left(\vec{u}+(-\vec{v})\right)\cdot\left(\vec{u}+(-\vec{v})\right)\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot(-\vec{v})+(-\vec{v})\cdot\vec{u}+(-\vec{v})\cdot(-\vec{v})\\ &= \|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\left(\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cancel{\|\vec{u}\|^2}+\cancel{\|\vec{v}\|^2}-\cancel{\|\vec{u}\|^2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}-\cancel{\|\vec{v}\|^2}\right)\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v}.\end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer le théorème 2.

Démonstration (du théorème 2)

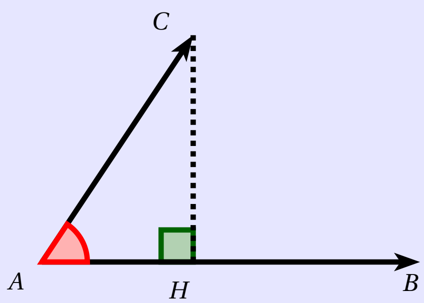
Soient A, B, C trois points du plan tels que $A\neq B$ et $A\neq C$. D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, et d'après le théorème 5 :

$$(AB)\perp(AC) \Leftrightarrow ABC \text{ rectangle en } A \Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$

Démonstration (du théorème 6)

Dans le cas d'un angle droit, le théorème est évident puisqu'on sait déjà que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ (théorème 2) et puisque $\cos\widehat{BAC}=\cos 90° = 0$.

On traite maintenant le deuxième cas : on suppose que $\widehat{BAC}$ est aigu.



On développe :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}.$$

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$ puisque H est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$, puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens (cf théorème 4).

Démonstration (du théorème 6) – Suite

Il reste à faire le lien avec le cosinus. Pour cela, on travaille dans le triangle rectangle AHC : $\cos\widehat{BAC} = \frac{AH}{AC}$ donc $AH = AC \times \cos\widehat{BAC}$ et finalement :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.$$

Dans le cas où $\widehat{BAC}$ est obtus, on renvoie le lecteur à la figure qui accompagne l'énoncé du théorème et on ne donne que les grandes lignes de la démonstration, parce qu'elle est presque la même que dans le cas où $\widehat{BAC}$ est aigu.

En effet, on reprenant le calcul précédent, on obtient

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH,$$

puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraire (la seule différence avec le cas $\widehat{BAC}$ aigu est l'apparition du signe $-$).

Ensuite $\cos\widehat{BAC} = -\frac{AH}{AC}$ (par définition du cosinus d'un angle obtus), donc $-AH = AC \times \cos\widehat{BAC}$ et finalement :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times (-AH) = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.$$

CHAPITRE 9

Variations des fonctions

Plan de ce chapitre

Dans le paragraphe 1 du chapitre, on fait le lien entre le signe de f' et les variations de f. C'est LA grande application de la dérivation en mathématiques au lycée.

On donne dans le paragraphe 2 trois nouvelles formules de dérivées : la dérivée d'un produit, la dérivée d'un quotient; et enfin la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, que l'on utilisera dans le chapitre 12.

I. Dérivation et variations

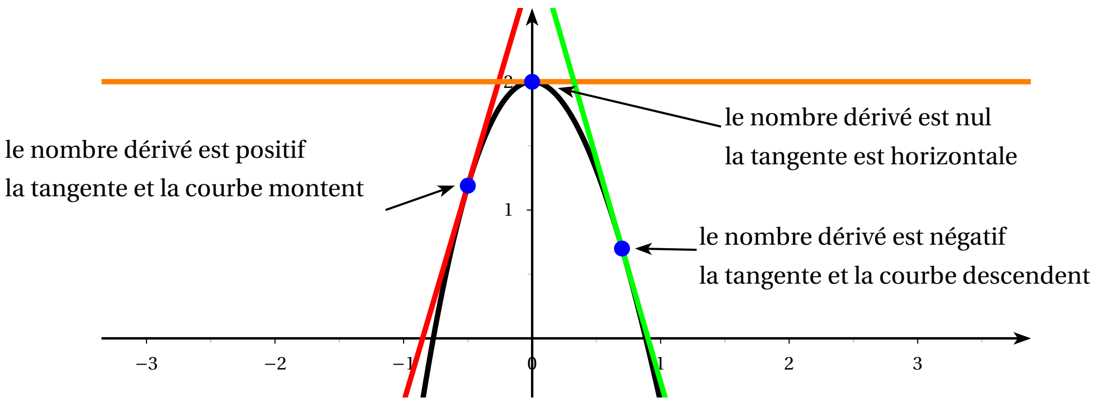
Le théorème qui suit est fondamental.

