Mathématiques – Terminale spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Compléments sur la dérivation

Exercice 1 La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2;6]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 4.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,5 \times 2x - 2 \times 1 - 0 = x - 2.$$

La dérivée est du premier degré, donc pour obtenir le tableau de signe, il faut résoudre une équation, puis regarder le signe de a :

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x - \cancel{2} + \cancel{2} &= 0 + 2 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$a = 1$ (puisque $x-2$ signifie $1x-2$), a est $\oplus$ donc le signe est de la forme $\boxed{- \ \phi \ +}$

On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f :

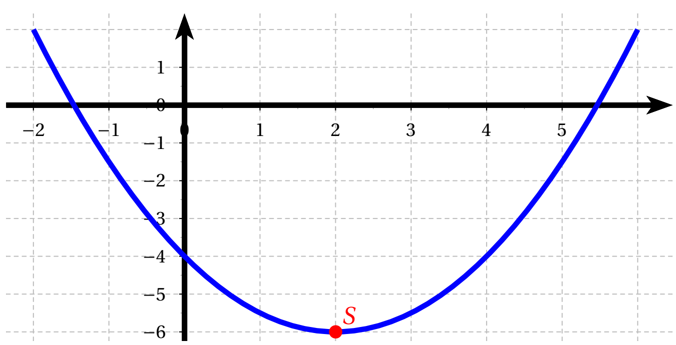
x	-2		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2

Pour compléter l'extrémité des flèches, on calcule :

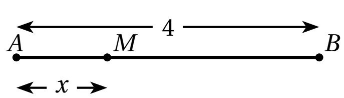
- $f(-2) = 0,5 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) - 4 = 2$
- $f(2) = 0,5 \times 2^2 - 2 \times 2 - 4 = -6$
- $f(6) = 0,5 \times 6^2 - 2 \times 6 - 4 = 2$

On peut aussi faire un tableau de valeurs à la calculatrice.

Remarque : La courbe représentative est une parabole, dont le sommet S a pour coordonnées $(2;-6)$.



Exercice 2 On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 et un point mobile M pouvant se déplacer librement sur ce segment.



On note x la longueur du segment $[AM]$ et $f(x)$ le produit des longueurs $AM \times BM$.

1. $BM = AB - AM = 4 - x$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= AM \times BM \\ &= x \times (4 - x) \\ &= x \times 4 + x \times (-x) \\ &= 4x - x^2. \end{aligned}$$

2. Le produit des longueurs $AM \times BM$ est donné par $f(x)$, donc maximiser ce produit revient à maximiser la fonction f. On étudie donc les variations : pour tout $x \in [0;4]$,

$$f'(x) = 4 \times 1 - 2x = -2x + 4.$$

On résout :

$$\begin{aligned} -2x+4 &= 0 \\ -2x+\cancel{4}-\cancel{4} &= 0-4 \\ \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} &= \frac{-4}{-2} \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$a = -2$, a est $\ominus$ donc le signe est de la forme $\boxed{+ \ \phi \ -}$

On obtient le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f :

x	0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Il n'est pas utile ici de compléter l'extrémité des flèches : tout ce qui nous intéresse, c'est la valeur de x pour laquelle f atteint son maximum.

Conclusion : f atteint son maximum lorsque $x = 2$, donc le produit $AM \times BM$ est maximal lorsque $x = 2$; c'est-à-dire quand M est le milieu de $[AB]$.

Remarque : Cet exemple est celui qu'a choisi Fermat vers 1637 pour exposer sa méthode de l'adégalité – ancêtre de la dérivation – pour déterminer le maximum et le minimum d'une fonction.

Exercice 3 La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 0,5x^3 + 0,75x^2 - 3x - 1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 0,5 \times 3x^2 + 0,75 \times 2x - 3 \times 1 - 0 = 1,5x^2 + 1,5x - 3.$$

La dérivée est du second degré, donc on utilise la méthode de la classe de première :

- $a = 1,5$, $b = 1,5$, $c = -3$.
- le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1,5^2 - 4 \times 1,5 \times (-3) = 20,25$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

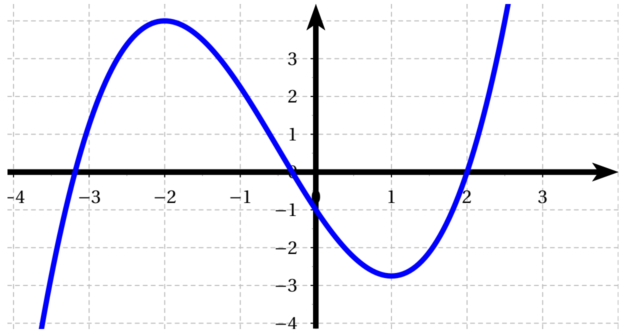
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,5-\sqrt{20,25}}{2 \times 1,5} = \frac{-1,5-4,5}{3} = \frac{-6}{3} = -2, \\ x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,5+\sqrt{20,25}}{2 \times 1,5} = \frac{-1,5+4,5}{3} = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

$a = 1,5$ a est $\oplus$ donc le signe est de la forme $\boxed{+ \ \phi \ - \ \phi \ +}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	4	↘	-2.75	↗	

- $g(-2) = 0,5 \times (-2)^3 + 0,75 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) - 1 = 4$
- $g(1) = 0,5 \times 1^3 + 0,75 \times 1^2 - 3 \times 1 - 1 = -2,75$

Remarque : Voici à quoi ressemble la courbe représentative :



Exercice 4 La fonction h est définie sur $[1;+\infty[$ par

$$h(x) = (x-6)\sqrt{x}.$$

On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$u(x) = x-6 \quad , \quad v(x) = \sqrt{x},$$
$$u'(x) = 1 \quad , \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On obtient, pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\
&= 1 \times \sqrt{x} + (x-6) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\text{rappel : } \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x\right) \\
&= \frac{3x-6}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

- On résout rapidement :

$$3x-6 = 0 \iff 3x = 6 \iff x = \frac{6}{3} = 2.$$

- Dans $3x-6$, $a = 3$ ⊕ , donc $\boxed{-\ \phi\ +}$
- $2\sqrt{x}$ est strictement positif pour tout $x \in [1;+\infty[$.

On a donc le tableau :

x	1		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x}$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-5	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	

- $h(1) = (1-6) \times \sqrt{1} = -5 \times 1 = -5$;
- $h(2) = (2-6) \times \sqrt{2} = -4\sqrt{2}$.

Exercice 5 La fonction f est définie sur $[1;4]$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x} - 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, 2, 4 ; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. Pour dériver, le plus simple est de réécrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = x + 4 \times \frac{1}{x} - 3.$$

On obtient alors, pour tout $x \in [1;4]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 \\ &= 1 - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{x^2} \end{aligned}$$

2.
   - Les racines de $x^2 - 4$ sont évidentes : ce sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$. Seule la deuxième est dans l'intervalle $[1;4]$.
   - x^2 est strictement positif pour tout $x \in [1;4]$.

   On obtient donc le tableau :

x	1		2		4
$x^2 - 4$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

Le signe de $x^2 - 4$ sur $]-\infty;+\infty[$ est de la forme $\boxed{+ \ \phi \ - \ \phi \ +}$
Mais comme on travaille sur l'intervalle $[1;4]$, il ne reste plus que la partie droite $\boxed{- \ \phi \ +}$

On calcule les valeurs aux extrémités des flèches :
- $f(1) = 1 + \frac{4}{1} - 3 = 2$;
- $f(2) = 2 + \frac{4}{2} - 3 = 1$;
- $f(4) = 4 + \frac{4}{4} - 3 = 2$.

3. On rappelle que la tangente à la courbe en un point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Appliquons cette formule avec $a = 1$ – puisque le point A a pour abscisse 1 :

$f(1) = 2$ (déjà calculé) et $f'(1) = \frac{1^2-4}{1^2} = \frac{-3}{1} = -3$, donc l'équation de T_A est

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= -3(x-1) + 2 \\ y &= -3x + 3 + 2 \\ y &= -3x + 5. \end{aligned}$$

Le point A a pour coordonnées $(1;2)$, puisque $f(1) = 2$; la tangente T_A passe donc par ce point. Pour la tracer, il faut placer un deuxième point (c'est une droite) ; ce que l'on peut faire de trois façons différentes :

(a) L'ordonnée à l'origine est 5 (puisque $T_A : y = -3x+5$), donc T_A passe par le point de coordonnées $(0;5)$.

(b) Le coefficient directeur de T_A est -3 (puisque $T_A : y = -3x+5$), donc en partant de A, il suffit d'avancer de 1 carreau en abscisse et de descendre de 3 carreaux en ordonnée – T_A passe donc par le point de coordonnées $(2;-1)$.

(c) On calcule un deuxième point avec la formule : par exemple, si $x = 2$, $y = -3 \times 2 + 5 = -1$. On obtient le point de coordonnées $(2;-1)$ (le même qu'avec la méthode (b)) et on trace la tangente.

4.
   - $f(2) = 1$ et $f'(2) = \frac{2^2-4}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$, donc l'équation de T_B est

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ y &= 0(x-1) + 1 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

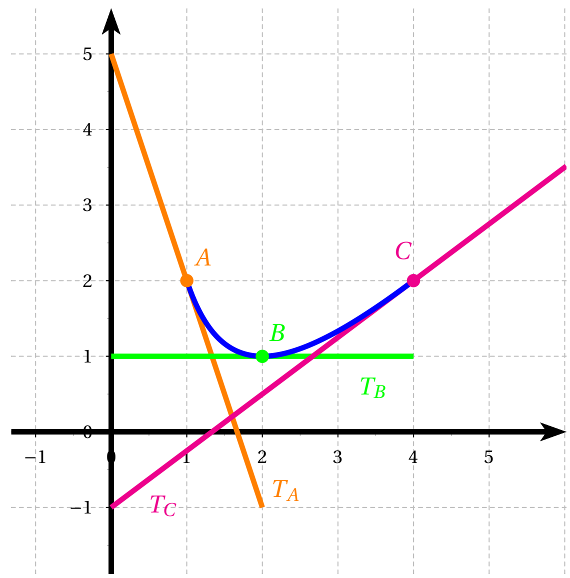
   Le coefficient directeur étant égal à 0, la tangente T_B est horizontale.

- $f(4) = 2$ et $f'(4) = \frac{4^2-4}{4^2} = \frac{12}{16} = 0{,}75$, donc l'équation de T_C est

$$\begin{aligned} y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\ y &= 0{,}75(x-4) + 2 \\ y &= 0{,}75x - 3 + 2 \\ y &= 0{,}75x - 1. \end{aligned}$$

On trace la tangente T_C par la même méthode que T_A (le plus simple et le plus précis est d'utiliser l'ordonnée à l'origine).

5. On place les points A, B, C, on trace les trois tangentes et on construit la courbe de la fonction f (en bleu) en s'appuyant sur ces tangentes.



Exercice 6 La fonction i est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$i(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient avec

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x \quad , \quad v(x) = x^2+1, \\ u'(x) &= 2 \quad , \quad v'(x) = 2x. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2 \times \left(x^2+1\right) - 2x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

2. - Les racines de $-2x^2+2$ sont assez évidentes :

$$-2x^2+2 = 0 \iff 2 = 2x^2 \iff 1 = x^2 \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1).$$

- $\left(x^2+1\right)^2$ est strictement positif pour tout réel x.

On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-2x^2+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\left(x^2+1\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
$i'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$i(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

- $i(-1) = \frac{2\times(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-2}{2} = -1$;
- $i(1) = \frac{2\times 1)}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$.

3. (a) $i(0) = \frac{2\times 0}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0$ et $i'(0) = \frac{-2\times 0^2+2}{\left(0^2+1\right)^2} = \frac{2}{1} = 2$, donc l'équation de (T) est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 2x + 0$$
$$y = 2x.$$

(b) Pour étudier les positions relatives de (C) : $y = \frac{2x}{x^2+1}$ et (T) : $y = 2x$, on étudie **le signe de la différence** :

$$\frac{2x}{x^2+1} - 2x.$$

- Pour les valeurs de x pour lesquelles cette différence vaut 0, les deux courbes se coupent ;
- pour les valeurs de x pour lesquelles cette différence est strictement positive, (C) est au-dessus de (T) ;
- pour les valeurs de x pour lesquelles cette différence est strictement négative, (C) est en-dessous de (T).

On commence par calculer la différence :

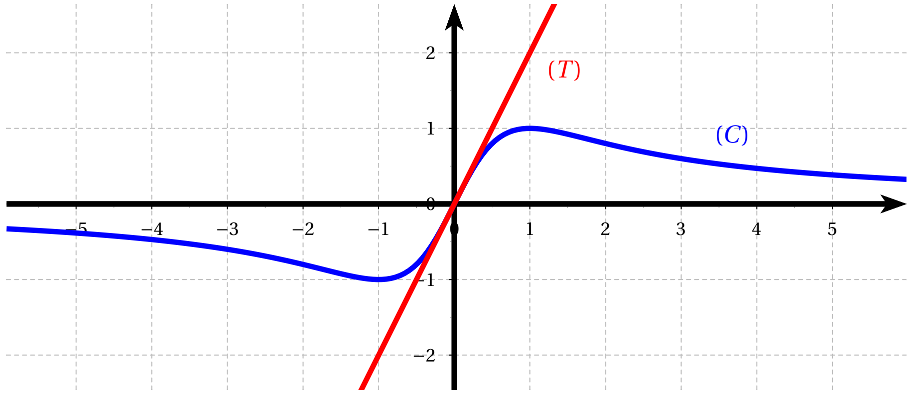
$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2+1} - 2x &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\\ &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x^3+2x}{x^2+1}\\ &= \frac{\cancel{2x} - 2x^3 - \cancel{2x}}{x^2+1}\\ &= \frac{-2x^3}{x^2+1}.\end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x^3$		$+$	0	$-$	
$\left(x^2+1\right)^2$		$+$		$+$	
$\frac{-2x^3}{x^2+1}$		$+$	0	$-$	
Positions relatives des courbes		(C) au-dessus de (T)	Se coupent	(C) en-dessous de (T)	

Pour compléter le tableau de signe :

- $-2x^3 = 0$ lorsque $x = 0$;
- $-2x^3$ est $\ominus$ lorsque x est strictement positif ;
- $-2x^3$ est $\oplus$ lorsque x est strictement négatif ;
- $\left(x^2+1\right)^2$ est strictement positif pour tout réel x.

4.



Exercice 7 La distance (en m) parcourue au temps t (en s) par une pierre en chute libre est $d(t) = 5t^2$.
On lance cette pierre d'une hauteur de 20 m.

1. La pierre arrive au sol quand elle a parcouru 20 m. Il faut donc résoudre l'équation $5t^2 = 20$:

$$5t^2 = 20 \iff t^2 = \frac{20}{5} \iff t^2 = 4 \iff \left(t = 2 \quad \text{ou} \quad \underbrace{t = -2}_{\text{impossible}} \right).$$

   Conclusion : la pierre arrive au sol après 2 s.

2. On construit la courbe à partir d'un tableau de valeurs (avec un pas de 0,4 par exemple).

t	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
$d(t)$	0	0,8	3,2	7,2	12,8	20

   Pour obtenir ce tableau, on utilise la calculatrice (bien sûr, on met des x à la place des t) :

Calculatrices collège

- MODE
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=5X^2 EXE (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? 0 EXE
- Fin ? 2 EXE
- Pas ? 0,4 EXE

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches alpha x

- (touche maison)
- Fonctions EXE puis choisir Fonctions EXE
- f(x)=5x^2 EXE
- choisir Tableau EXE puis Régler l'intervalle EXE
- X début 0 EXE
- X fin 2 EXE
- Pas 0.4 EXE
- choisir Valider

TI graphiques

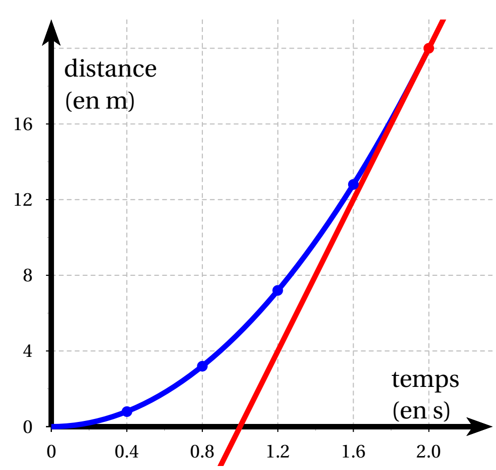
X s'obtient avec la touche x, t, θ, n

- $f(x)$
- $Y_1 = 5X^2$ EXE
- 2nde déf table
- DébTable=0 EXE
- PasTable=0.4 EXE ou ΔTbl=0.4 EXE
- 2nde table

CASIO graphiques

X s'obtient avec la touche X,θ,T

- MENU puis choisir TABLE EXE
- Y_1 : 5X^2 EXE
- F5 (on choisit donc SET)
- Start :0 EXE
- End :2 EXE
- Step :0.4 EXE
- EXIT
- F6 (on choisit donc TABLE)



3. La vitesse de la pierre au moment de l'impact au sol est $d'(2)$.
Or $d'(t) = 5 \times 2t = 10t$, donc $d'(2) = 10 \times 2 = 20$. Ainsi la vitesse au moment de l'impact est de 20 m/s.

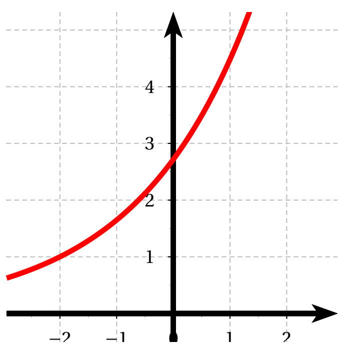
Remarques :
- cette vitesse instantanée est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 2 (en rouge).
- la « vraie formule » (valable en l'absence de frottements) est $d(t) = 4,9t^2$. Dans l'exercice, on a pris 5 au lieu de 4,9 pour simplifier les calculs.

Exercice 8 Dans cet exercice, on utilise deux propriétés du cours :
- la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$;
- une exponentielle est strictement positive.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,5x+1}$$
$$f'(x) = \underbrace{0,5}_{\oplus}\underbrace{\mathrm{e}^{0,5x+1}}_{\oplus}$$

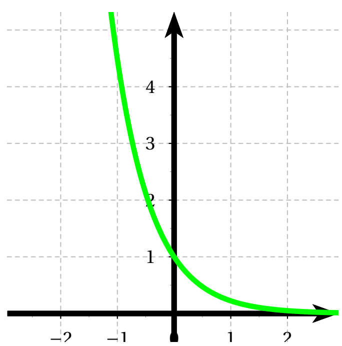
$f' > 0$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \mathrm{e}^{-1,5x}$$
$$g'(x) = \underbrace{-1,5}_{\ominus}\underbrace{\mathrm{e}^{-1,5x}}_{\oplus}$$

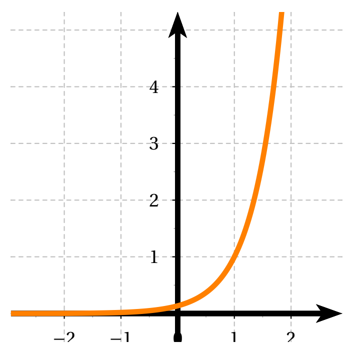
$g' < 0$ donc g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x-2}$$
$$h'(x) = \underbrace{2}_{\oplus}\underbrace{\mathrm{e}^{2x-2}}_{\oplus}$$

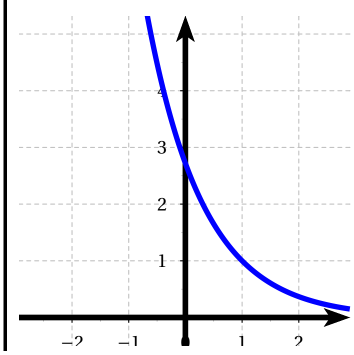
$h' > 0$ donc h strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$i(x) = \mathrm{e}^{-1x+1}$$
$$i'(x) = \underbrace{-1}_{\ominus}\underbrace{\mathrm{e}^{-1x+1}}_{\oplus}$$

$i' < 0$ donc i strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



À titre d'illustration, on a tracé les courbes des quatre fonctions. Elles ont toutes une allure très similaire, à deux différences près :
- elles montent lorsque $a > 0$, elles descendent lorsque $a < 0$;
- plus $|a|$ est grand, plus la pente de la partie inclinée est forte.

Exercice 9 La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$\begin{aligned} u(x) &= -2x+1 \quad , \quad & v(x) &= \mathrm{e}^{-x}, \\ u'(x) &= -2 \quad , \quad & v'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in [0;4]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -2 \times \mathrm{e}^{-x} + (-2x+1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= -2 \times \mathrm{e}^{-x} + (-2x) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + 1 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= -2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times \mathrm{e}^{-x} - 1 \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= (-2+2x-1)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

2. On étudie le signe de f' et on en déduit les variations de f :
   - $2x-3=0 \iff 2x=3 \iff x=\frac{3}{2} \iff x=1,5$;
   - e^{-x} est ⊕ pour tout réel x.

x	0		1.5		4
$2x-3$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-2e^{-1,5}$	↗	$-7e^{-4}$

- $f(0)=(-2\times 0+1)\times \underbrace{e^{-0}}_{=1}=1\times 1=1$
- $f(1,5)=(-2\times 1,5+1)\times e^{-1,5}=-2e^{-1,5}\approx -0,45$
- $f(4)=(-2\times 4+1)\times e^{-4}=-7e^{-4}\approx -0,13$

Exercice 10 La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g'(x)=e^x-1-0=e^x-1.$$

On résout l'équation :

$$e^x-1=0 \iff e^x=1 \iff x=0.$$

⚠On a utilisé la propriété : le seul nombre dont l'exponentielle est égale à 1 est 0.

Pour avoir les signes dans chaque case du tableau, on remplace par des valeurs de x :
- pour l'intervalle $]-\infty;0[$, on prend (par exemple) $x=-1$ et on calcule avec la calculatrice :
$$g'(-1)=e^{-1}-1\approx -0,63 \qquad \ominus ;$$
- pour l'intervalle $]0;+\infty[$, on prend (par exemple) $x=1$ et on calcule avec la calculatrice :
$$g'(1)=e^1-1\approx 3,72 \qquad \oplus .$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)=e^x-1$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

$$g(0)=e^0-0-1=1-1=0.$$

Remarque : Le minimum de g est 0, donc $g(x)\geq 0$ pour tout réel x ; autrement dit $e^x-x-1\geq 0$. Cette inégalité se réécrit

$$e^x \geq x+1.$$

On obtiendra ce résultat par une autre méthode dans l'exercice 18 (utilisation de la convexité). Cette inégalité sera utilisée plus tard dans l'année, pour démontrer des résultats sur les limites.

Exercice 11

$$\frac{e^8}{e^2\times e^1\times e^3}=\frac{e^8}{e^{2+1+3}}=\frac{e^8}{e^6}=e^{8-6}=e^2$$
$$\frac{e\times e^2}{\left(e^2\right)^2}=\frac{e^1\times e^2}{e^{2\times 2}}=\frac{e^{1+2}}{e^4}=e^{3-4}=e^{-1}$$
$$\left(e^2\right)^3\times e^{-5}=e^{2\times 3}\times e^{-5}=e^{6-5}=e^1$$

Exercice 12 Dans chaque cas, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

1.

$e^x=-3$

Impossible, car une exponentielle est strictement positive

$\mathscr{S}=\emptyset$

2.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{2x-1} = 1 \\
&2x - 1 = 0 && \text{(le seul nombre dont l'exponentielle vaut 1 est 0)} \\
&x = \frac{1}{2} \\
&\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

3. L'équation $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} = 3$ se réécrit

$$\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 + 2\mathrm{e}^{x} - 3 = 0.$$

Pour résoudre, il est astucieux de noter $X = \mathrm{e}^{x}$; l'équation se réécrit alors sous la forme

$$X^2 + 2X - 3 = 0.$$

On résout avec la méthode de la classe de première :

- $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.
- le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3, \\
X_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

On a posé $X = \mathrm{e}^{x}$, donc il y a deux possibilités :

$$\mathrm{e}^{x} = -3 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{e}^{x} = 1.$$

La première équation n'a pas de solution, car une exponentielle est strictement positive ; la deuxième équation a une seule solution : $x = 0$.

Conclusion : L'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} = 3$ est $x = 0$:

$$\mathscr{S} = \{0\}.$$

Exercice 13 On utilisera la propriété : pour tout nombre réel x,

$$\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

1. D'après l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 + 2 \times \underbrace{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x}}_{=1} + \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}.$$

2. On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{x} :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} &= \frac{(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \times \mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \times \mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x+x} - \mathrm{e}^{-x+x}}{\mathrm{e}^{x+x} + \mathrm{e}^{-x+x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{0}}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{0}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.
\end{aligned}$$

Exercice 14 1. La fonction f est de la forme $f(x) = e^{u(x)}$, avec

$$u(x) = -x^2, \qquad u'(x) = -2x.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = -2xe^{-x^2}.$$

2. La fonction h est de la forme $h(x) = (u(x))^n$, avec

$$u(x) = -4x+1, \qquad u'(x) = -4, \qquad n = 3.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1} = 3 \times (-4) \times (-4x+1)^{3-1} = -12\,(-4x+1)^2.$$

3. La fonction i est de la forme $i(x) = e^{u(x)}$, avec

$$u(x) = 5x-9, \qquad u'(x) = 5.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$i'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = 5e^{5x-9}.$$

4. La fonction j est de la forme $j(x) = (u(x))^n$, avec

$$u(x) = x^2 - 3x, \qquad u'(x) = 2x-3, \qquad n = 5.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$j'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1} = 5 \times (2x-3) \times \left(x^2-3x\right)^{5-1} = (10x-15) \times \left(x^2-3x\right)^4.$$

5. L'énoncé nous donne

$$k(x) = \sqrt{x^2-x+2}.$$

Il faut se méfier : on ne peut calculer la racine carrée d'un nombre que si celui-ci est positif; et on ne peut dériver une fonction de la forme $\sqrt{u}$ que lorsqu'elle est strictement positive. Intéressons-nous donc au signe de x^2-x+2 :

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$. Il s'ensuit qu'il n'y a pas de racine, et que x^2-x+2 est strictement positif sur $\mathbb{R}$. La fonction k est donc bien définie sur $\mathbb{R}$, mais aussi dérivable.

Elle est de la forme $k(x) = \sqrt{u(x)}$, avec

$$u(x) = x^2-x+2, \qquad u'(x) = 2x-1.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}.$$

Remarque informelle : On a déjà vu les dérivées suivantes dans le cours de première :

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$
$$\left(e^x\right)' = e^x$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Les trois nouvelles formules du cours de terminale peuvent se réécrire

$$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \times u'$$
$$\left(e^u\right)' = e^u \times u'$$
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$$

On voit qu'il suffit de remplacer x par u, et de multiplier par u'.

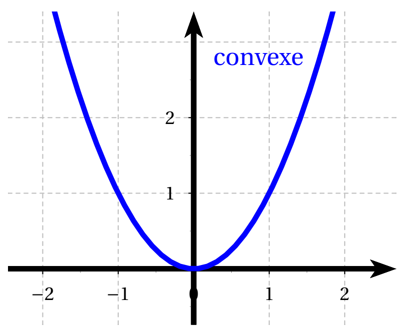
Exercice 15 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2.$$

Conclusion : f'' est strictement positive, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi présenter les choses avec un tableau de signe :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f''(x) = 2$	$+$
Convexité	f convexe



2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = x^3$$
$$g'(x) = 3x^2$$
$$g''(x) = 6x.$$

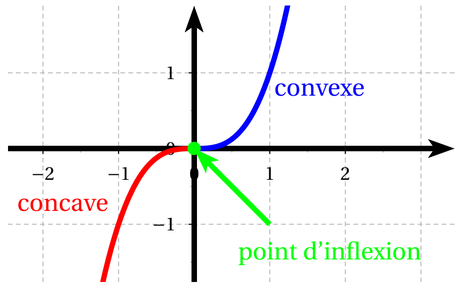
Cette fois, le tableau de signe est fortement recommandé :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x) = 6x$	$-$	0	$+$
Convexité	g concave	Pt inflexion	g convexe

Conclusion :

- g est concave sur $]-\infty; 0]$;

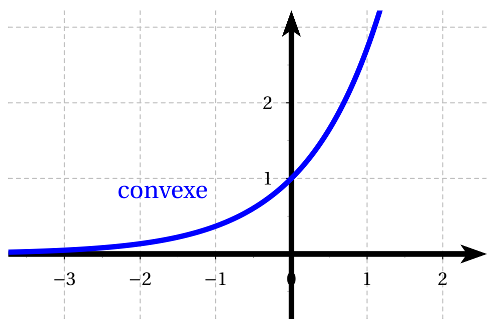
- g est convexe sur $[0;+\infty[$;
- le point de coordonnées $(0;0)$ est un point d'inflexion.



3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \mathrm{e}^x$$
$$h'(x) = \mathrm{e}^x$$
$$h''(x) = \mathrm{e}^x.$$

Conclusion : h'' est strictement positive, donc h est convexe sur $\mathbb{R}$ (cette fois, on se passe du tableau de signes).



Exercice 16 La fonction g est définie sur l'intervalle $[-1;3]$ par

$$g(x) = -0,5x^3 + 2x^2 - 2x.$$

1. Pour tout $x \in [-1;3]$:

$$g'(x) = -0,5 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 2 \times 1 = -1,5x^2 + 4x - 2.$$

La dérivée est du second degré, donc on utilise la méthode de la classe de première :

- $a = -1,5$, $b = 4$, $c = -2$.
- le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1,5) \times (-2) = 4$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-1,5)} = \frac{-4-2}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\times(-1,5)} = \frac{-4+2}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

$a = -1,5$ a est $\ominus$ donc le signe est de la forme $\boxed{-\ \phi\ +\ \phi\ -}$

x	-1		$\frac{2}{3}$		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3.5	$\searrow$	$-\frac{16}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1.5

- $g(-1) = -0,5 \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) = 3,5$
- $g\left(\frac{2}{3}\right) = -0,5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{27}$
- $g(2) = -0,5 \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 \times 2 = 0$
- $g(3) = -0,5 \times 3^3 + 2 \times 3^2 - 2 \times 3 = -1,5$

2. Pour tout $x \in [-1;3]$:

$$g''(x) = -1,5 \times 2x + 4 \times 1 - 0 = -3x + 4.$$

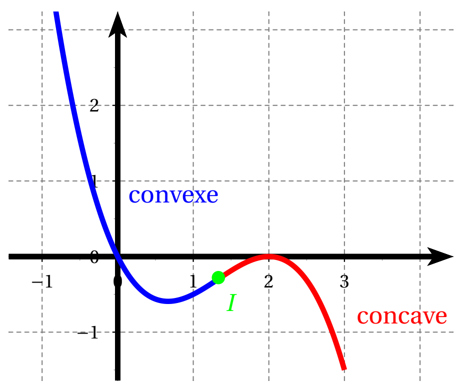
On étudie le signe de g'' :

$$-3x + 4 = 0 \iff -3x = -4 \iff x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

x	-1		$\frac{4}{3}$		3
$-3x+4$		$+$	0	$-$	
Convexité		g convexe	Pt inflexion	g concave	

$g\left(\frac{4}{3}\right) = [\cdots] = -\frac{8}{27}$, donc le point de coordonnées $\left(\frac{4}{3}; -\frac{8}{27}\right)$ est un point d'inflexion (noté I sur la figure ci-dessous).

3.



Exercice 17 La fonction h est définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par

$$h(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}.$$

On calcule les dérivées première et seconde :

1. **Dérivée première.** On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x+3 \quad , \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x}, \\ u'(x) &= 2 \quad , \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in [-1;4]$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x+3) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + 3 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 2 \times \mathrm{e}^{-x} - 2x \times \mathrm{e}^{-x} - 3 \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= (2 - 2x - 3)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

2. **Dérivée seconde.** On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$u(x) = -2x - 1 \quad , \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x},$$
$$u'(x) = -2 \quad , \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

On obtient, pour tout $x \in [-1;4]$:

$$\begin{aligned}
h''(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\
&= -2 \times \mathrm{e}^{-x} + (-2x-1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= -2 \times \mathrm{e}^{-x} + (-2x) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + (-1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= -2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times \mathrm{e}^{-x} + 1 \times \mathrm{e}^{-x} \\
&= (-2 + 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

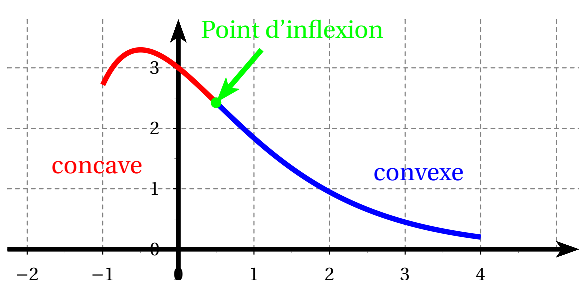
On étudie le signe de la dérivée seconde :

$$h''(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

- $2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$.
- e^{-x} est $\oplus$ pour tout $x \in [-1;4]$.

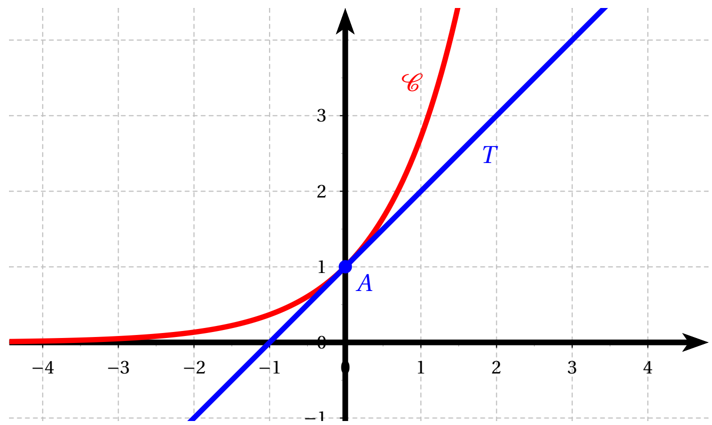
On a donc le tableau :

x	-1		$\frac{1}{2}$		4
$2x-1$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité		h concave	Pt inflexion	h convexe	



Exercice 18 On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle et T sa tangente au point $A(0;1)$.

1. On pose $f(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On sait que $f'(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc
$$f(0) = f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$
L'équation de la tangente T est donc
$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ y &= 1(x-0)+1 \\ y &= x+1 \end{aligned}$$
2. On a déjà vu dans un exercice précédent que la fonction exponentielle était convexe sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème 8 du cours, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes ; elle est donc en particulier au-dessus de T. Il s'ensuit que
$$\mathrm{e}^x \geq x+1$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.



Remarque : On a déjà démontré ce résultat par une étude de fonction, dans l'exercice 10.

Exercice 19 1. Si $u(x) = x^2$ et $v(x) = 4x+1$, alors
$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v\left(x^2\right) = 4x^2+1.$$
2. Si $u(x) = x+2$ et $v(x) = x^3 - 3x$, alors
$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x+2) = (x+2)^3 - 3(x+2).$$
3. Si $u(x) = x-4$ et $v(x) = \sqrt{x}$, alors
$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x-4) = \sqrt{x-4}.$$
4. Si $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, alors
$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(2x+3) = \mathrm{e}^{2x+3}.$$

Exercice 20 1. Sachant que $v \circ u(x) = \sqrt{x^2+1}$, on peut prendre
$$u(x) = x^2+1 \quad , \quad v(x) = \sqrt{x}.$$
2. Sachant que $v \circ u(x) = (x-3)^2 + 5(x-3) + 1$, on peut prendre
$$u(x) = x-3 \quad , \quad v(x) = x^2+5x+1.$$
3. Sachant que $v \circ u(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$, on peut prendre
$$u(x) = 3x-1 \quad , \quad v(x) = \mathrm{e}^x.$$

Remarque : Il y a une infinité de choix possibles. Par exemple, pour le deuxième, on pourrait prendre
$$u(x) = (x-3)^2 + 5(x-3) \quad , \quad v(x) = x+1 \, ;$$
ou encore
$$u(x) = (x-3)^2 + 5(x-3) + 1 \quad , \quad v(x) = x \, ;$$
etc.

Exercice 21 On considère dans un repère orthonormé la parabole $P : y = x^2$ et le point $A(3;0)$.

1. Soit m un réel et soit M le point de P d'abscisse m. L'ordonnée de M est m^2, donc

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2} \\ &= \sqrt{(m-3)^2 + \left(m^2 - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{m^2 - 2 \times m \times 3 + 3^2 + m^4} \\ &= \sqrt{m^4 + m^2 - 6m + 9}. \end{aligned}$$

On remarque que $AM = f(m)$, où f est la fonction définie dans la question suivante. De ce fait, trouver le point M pour lequel la longueur AM est minimale revient à trouver la valeur de x pour laquelle f atteint son minimum. Nous y reviendrons dans la question 3.

2. On pose $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f est de la forme $f(x) = \sqrt{u(x)}$, avec

$$u(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9, \qquad u'(x) = 4x^3 + 2x - 6.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = \frac{\cancel{2}\left(2x^3 + x - 3\right)}{\cancel{2}\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}.$$

Pour démontrer la formule de l'énoncé, on développe :

$$(x-1)\left(2x^2 + 2x + 3\right) = x \times 2x^2 + x \times 2x + x \times 3 - 1 \times 2x^2 - 1 \times 2x - 1 \times 3 = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2x^2 - 2x - 3 = 2x^3 + x - 3.$$

On retombe sur le numérateur obtenu précédemment ; on a donc bien

$$f'(x) = \frac{(x-1)\left(2x^2 + 2x + 3\right)}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}.$$

Pour construire le tableau de variations de la fonction f, il faut étudier le signe de $2x^2 + 2x + 3$. Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 3 = -20$, donc il n'y a pas de racine et $2x^2 + 2x + 3$ est strictement positif pour tout réel x. On peut donc compléter le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$2x^2+2x+3$		$+$		$+$	
$\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. • La fonction f atteint son minimum pour $x = 1$, donc la longueur AM est minimale lorsque $m = 1$. Autrement dit, le point de P le plus proche de A est le point $M(1;1)$.
   • La tangente (T) à la parabole P au point M a pour équation

$$y = g'(1)(x-1) + g(1),$$

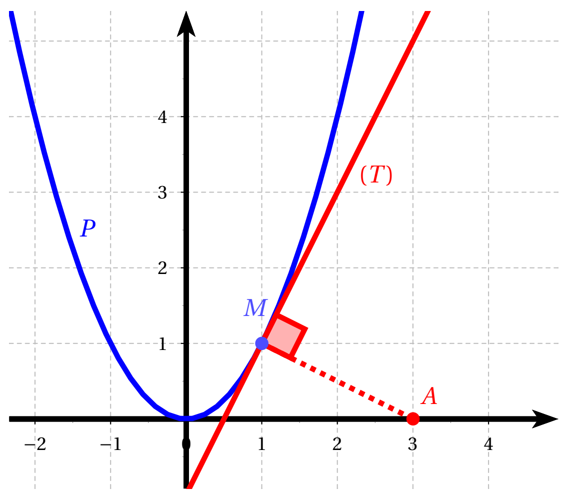
   avec $g(x) = x^2$ – donc $g'(x) = 2x$, et $g'(1) = 2 \times 1 = 2$. On a ainsi

$$\begin{aligned}(T) : y &= g'(1)(x-1) + g(1)\\ y &= 2(x-1)+1\\ y &= 2x-1.\end{aligned}$$

   • Pour prouver que (AM) est perpendiculaire à (T), on utilise le produit scalaire :
   (T) passe par $M(1;1)$ et par $N(2;3)$ (puisque $2 \times 2 - 1 = 3$), donc elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Par ailleurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AM} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0.$$

   Les droites (T) et (AM) sont donc bien perpendiculaires.