Théorème 1 (signe de la dérivée et variations)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en quelques points où on peut avoir $f'(x) = 0$), alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en quelques points où on peut avoir $f'(x) = 0$), alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

On ne peut pas démontrer ce théorème au niveau de la classe de première : on a besoin pour cela du théorème de Rolle, puis de celui des accroissement finis, qui ne seront vus qu'au niveau bac+1. On peut tout de même expliquer l'idée avec un dessin :



Exemple 1

On étudie les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
Pour tout réel x :

$$f'(x) = 2x - 3,$$

d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1.5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-0.25	$\nearrow$	

Remarques.

- Pour trouver $1,5$ au centre du tableau, on résout l'équation

$$2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2} = 1,5.$$

  Quant au $-0,25$, il vient du calcul

$$f(1,5) = 1,5^2 - 3 \times 1,5 + 2 = -0,25.$$

  Les coordonnées du sommet S de la parabole $P : y = x^2 - 3x + 2$ sont donc $(1,5; -0,25)$.
- Le lien entre variations d'une fonction et signe de sa dérivée est attribué à Newton et Leibniz (fin XVII$^{\text{e}}$ s.), qui ont fondé le *calcul différentiel* et ont appliqué leur travail à la mécanique – avec une grande réussite. Mais en réalité, c'est à Fermat que l'on doit l'idée originale et fondamentale sur le sujet (vers 1637), avec sa méthode de *l'adégalité*.

II. Dérivée d'un produit et d'un quotient

Théorème 2 (dérivée d'un produit et d'un quotient)

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1. La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

2. Si v ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{1}{v}$ est bien définie sur I, elle est dérivable et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

3. Si v ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{u}{v}$ est bien définie sur I, elle est dérivable et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

On démontre le premier point dans le paragraphe 3.

Exemple 2

On pose $f(x) = (0,5x-3)\sqrt{x}$ pour $x \in [1;+\infty[$. Alors $f = u \times v$, avec $u(x) = 0,5x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$u(x) = 0,5x-3 \qquad u'(x) = 0,5,$$
$$v(x) = \sqrt{x} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donc f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\
&= 0,5 \times \sqrt{x} + (0,5x-3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{0,5 \times \sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{0,5x-3}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{0,5x-3}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\text{car } \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x\right)\\
&= \frac{1,5x-3}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f :

x	1		2		$+\infty$
$1.5x-3$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2.5	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	

- $f(1) = (0,5 \times 1 - 3)\sqrt{1} = -2,5$;
- $f(2) = (0,5 \times 2 - 3)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$.

Conclusion : f est strictement décroissante sur $[1;2]$, puis strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

Exemple 3

On pose $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ pour $x \in \mathbb{R} - \{3\}$. Alors $g = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = x-3$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R} - \{3\}$ [a] et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$:

$$u(x) = x+1 \qquad u'(x) = 1,$$
$$v(x) = x-3 \qquad v'(x) = 1.$$

a. Par application du théorème 2 sur chacun des deux intervalles $]-\infty;3[$ et $]3;+\infty[$.

Exemple 3 – Suite

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{1 \times (x-3) - (x+1) \times 1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x-3-x-1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-4}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de g' et le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
-4		$-$		$-$	
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Conclusion : g est strictement décroissante sur $]-\infty;3[$ et sur $]3;+\infty[$.

Pour conclure ce chapitre, on énonce une propriété qui sera utile au moment d'étudier la fonction exponentielle.

Théorème 3 (dérivée de f(ax+b))

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soient a et b deux réels. Alors la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto af'(ax+b)$.

III. Une démonstration

Démonstration (point 1 du théorème 2)

On pose $f(x) = u(x) \times v(x)$ pour $x \in I$.
Soit $a \in I$ et soit $h \neq 0$ tel que $(a+h) \in I$. Par définition

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}.$$

L'astuce consiste ici à ajouter et retrancher $u(a+h) \times v(a)$ au numérateur, puis à scinder en deux et à factoriser :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a+h) \times v(a) + u(a+h) \times v(a) - u(a) \times v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a+h) \times v(a)}{h} + \frac{u(a+h) \times v(a) - u(a) \times v(a)}{h} \\ &= u(a+h) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h} + v(a)\frac{u(a+h)-u(a)}{h}. \end{aligned}$$

Démonstration (point 1 du théorème 2) – Suite

Or

$$\lim_{h\to 0} u(a+h) = u(a+0) = u(a), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a),$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = u(a)\times v'(a) + v(a)\times u'(a).$$

CHAPITRE 10

Suites arithmétiques, suites géométriques

Plan de ce chapitre

On s'intéresse dans ce chapitre à deux types particuliers de suites : les suites **arithmétiques**, pour lesquelles on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours un même nombre; et les suites **géométriques**, pour lesquelles on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par un même nombre. Les situations sont riches, mathématiquement comme en termes d'applications.