2 Suites et récurrence

Exercice 22 On calcule trois ou quatre termes, suivant le cas – suffisamment pour « avoir compris le principe ».

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$.

$$\begin{aligned}u_0 &= \frac{0^2-1}{0+2} = -\frac{1}{2}\\ u_1 &= \frac{1^2-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0\\ u_2 &= \frac{2^2-1}{2+2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
   ⚠On « démarre » à $n = 1$, puisqu'on ne peut pas diviser par 0.

$$v_1 = \frac{(-1)^1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$
$$v_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$
$$v_3 = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$v_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

Les termes sont alternativement positifs et négatifs. On dit que la suite est alternée.

3. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

On prend $n=0$:	On prend $n=1$:	On prend $n=2$:	On prend $n=3$:
$u_{0+1} = 2u_0 - 1$	$u_{1+1} = 2u_1 - 1$	$u_{2+1} = 2u_2 - 1$	$u_{3+1} = 2u_3 - 1$
$u_1 = 2 \times 3 - 1$	$u_2 = 2 \times 5 - 1$	$u_3 = 2 \times 9 - 1$	$u_4 = 2 \times 17 - 1$
$u_1 = 5$	$u_2 = 9$	$u_3 = 17$	$u_4 = 33$

4. $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = v_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On prend $n=0$:	On prend $n=1$:	On prend $n=2$:	On prend $n=3$:
$v_{0+1} = v_0 + 0$	$v_{1+1} = v_1 + 1$	$v_{2+1} = v_2 + 2$	$v_{3+1} = v_3 + 3$
$v_1 = -1 + 0$	$v_2 = -1 + 1$	$v_3 = 0 + 2$	$v_4 = 2 + 3$
$v_1 = -1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 5$

Exercice 23 1. Pour diminuer un nombre de 8 %, il faut le multiplier par 0,92, car 100 % − 8 % = 92 % = 0,92. On peut donc compléter le schéma :

$$\boxed{10} \xrightarrow{\times 0{,}92} \boxed{9{,}2} \xrightarrow{\times 0{,}92} \boxed{8{,}464}$$

v_0	v_1	v_2
Au départ	Après 1 jour	Après 2 jours

Conclusion :
$$v_0 = 10\,;\ v_1 = 9{,}2\,;\ v_2 = 8{,}464.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0{,}92$.

2. La masse d'iode 131 après 10 jours est
$$v_{10} = v_0 \times q^{10} = 10 \times 0{,}92^{10} \approx 4{,}3\ \mu\text{g}.$$

3. On part de 10 μg d'iode 131, donc il s'agit de déterminer à partir de quand il en restera moins de 5 μg. Pour cela, on fait un tableau de valeurs avec la calculatrice, en rentrant la formule
$$Y = 10 * 0.92^X$$
(on peut aussi utiliser le mode suite ou le mode tableur, suivant les modèles).

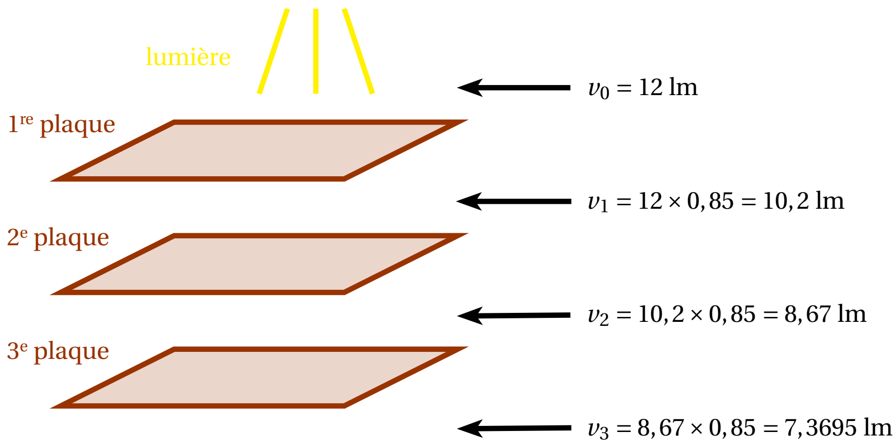
Après quelques essais [1], on obtient :

1. On ne peut pas savoir en démarrant jusqu'à quelle valeur de n il faut aller ; il faut donc faire des essais. Lorsque nous connaîtrons le logarithme népérien, nous pourrons donner une méthode plus efficace ; et nous pourrons même donner une formule : la demi-vie est $-\frac{\ln 2}{\ln 0{,}92}$.

n	8	9
v_n	$5,13$	$4,72$

Conclusion : la demi-vie de l'iode 131 est de 8 jours et quelques.

Exercice 24 1. $100\ \% - 15\ \% = 85\ \% = 0,85$, donc pour diminuer un nombre de 15 %, il faut le multiplier par 0,85.
Ainsi, dans le schéma ci-dessous, l'intensité lumineuse est-elle multipliée par 0,85 à chaque nouvelle plaque :



Remarque : Le lumen est une unité de mesure du flux lumineux, utilisée notamment pour indiquer la capacité d'éclairement des ampoules électriques.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,85$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 0,85^n.$$

3. Comme on part de 12 lm, il s'agit de savoir le nombre de plaques nécessaires pour que l'intensité lumineuse soit inférieure à 0,12 lm (puisque $12 \div 100 = 0,12$).

Comme dans l'exercice précédent, on rentre la formule

$$Y = 12 * 0.85^X$$

dans le mode fonction de la calculatrice, puis on fait des essais. On obtient :

n	28	29
v_n	$0,13$	$0,11$

Conclusion : il faut superposer au moins 29 plaques pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 100.

Exercice 25 Une suite v est définie par $v_0 = 4$ et la relation de récurrence

$$v_{n+1} = 2v_n + 2$$

pour tout entier naturel n.

1.

$$\begin{aligned} v_0 &= 4 \\ v_1 &= 2 \times 4 + 2 = 10 \\ v_2 &= 2 \times 10 + 2 = 22. \end{aligned}$$

2. Avec un schéma :

$$\begin{tikzcd} \boxed{4} \arrow[r, bend left, "+6"] \arrow[r, bend right, "\times 2{,}5"'] & \boxed{10} \arrow[r, bend left, "+12"] \arrow[r, bend right, "\times 2{,}2"'] & \boxed{22} \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{tikzcd}$$

Les résultats en rouge (6 et 12) sont différents, donc u **n'est pas arithmétique.**

Les résultats en vert (2,5 et 2,2) sont différents, donc u **n'est pas géométrique.**

Calculs utiles :

$$10 - 4 = 6,$$
$$22 - 10 = 12.$$

$$10 \div 4 = 2,5,$$
$$22 \div 10 = 2,2.$$

Exercice 26 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 3u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.
$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 3\times 2 - 1 = 5 \\ u_2 &= 3\times 5 - 1 = 14 \end{aligned}$$

2. On pose $v_n = u_n - 0,5$ pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 0,5 = 2 - 0,5 = 1,5 \\ v_1 &= u_1 - 0,5 = 5 - 0,5 = 4,5 \\ v_2 &= u_2 - 0,5 = 14 - 0,5 = 13,5 \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 0,5 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= (3u_n - 1) - 0,5 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= 3u_n - 1,5 && \text{(calcul)} \\ &= 3\left(u_n - \frac{1,5}{3}\right) && \text{(factorisation)} \\ &= 3(u_n - 0,5) && \text{(calcul)} \\ &= 3v_n && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 3$.

Remarque : L'étude d'une suite arithmético-géométrique ($u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$) se ramène toujours à celle d'une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, la méthode est toujours celle que nous venons de donner. À la quatrième ligne de calcul, c'est a qu'il faut mettre en facteur (ici, on a mis 3 en facteur).

4. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 3$, et $v_0 = u_0 - 0,5 = 2 - 0,5 = 1,5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = 1,5 \times 3^n.$$

5. Enfin $v_n = u_n - 1,5$ donc

$$u_n = v_n + 1,5 = 1,5 \times 3^n + 0,5.$$

Exercice 27 1. On complète le schéma ci-dessous pour calculer les termes u_1 et u_2. Les sommes écrites dans chaque case sont les sommes restant à rembourser aux dates indiquées.

$$\boxed{10\,000} \xrightarrow{\times 1,02} \boxed{10\,200} \xrightarrow{-\ 300} \boxed{9\,900} \xrightarrow{\times 1,02} \boxed{10\,098} \xrightarrow{-\ 300} \boxed{9\,798}$$

u_0		u_1		u_2
01/01/20	31/01/20	01/02/20	28/02/20	01/03/20

Pour passer d'un terme de la suite au terme suivant, on multiplie par $1,02$ (ajout des intérêts) puis on retranche 300 (remboursement mensuel). On peut donc continuer plus rapidement :

$$\begin{aligned} u_3 &= 9\,798 \times 1,02 - 300 = 9\,693,96 && \text{(somme à rembourser le 01/04/20),} \\ u_4 &= 9\,693,96 \times 1,02 - 300 = 9\,587,84 && \text{(somme à rembourser le 01/05/20).} \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1,02 u_n - 300.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 15\,000 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= (1,02u_n - 300) - 15\,000 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= 1,02u_n - 15\,300 && \text{(calcul)} \\ &= 1,02\left(u_n - \frac{15\,300}{1,02}\right) && \text{(factorisation)} \\ &= 1,02(u_n - 15\,000) && \text{(calcul)} \\ &= 1,02v_n && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1,02v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 1,02$.

4. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 1,02$, et $v_0 = u_0 - 15\,000 = 10\,000 - 15\,000 = -5\,000$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = -5\,000 \times 1,02^n.$$

Enfin $v_n = u_n - 15\,000$ donc

$$u_n = v_n + 15\,000 = -5\,000 \times 1,02^n + 15\,000.$$

5. Déterminer la durée du crédit revient à savoir quand la somme restant à rembourser est nulle. En réalité, au bout d'un moment, elle est négative, comme on le voit avec un tableau de valeurs :

n	55	56
u_n	$141,34$	$-155,83$

À la fin du 55^e fois, il reste 141,35 € à rembourser ; et si on rembourse 300 € au début du 56^e mois, la banque nous devra 155,83 €.

Conclusion :

- le crédit dure 56 mois ;
- on rembourse 56 fois 300 €, mais à la fin on a dépassé de 155,83 € ce que l'on devait à la banque ;
- la somme totale remboursée est donc

$$56 \times 300 - 155,83 = 16\,664,17 \text{ €} ;$$

- le « coût du crédit » est la différence entre ce que l'on a remboursé et ce que la banque nous a prêté :

$$\text{Coût du crédit} = \text{Somme remboursée} - \text{Somme empruntée} = 16\,664,17 - 10\,000 = 6\,664,17 \text{ €}.$$

Exercice 28 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n = 2^n - 1.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 0 \\ 2^0 - 1 & = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k = 2^k - 1.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = 2^{k+1} - 1.$$

On part de

$$u_k = 2^k - 1.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + 1 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= 2\left(2^k - 1\right) + 1 && \text{(H.R.)} \\ &= 2 \times 2^k - 2 + 1 && \text{(on développe)} \\ &= 2^{k+1} - 1 && \text{(calcul).} \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

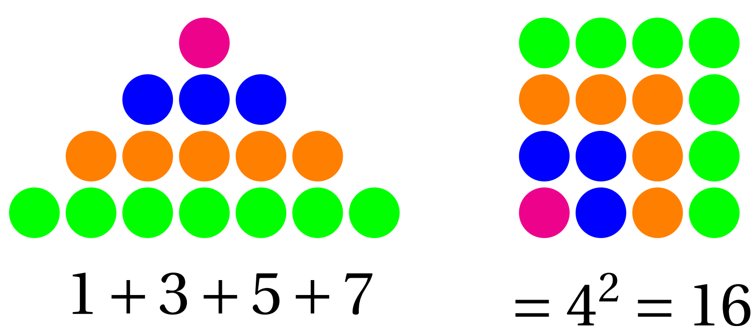
$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1.

$$\begin{array}{ll} (n=0) & u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 0 + 3 = 4 \\ (n=1) & u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9 \\ (n=2) & u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16 \end{array}$$

Remarque : Pour passer de u_n à u_{n+1}, on ajoute $2n+3$, donc à partir de $u_0 = 1$ (rond rose ci-dessous) :

- on obtient u_1 en ajoutant $2 \times 0 + 3 = 3$ ronds bleus ;
- on obtient u_2 en ajoutant $2 \times 1 + 3 = 5$ ronds oranges ;
- on obtient u_3 en ajoutant $2 \times 2 + 3 = 7$ ronds verts ;
- etc.



On devine que u_n sera toujours un carré :

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 1 = 1^2\\
u_1 &= 4 = 2^2\\
u_2 &= 9 = 3^2\\
u_3 &= 16 = 4^2
\end{aligned}
$$

Plus généralement, $u_n = (n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ – ce que l'on démontre rigoureusement dans la question suivante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n = (n+1)^2.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 1 \\ (0+1)^2 & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k = (k+1)^2.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} = ((k+1)+1)^2,$$

ou encore

$$u_{k+1} = (k+2)^2.$$

On part de

$$u_k = (k+1)^2.$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= (k+1)^2 + 2k + 3 && \text{(H.R.)}\\
&= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 && \text{(on développe avec l'IR)}\\
&= k^2 + 4k + 4 && \text{(on réduit)}\\
&= (k+2)^2 && \text{(on factorise avec l'IR)}.
\end{aligned}
$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 1\\
u_1 &= 0,5 \times 1 + 3 = 3,5\\
u_2 &= 0,5 \times 3,5 + 3 = 4,75\\
u_3 &= 0,5 \times 4,75 + 3 = 5,375
\end{aligned}
$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n \leq 6.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 1 \\ 1 & \leq 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k \leq 6.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} \leq 6.$$

On part de

$$u_k \leq 6.$$

On multiplie par $0,5$:

$$\begin{aligned} u_k \times 0,5 &\leq 6 \times 0,5 \\ 0,5u_k &\leq 3 \end{aligned}$$

Puis on ajoute 3 :

$$\begin{aligned} 0,5u_k + 3 &\leq 3 + 3 \\ u_{k+1} &\leq 6. \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \frac{u_0}{u_0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ u_3 &= \frac{u_2}{u_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$u_n = \frac{1}{n+1}.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 1 \\ \frac{1}{0+1} & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k = \frac{1}{k+1}.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_{k+1} = \frac{1}{k+2}.$$

On part de
$$u_k = \frac{1}{k+1}.$$

On utilise la formule de récurrence et on remplace :
$$u_{k+1} = \frac{u_k}{u_k+1} \overset{\text{H.R.}}{=} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k+1}+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k+1}+\frac{k+1}{k+1}} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{1}{\cancel{k+1}} \times \frac{\cancel{k+1}}{k+2} = \frac{1}{k+2}.$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32 Soit q un réel différent de 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
  La somme dans le membre de gauche va de 1 à q^n, qui, dans le cas où $n = 0$, vaut 1. Autrement dit, la somme dans le membre de gauche est une somme d'un seul terme : 1.

  D'un autre côté, $\frac{q^{0+1}-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1$. $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{k+1} = \frac{q^{k+2}-1}{q-1}.$$

On part de
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

On ajoute q^{k+1}, puis on réduit au même dénominateur :
$$\begin{aligned}
1 + q + q^2 + \cdots + q^k + q^{k+1} &= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + \frac{q^{k+1} \times (q-1)}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + \frac{q^{k+1} \times q - q^{k+1} \times 1}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + \frac{q^{k+2} - q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{\cancel{q^{k+1}} - 1 + q^{k+2} - \cancel{q^{k+1}}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+2}-1}{q-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$1+q+q^2+\cdots+q^{k+1}=\frac{q^{k+2}-1}{q-1},$$

et la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Remarque : La somme $1+q+q^2+\cdots+q^n$ se réécrit sous la forme condensée

$$\sum_{i=0}^{n} q^i.$$

Exercice 33 Soit x un réel positif.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_1$ est vraie (⚠Ça démarre à $n=1$ et non pas $n=0$.)

$$\left.\begin{array}{ll}(1+x)^1 & =1+x \\ 1+1x & =1+x\end{array}\right\} \Longrightarrow (1+x)^1 \geq 1+1x \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$(1+x)^k \geq 1+kx.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

On part de

$$(1+x)^k \geq 1+kx.$$

On multiplie par $1+x$ et on développe :

$$\begin{aligned}(1+x)^k\times(1+x) &\geq (1+kx)\times(1+x)\\ (1+x)^{k+1} &\geq 1\times 1+1\times x+kx\times 1+kx\times x\\ (1+x)^{k+1} &\geq 1+x+kx+kx^2\\ (1+x)^{k+1} &\geq 1+(k+1)x+kx^2\end{aligned}$$

Or $kx^2\geq 0$, car k et x^2 sont positifs, donc $1+(k+1)x+kx^2\geq 1+(k+1)x$; et par conséquent

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 34 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0=1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1}=\frac{4u_n}{u_n+4}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pose également $v_n=\frac{4}{u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de $v_{n+1}=\cdots$ et on essaye d'aboutir à $\cdots=v_n\times q$. Pour une suite arithmétique, c'est le même principe : on part de $v_{n+1}=\cdots$ et on essaye d'aboutir à $\cdots=v_n+r$.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}=\frac{4}{u_{n+1}}=\frac{4}{\frac{4u_n}{u_n+4}}=4\times\frac{u_n+4}{4u_n}=\frac{\cancel{4}(u_n+4)}{\cancel{4}u_n}=\frac{u_n}{u_n}+\frac{4}{u_n}=1+v_n.$$

   Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=v_n+1$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=1$.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 1$, et $v_0 = \frac{4}{u_0} = \frac{4}{1} = 4$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 + n \times r = 4 + n \times 1 = n + 4.$$

Enfin $v_n = \dfrac{4}{u_n}$ donc

$$u_n = \frac{4}{v_n} = \frac{4}{n+4}.$$

Remarque : On a utilisé : si $a = \dfrac{b}{c}$, alors $c = \dfrac{b}{a}$.

Exercice 35 1. (a) Chaque année, 80 % des abonnés se réabonnent (multiplication par 0,8), puis 40 nouvelles personnes s'inscrivent, donc

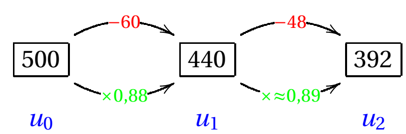
$$\begin{aligned} u_0 &= 500 \\ u_1 &= 500 \times 0,8 + 40 = 440 \\ u_2 &= 440 \times 0,8 + 40 = 392 \end{aligned}$$

Conclusion : $u_1 = 440$ et $u_2 = 392$.

(b) La formule de récurrence est $u_{n+1} = u_n \times 0,8 + 40$, ou encore

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 40.$$

(c) Avec un schéma :



Les résultats en rouge (-6 et -48) sont différents, donc u n'est pas arithmétique. Les résultats en vert (0,88 et 0,89) sont différents, donc u n'est pas géométrique.