I. Suites arithmétiques

Déf. 1 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique de raison r si tout terme se déduit du précédent en ajoutant r : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Exemple 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$. On a

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1+2 = 3,\ u_2 = 3+2 = 5,\ u_3 = 5+2 = 7,\ \ldots$$

C'est la suite des nombres impairs.

Théorème 1 (terme général d'une suite arithmétique)

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r.$$

Exemple 2

Par exemple, avec la suite des nombres impairs (voir exemple 1) :

$$u_{100} = u_0 + 100 \times r = 1 + 100 \times 2 = 201.$$

Le théorème qui suit est démontré dans le paragraphe 3.

Théorème 2 (somme des premiers entiers)

Étant donné un entier $n \geq 1$:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Avec le symbole $\sum$, cela se réécrit :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 3

$$1+2+3+\cdots+20 = \frac{20\times(20+1)}{2} = 210.$$

II. Suites géométriques

Déf. 2

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison q si tout terme se déduit du précédent en multipliant par q : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = q \times v_n.$$

Exemple 4

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = 2$. On a

$$v_0 = 1,\ v_1 = 1\times 2 = 2,\ v_2 = 2\times 2 = 4,\ v_3 = 4\times 2 = 8,\ \ldots$$

C'est la suite des puissances de 2.

Théorème 3 (terme général d'une suite géométrique)

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n.$$

Exemple 5

Avec la suite de l'exemple 4 :

$$v_{20} = v_0 \times q^{20} = 1 \times 2^{20} = 1\,048\,576.$$

Exemple 6 (suite arithmético-géométrique)

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$w_{n+1} = 2w_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Calculons les premiers termes :

$$w_0 = 1, \qquad w_1 = 2\times 1+1 = 3, \qquad w_2 = 2\times 3+1 = 7, \qquad w_3 = 2\times 7+1 = 15.$$

On voudrait obtenir la valeur de w_{100}. Malheureusement, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique; et il semble nécessaire de calculer les termes de proche en proche jusqu'à w_{100}. Heureusement, il existe une astuce : on se ramène à l'étude d'une suite géométrique en posant

$$v_n = w_n + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Voyons cela :

Exemple 6 (suite arithmético-géométrique) – Suite

- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= w_{n+1}+1 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= (2w_n+1)+1 && \text{(rel. réc. pour } (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= 2w_n+2 && \text{(calcul)} \\ &= 2(w_n+1) && \text{(factorisation!)} \\ &= 2v_n. && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \end{aligned}$$

  Conclusion : $v_{n+1} = 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 2$.
- Comme $v_0 = w_0 + 1 = 1 + 1 = 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

  Enfin $v_n = w_n + 1$ donc

$$w_n = v_n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

  En particulier $w_{100} = 2^{100+1} - 1 = 2^{101} - 1$.

Remarque. Dans l'exemple précédent, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme $w_{n+1} = aw_n + b$, avec $a = 2$ et $b = 1$. Dans cette situation (si $a \neq 1$), l'étude de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ramène à celle d'une suite géométrique – qui vous sera toujours donnée, comme ça a été le cas pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il y a trois étapes :
❶ On prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
❷ On en déduit une formule pour v_n.
❸ Puis une formule pour w_n.

On dit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique [a].

---
a. C'est un peu un mélange de suite géométrique, avec le $2\times$, et de suite arithmétique, avec le $+1$.

Théorème 4 (somme géométrique)

Étant donnés un réel $q \neq 1$ et un entier $n \geq 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Avec le symbole $\sum$, cela se réécrit :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Attention
$q^0 = 1$.

Exemple 7

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10} = \frac{3^{11}-1}{3-1} = 88\,573.$$

III. Démonstrations

Démonstration (du théorème 2)

On note S la somme à calculer, que l'on écrit à l'endroit, puis à l'envers :

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

On ajoute membre à membre les deux lignes. On remarque que la somme de chaque couple d'une même couleur vaut toujours $(n+1)$:

Démonstration (du théorème 2) – Suite

$$S + S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}}.$$

On a donc

$$2S = n \times (n+1) \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration (du théorème 4)

On note S la somme à calculer, que l'on écrit une première fois, puis que l'on multiplie par q :

$$\begin{aligned} S &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n \\ q \times S &= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

On soustrait la première ligne à la deuxième. Les termes d'une même couleur s'annulent deux à deux et il n'en reste plus que deux (le premier, en rouge, et le dernier, en gris) :

$$qS - S = q^{n+1} - 1.$$

On a donc

$$(q-1)S = q^{n+1} - 1 \qquad S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

CHAPITRE 11

Géométrie repérée

Plan de ce chapitre

Cette leçon est consacrée à l'étude des droites et des cercles. Le paragraphe 1 traite des équations de droites, avec une présentation légèrement différente de celle donnée en 2^{de}, basée sur nos connaissances sur le déterminant et sur le produit scalaire. Dans le paragraphe 2, on étudie la forme canonique et les équations de cercles.