2. On pose $v_n = u_n - 200$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= (0,8u_n + 40) - 200 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \\ &= 0,8u_n - 160 && \text{(calcul)} \\ &= 0,8\left(u_n - \frac{160}{0,8}\right) && \text{(factorisation)} \\ &= 0,8(u_n - 200) && \text{(calcul)} \\ &= 0,8v_n && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,8v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,8$.

(b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,8$, et $v_0 = u_0 - 200 = 500 - 200 = 300$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 0,8^n.$$

Enfin $v_n = u_n - 200$ donc

$$u_n = v_n + 200 = 300 \times 0,8^n + 200.$$

(c) Suivant ce modèle, en 2030 (donc après 10 ans), il devrait y avoir

$$u_{10} = 300 \times 0,8^{10} + 200 \approx 232 \text{ abonnés.}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété
$$u_n = 300 \times 0,8^n + 200.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 500 \\ 300 \times 0,8^0 + 200 & = 300 \times 1 + 200 = 500 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc
$$u_k = 300 \times 0,8^k + 200.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_{k+1} = 300 \times 0,8^{k+1} + 200.$$

On part de
$$u_k = 300 \times 0,8^k + 200.$$

On a alors :
$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 0,8u_k + 40 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= 0,8\left(300 \times 0,8^k + 200\right) + 40 && \text{(H.R.)} \\ &= 300 \times 0,8 \times 0,8^k + 0,8 \times 200 + 40 && \text{(on développe)} \\ &= 300 \times 0,8^{k+1} + 200 && \text{(calcul).} \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

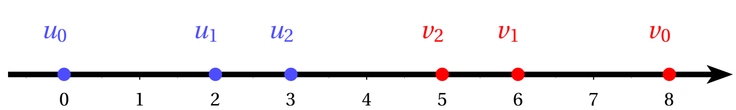
- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36 On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $v_0 = 8$ et les relations de récurrence :
$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$u_0 = 0$$
$$u_1 = \frac{3}{4} \times u_0 + \frac{1}{4} \times v_0 = \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 8 = 2$$
$$u_2 = \frac{3}{4} \times u_1 + \frac{1}{4} \times v_1 = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 6 = 3$$

$$v_0 = 8$$
$$v_1 = \frac{1}{4} \times u_0 + \frac{3}{4} \times v_0 = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times 8 = 6$$
$$v_2 = \frac{1}{4} \times u_1 + \frac{3}{4} \times v_1 = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 6 = 5$$



Remarque : Pour placer u_{n+1} et v_{n+1}, on coupe le segment $[u_n; v_n]$ en 4 ; et on place u_{n+1} au quart du segment, v_{n+1} aux trois-quarts du segment.

2. On pose $s_n = v_n + u_n$ et $d_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= v_{n+1} + u_{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) + \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n\right) \\ &= \frac{4}{4}v_n + \frac{4}{4}u_n \\ &= v_n + u_n \\ &= s_n. \end{aligned}$$

  Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$ donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Et comme $s_0 = v_0 + u_0 = 8 + 0 = 8$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 8 :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ s_n = 8.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) - \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n\right) \\ &= \frac{2}{4}v_n - \frac{2}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{2}d_n. \end{aligned}$$

  Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$ donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

3. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, et $d_0 = v_0 - u_0 = 8 - 0 = 8$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = d_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On sait par ailleurs que $s_n = 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les relations

$$\begin{cases} s_n &= v_n + u_n \\ d_n &= v_n - u_n \end{cases}$$

se réécrivent donc

$$\begin{cases} 8 &= v_n + u_n \\ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &= v_n - u_n \end{cases}$$

On ajoute membre à membre :

$$\begin{aligned} 8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &= v_n + \cancel{u_n} + v_n - \cancel{u_n} \\ 8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 2v_n \\ \frac{8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} &= v_n \\ 4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &= v_n \end{aligned}$$

Enfin, comme $s_n = v_n + u_n$:

$$u_n = s_n - v_n = 8 - \left(4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 8 - 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = 4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad \boxed{u_n = 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Exercice 37

Programme

```
for i in range(1,6):
        print(i**2)
```

Traduction en français

Pour i allant de 1 à 5 :
afficher i^2

Commentaires

- ⚠La commande

  for i in range(1,6)

  signifie que i va de 1 à 5 – il y a un décalage à la fin.
- On n'oublie pas les « : » à la fin de la première ligne. L'incrément qui suit (équivalent à une tabulation sur Thonny) est alors automatiquement inséré lorsqu'on passe à la ligne.

Exercice 38

Programme

```
for i in range(1,11):
        print(8*i)
```

Commentaires

On affiche les résultats les uns en-dessous des autres :

$$8 \times 1 = 8,\ 8 \times 2 = 16,\ 8 \times 3 = 24,\ \dots,\ 8 \times 10 = 80.$$

Exercice 39 On explique le fonctionnement du programme en remplissant un tableau.

Programme

```
s=0
for i in range(1,101):
        s=s+i
print(s)
```

Tableau

On a une boucle **Pour**, où i va de 1 à 100.

Valeur de i	Valeur de s
	0
1	$0+1=1$
2	$1+2=3$
3	$3+3=6$
4	$6+4=10$
…	…
99	…
100	…

Explications

- La 1re ligne du tableau ci-contre correspond à la 1re ligne du code : s = 0 et i n'existe pas encore.
- Dans la boucle, i va de 1 à 100, donc on écrit les valeurs de 1 jusqu'à 100 dans la 1re colonne.
- À chaque étape de la boucle **Pour**, s reçoit la valeur s + i.
  Donc au début, lorsque i = 1, s reçoit la valeur s + i = 0 + 1 = 1. La valeur de s a donc été modifiée et il vaut maintenant 1 (et non plus 0).
- Ensuite, lorsque i = 2, s reçoit la nouvelle valeur s + i = 1 + 2 = 3. La valeur de s a été une nouvelle fois modifiée.
- Puis quand i = 3, s reçoit la nouvelle valeur s + i = 3 + 3 = 6. Cela continue ainsi de suite jusqu'en bas du tableau.

Finalement, on part de 0, puis on ajoute 1, puis 2, puis 3 ; et ainsi de suite jusque 100. On calcule donc

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100.$$

Le résultat, 5 050, s'affiche en fin de programme.

Exercice 40 On édite en machine un programme Python qui calcule :

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10.$$

On s'inspire pour cela du programme précédent, avec trois différences :
- on **multiplie** par i à chaque étape, au lieu **d'ajouter** i ;
- au début s = 1, élément neutre de la multiplication (si on démarrait avec s = 0, la valeur de s vaudrait toujours 0) ;
- la boucle ne va que de 1 à 10.

```
s=1
for i in range(1,11):
        s=s*i
print(s)
```

Exercice 41 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons calculer les premiers termes, puis, comme dans l'exercice 39, compléter un tableau avec les calculs à chaque étape de la boucle **Pour**.

Calcul des premiers termes

$u_0 = 3$
$u_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$
$u_2 = 2 \times 5 - 1 = 9$
$u_3 = 2 \times 9 - 1 = 17$
$u_4 = 2 \times 17 - 1 = 33$

Programme

```
u=3
for i in range(4):
        u=2*u-1
print(u)
```

Tableau

On a une boucle **Pour**, où i va de 0 à 3.[2]

Valeur de i	Valeur de u	
	3	$\leftarrow u_0$
0	$2 \times 3 - 1 = 5$	$\leftarrow u_1$
1	$2 \times 5 - 1 = 9$	$\leftarrow u_2$
2	$2 \times 9 - 1 = 17$	$\leftarrow u_3$
3	$2 \times 17 - 1 = 33$	$\leftarrow u_4$

Dans la boucle **Pour**, u prend successivement les valeurs u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. C'était prévisible, puisque l'instruction

```
u=2*u-1
```

est la même que la formule de récurrence.

Conclusion : la valeur affichée en sortie est $u_4 = 33$.

Exercice 42 Commençons par des rappels concernant les listes, avec quelques exemples :
- La commande

  L = [5, 6, 10]

  crée une liste L de trois éléments. Le premier, L [0] , est égal à 5 ; le deuxième, L [1] , est égal à 6 ; le troisième, L [2] , est égal à 10. On notera en particulier l'indexation des termes à partir de 0.
- La commande

  L.append(2)

  ajoute un terme à la liste, égal à 2. On aura donc ensuite une liste de 4 éléments : L = [5, 6, 10, 2] .
- La commande

  len(L)

  renvoie la longueur de la liste.

2. La commande

for i in range(n) :

signifie que i va de 0 à n − 1.

- La commande

$$L = [\,]$$

crée une liste vide (donc de longueur 0).

Venons-en à l'exercice. On souhaite afficher la liste des nombres de la table de 8 :

$$[8\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ \cdots\ ,\ 80]\ .$$

Pour cela, on crée une liste vide L, puis on reprend le programme de l'exercice 38, en ajoutant les nombres de la table à la liste L au fur et à mesure de leur calcul :

```
L=[]
for i in range(1,11):
        L.append(8*i)
print(L)
```

Exercice 43 On reprend la suite de l'exercice 41 : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour afficher la liste des termes de u_0 à u_6, on crée d'abord une liste qui contient le premier terme avec la commande

```
L=[3]
```

Ensuite, on reprend le programme de l'exercice 41, en ajoutant à la liste L chacun des termes de la suite au fur et à mesure de leur calcul.

Pour plus de clarté, on a ajouté un tableau explicatif :

Programme

```
u=3
L=[3]
for i in range(6):
        u=2*u-1
        L.append(u)
print(u)
```

Tableau

Valeur de i	**Valeur de u**	liste L
	3	L = [3]
0	$2\times3-1=5$	L = [3, 5]
1	$2\times5-1=9$	L = [3, 5, 9]
2	$2\times9-1=17$	L = [3, 5, 9, 17]
3	$2\times17-1=33$	L = [3, 5, 9, 17, 33]
4	$2\times33-1=65$	L = [3, 5, 9, 17, 33, 65]
5	$2\times65-1=129$	L = [3, 5, 9, 17, 33, 65, 129]

Exercice 44

Programme 1

```
x=3
if x==4:
        print(5*x)
else:
        print(2*x)
```

Puisque $x \neq 4$, le programme affiche

$$2\times x = 2\times3 = 6.$$

Programme 2

```
x=3
if x<=4:
        print(5*x)
else:
        print(2*x)
```

Puisque $x \leq 4$, le programme affiche

$$5\times x = 5\times3 = 15.$$

Exercice 45 On commence par deux remarques :

- Un entier $n \geq 1$ est un diviseur de 30 si, et seulement si, 30%n = 0.
- En python, on teste les égalités avec == . Par exemple, la commande

  ```
  4==4
  ```

  renvoie **True** ; tandis que

  ```
  4==5
  ```

renvoie **False**.

On édite un programme Python qui renvoie la liste des diviseurs positifs de 30 :

```
L=[]
for i in range(1,31):
        if 30%i==0:
                L.append(i)
print(L)
```

Exercice 46 On édite la fonction :

```
def f(x):
        return x**2
```

On obtient

$$f(3) = 3^2 = 9$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

Exercice 47 La fonction

```
def g():
        return 5
```

renvoie toujours la valeur 5.

Remarque : Pour lancer la fonction, il faut entrer la commande

```
g()
```

sans oublier les parenthèses, mais sans rien écrire à l'intérieur[3].

Exercice 48

```
def moyenne(a,b):
        return (a+b)/2
```

Exercice 49

```
def transforme(note):
        x=1.2*note
        if x<=20:
                return x
        else:
                return 20
```

Exercice 50 On reprend encore la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On recopie quasiment à l'identique les programmes que nous avons écrits dans les exercices 41 et 43. Il y a tout de même trois différences :

- on utilise une fonction ;
- la boucle **Pour** a n étapes, et non plus 4 (ex 41) ou 6 (ex 43) ;
- on utilise **return** au lieu de **print** pour renvoyer le résultat.

1. Fonction qui renvoie la valeur de u_{n} :

```
def terme(n):
        u=3
        for i in range(n):
                u=2*u-1
        return u
```

3. Cela fait une différence notable avec les mathématiques, où une fonction dépend forcément d'une (ou plusieurs) variables.

2. Fonction qui renvoie la liste de tous les termes de u_0 à u_n :

```
def liste(n):
        u=3
        L=[3]
        for i in range(n):
                u=2*u-1
                L.append(u)
        return L
```

Exercice 51 On explique le fonctionnement du programme avec un tableau :

Programme

```
def somme(n):
        s=0
        for k in range(1,n+1):
                s=s+1/k
        return s
```

Tableau

Avec la commande somme(100), k va de 1 à 100, puisque $n+1 = 100+1 = 101$.

On laisse volontairement les résultats sous forme de sommes de fractions.

Valeur de k	Valeur de s
	0
1	$0+\frac{1}{1}=\frac{1}{1}$
2	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
...	...
100	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$

Conclusion : somme(100) renvoie la valeur de la somme

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$$

(qui vaut environ $5,19$).

Exercice 52

```
def mystere(L):
        M=L[0]
        for i in range(len(L)):
                if L[i]>M:
                        M=L[i]
        return M
```

On explique encore une fois le programme avec un tableau :

Commentaires

On entre la commande mystere([2, 3, 7,0]). Dans ce cas, en notant $L = [2,3,7,0]$:

- la longueur de la liste L est 4, donc len(L) = 4 ; et i va de 0 à 3;
- $L[0] = 2$, $L[1] = 3$, $L[2] = 7$ et $L[3] = 0$;
- Au départ, $M = L[0] = 2$. Puis, à chaque étape de la boucle, on regarde si $L[i] > M$. Si c'est le cas, on remplace M par L[i].

Tableau

Valeur de i	A-t-on L[i]>M ?		Valeur de M
			2
0	A-t-on $L[0]>2$? $2>2$?	non	2
1	A-t-on $L[1]>2$? $3>2$?	oui	3
2	A-t-on $L[2]>3$? $7>3$?	oui	7
3	A-t-on $L[3]>7$? $0>7$?	non	7

Conclusion : la valeur renvoyée en sortie est 7, maximum de la liste L. Notez que l'on aurait pu obtenir ce maximum avec la simple commande

```
max(L)
```

Exercice 53 1. Les termes successifs sont :

$$26-13-40-20-10-5-16-8-4-2-1-4-2-1-\cdots$$

On aboutit à une suite périodique ; phénomène qui semble d'ailleurs avoir lieu quel que soit le nombre de départ (on invite le lecteur curieux à faire des essais avec d'autres entiers et à lire l'article Wikipédia sur la conjecture de Syracuse).

2. Avec Thonny, un entier n est pair si, et seulement si, n%2 = 0. On utilise ce résultat pour tester la parité :

```
def syracuse():
        u=26
        L=[26]
        for i in range(10):
                if n%2==0:
                        u=u/2
                else:
                        u=3*u+1
                L.append(u)
        return L
```

3 Dénombrement

Exercice 54 1. Pour chacun des 4 symboles, il y a 12 possibilités, donc au total $12\times12\times12\times12=12^4=20\,736$ codes différents possibles.

Remarque : Chaque code est ce que l'on appelle une **4-liste d'un ensemble à 12 éléments**.

2. On raisonne comme dans la question 1 : il y a $11^4=14\,641$ codes d'entrée ne comportant pas la lettre A.

3. Il y a 12 possibilités pour le 1^er^ symbole, 11 pour le 2^e^ (car il diffère du premier symbole), puis 10 pour le 3^e^ ; et enfin 9 pour le 4^e^. Donc au total,

$$12\times11\times10\times9=11\,880$$

codes avec 4 symboles différents.

Remarque : Chaque code est ce que l'on appelle un **arrangement de 4 éléments d'un ensemble à 12 éléments**. Le cours donne directement la réponse :

$$\text{nombre d'arrangements}=\frac{12!}{(12-4)!}=\frac{12!}{8!}=\frac{12\times11\times10\times9\times\cancel{8}\times\cancel{7}\times\cdots\times\cancel{1}}{\cancel{8}\times\cancel{7}\times\cdots\times\cancel{1}}=12\times11\times10\times9.$$

Exercice 55 1. On obtient les anagrammes de VOYAGE en permutant les lettres de toutes les façons possibles. La lettre V peut prendre 6 positions différentes, puis il reste 5 positions possibles pour le O, puis 4 pour le Y, etc. Au final, il y a

$$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$$

anagrammes.

Remarque : On dit qu'il y a 720 **permutations** possibles des lettres.

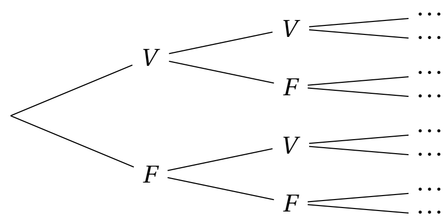
2. Si les 8 lettres du mot ANTILLES étaient toutes différentes, il y aurait $8!=40\,320$ anagrammes différentes. Mais il y a deux « L », donc chaque anagramme est comptée deux fois. En effet, si on différencie les deux « L » en les coloriant, les mots INALSLET et INALSLET, par exemple, semblent différents ; mais ils représentent en réalité le même mot INALSLET. Finalement, il n'y a que

$$40\,320\div2=20\,160$$

anagrammes différentes.

Exercice 56 Il y a 2 possibilités pour la 1re réponse, 2 possibilités pour la 2e, 2 pour la 3e, etc. Donc au total $2^{10} = 1\,024$ façons possibles de remplir le questionnaire.

Remarques :
- Il s'agit du nombre de 10-listes d'un ensemble à deux éléments (ces deux éléments étant Vrai/Faux).
- Au collège, vous auriez pu présenter la solution avec un arbre :



Exercice 57

1. Les podiums sont les arrangements de 3 éléments d'un ensemble à 8 éléments (car les trois premiers de la course sont différents), donc il y en a
$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336.$$
2. On s'intéresse à l'événement contraire : on compte le nombre de podiums sans aucun Américain. Il s'agit du nombre d'arrangements de 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments (les 5 non Américains) ; il y en a
$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$
Conclusion : il reste
$$336 - 60 = 276$$
podiums comportant au moins un Américain.

Exercice 58 On a déjà rencontré ce code dans l'exercice 40 (à quelques différences près). On explique son fonctionnement avec un tableau :

Programme

```
def fact(n):
        p=1
        for i in range(1,n+1):
                p=p*i
        return p
```

Tableau

On rentre par exemple la commande fact(4) – donc i va alors de 1 à 4 :

Valeur de i	Valeur de p
	1
1	$1 \times 1 = 1$
2	$1 \times 2 = 2$
3	$2 \times 3 = 6$
4	$6 \times 4 = 24$

La valeur renvoyée est 24, qui correspond à
$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4.$$

Exercice 59 Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

On a colorié les cases de trois couleurs :
- en vert : le candidat connaît les deux questions ;
- en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
- en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

Géo \ Hist	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

Conclusion : il y a $6\times5=30$ cases au total, 6 vertes et 15 oranges, donc :

- la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$;
- la probabilité que le candidat connaisse au moins l'une des deux questions est $\frac{6+15}{30}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$.

Remarque : On aurait pu se passer du tableau :

- il y a $6\times5=30$ tirages possibles ;
- il y a $3\times2=6$ cas favorables à l'événement « le candidat connaît les deux questions » ;
- il y a $3\times3=9$ cas favorables à l'événement « le candidat ne connaît aucune des deux questions », donc $30-9=21$ cas favorables à l'événement contraire « le candidat connaît au moins l'une des deux questions ».

Exercice 60 • Les cas possibles sont les 3-listes d'un ensemble à 4 éléments ; il y en a $4^3=64$.