Attention

Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé.

I. Équations cartésiennes de droites

Exemple 1

Sur la figure ci-contre on a tracé les droites :

- $D_1 : y = 2x + 1$.
- $D_2 : x = -3$.

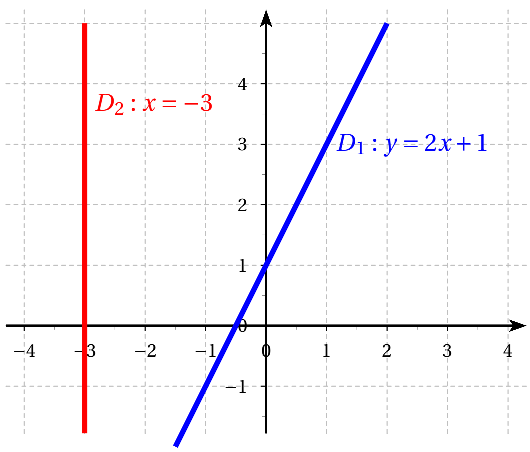
Tableau pour le tracé de D_1 :

x	0	2
y	1	5

Calculs correspondants :

$2 \times 0 + 1 = 1$

$2 \times 2 + 1 = 5$



Les deux équations sont écrites « sous forme réduite ».
En transposant, on peut écrire :

- $D_1 : -2x + 1y - 1 = 0$.
- $D_2 : 1x + 0y + 3 = 0$.

D'une manière générale :

Théorème 1 (équation cartésienne de droite)

- Toute droite Δ a une équation, dite cartésienne, de la forme
$$ax+by+c=0,$$
où a, b, c sont trois nombres réels et $(a,b)\neq(0,0)$.[a]
- Réciproquement, si a, b, c sont trois réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$, alors l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x;y)$ tels que
$$ax+by+c=0$$
est une droite Δ.

a. $(a,b)\neq(0,0)$ signifie qu'on ne peut pas avoir à la fois $a=0$ et $b=0$ – mais l'un des deux (a ou bien b) peut valoir 0.

Exemple 2

Soient $A(3;-1)$ et $B(-4;13)$. On prouve que $(AB): 2x+y-5=0$.
D'après le point 2 du théorème 1, $2x+y-5=0$ est l'équation d'une droite. Pour prouver qu'il s'agit de la droite (AB), il suffit de prouver que A et B en vérifient l'équation. Il suffit de remplacer :

- Pour A : $2\times3+(-1)-5=0$, donc A est sur la droite.
- Pour B : $2\times(-4)+13-5=0$, donc B est sur la droite.

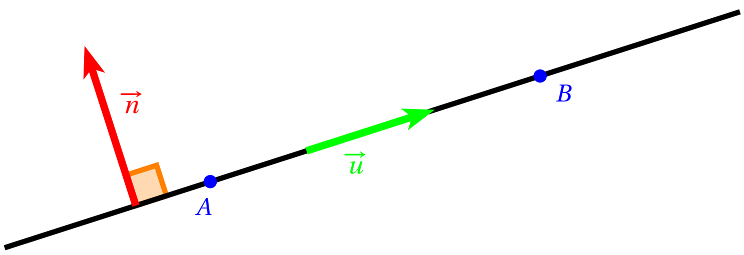
Conclusion : A et B sont sur la droite d'équation $2x+y-5=0$, donc cette droite ne peut être que (AB) : on a bien
$$(AB): 2x+y-5=0.$$

Remarque.
Il y a un petit abus lorsqu'on parle de l'équation cartésienne, car elle n'est pas unique. Par exemple, l'équation $\Delta: 6x-9y+12=0$ peut se réécrire $\Delta: 2x-3y+4=0$ en divisant les deux membres par 3. On aura d'ailleurs intérêt dans les exercices à faire ce type de simplification pour éviter des calculs trop compliqués.

Définition 1

Soient A, B deux points distincts du plan et soient $\vec{n}$, $\vec{u}$ deux vecteurs non nuls. On dit que :

- $\vec{n}$ est normal (ou orthogonal) à (AB) si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
- $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB) si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



Théorème 2 (vecteur directeur, vecteur normal)

Soient A, B deux points distincts du plan et soient a, b deux nombres réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe c tel que (AB) ait une équation de la forme $ax+by+c=0$;
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) ;
3. $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (AB).

La démonstration du théorème 2 est donnée en annexe.

Exemple 3

Soient $A(-1;-1)$ et $B(2;3)$. On note Δ la perpendiculaire à (AB) passant par A. On va déterminer l'équation cartésienne des droites (AB) et Δ.