- Les cas favorables à G sont les arrangements de 3 éléments d'un ensemble à 4 éléments ($\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$) ; il y en a $\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=4\times3\times2=24$. On a donc $P(\mathrm{G})=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$.
- Pour calculer $P(H)$, on prend l'événement contraire $\overline{\mathrm{H}}$: « aucun cœur n'apparaît à l'écran ».
  Les cas favorables à $\overline{\mathrm{H}}$ sont les 3-listes d'un ensemble à 3 éléments ($\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$), il y en a donc $3^3=27$. Il reste $64-27=37$ cas favorables à H, et ainsi $P(\mathrm{H})=\frac{37}{64}$.

Exercice 61 1. • Les cas possibles sont les 30-listes d'un ensemble à 200 éléments, il y en a 200^{30}.

- Les cas favorables sont les arrangements de 30 éléments d'un ensemble à 200 éléments ; il y en a

$$\frac{200!}{(200-30)!}=\frac{200!}{170!}=200\times199\times198\times\cdots\times172\times171.$$

- La probabilité que les élèves choisissent tous un nombre différent est donc

$$p=\frac{200\times199\times198\times\cdots\times172\times171}{200^{30}}.$$

2. On remarque que

$$p=\frac{200\times199\times198\times\cdots\times172\times171}{200\times200\times200\times\cdots\times200\times200}=\frac{200}{200}\times\frac{199}{200}\times\frac{198}{200}\times\frac{172}{200}\times\frac{171}{200}.$$

C'est sous cette forme, en calculant le produit de proche en proche, que l'on peut obtenir la réponse avec un programme [4] : on part de la valeur 1, puis on multiplie par $\frac{171}{200}$, puis par $\frac{172}{200}$, puis par $\frac{173}{200}$, ... jusqu'à $\frac{200}{200}$.

```
def proba():
        p=1
        for i in range(171,201):
                p=p*i/200
        return p
```

La réponse obtenue en sortie est $p\approx0,10$.

Exercice 62 • Les podiums possibles sont les 3-listes d'un ensemble à 12 éléments ; il y en a $12^3=1\,728$.

- Les cas favorables à l'événement A : « Le joueur obtient le tiercé » sont toutes les permutations possibles des 3 premiers de la course ; il y en a $3!=3\times2\times1=6$. On peut d'ailleurs les énumérer rapidement :

$$(7,4,10)\ ;\ (7,10,4)\ ;(4,7,10)\ ;(4,10,7)\ ;(10,4,7)\ ;(10,7,4).$$

- Conclusion : $P(\mathrm{A})=\frac{6}{1728}=\frac{1}{288}$.

Exercice 63 1. On commence par $A=\binom{5}{2}$. Il y a trois méthodes :

4. Le nombre 200^{30} dépasse les capacités de votre calculatrice, faisant du calcul de proche en proche une nécessité.

- avec la formule :

$$A = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{2 \times 1 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = \frac{20}{2} = 10.$$

- avec le triangle de Pascal :

	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
$\boxed{5}$	1	5	$\boxed{10}$	10	5	1

- avec la calculatrice :

Calculatrices collège

Il faut écrire le calcul (le symbole ! est sur le clavier) :

$$\frac{5!}{2! \times 3!}$$

NUMWORKS

- $\boxed{⌂}$
- Calculs $\boxed{\text{EXE}}$ puis $\boxed{🧰}$ (boîte à outils)
- choisir Dénombrement $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir binomial(n,k) $\boxed{\text{EXE}}$
- compléter $\binom{5}{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$

TI graphiques

- $\boxed{\text{math}}$ puis $\boxed{\text{PROB}}$
- 3 :Combinaison $\boxed{\text{EXE}}$
- ${}_5\text{C}_2$ $\boxed{\text{EXE}}$

CASIO graphiques

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis $\boxed{\text{RUN}}$ $\boxed{\text{EXE}}$
- 5 $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\triangleright}$
- $\boxed{\text{F3}}$ (on choisit donc PROB)
- $\boxed{\text{F3}}$ (on choisit donc nCr)
- 2 $\boxed{\text{EXE}}$ (on affiche 5**C**2 à l'écran avant d'exécuter)

Quelle que soit la méthode, on obtient

$$A = \binom{5}{2} = 10.$$

On obtient également :

$$B = \binom{6}{3} = 20, \quad C = \binom{50}{1} = 50, \quad D = \binom{4}{0} = 1.$$

Remarque : Pour C et D, le résultat s'obtient sans calcul :

- pour C, on choisit 1 élément parmi 50, donc il y a 50 choix possibles ;
- pour D, on on sait (cf cours) que $\binom{n}{0} = 1$ quelle que soit la valeur de n.

2. - $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120$. L'égalité était prévisible : choisir 3 éléments que l'on conserve dans un ensemble à 10 éléments revient à choisir les 7 éléments que l'on met de côté.
   - Par le même raisonnement, vu que $100 - 60 = 40$, $\binom{100}{60} = \binom{100}{40}$. Et d'une manière plus générale, si $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exercice 64 On choisit trois numéros sur une grille de neuf cases. Il y a $\binom{9}{3} = 84$ grilles possibles.

1	2	~~3~~
4	~~5~~	6
7	~~8~~	9

Exercice 65 On prend 5 cartes dans un jeu de 32. Il y a $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains possibles.

Exercice 66 Lorsqu'ils se rencontrent en arrivant le matin au lycée, les 24 élèves d'une classe se serrent la main.

Choisir une poignée de main, c'est choisir deux personnes dans la classe. Il s'échange donc $\binom{24}{2} = 276$ poignées de mains au total.

Exercice 67 1. Si $p \geq 2$:

$$(p-1)! \times p = 1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \times p = p!$$

(l'égalité est également vraie lorsque $p = 1$, puisque $0! \times 1 = 1 = 1!$).

2. Si $n \geq 2$:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2! \times (n+1-2)!} = \frac{(n+1)!}{2! \times (n-1)!} = \frac{\cancel{(n-1)!} \times n \times (n+1)}{2 \times \cancel{(n-1)!}} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Remarque : On peut aussi obtenir la réponse par un raisonnement de dénombrement : choisir 2 éléments parmi $n+1$ revient à compter le nombre de poignées de mains lorsque $n+1$ personnes se serrent la main les unes les autres (comme dans l'exercice précédent). Chacune des $n+1$ personnes donne n poignées de main; et on divise par 2, parce que sinon chaque poignée de main est comptée deux fois. On total, on en dénombre $(n+1) \times n \div 2 = \frac{n^2+n}{2}$.

3. Soit $n \geq k \geq 1$. On calcule séparément :

$$\begin{aligned} n \times \binom{n-1}{k-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{(k-1)! \times (n-\cancel{1}-k+\cancel{1})!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \times \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \\ &= \frac{n! \times \cancel{k}}{(k-1)! \times \cancel{k} \times (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!} \end{aligned}$$

On a donc bien

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$

(formule du pion).

Exercice 68 1. Il faut choisir 12 personnes parmi 20, donc on peut constituer $\binom{20}{12}$ groupes différents.

2. David est un des membres de l'association. Il y a :
   - $\binom{19}{11}$ groupes de 12 personnes contenant David (puisque si David est pris, il reste 11 personnes à choisir parmi les 19 autres);
   - $\binom{19}{12}$ groupes de 12 personnes ne contenant pas David (puisque si David n'est pas pris, il reste encore 12 personnes à choisir parmi les 19 autres).
3. D'après les questions 1 et 2 :

$$\binom{20}{12} = \binom{19}{11} + \binom{19}{12}.$$

4. On généralise : si $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

5. On redémontre par le calcul la formule obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k! \times ((n-1)-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-\cancel{1}-k+\cancel{1})!} + \frac{(n-1)!}{k! \times (n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times k}{(k-1)! \times k \times (n-k)!} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k! \times (n-k-1)! \times (n-k)} \\ &= \frac{(n-1)! \times k}{k! \times (n-k)!} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k! \times (n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times (k+n-k)}{k! \times (n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{k! \times (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Remarque : Cette égalité, appelée formule de Pascal, permet de faire le lien entre le triangle de Pascal et les $\binom{n}{k}$. En effet :

- La première colonne du triangle de Pascal contient uniquement des 1, qui correspondent bien aux $\binom{n}{0}$.
- La diagonale du triangle de Pascal contient uniquement des 1, qui correspondent bien aux $\binom{n}{n}$.
- On remplit chacune des cases « centrales » en ajoutant le nombre au-dessus et celui au-dessus à gauche. Si les nombres de la ligne $n-1$ correspondent aux $\binom{n-1}{k}$, alors ceux de la ligne du dessous correspondront également, via la formule de Pascal :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \binom{n-1}{k-1} & + & \binom{n-1}{k} \\ & & = \\ & & \binom{n}{k} \end{array}}$$

C'est une sorte de raisonnement par récurrence : la correspondance entre les termes du triangle de Pascal et les $\binom{n}{k}$ « se propage de ligne en ligne ».

Exercice 69 Le sélectionneur choisit 10 joueurs de champ parmi 17, puis 1 gardien parmi 3 ; il a donc

$$\binom{17}{3} \times \binom{3}{1} = 680 \times 3 = 2\,040 \text{ équipes possibles.}$$

Exercice 70 Il faut choisir 2 moniteurs parmi 5, puis 10 enfants parmi 40. Il y a donc

$$\binom{5}{2} \times \binom{40}{10} \text{ groupes possibles}$$

(la valeur explicite est entre 8 et 9 milliards).

Exercice 71 On écrit les formules, mais on ne fait pas les calculs explicites (sans grand intérêt mathématique à ce stade du cours).

1. Il y a $\binom{32}{5}$ mains possibles.
2. La probabilité qu'une main contienne :
   - exactement 3 dames est
   $$\frac{\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$$
   (on choisit 3 dames parmi 4, puis 2 cartes parmi les 28 autres) ;
   - trois cœurs et deux carreaux est
   $$\frac{\binom{8}{3} \times \binom{8}{2}}{\binom{32}{5}}$$
   (on choisit 3 cœurs parmi 8, puis 2 carreaux parmi 8) [5] ;
   - exactement un roi et deux valets est
   $$\frac{\binom{4}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{2}}{\binom{32}{5}}$$
   (on choisit 1 roi parmi 4, puis 2 valets parmi 4 ; et enfin 2 cartes parmi les 24 autres).

Exercice 72 1. (a) Le recrutement de 3 candidats peut se faire de $\binom{8}{3} = 56$ façons possibles.

(b) Le recrutement de 7 candidats peut se faire de $\binom{8}{7} = 8$ façons possibles.

(c) On peut recruter entre 0 et 8 candidats, donc en raisonnant comme dans les questions 1 et 2, on voit qu'il y a

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$$

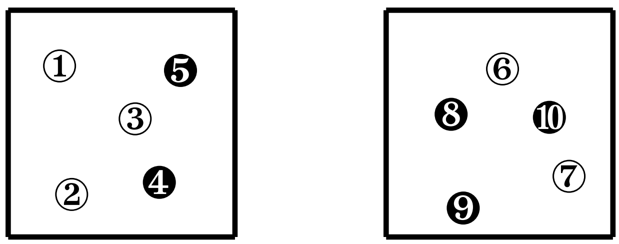
recrutements différents possibles.

5. On pourrait multiplier par $\binom{16}{0}$ au numérateur, puisqu'on ne choisit aucune carte parmi les piques et les trèfles. Bien sûr, cela ne changerait rien à la réponse, puisque $\binom{16}{0} = 1$.

(d) Chaque candidat est soit accepté (A), soir refusé (R). On peut donc assimiler le recrutement à une liste de 8 éléments à choisir parmi A/R. Ainsi y a-t-il
$$2^8 = 256$$
recrutements différents possibles (nombre de 2-listes d'un ensemble à 8 éléments) [6].

2. Soit $n \geq 1$. On imagine n candidats au lieu 8 et on raisonne comme dans la question 1 : le nombre de recrutements différents possibles est
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$
Avec le symbole $\sum$, cette formule (fort connue) se réécrit
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
(On vérifie sans peine qu'elle est également vraie lorsque $n = 0$.)

Exercice 73



U_1 U_2

- Il y a
$$\binom{5}{2} \times \binom{5}{2} = 10 \times 10 = 100$$
tirages possibles (puisqu'on choisit 2 des 5 boules de l'urne U_1, 2 des 5 boules de l'urne U_2).
- Pour avoir 2 boules blanches il faut, au choix :
  — Tirer 2 blanches et 0 noire dans l'urne U_1, 0 blanche et 2 noires dans l'urne U_2. Le nombre de façons différentes de faire ce tirage est
$$\binom{3}{2} \times \binom{2}{0} \times \binom{2}{0} \times \binom{3}{2} = 3 \times 1 \times 1 \times 3 = 9.$$
  — Tirer 1 blanche et 1 noire dans l'urne U_1, 1 blanche et 1 noire dans l'urne U_2. Le nombre de façons différentes de faire ce tirage est
$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 36.$$
  — Tirer 0 blanche et 2 noires dans l'urne U_1, 2 blanches et 0 noire dans l'urne U_2. Le nombre de façons différentes de faire ce tirage est
$$\binom{3}{0} \times \binom{2}{2} \times \binom{2}{2} \times \binom{3}{0} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1.$$
- Conclusion : $P(A) = \frac{9+36+1}{100} = 0,46$.

6. Le lecteur qui n'est pas convaincu peut faire un arbre.

4 Limites de suites

Exercice 74 1. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{n\to+\infty} 3 & = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} & = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = 3+0 = 3.$$

On s'autorise à aller un peu plus vite : on écrit simplement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3+0 = 3.$$

2. On écrit $v_n = 4 - \dfrac{1}{n^2} = 4 - \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n}$. On a donc
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 4 - 0\times 0 = 4.$$

3. On écrit $w_n = \left(5+\dfrac{3}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = \left(5+3\times\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = (5+3\times 0)\,(2+0) = 10.$$

4. On écrit $x_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}} = \dfrac{1}{1+2\times\dfrac{1}{n}}$.

   On a donc
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{1+2\times 0} = 1.$$

5. On met n en facteur au numérateur et au dénominateur :

$$y_n = \frac{3n-5}{4n+1} = \frac{\cancel{n}\left(3-\frac{5}{n}\right)}{\cancel{n}\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3-5\times\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}}.$$

   On a donc
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{3-5\times 0}{4+0} = \frac{3}{4}.$$

Bilan : Pour calculer les limites, il suffit de faire apparaître des $\frac{1}{n}$ et de les remplacer par 0 lorsqu'on « passe à la limite ».

Exercice 75 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 6$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n - 4$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$. On admet qu'elle converge et on note ℓ sa limite.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \cdots)$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, \cdots)$ ont la même limite puisque les indices sont simplement décalés :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell,$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Par opération sur les limites, on peut « passer à la limite » dans la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n - 4 \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N},$$

donc
$$\ell = 0{,}6\ell - 4.$$

On résout cette équation :

$$\ell = 0{,}6\ell - 4 \iff \ell - 0{,}6\ell = -4 \iff 0{,}4\ell = -4 \iff \ell = \frac{-4}{0{,}4} \iff \ell = -10.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -10$.

Exercice 76 La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 = 20$ et de raison $q = -0{,}5$.

1. $v_0 = 20$; $v_1 = 20 \times (-0{,}5) = -10$; $v_2 = -10 \times (-0{,}5) = 5$; $v_3 = 5 \times (-0{,}5) = -2{,}5$; $v_4 = -2{,}5 \times (-0{,}5) = 1{,}25$.
2. On admet que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note ℓ sa limite.

   On « passe à la limite » dans la relation de récurrence : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = -0{,}5$, donc

   $$v_{n+1} = -0{,}5 \times v_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,;$$

   et donc

   $$\ell = -0{,}5 \times \ell.$$

   On résout :

   $$\ell = -0{,}5 \times \ell \iff \ell + 0{,}5\ell = 0 \iff 1{,}5\ell = 0 \iff \ell = \frac{0}{1{,}5} \iff \ell = 0.$$

   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 77

1. Il est clair que $0 \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 1$. Pour l'autre inégalité, on part de

   $$n + \sqrt{n} \geq n.$$

   Deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses, donc

   $$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}$$

   (⚠en prenant l'inverse, le sens de l'inégalité est renversé).
2. $0 \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$ et

   $$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \qquad , \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

   Donc d'après le théorème des gendarmes :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0.$$

Exercice 78 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}4n + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

   $$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}6u_0 + 0{,}4 \times 0 + 1 = 0{,}6 \times 1 + 0 + 1 = 1{,}6 \\ u_2 &= 0{,}6u_1 + 0{,}4 \times 1 + 1 = 0{,}6 \times 1{,}6 + 0{,}4 + 1 = 2{,}36 \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

   $$n \leq u_n \leq n+1.$$

   - **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

     $$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 1 \\ 0 & \leq u_0 \leq 0+1 \end{array}\right\} \implies \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

   - **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

     $$k \leq u_k \leq k+1.$$

> **Objectif**
>
> Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que
>
> $$k+1 \leq u_{k+1} \leq k+2.$$

On part de

$$k \leq u_k \leq k+1.$$

On multiplie par $0,6$:

$$k \times 0,6 \leq u_k \times 0,6 \leq (k+1) \times 0,6$$
$$0,6k \leq 0,6u_k \leq 0,6k+0,6$$

Puis on ajoute $0,4k+1$:

$$0,6k+0,4k+1 \leq 0,6u_k+0,4k+1 \leq 0,6k+0,6+0,4k+1$$
$$k+1 \leq 0,6u_k+0,4k+1 \leq k+1,6$$
$$k+1 \leq u_{k+1} \leq k+1,6$$

Or $k+1,6 \leq k+2$, donc la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \geq 1$. On reprend l'inégalité de la question précédente et on divise par n :

$$n \leq u_n \leq n+1$$
$$\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$$
$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1+\frac{1}{n}$$

On conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \qquad , \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1,$$

donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

Exercice 79 On veut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-3}{4} = +\infty$. On se donne pour cela un réel $M > 0$ et on écrit les équivalences :

$$\frac{n-3}{4} \geq M \iff n-3 \geq 4M \iff n \geq 4M+3.$$

Conclusion : quand n dépasse $4M+3$, $\frac{n-3}{4}$ dépasse M. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-3}{4} = +\infty$.

Exercice 80 Soit $M > 0$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $u_n \geq M$ à partir d'un certain rang N. On a donc $v_n \geq u_n \geq M$ à partir du rang N. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 81 Il est conseillé de calculer les premiers termes des suites pour se faire une idée des variations et de l'existence éventuelle d'un majorant ou d'un minorant. Cela permet ensuite de traiter les questions avec efficacité : si par exemple on a prouvé qu'une suite était croissante, alors on est certain (théorème du cours) qu'elle est minorée par son premier terme.

1. $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Une exponentielle est strictement positive, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \mathrm{e}^{-(n+1)} - \mathrm{e}^{-n} \\ &= \mathrm{e}^{-n-1} - \mathrm{e}^{-n} \\ &= \mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n} \times 1 \\ &= \underbrace{\mathrm{e}^{-n}}_{\oplus}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right)}_{\ominus} \end{aligned}$$

   Conclusion : $u_{n+1}-u_n \leq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle est majorée par son premier terme, $u_0 = \mathrm{e}^{-0} = 1$.