On cherche d'abord l'équation de (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}$ est (bien sûr!) un vecteur directeur de (AB), donc d'après le théorème 2, (AB) a une équation de la forme

$$4x-3y+c=0.^{a}$$

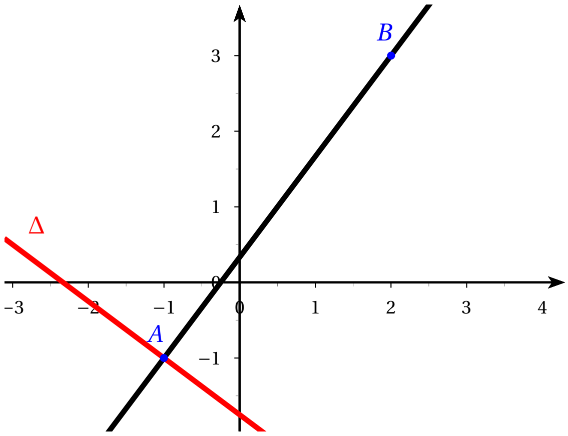
$A(-1;-1)\in(AB)$, donc $4\times(-1)-3\times(-1)+c=0$, soit $-1+c=0$; et finalement $c=1$.
Conclusion : $(AB): 4x-3y+1=0$.

On cherche ensuite l'équation de Δ.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ est (bien sûr!) un vecteur normal à Δ, donc d'après le théorème 2, Δ a une équation de la forme

$$3x+4y+c=0.$$

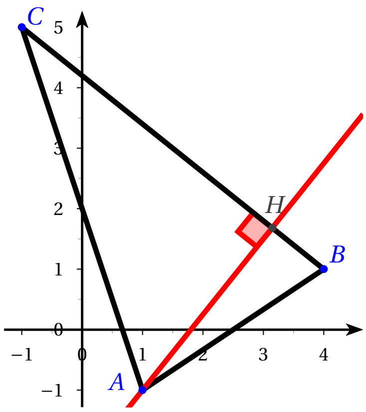
a. $-b=3$, donc $b=-3$.

$A(-1;-1)\in\Delta$, donc $3\times(-1)+4\times(-1)+c=0$, ce qui donne $c=7$.
Conclusion : $\Delta: 3x+4y+7=0$.



Exemple 4

Soient $A(1;-1)$, $B(4;1)$ et $C(-1;5)$. On cherche les coordonnées de H, pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



Étape 1. On cherche d'abord l'équation de (AH).
Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ est normal à (AH), donc (AH) a une équation de la forme

$$-5x+4y+c=0.$$

$A(1;-1)\in(AH)$, donc $-5\times1+4\times(-1)+c=0$, ce qui donne $c=9$.
Conclusion : $(AH): -5x+4y+9=0$.

Étape 2. On cherche à présent l'équation de (BC).
Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}$ est un vecteur directeur de (BC), donc (BC) a une équation de la forme

$$4x+5y+c=0.$$

$B(4;1)\in(BC)$, donc $4\times4+5\times1+c=0$, ce qui donne $c=-21$.
Conclusion : $(BC): 4x+5y-21=0$.

Exemple 4 – Suite

Étape 3. On en déduit les coordonnées de H.
H est le point d'intersection de (AH) et (BC), donc pour avoir ses coordonnées on résout le système

$$\begin{cases} -5x+4y+9=0 \\ 4x+5y-21=0 \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par 4 et la deuxième par 5 :

$$\begin{cases} -20x+16y+36=0 \\ 20x+25y-105=0 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre (les x « s'éliminent ») :

$$41y-69=0,$$

d'où l'on tire $y=\frac{69}{41}$.

Enfin, on remplace y par $\frac{69}{41}$ dans la deuxième ligne du système pour avoir x :

$$\begin{aligned} 4x+5\times\frac{69}{41}-21&=0 \\ 4x+\frac{345}{41}-\frac{861}{41}&=0 \\ 4x-\frac{516}{41}&=0 \\ x&=\frac{516}{4\times41} \\ x&=\frac{129}{41}. \end{aligned}$$

Conclusion : $H\left(\frac{129}{41};\frac{69}{41}\right)$.

Remarque.
Si les équations de deux droites D et D' sont données sous forme réduite $D: y=mx+p$ et $D': y=m'x+p'$, vous connaissez l'équivalence (programme de 2[de]) :

$$D\,/\!/\,D' \iff m=m'.$$

Par ailleurs, $D: 0=mx-1y+p$ et $D': 0=m'x-1y+p'$, donc d'après le théorème 2, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ dirige D et $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ dirige D'. On a donc les équivalences :

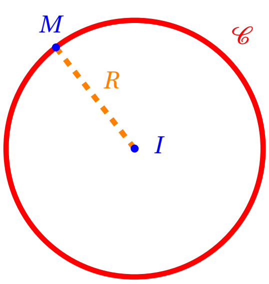
$$D\perp D' \iff \vec{u}\cdot\vec{u}'=0 \iff 1\times1+m\times m'=0 \iff m\times m'=-1.$$

Bilan :

- $D\,/\!/\,D' \iff m=m'$.
- $D\perp D' \iff m\times m'=-1$.