2. $v_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Un carré est positif, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
   - Soit $M > 0$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc

$$n > \sqrt{M} \implies n^2 > \sqrt{M}^2 \implies u_n > M.$$

   Le réel M ne peut donc être un majorant. Et comme cela est vrai quel que soit M, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} \\ &= \underbrace{2n+1}_{\oplus} \end{aligned}$$

   Conclusion : $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$w_{n+1} = \frac{w_n}{1+2w_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - L'énoncé nous dit d'admettre que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, donc elle est minorée par 0.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{w_n}{1+2w_n} - w_n \\ &= \frac{w_n}{1+2w_n} - \frac{w_n(1+2w_n)}{1+2w_n} \\ &= \frac{w_n}{1+2w_n} - \frac{w_n+2w_n^2}{1+2w_n} \\ &= \frac{\cancel{w_n} - \cancel{w_n} - 2w_n^2}{1+2w_n} \\ &= \frac{\overbrace{-2w_n^2}^{\ominus}}{\underbrace{1+2w_n}_{\oplus \text{ car } w_n \oplus}} \end{aligned}$$

   Conclusion : $w_{n+1} - w_n \leq 0$, donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - Comme $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle est majorée par son premier terme, $w_0 = 1$.

Exercice 82 La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice précédent est décroissante et minorée par 0. Or d'après le théorème de limite monotone, toute suite décroissante minorée converge, donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 83 La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $v_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n\times 2}{2^n\times 2} \\ &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\overbrace{-n+1}^{\ominus}}{\underbrace{2^{n+1}}_{\oplus}} \end{aligned}$$

Conclusion : $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et elle est clairement minorée par 0. D'après le théorème de limite monotone, toute suite décroissante minorée converge, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. De plus, comme elle est minorée par 0, sa limite ℓ est supérieure ou égale à 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times (n+1) \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times v_n.$$

3. On sait que :
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

   On « passe à la limite » dans l'égalité de la question précédente :
$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times v_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
   donc
$$\ell = \frac{1}{2} \times (1+0) \times \ell.$$
   On résout cette équation :
$$\ell = \frac{1}{2}\ell \iff \ell - \frac{1}{2}\ell = 0 \iff \frac{1}{2}\ell = 0 \iff \ell = 2 \times 0 \iff \ell = 0.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 84 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 10$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = 0,5u_n + 2$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété
$$4 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$
   - **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 10 \\ u_1 & = 0,5 \times 10 + 2 = 7 \\ 4 & \leq 7 \leq 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow 4 \leq u_1 \leq u_0 \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$
   - **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc
$$4 \leq u_{k+1} \leq u_k.$$

     Objectif

     Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que
$$4 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}.$$

     On part de
$$4 \leq u_{k+1} \leq u_k.$$
     On multiplie par $0,5$:
$$\begin{aligned} 4 \times 0,5 \leq u_{k+1} \times 0,5 \leq u_k \times 0,5 \\ 2 \leq 0,5u_{k+1} \leq 0,5u_k. \end{aligned}$$
     Puis on ajoute 2 :
$$\begin{aligned} 2+2 \leq 0,5u_{k+1} + 2 \leq 0,5u_k + 2 \\ 4 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}. \end{aligned}$$
     La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
   - **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. D'après la question précédente :

- $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $4 \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 4.

Or d'après le théorème de limite monotone, toute suite décroissante minorée converge, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et « on passe à la limite » dans la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 2 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\ell = 0,5\ell + 2.$$

On résout cette équation :

$$\ell = 0,5\ell + 2 \iff \ell - 0,5\ell = 2 \iff 0,5\ell = 2 \iff \ell = \frac{2}{0,5} \iff \ell = 4.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 85 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} - w_n = \left(w_n + \frac{1}{w_n}\right) - w_n = \underbrace{\frac{1}{w_n}}_{\oplus}.$$

$w_{n+1} - w_n \geq 0$, donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc d'après le théorème de limite monotone, il y a deux possibilités :
   - soit elle est majorée, et dans ce cas elle converge ;
   - soit elle n'est pas majorée, et dans ce cas elle a pour limite $+\infty$.

   Par conséquent, si (♣) n'est pas vraie (et donc que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas pour limite $+\infty$), elle converge vers une limite finie ℓ.

   De plus, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, $\ell \geq w_0 = 2$.

3. On « passe à la limite » dans la formule de récurrence :

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell}.$$

On résout cette équation :

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \iff 0 = \frac{1}{\ell} \iff 0 \times \ell = \frac{1}{\ell} \times \ell \iff \underbrace{0 = 1}_{\text{absurde}}.$$

Conclusion : il n'y a pas de solution, donc en supposant que (♣) est fausse, on aboutit à une absurdité. C'est donc que (♣) est vraie :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty.$$

Exercice 86 On détermine les limites des suites de terme général :

1. $u_n = 0,8^n + (-0,2)^n$.

$$\left.\begin{array}{lll} -1 < 0,8 < 1 & \Longrightarrow & \lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0 \\ -1 < -0,2 < 1 & \Longrightarrow & \lim\limits_{n\to+\infty} (-0,2)^n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(0,8^n + (-0,2)^n\right) = 0 + 0 = 0.$$

2. $v_n = 4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$-1 < \frac{2}{3} < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 4 - 3 \times 0 = 4.$$

3. $w_n = \frac{0,5^n - 1}{0,5^n + 1}$.

$$-1 < 0,5 < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{0,5^n - 1}{0,5^n + 1}\right) = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

4. $x_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

   Cette fois, on ne peut pas conclure directement, car $2>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. L'astuce consiste à mettre 2^n en facteur au numérateur et au dénominateur :
$$x_n = \frac{2^n-1}{2^n+1} = \frac{\cancel{2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\cancel{2^n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$
   On peut alors conclure :
$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \implies \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Exercice 87 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$v_n = u_n - 4$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= (0,5u_n + 2) - 4 && \text{(rel. réc. pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= 0,5u_n - 2 && \text{(calcul)}\\
&= 0,5\left(u_n - \frac{2}{0,5}\right) && \text{(factorisation)}\\
&= 0,5(u_n - 4) && \text{(calcul)}\\
&= 0,5v_n && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}
\end{aligned}$$
   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,5v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,5$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,5$, et $v_0 = u_0 - 4 = 10 - 4 = 6$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = v_0 \times q^n = 6 \times 0,5^n.$$
3. Enfin $v_n = u_n - 4$ donc
$$u_n = v_n + 4 = 6 \times 0,5^n + 4.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 \times 0,5^n + 4$.
$$-1 < 0,5 < 1 \implies \lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = 6\times 0 + 4 = 4.$$

Exercice 88

1. La zone grise fait $1/2$ disque, la zone quadrillée $1/4$ du disque, la zone hachurée $1/8$, la zone noircie $1/16$, etc. Si on continue indéfiniment, on obtiendra le disque entier, si bien que
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1,$$
   ou encore
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = 1.$$
   Dans les questions suivantes, on justifie ce résultat de façon rigoureuse.
2. Soit q un réel dans l'intervalle $]-1;1[$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\ ;$$
   on a donc
$$q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1.$$

Or

$$-1<q<1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} q^{n+1}=0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}-1\right)=\frac{0-1}{q-1}-1=\frac{-1}{q-1}-1,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(q+q^2+\cdots+q^n\right)=\frac{-1}{q-1}-1.$$

Remarque : Il est agréable de réécrire la réponse sous une forme un peu différente :

$$\frac{-1}{q-1}-1=\frac{-1}{q-1}-\frac{q-1}{q-1}=\frac{-1-(q-1)}{q-1}=\frac{-1-q+1}{q-1}=\frac{-q}{q-1}=\frac{-q\times(-1)}{(q-1)\times(-1)}=\frac{q}{1-q}.$$

3. On applique la formule de la question 2 à $q=\frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

On retrouve bien le résultat de la question 1.

Exercice 89 Nous rencontrons pour la première fois une boucle **Tant que**. Il est sûrement nécessaire de faire quelques rappels.

Programme

```
n=10
while n<=14:
        n=n+1
print(n)
```

Traduction en français

n = 10
Tant que n ≤ 14 :
    n = n + 1
afficher n

Explications

- Au départ, n = 10 ;
- Puis, tant que n ≤ 14, n augmente de 1.
- n prend donc successivement les valeurs 11, 12, 13, 14 et 15
- Lorsque n = 15, on sort de la boucle **Tant que**. La valeur affichée en sortie est 15 (valeur finale de n).

Tableau

Il est agréable d'expliquer avec un tableau :

Valeur de n	**Boucle à continuer ?** n≤14 ?
10	oui
10 + 1 = 11	oui
11 + 1 = 12	oui
12 + 1 = 13	oui
13 + 1 = 14	oui
14 + 1 = 15	non

Exercice 90

```
def div(x):
        while x>=1:
                x=x/2
        return x
```

⚠On s'arrête quand le résultat est strictement inférieur à 1, donc **on continue tant qu'il est supérieur ou égal à 1**.

Exercice 91 On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 84 : $u_0=10$ et $u_{n+1}=0,5u_n+2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a vu qu'elle était décroissante, et qu'elle convergeait vers 4.

Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned}
u_0 &= 10\\
u_1 &= 0,5\times 10+2=7\\
u_2 &= 0,5\times 7+2=5,5\\
u_3 &= 0,5\times 5,5+2=4,75\\
u_4 &= 0,5\times 4,75+2=4,375
\end{aligned}$$

On explique maintenant le programme avec un tableau :

Programme

```
def seuil():
        u=10
        n=0
        while u>=4.5:
                u=0.5*u+2
                n=n+1
        return n
```

Tableau

u	n	Boucle à continuer ? u≥4,5 ?
10 $\leftarrow u_0$	0	oui
$0,5\times 10+2=7$ $\leftarrow u_1$	$0+1=1$	oui
$0,5\times 7+2=5,5$ $\leftarrow u_2$	$1+1=2$	oui
$0,5\times 5,5+2=4,75$ $\leftarrow u_3$	$2+1=3$	oui
$0,5\times 4,75+2=4,375$ $\leftarrow u_4$	$3+1=4$	non

Conclusion : la valeur en sortie est n = 4. C'est l'indice du premier terme de la suite strictement inférieur à 4,5 :
- u_0, u_1, u_2 et u_3 sont supérieurs ou égaux à 4,5;
- u_4 est strictement inférieur à 4,5.

Il s'agit donc de déterminer l'indice (ou le rang) à partir duquel la suite descend en-dessous du seuil 4,5 – d'où le nom de la fonction.

Exercice 92 On reprend les idées de l'exercice précédent :

```
def seuil():
        somme=100
        annees=0
        while somme<200:
                somme=somme*1.5
                annees=annees+1
        return annees
```

Exercice 93

```
def syr(a):
        u=a
        L=[a]
        while u!=1:
                if u%2==0:
                        u=u/2
                else
                        u=3*u+1
                L.append(u)
        return L
```

Remarque : Quand on lance la fonction, on a une surprise désagréable : toutes les réponses apparaissent avec un chiffre après la virgule. Par exemple, **syr(26)** renvoie

[26.0 , 13.0 , 40.0 , 20.0 , 10.0 , 5.0 , 16.0 , 8.0 , 4.0 , 2.0 , 1.0]

Pour éviter cela, il faut remplacer l'avant-dernière ligne par

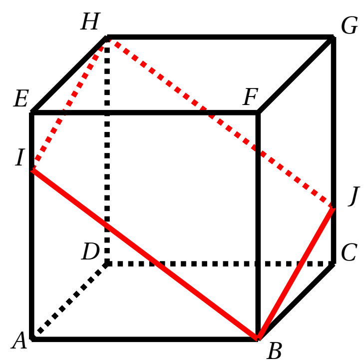
```
L.append(int(u))
```

Les élèves qui font (ou ont fait) la spécialité NSI reconnaîtront le type **int** (entier), alors que Python considère par défaut que a est de type **float** (réel).

5 Géométrie repérée dans l'espace

Exercice 94 1. Commençons par deux remarques concernant les figures en perspective cavalière :

- Dans une figure en perspective cavalière, on respecte la proportionnalité. Par exemple, un point situé au milieu d'un segment dans la réalité doit être représenté au milieu du segment sur la figure.
- Dans une figure en perspective cavalière, deux droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.



2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

$$B(1;0;0), \quad H(0;1;1), \quad I(0;0;\ 0{,}75), \quad J(1;1;\ 0{,}25).$$

- **Parallélogramme.** On prouve que deux vecteurs sont égaux :

$$\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} x_J - x_B \\ y_J - y_B \\ z_J - z_B \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0{,}25-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} x_H - x_I \\ y_H - y_I \\ z_H - z_I \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 1-0{,}75 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{IH}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IH}$, donc $BJHI$ est un parallélogramme.

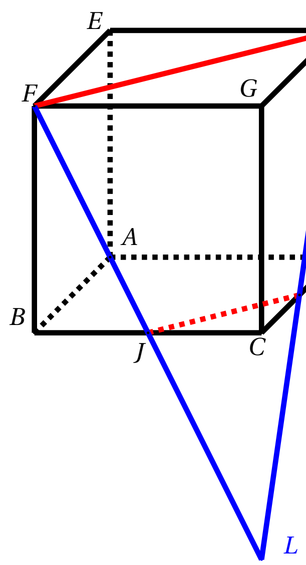
⚠La colinéarité des vecteurs ne suffit pas, il doivent être **égaux**.

- **Losange.** Un losange a 4 côtés égaux. Or

$$BI = \sqrt{(x_I - x_B)^2 + \left(y_I - y_B\right)^2 + (z_I - z_B)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (0{,}75-0)^2} = \sqrt{1{,}5625}$$
$$BJ = \sqrt{\left(x_J - x_B\right)^2 + \left(y_J - y_B\right)^2 + \left(z_J - z_B\right)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (0{,}25-0)^2} = \sqrt{1{,}0625}$$

Conclusion : $BJHI$ a deux côtés de longueurs différentes, donc **ce n'est pas** un losange.

Exercice 95 1.



2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

$$A(0;0;0),\quad B(1;0;0),\quad C(1;1;0),\quad D(0;1;0),$$
$$E(0;0;1),\quad F(1;0;1),\quad G(1;1;1),\quad H(0;1;1),$$
$$J(1;\ 0,5\ ;0),\quad K(0,5\ ;1;0).$$

3. On utilise la colinéarité :

$$\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} x_H - x_F \\ y_H - y_F \\ z_H - z_F \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_K - z_J \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 0,5-1 \\ 1-0,5 \\ 0-0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On voit que $\overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{JK}$, donc $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires ; et donc les droites (FH) et (JK) sont parallèles.

4. Les droites (FH) et (JK) étant parallèles, les quatre points F, H, J et K sont coplanaires (dans un même plan) ; et les droites (FJ) et (HK) aussi. Pour prouver qu'elles se coupent, il suffit donc de prouver qu'elles ne sont pas parallèles. On utilise à nouveau la colinéarité :

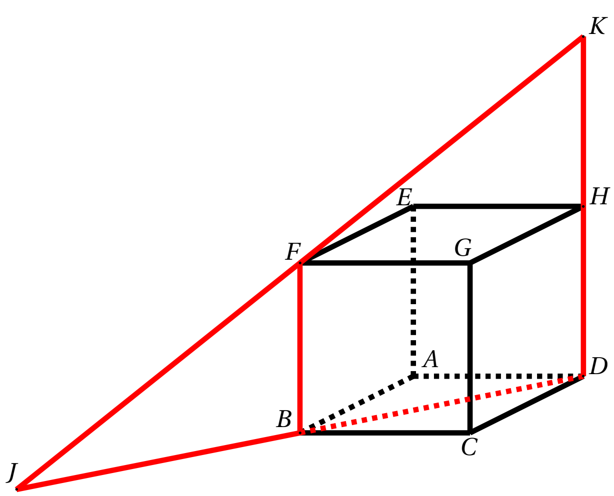
$$\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} x_J - x_F \\ y_J - y_F \\ z_J - z_F \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 0,5-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} x_K - x_H \\ y_K - y_H \\ z_K - z_H \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} 0,5-0 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{HK}$ ne sont pas colinéaires, puisque le tableau

0	0,5
0,5	0
−1	−1

n'est pas un tableau de proportionnalité. Les droites (FJ) et (HK) sont donc bien sécantes. On a noté L leur point d'intersection sur la figure.

Exercice 96 1.



2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

$$F(1;0;1),\quad K(0;1;2).$$

On détermine ensuite les coordonnées de J :

On sait que $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{DB}$. Or

$$\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} x_J - x_D \\ y_J - y_D \\ z_J - z_D \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} x_J - 0 \\ y_J - 1 \\ z_J - 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} x_J \\ y_J - 1 \\ z_J \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} x_B - x_D \\ y_B - y_D \\ z_B - z_D \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad 2\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$x_J = 2$$
$$y_J - 1 = -2 \iff y_J = -2+1 = -1$$
$$z_J = 0.$$

Conclusion : $J(2;-1;0)$.

3. On utilise la colinéarité :

$$\overrightarrow{KF}\begin{pmatrix} x_F - x_K \\ y_F - y_K \\ z_F - z_K \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{KF}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{KF}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} x_J - x_K \\ y_J - y_K \\ z_J - z_K \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On voit que $\overrightarrow{KJ} = 2\overrightarrow{KF}$, donc $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KF}$ sont colinéaires; et donc les points K, F et J sont alignés.

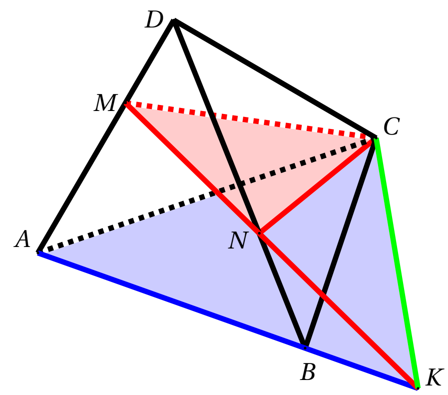
Remarque : On a tracé une partie de la figure en rouge pour mettre en évidence une configuration de Thalès.

Exercice 97 ⚠Sur la figure ci-contre, on représente les plans (ABC) et (MNC) par des triangles colorés. Mais ces plans « ne s'arrêtent pas aux triangles » , ils continuent indéfiniment dans toutes les directions.

Pour construire la droite d'intersection des plans (ABC) et (MNC), il suffit d'avoir deux points de cette droite; et donc deux points communs à chacun des deux plans. Le point **C**, évidemment, appartient à chacun des deux plans $(AB\mathbf{C})$ et $(MN\mathbf{C})$; il reste donc à trouver un deuxième point.

Les droites (MN) et (AB) sont toutes deux dans le plan (ABD) et elles ne sont pas parallèles d'après l'énoncé; elles se coupent donc en un point K. Ce point K appartenant à (AB), il appartient également au plan (ABC). Mais K appartient aussi à (MN), donc au plan (MNC). Finalement, K appartient à chacun des deux plans (ABC) et (MNC).

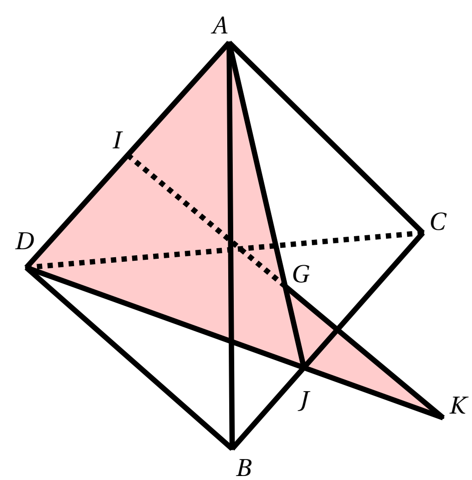
Chacun des points C et K appartient à la fois aux plans (ABC) et (MNC), donc l'intersection de ces deux plans est la droite (CK).