II. Équations de cercles

Considérons un cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_I;y_I)$ et de rayon R. Un point $M(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, la longueur IM vaut R.



Avec la formule pour la longueur d'un segment, l'égalité $IM=R$ se réécrit :

$$\sqrt{(x-x_I)^2+(y-y_I)^2}=R.$$

On élève au carré :

$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2.$$

Autrement dit, on vient de démontrer :

Théorème 3 (équation de cercle)

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_I;y_I)$ de rayon R a pour équation

$$\mathscr{C}: (x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2.$$

Exemple 5

Le cercle de centre $D(2;-1)$ de rayon 3 a pour équation

$$\begin{aligned}(x-x_D)^2+(y-y_D)^2 &= R^2\\ (x-2)^2+(y-(-1))^2 &= 3^2\\ (x-2)^2+(y+1)^2 &= 9.\end{aligned}$$

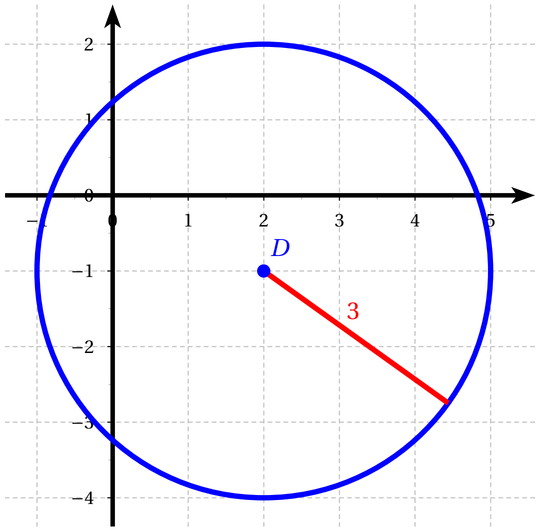
Remarque.
On peut développer

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=9$$

puis transposer et réduire

$$x^2-4x+y^2+2y-4=0.$$

C'est d'ailleurs souvent comme cela que les équations de cercles sont présentées (voir exemple 7).



Pour trouver le centre et le rayon d'un cercle dont l'équation est donnée sous forme développée, on a besoin d'écrire des expressions du second degré sous une forme particulière, appelée forme canonique. Étant donnés deux réels b, c, il s'agit de trouver deux autres réels α, β tels que

$$x^2+bx+c=(x+\alpha)^2+\beta.$$

Expliquons comment trouver α et β avec deux exemples :

Exemples 6

1. On écrit x^2-6x+5 sous forme canonique. Pour cela, on reconnaît le début d'une identité remarquable que l'on « compense » : dans x^2-6x, on reconnaît le début de l'identité remarquable

$$(x-3)^2=x^2-2\times x\times 3+3^2=x^2-6x+9.$$

On écrit alors :

$$x^2-6x+5=\left(x^2-6x+9\right)-4=(x-3)^2-4.$$

L'expression de droite est l'écriture sous forme canonique. Avec les notations ci-dessus, $\alpha=-3$ et $\beta=-4$.

2. On écrit x^2+x-1 sous forme canonique. Dans x^2+x, on reconnaît le début de l'identité remarquable

$$(x+0,5)^2=x^2+2\times x\times 0,5+0,5^2=x^2+x+0,25.$$

On écrit alors :

$$x^2+x-1=\left(x^2+x+0,25\right)-1,25=(x+0,5)^2-1,25.$$

Retournons aux équations de cercles :

Exemple 7

On prouve que $x^2+6x+y^2-2y+5=0$ est l'équation d'un cercle et on détermine son centre I et son rayon R.

Pour cela on écrit x^2+6x et y^2-2y sous forme canonique :

$$x^2+6x=(x^2+6x+9)-9=(x+3)^2-9 \qquad , \qquad y^2-2y=(y^2-2y+1)-1=(y-1)^2-1.$$

Donc l'égalité $\underbrace{x^2+6x}_{(x+3)^2-9}+\underbrace{y^2-2y}_{(y-1)^2-1}+5=0$ est équivalente à $(x+3)^2-9+(y-1)^2-1+5=0$, soit $(x+3)^2+(y-1)^2=5$, soit enfin

$$(x-(-3))^2+(y-1)^2=\sqrt{5}^2.$$

Il s'agit bien de l'équation d'un cercle, de centre $I(-3;1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

Attention

Compte tenu du théorème 3, il faut faire apparaître des « − » pour avoir les coordonnées du centre, et un carré pour avoir le rayon :

$$(x-(-3))^2+(y-1)^2=\sqrt{5}^2$$

$$(x-x_I)^2\ +(y-y_I)^2=R^2$$

III. Une démonstration

Démonstration (du théorème 2)

Pour prouver que les points 1, 2, 3 sont équivalents, il suffit de prouver que (1 $\Longrightarrow$ 2), (2 $\Longrightarrow$ 3) et (3 $\Longrightarrow$ 1).

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ On suppose que (AB) a pour équation $ax+by+c=0$. On veut prouver que $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$, donc

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)=(x_B-x_A)\times a-(-b)\times\left(y_B-y_A\right)=ax_B-ax_A+by_B-by_A=\left(ax_B+by_B\right)-\left(ax_A+by_A\right).$$

Or A est sur (AB), donc $ax_A+by_A+c=0$, et donc $ax_A+by_A=-c$. De même, B est sur (AB), donc $ax_B+by_B=-c$. On a donc

$$\det(\overrightarrow{AB},\vec{u})=\left(ax_B+by_B\right)-\left(ax_A+by_A\right)=(-c)-(-c)=-c+c=0.$$

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, et donc que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ On suppose que $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB). On veut prouver que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (AB).

$\vec{u}$ dirige (AB), donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$. Or $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, donc

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{n}\cdot\left(k\vec{u}\right)=k\vec{n}\cdot\vec{u}=k\left(a\times(-b)+b\times a\right)=k\times 0=0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à (AB).

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ On suppose que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (AB). On a donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. On veut prouver que (AB) a une équation de la forme $ax+by+c=0$, pour un certain réel c.

Soit $M(x;y)$ un point de (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$. On a donc

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=\vec{n}\cdot\left(k\overrightarrow{AB}\right)=k\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=k\times 0=0.$$

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$, donc

$$0=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=a\times(x-x_A)+b\times\left(y-y_A\right)=ax-ax_A+by-by_A=ax+by+c,$$

où l'on a posé $c=-ax_A-by_A$.
Conclusion : si un point $M(x;y)$ est sur (AB), alors $0=ax+by+c$. Cette égalité est donc l'équation de (AB).

CHAPITRE 12

Fonction exponentielle

Plan de ce chapitre

Dans le paragraphe 1, on définit et on étudie la fonction exponentielle, ainsi que d'autres fonctions construites à partir de l'exponentielle. Dans le paragraphe 2, on énonce ses *propriétés fonctionnelles*. Les démonstrations sont toutes données en annexe.

I. Variations, courbe représentative

On admet le théorème suivant :

Théorème 1 (fonction exponentielle)

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les deux conditions :

1. $f(0) = 1$.
2. $f' = f$.

Déf.1 La fonction f définie dans le théorème 1 est appelée fonction exponentielle et notée $\exp$.

Les deux informations du théorème 1 semblent bien maigres pour prétendre obtenir des résultats intéressants concernant la fonction $\exp$. La suite du cours va pourtant y parvenir, étape par étape.
On admet provisoirement le théorème suivant[1], qui nous permettra d'étudier des fonctions et de nous faire une première intuition sur l'exponentielle.

Théorème 2 (signe de exp)

Pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$.

On en déduit, puisque $(\exp)' = \exp$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\exp)'(x) = \exp(x)$	$+$		
$\exp(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

1. Il sera démontré après le théorème 4.

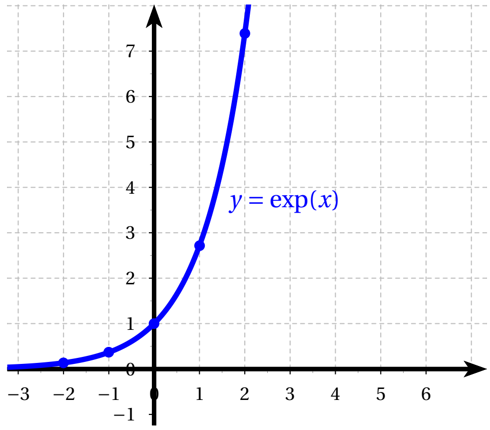
Autrement dit, on a le théorème :

Théorème 3 (variations de exp)

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On trace la courbe de la fonction exp à partir d'un tableau de valeurs que l'on obtient avec la calculatrice[2]. Les valeurs que l'on donne sont arrondies au centième.

x	-2	-1	0	1	2
$\exp(x)$	$0,14$	$0,37$	1	$2,72$	$7,39$



Remarque.
Même si on ne peut pas l'expliquer de façon « profonde » en classe de 1re, vous devez savoir que $\exp(x)$ peut être vu comme « e à la puissance x », où $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = \exp(1) \approx 2,718$.