Exercice 98 Le point G est sur la face ABC, donc la droite (AG) coupe le segment $[BC]$ en un point J. Les cinq points A, I, D, G, J sont dans un même plan (le plan (ADJ)), coloré en rose sur la figure. Il s'ensuit que les droites (IG) et (DJ) sont dans ce plan. De plus, (IG) et (DJ) ne sont pas parallèles (sinon la droite (IG) serait parallèle à une droite du plan (BCD), et donc parallèle au plan (BCD) – ce que l'énoncé exclut). On en déduit que (IG) et (DJ) se coupent en un point K[7].

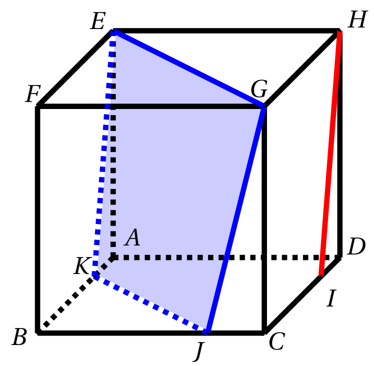
Par construction, le point K appartient à la droite (IG). Il appartient également à la droite (DJ), qui est incluse dans le plan (BCD) ; le point K appartient donc au plan (BCD).

Conclusion : le point K appartient à la droite (IG) et au plan (BCD), donc c'est leur point d'intersection.



7. Deux droites non parallèles de l'espace ne se coupent pas forcément. Ce qui fait que (IG) et (DJ) se coupent, c'est qu'elles sont coplanaires (=dans un même plan) et non parallèles.

Exercice 99 1.



2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

   $H(0;1;1)$, $I(0{,}25\,;1;0)$, $J(1;\ 0{,}75\,;0)$, $E(0;0;1)$, $G(1;1;1)$.

3. Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles, donc le plan (EGJ) (en bleu) les coupe suivant des segments parallèles. Pour construire la section du cube par le plan (EGJ), on trace donc la parallèle à (EG) passant par J. Elle coupe $[AB]$ en K.

   Le point K appartient au segment $[AB]$, donc il a des coordonnées de la forme $(x;0;0)$. Pour déterminer la valeur de x, on utilise la colinéarité :

$$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \\ z_G - z_E \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_K - z_J \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x-1 \\ 0-0{,}75 \\ 0-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} x-1 \\ -0{,}75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Or (EG) est parallèle à (JK), donc $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires, et le tableau

1	$x-1$
1	$-0{,}75$
0	0

   est un tableau de proportionnalité. On a donc

$$1 \times (-0{,}75) = 1 \times (x-1).$$

   On développe et on résout :

$$-0{,}75 = x-1 \iff x = -0{,}75+1 = 0{,}25.$$

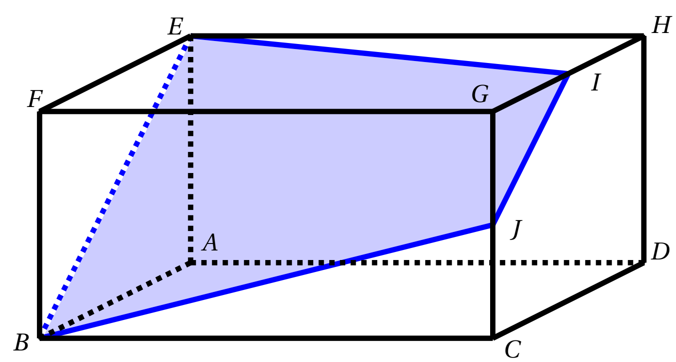
   Conclusion : $K(0{,}25\,;0;0)$.

4. Pour prouver que la droite (HI) est parallèle au plan (EGJ), il suffit de prouver qu'elle est parallèle à une droite de ce plan. La bonne candidate est la droite (EK), et l'outil est la colinéarité. On obtient (en accélérant un petit peu) :

$$\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

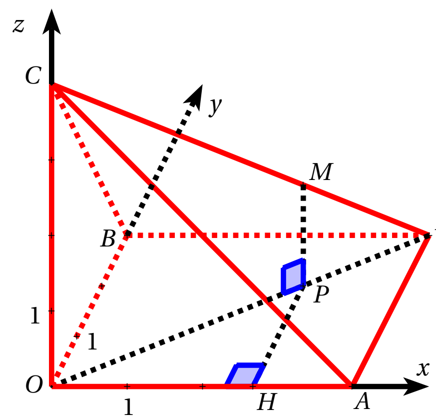
   Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont égaux (et donc colinéaires !), donc (HI) est parallèle à (EK) ; et donc au plan (EGJ).

Exercice 100 Les faces $ABFE$ et $DCGH$ sont parallèles, donc le plan (EBI) les coupe suivant des segments parallèles. Pour construire la section du parallélépipède par le plan (EBI), il suffit donc de tracer la parallèle à (EB) passant par I. Elle coupe $[GC]$ en J, et la section est le quadrilatère $EBJI$.



Exercice 101 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé de centre O, on considère les points $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$ et $D(4;3;0)$.

1.



On prend la même unité de longueur pour graduer les axes (Ox) et (Oz), qui sont vus de face, puis une unité arbitraire (plus petite) pour graduer l'axe (Oy), qui est une ligne de fuite.

2. On utilise la colinéarité :

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-0\\0-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}-0\\2-0\\\frac{4}{3}-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\2\\\frac{4}{3}-\frac{12}{3}\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\2\\-\frac{8}{3}\end{pmatrix}.$$

On voit que $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, donc M appartient au segment $[CD]$; et il est aux $2/3$ de ce segment en partant de C.

3.
   - La parallèle à (Oz) passant par M coupe $[OD]$ en P, dont les coordonnées sont $\left(\frac{8}{3};2;0\right)$.
   - La parallèle à (Oy) passant par P coupe $[OA]$ en H, dont les coordonnées sont $\left(\frac{8}{3};0;0\right)$.

Exercice 102

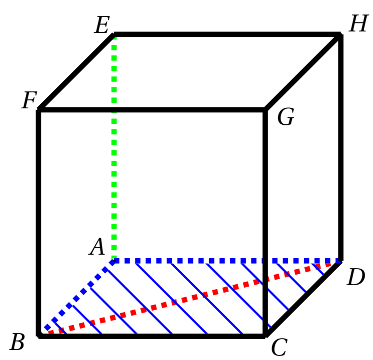


Figure pour les questions 1 et 2

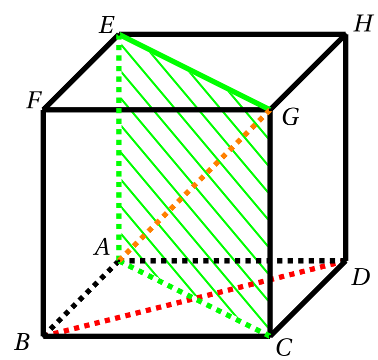


Figure pour les questions 3 et 4

1. La droite (AE) est orthogonale aux droites (AB) et (AD) (deux droites sécantes du plan (ABD)), car $ABFE$ et $ADHE$ sont deux carrés. La droite (AE) est donc orthogonale au plan (ABD).
2. La droite (AE) est orthogonale au plan (ABD), donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, elle est orthogonale à la droite (BD).
3. La droite (BD) est orthogonale à la droite (AE) d'après la question précédente, mais aussi à la droite (AC) (car (BD) et (AC) sont deux diagonales du carré $ABCD$).
   Conclusion : (BD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AEC), donc elle est orthogonale au plan (AEC).
4. Comme (BD) est orthogonale au plan (AEC), elle est orthogonale à toute droite de ce plan, et donc en particulier à la droite (AG).

Exercice 103 Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:

$$A(0;0;0),\quad B(1;0;0),\quad D(0;1;0),\quad G(1;1;1),$$

donc

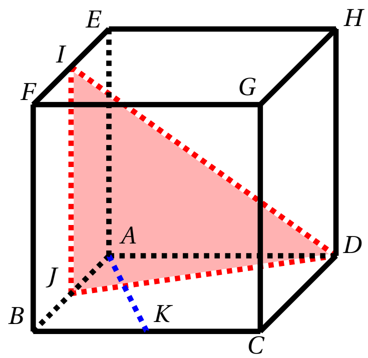
$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G-x_A\\y_G-y_A\\z_G-z_A\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D-x_B\\y_D-y_B\\z_D-z_B\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}x'\\y'\\z'\end{matrix}.$$

On calcule le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = xx' + yy' + zz' = 1\times(-1)+1\times 1+1\times 0 = 0.$$

On en déduit que (AG) est orthogonale à (BD).

Exercice 104 1.



2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

   $A(0;0;0)$, $K(1;\ 0,5\ ;0)$, $D(0;1;0)$, $I(0,5\ ;0;1)$, $J(0,5\ ;0;0)$.

   On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{DI}$, puis le produit scalaire $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{DI}$:

   $$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1-0\\0,5-0\\0-0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\0,5\\0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}0,5-0\\0-1\\1-0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}0,5\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

   donc

   $$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{DI} = 1\times 0,5+0,5\times(-1)+0\times 1 = 0.$$

   On en déduit que les droites (AK) et (DI) sont orthogonales.

3. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{DJ}$, puis le produit scalaire $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{DJ}$:

   $$\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}0,5-0\\0-1\\0-0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}0,5\\-1\\0\end{pmatrix}$$

   donc

   $$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{DJ} = 1\times 0,5+0,5\times(-1)+0\times 0 = 0.$$

   On en déduit que les droites (AK) et (DJ) sont orthogonales.

   Conclusion : (AK) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (DIJ) (les droites (DI) et (DJ)), donc (AK) est orthogonale au plan (DIJ).

Exercice 105 On reprend l'énoncé de l'exercice précédent. On calcule une mesure à 1° près de l'angle $\widehat{DIJ}$.

Pour cela, on utilise la formulation du produit scalaire avec le cosinus :

$$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IJ} = ID\times IJ\times\cos\widehat{DIJ}.$$

On calcule donc successivement (à ce stade de la leçon, on s'autorise à aller un peu plus vite) :

- $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-0,5\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$
- $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IJ} = -0,5\times 0+1\times 0+(-1)\times(-1) = 1.$
- $ID = \sqrt{(x_D-x_I)^2+\left(y_D-y_I\right)^2+(z_D-z_I)^2} = \sqrt{(0-0,5)^2+(1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2,25} = 1,5.$
- On trouve de même $IJ = 1$.

On remplace dans la formule :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IJ} &= ID\times IJ\times\cos\widehat{DIJ}\\ 1 &= 1,5\times 1\times\cos\widehat{DIJ}\\ \frac{1}{1,5} &= \cos\widehat{DIJ}\\ \frac{2}{3} &= \cos\widehat{DIJ}.\end{aligned}$$

On calcule le membre de gauche, puis on utilise la touche arccos de la calculatrice (attention, elle doit être en mode degrés). On obtient

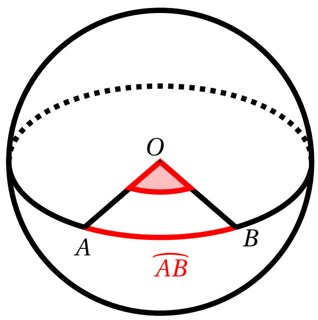
$$\widehat{DIJ} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)\approx 48°.$$

Exercice 106 1. Pour prouver que les points $A(2;4;5)$ et $B(6;3;0)$ sont situés sur une même sphère $\mathscr{S}$ de centre $O(0;0;0)$, il suffit de prouver que les longueurs OA et OB sont égales. C'est bien le cas puisque :

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + \left(y_A - y_O\right)^2 + (z_A - z_O)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{45},$$
$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + \left(y_B - y_O\right)^2 + (z_B - z_O)^2} = \sqrt{(6-0)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{45}.$$

2. Calculer la distance géodésique entre A et B (notée $\overparen{AB}$ dans la suite) revient à calculer l'angle $\widehat{AOB}$. En effet, si cet angle valait 180°, alors $\overparen{AB}$ serait le demi-périmètre de la sphère et on aurait $\overparen{AB} = \pi \times R = \pi \times \sqrt{45}$. Dans le cas général, il y a proportionnalité :

$\widehat{AOB}$	180°	à calculer
$\overparen{AB}$	$\pi \times \sqrt{45}$	?



Pour calculer $\widehat{AOB}$, on utilise le produit scalaire et on raisonne comme dans l'exercice précédent :

- $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 6 + 4 \times 3 + 5 \times 0 = 24.$
- $OA = OB = \sqrt{45}.$

On remplace dans la formule :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= OA \times OB \times \cos\widehat{AOB} \\
24 &= \sqrt{45} \times \sqrt{45} \times \cos\widehat{AOB} \\
\frac{24}{45} &= \cos\widehat{AOB} \\
\frac{8}{15} &= \cos\widehat{AOB}.
\end{aligned}$$

D'où $\widehat{AOB} = \arccos\left(\frac{8}{15}\right)$.

Finalement on obtient le tableau

$\widehat{AOB}$	180°	$\arccos\left(\frac{8}{15}\right)$
$\overparen{AB}$	$\pi \times \sqrt{45}$	?

Et donc :

$$\overparen{AB} = \pi \times \sqrt{45} \times \arccos\left(\frac{8}{15}\right) \div 180 \approx 6,76$$

(on prend garde à travailler en mode degrés et on n'arrondit qu'une seule fois, à la fin du calcul, pour éviter que des erreurs d'arrondis s'ajoutent).

6 Continuité et limites de suites

Exercice 107 La fonction f est définie sur $[0;2]$ par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

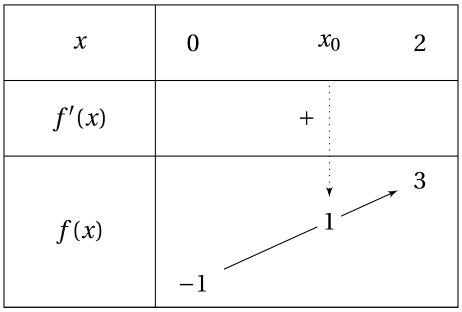
1. Pour tout $x \in [0;2]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x + 2 \times 1 - 0 = 3x^2 - 4x + 2.$$

La dérivée est du second degré, donc on utilise le discriminant :

- $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$.
- le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -8$.
- $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de racine.

$a = 3 \oplus$ donc f' est du signe $\oplus$ sur $[0;2]$:



- $f(0) = 0^3 - 2 \times 0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$
- $f(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 3$

2. - La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;2]$;
   - $f(0) = -1$, $f(2) = 3$;
   - $1 \in [-1;3]$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ a exactement une solution x_0 dans $[0;2]$.

   ⚠ À la 3[e] ligne « $1 \in [-1;3]$ », les extrémités -1 et 3 sont les images de 0 et 2. Ne **surtout pas écrire** « $1 \in [0;2]$ ».

3. - On commence par un tableau de valeurs sur $[0;2]$ avec un pas de 0,1. On obtient :

x	0	0,1	…	1,5	1,6	…	1,9	2
$f(x)$	-1	$-0,819$	…	0,875	1,176	…	2,439	3

   On en déduit :

$$1,5 < x_0 < 1,6.$$

   - Ensuite on fait un tableau de valeurs sur $[1,5 ; 1,6]$ avec un pas de 0,01. On obtient (en arrondissant les résultats au millième) :

x	1,50	1,51	…	1,54	1,55	…	1,59	1,60
$f(x)$	0,875	0,903	…	0,989	1,019	…	1,143	1,176

   On en déduit :

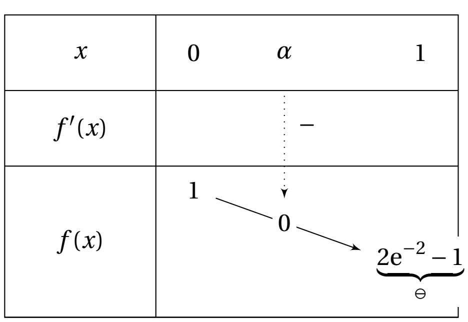
$$1,54 < x_0 < 1,55.$$

Exercice 108 1. La fonction f est définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = 2e^{-2x} - 1.$$

(a) On étudie les variations : pour tout $x \in [0;1]$,

$$f'(x) = 2 \times \left(-2e^{-2x}\right) - 0 = \underbrace{-4}_{\ominus}\,\underbrace{e^{-2x}}_{\oplus}.$$



- $f(0) = 2e^{-2\times 0} - 1 = 2e^0 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$
- $f(1) = 2e^{-2\times 1} - 1 = 2e^{-2} - 1 \approx -0,73$

- La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$;
- $f(0) = 1$, $f(1) = 2e^{-2} - 1$;
- $0 \in \left[2e^{-2} - 1;1\right]$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution α dans $[0;1]$.

(b) - On commence par un tableau de valeurs sur $[0;1]$ avec un pas de 0,1. On obtient (en arrondissant les résultats au millième) :

x	0	0,1	…	0,3	0,4	…	0,9	1
$f(x)$	1	0,637	…	0,098	$-0,101$	…	$-0,669$	$-0,729$

On en déduit :

$$0,3 < \alpha < 0,4.$$

- Ensuite on fait un tableau de valeurs sur $[0,3\ ;\ 0,4]$ avec un pas de $0,01$. On obtient (en arrondissant les résultats au millième) :

x	$0,30$	$0,31$	$\dots$	$0,34$	$0,35$	$\dots$	$0,39$	$0,40$
$f(x)$	$0,098$	$0,076$	$\dots$	$0,013$	$-0,007$	$\dots$	$-0,083$	$-0,101$

On en déduit :

$$0,34 < \alpha < 0,35.$$

(c) Reprenons le tableau de variations de f :

x	0		α		1
$f'(x)$			$-$		
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$\underbrace{2\mathrm{e}^{-2}-1}_{\ominus}$

On voit que :

- $f(\alpha) = 0$;
- f est strictement positive dans la zone rouge ;
- f est strictement négative dans la zone bleue.

On a donc le tableau de signe :

x	0		α		1
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. (a) La fonction g est définie sur $[0;1]$ par

$$g(x) = -\mathrm{e}^{-2x} - x + 2.$$

Pour tout $x \in [0;1]$:

$$g'(x) = -\left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right) - 1 + 0 = 2\mathrm{e}^{-2x} - 1.$$

La dérivée de g' est f, dont on a étudié le signe dans la question 1.(c). On peut donc construire le tableau de variations de g :

x	0		α		1
$g'(x) = f(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 1$ et $f(\alpha) = 0$, donc

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^{-2\alpha} - 1 &= 0 \\ 2\mathrm{e}^{-2\alpha} &= 1 \\ \mathrm{e}^{-2\alpha} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= -\mathrm{e}^{-2\alpha} - \alpha + 2 \\ &= -\frac{1}{2} - \alpha + 2 \\ &= \frac{3}{2} - \alpha \\ &= 1,5 - \alpha. \end{aligned}$$

On sait que $0,34 < \alpha < 0,35$, donc

$$\begin{aligned}
0,34\times(-1) > \alpha\times(-1) > 0,35\times(-1) & \qquad (\triangle\!\!!\, -1 \ominus\text{, donc les} < \text{deviennent des} >)\\
-0,34 > -\alpha > -0,35 & \\
1,5-0,34 > 1,5-\alpha > 1,5-0,35 & \qquad \text{(on ajoute 1,5)}\\
1,16 > g(\alpha) > 1,15. &
\end{aligned}$$

Exercice 109 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 3$$

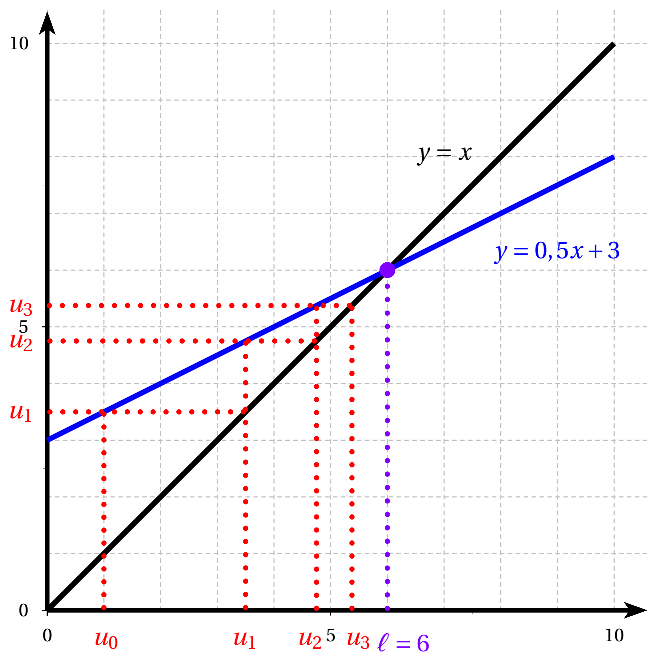
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.
$$\begin{aligned}
&u_0 = 1\\
&u_1 = 0,5u_0 + 3 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5\\
&u_2 = 0,5u_1 + 3 = 0,5 \times 3,5 + 3 = 4,75\\
&u_3 = 0,5u_2 + 3 = 0,5 \times 4,75 + 3 = 5,375
\end{aligned}$$

2. On trace la droite d'équation $y = 0,5x + 3$ (cf question suivante) à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs :

x	0	10
y	3	8

3.