À partir de maintenant et conformément à l'usage courant, on notera e^x à la place de $\exp(x)$. C'est également cette notation qui apparaît sur les claviers de calculatrices.

Exemple 1

On rappelle que si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si a et b sont deux réels, la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto af'(ax+b)$.

On applique ce résultat à la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$.
Comme la dérivée de exp est exp, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

Une exponentielle étant strictement positive, on a $\underbrace{-2}_{<0}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-2x+3}}_{>0} < 0$. On obtient donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		↘	

Remarque.
Plus généralement, la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$.

2. On dira un mot en exercices sur la manière dont on peut obtenir un tableau de valeurs sans calculatrice.

Exemple 2

La fonction f est définie sur $[0;6]$ par

$$f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On calcule la dérivée de f et on dresse son tableau de variations.

La fonction f s'écrit comme un produit : $f = u \times v$, avec $u(x) = 4x-2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;6]$ et pour tout $x \in [0;6]$:

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x-2 & \qquad v(x) &= \mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) &= 4 & \qquad v'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Donc en appliquant la formule pour la dérivée d'un produit, pour tout $x \in [0;6]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 4 \times \mathrm{e}^{-x} + (4x-2) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 4 \times \mathrm{e}^{-x} - 4x \times \mathrm{e}^{-x} + 2 \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= (4-4x+2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

On étudie le signe de f' et on en déduit les variations de f :

- $-4x+6=0 \iff -4x=-6 \iff x = \frac{-6}{-4} \iff x = 1{,}5$
- une exponentielle est strictement positive, donc e^{-x} est du signe +

x	0		1.5		6
$-4x+6$		+	0	−	
e^{-x}		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

II. Relations fonctionnelles

Théorème 4 (relations fonctionnelles)

Pour tous nombres réels x, y, pour tout entier $n \geq 1$:

1. $\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} = 1$. Autrement dit : $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$.
2. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$.
3. $\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}} = \mathrm{e}^{x-y}$.
4. $(\mathrm{e}^{x})^{n} = \mathrm{e}^{nx}$.

Remarque. On retrouve dans les résultats qui précèdent les règles de calcul avec les puissances vues au collège. Cela va dans le sens de la remarque faite à la suite du théorème 3 : e^x peut être vu comme « e à la puissance x ».

III. Démonstrations

Démonstration (point 1 du théorème 4)

On pose $f(x) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $f = u \times v$, avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ [a] et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathrm{e}^x, & u'(x) &= \mathrm{e}^x, \\ v(x) &= \mathrm{e}^{-x}, & v'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dérivée de f est nulle, donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Et comme $f(0) = \mathrm{e}^0 \times \mathrm{e}^{-0} = 1 \times 1 = 1$, f est constante égale à 1 : pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

a. Pour $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, on utilise la remarque faite entre les exemples 1 et 2.

Démonstration (point 2 du théorème 4)

On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on définit une fonction f par $f(x) = \mathrm{e}^{x+y} \times \mathrm{e}^{-y}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction dérivable par une constante :

- $x \mapsto \mathrm{e}^{x+y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \mathrm{e}^{x+y}$ elle-même (cf remarque entre les exemples 1 et 2).
- e^{-y} est une constante.

On en déduit, pour tout réel x :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x+y} \times \mathrm{e}^{-y} = f(x).$$

Mais alors la fonction f est égale à sa propre dérivée. De plus, $f(0) = \mathrm{e}^{0+y} \times \mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^y \times \mathrm{e}^{-y} = 1$ d'après le point 1 du théorème 4.
Conclusion : $f' = f$ et $f(0) = 1$, donc d'après le théorème 1, f est la fonction exponentielle : pour tout réel x,

$$f(x) = \mathrm{e}^{x+y} \times \mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x.$$

On multiplie par e^y et on utilise à nouveau le point 1 du théorème 4 :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x+y} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-y} \times \mathrm{e}^y}_{=1} &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y \\ \mathrm{e}^{x+y} &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y. \end{aligned}$$

Démonstration (du théorème 2)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1$, e^x est différent de 0.
Il reste à prouver que $\mathrm{e}^x \geq 0$. C'est une conséquence du point 2 du théorème 4 et du fait qu'un carré est positif :

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0.$$

Démonstration (point 3 du théorème 4)

Le point 2 du théorème 4 donne

$$e^{x-y} \times e^{y} = e^{x-y+y} = e^{x},$$

donc

$$e^{x-y} = \frac{e^{x}}{e^{y}}.$$

Démonstration (point 4 du théorème 4)

En appliquant plusieurs fois de suite le point 2 du théorème 4 :

$$\left(e^{x}\right)^{n} = \underbrace{e^{x} \times e^{x} \times \cdots \times e^{x}}_{n \text{ fois}} = e^{\overbrace{x + x + \cdots + x}^{n \text{ fois}}} = e^{nx}.$$