4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété
$$u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$

   - **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
$$\left.\begin{aligned}
u_0 &= 1\\
u_1 &= 3,5\\
1 &\leq 3,5 \leq 6
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow u_0 \leq u_1 \leq 6 \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

   - **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc
$$u_k \leq u_{k+1} \leq 6.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6.$$

On part de

$$u_k \leq u_{k+1} \leq 6.$$

On multiplie par $0,5$:

$$\begin{aligned} u_k \times 0,5 &\leq u_{k+1} \times 0,5 \leq 6 \times 0,5 \\ 0,5u_k &\leq 0,5u_{k+1} \leq 3. \end{aligned}$$

Puis on ajoute 3 :

$$\begin{aligned} 0,5u_k + 3 &\leq 0,5u_{k+1} + 3 \leq 3 + 3 \\ u_{k+1} &\leq u_{k+2} \leq 6. \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. D'après la question précédente :
   - $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   - $u_n \leq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 6.

   Or d'après le théorème de limite monotone, toute suite croissante majorée converge, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et « on passe à la limite » dans la formule de récurrence (autre justification : « la fonction $f : x \mapsto 0,5x + 3$ est continue ») :

   $$u_{n+1} = 0,5u_n + 3 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

   donc

   $$\ell = 0,5\ell + 3.$$

   On résout cette équation :

   $$\ell = 0,5\ell + 3 \iff \ell - 0,5\ell = 3 \iff 0,5\ell = 3 \iff \ell = \frac{3}{0,5} \iff \ell = 6.$$

   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

Exercice 110 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0,5$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $x \in [0;1]$:

   $$f'(x) = -2x + 2 \times 1 = -2x + 2.$$

   On résout :

   $$-2x + 2 = 0 \iff -2x = -2 \iff x = \frac{-2}{-2} = 1.$$

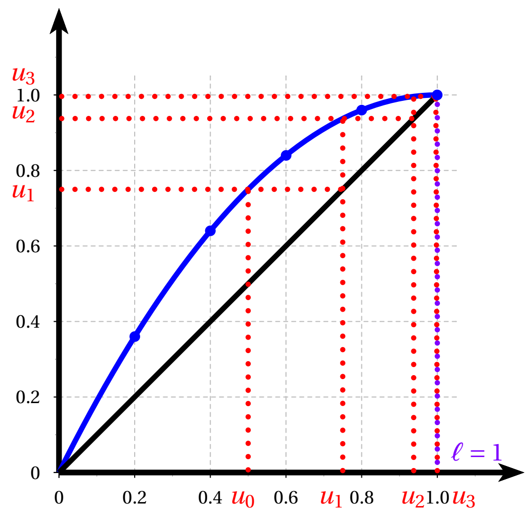
   On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variations de f :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

- $f(0) = -0^2 + 2 \times 0 = 0$
- $f(1) = -1^2 + 2 \times 1 = 1$

2. La fonction f est du second degré, donc sa courbe représentative est une parabole. On la trace (en bleu) à partir d'un tableau de valeurs :

x	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1
$f(x)$	0	$0,36$	$0,64$	$0,84$	$0,96$	1



($u_3 \approx 0,996$ et $\ell = 1$ se confondent presque.)

Parallèlement au graphique, calculons les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 0,5$$
$$u_1 = f(u_0) = f(0,5) = -0,5^2 + 2 \times 0,5 = 0,75$$
$$u_2 = f(u_1) = f(0,75) = -0,75^2 + 2 \times 0,75 = 0,9375$$
$$u_3 = f(u_2) = f(0,9375) = -0,9375^2 + 2 \times 0,9375 \approx 0,996$$

Insistons sur le fait – très important dans la suite de l'exercice – que $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$; et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On a donc aussi

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} u_0 & = 0,5 \\ u_1 & = 0,75 \\ 0 & \leq 0,5 \leq 0,75 \leq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1 \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1.$$

On part de

$$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1.$$

La fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$, donc

$$f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1).$$

Autrement dit :

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$$

(cf illustration avec le tableau de variations ci-contre), c'est-à-dire que la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

x	0	u_k	u_{k+1}	1
$f(x)$	0	u_{k+1}	u_{k+2}	1

N.B. $f(u_k) = u_{k+1}$, $\qquad f(u_{k+1}) = u_{k+2}$

Remarque : D'habitude, l'hérédité demande de manipuler les inégalités en faisant certaines opérations (multiplier, ajouter, etc.). Ici, toutes ces opérations sont « incluses dans les variations de f ». Rappelons-nous l'exercice précédent ($u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$) et sa preuve par récurrence : là aussi, on aurait pu raccourcir l'hérédité en invoquant la croissance de $x \mapsto 0,5x + 3$, plutôt que de multiplier par $0,5$, puis d'ajouter 3. C'est en fait le cas dans bon nombre de démonstrations par récurrence que nous avons faites jusqu'ici.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question précédente :
   - $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   - $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

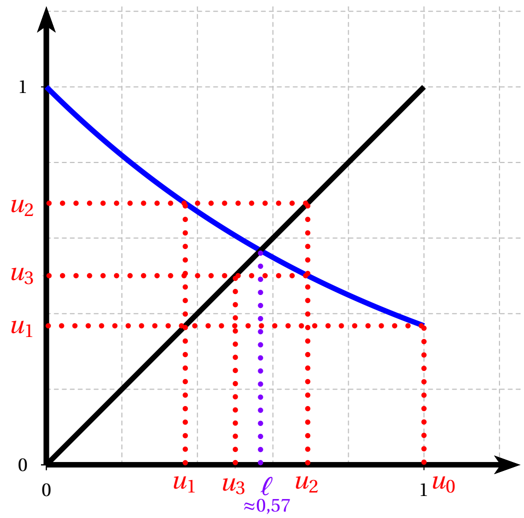
   Or d'après le théorème de limite monotone, toute suite croissante majorée converge, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, sa limite ℓ est supérieure ou égale à u_0 :
   $$\ell \geq 0,5.$$
5. On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et « on passe à la limite » dans la formule de récurrence (autre justification : « la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 2x$ est continue ») :
   $$u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
   donc
   $$\ell = -\ell^2 + 2\ell.$$
   On résout cette équation :
   $$\ell = -\ell^2 + 2\ell \iff \ell^2 + \ell - 2\ell = 0 \iff \ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(\ell - 1) = 0 \iff (\ell = 0 \text{ ou } \ell = 1).$$
   Or on a vu à la fin de la question précédente que $\ell \geq 0,5$, donc $\ell = 1$.
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 111 On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad g(x) = x - \mathrm{e}^{-x}.$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = f(u_n)$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On trace la courbe de la fonction f (en bleu) à partir d'un tableau de valeurs :

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$	1	$0,61$	$0,37$	$0,22$	$0,14$

(valeurs arrondies au centième)



2. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in [0;1]$.
   (a) On étudie les variations de g sur $[0;1]$: pour tout $x \in [0;1]$,
   $$g'(x) = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \underbrace{1+\mathrm{e}^{-x}}_{\oplus}.$$

x	0	α	1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\underbrace{1-\mathrm{e}^{-1}}_{\oplus}$

- $g(0) = 0 - \mathrm{e}^{-0} = 0 - 1 = -1$
- $g(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0,63$

   (b)
   - La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0;1]$;
   - $g(0) = -1$, $g(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$;
   - $0 \in \left[-1; 1-\mathrm{e}^{-1}\right]$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution α dans $[0;1]$.

   Il reste à prouver que $\alpha = \ell$. Pour cela, on se rappelle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction f étant continue sur $[0;1]$, on peut « passer à la limite » dans la formule de récurrence :
   $$u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
   donc
   $$\ell = f(\ell). \tag{1}$$
   Or $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, donc (1) ci-dessus se réécrit
   $$\ell = \mathrm{e}^{-\ell},$$
   ou encore
   $$\ell - \mathrm{e}^{-\ell} = 0. \tag{2}$$
   En se rappelant que $g(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$, on a donc $g(\ell) = 0$. Or l'unique solution dans $[0;1]$ de l'équation $g(x) = 0$ est α, donc $\ell = \alpha$.

   (c) Pour déterminer une valeur approchée de ℓ au centième, il y a deux méthodes possibles :
   - Calculer les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme la spirale « s'enroule autour de ℓ », il suffit que l'écart entre deux termes successifs de la suite soit inférieur à 0,01 pour avoir une valeur approchée de ℓ au centième. Avec la calculatrice, on trouve $u_8 \approx 0,576$ et $u_9 \approx 0,562$, donc $\ell \approx 0,57$.[8]
   - Utiliser la méthode du début de la leçon pour trouver une valeur approchée de α, solution de l'équation $g(x) = 0$[9] :

8. Il est certain que l'écart entre la valeur que nous venons de donner et la valeur réelle de ℓ est inférieur à 0,01, puisque $0,576 - 0,57 = 0,006$ et $0,57 - 0,562 = 0,008$.

9. On sait que $\alpha = \ell$, donc trouver une valeur approchée de ℓ revient à trouver une valeur approchée de α.

on commence par un tableau de valeurs pour g sur $[0;1]$ avec un pas de $0,1$. On obtient (en arrondissant les résultats au millième) :

x	0	$0,1$	$\dots$	$0,5$	$0,6$	$\dots$	$0,9$	1
$g(x)$	-1	$-0,804$	$\dots$	$-0,106$	$0,051$	$\dots$	$0,493$	$0,632$

On en déduit :

$$0,5 < \alpha < 0,6.$$

- Ensuite on fait un tableau de valeurs sur $[0,5\ ;\ 0,6]$ avec un pas de $0,01$. On obtient (en arrondissant les résultats au millième) :

x	$0,50$	$0,51$	$\dots$	$0,56$	$0,57$	$\dots$	$0,59$	$0,60$
$f(x)$	$-0,106$	$-0,090$	$\dots$	$-0,011$	$0,004$	$\dots$	$0,036$	$0,051$

On en déduit :

$$0,56 < \alpha < 0,57.$$

À nouveau, on peut écrire $\ell \approx 0,57$. [10]

Exercice 112 La partie entière d'un nombre réel x, notée $E(x)$, est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Commençons par quelques exemples : on calcule la partie entière de $2,5$, de $\frac{3}{4}$, de 4, puis de $-2,5$.

- $2 \leq 2,5 < 3$, donc le plus grand entier inférieur ou égal à $2,5$ est 2 :

$$E(2,5) = 2.$$

- $0 \leq \frac{3}{4} < 1$, donc le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{3}{4}$ est 0 :

$$E\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$$

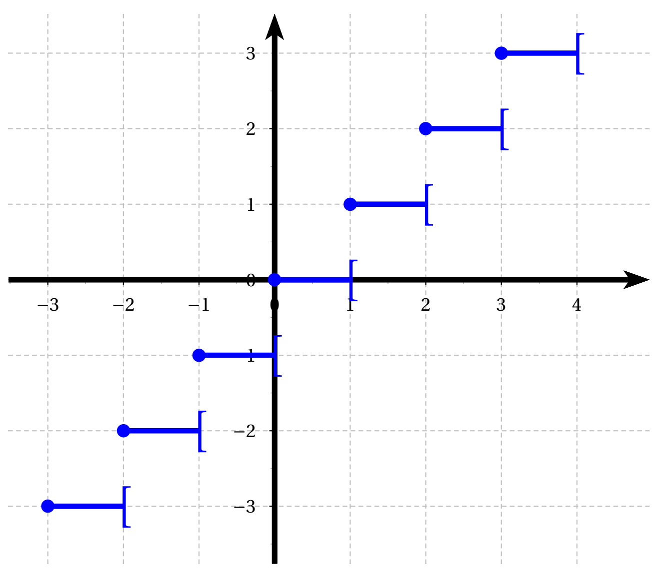
- $4 \leq 4 < 5$, donc le plus grand entier inférieur ou égal à 4 est 4 lui-même :

$$E(4) = 4.$$

- Le dernier exemple est piégeux : $-3 \leq -2,5 < -2$, donc le plus grand entier inférieur ou égal à $-2,5$ est -3 :

$$E(-2,5) = -3.$$

La fonction partie entière est une fonction « en escalier » : elle est constante sur chaque intervalle $[n; n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$, et elle fait des « sauts » de hauteur 1 à chaque point entier (où elle est donc discontinue).



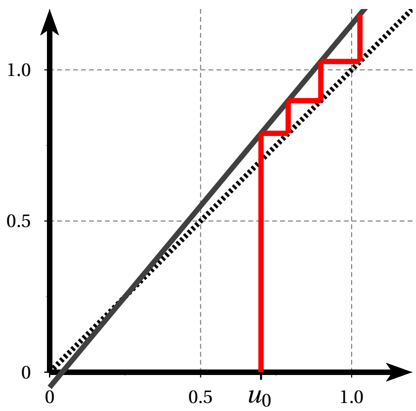
10. $\ell \approx 0,56$ conviendrait également.

Exercice 113 Sur chacune des figures ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f en traits pleins et la droite d'équation $y = x$ en pointillés. Dans chaque cas, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence

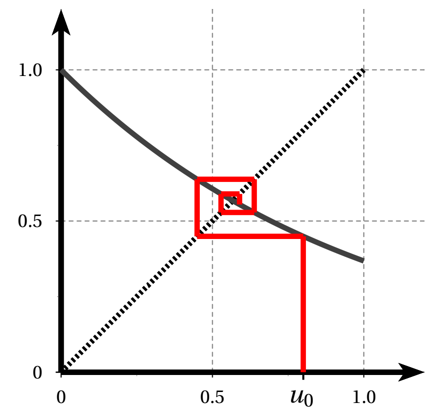
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

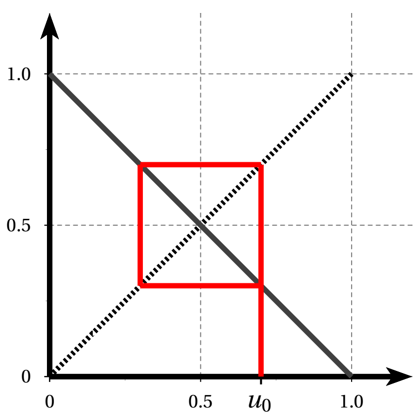
On allège un peu les constructions : on dessine des escaliers, des spirales, [...] en traits pleins, sans aller jusqu'aux axes et sans y faire apparaître u_0, u_1, etc.



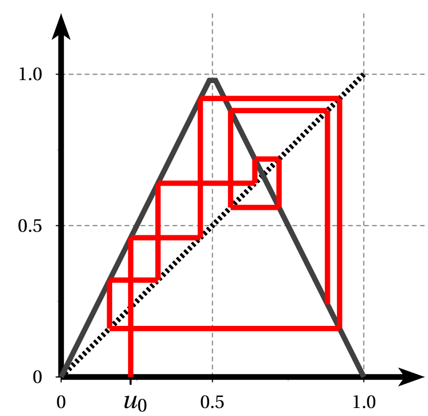
L'escalier va « monter vers l'infini » : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



La spirale s'enroule autour du point de coordonnées $(0,57\ ;\ 0,57)$ environ : $\lim_{n\to+\infty} u_n \approx 0,57$.



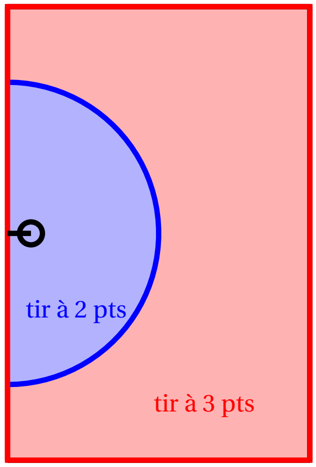
On revient au même endroit toutes les deux étapes, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.



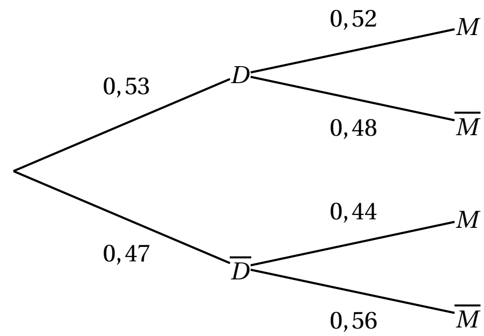
On observe un phénomène « chaotique ». La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

7 Variables aléatoires, loi binomiale

Exercice 114 1. On rappelle les zones de tir à 2 et 3 points :



On représente la situation par un arbre pondéré :



Remarque : $\overline{D}$ signifie « Stephen Curry tire à 3 points ».

2. La probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque est

$$P(D \cap M) = 0,53 \times 0,52 = 0,2756.$$

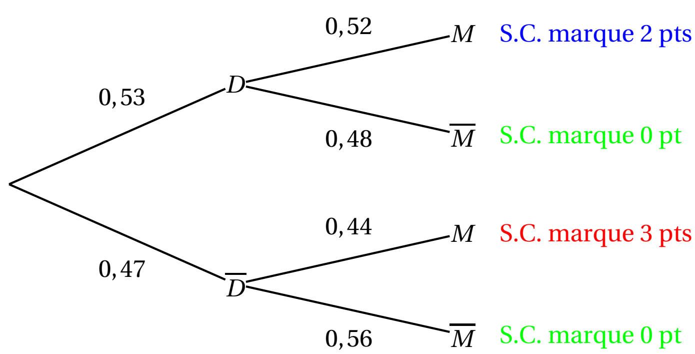
3. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que Stephen Curry marque est :

$$\begin{aligned} P(M) &= P(D \cap M) + P\left(\overline{D} \cap M\right) \\ &= 0,53 \times 0,52 + 0,47 \times 0,44 = 0,4824. \end{aligned}$$

4. Stephen Curry a marqué. La probabilité qu'il ait tiré à deux points est

$$P_M(D) = \frac{P(M \cap D)}{P(M)} = \frac{0,2756}{0,4824} \approx 0,57.$$

5. On reprend l'arbre pondéré de la question 1 et on indique à l'extrémité droite des branches le nombre de points marqués suivant la situation



- la probabilité que Stéphane Curry marque 3 pts est

$$0,47 \times 0,44 = 0,2068\,;$$

- la probabilité que Stéphane Curry marque 2 pts est

$$0,53 \times 0,52 = 0,2756$$

(on l'a déjà calculée dans la question 2) ;
- d'après la formule des probabilités totales, la probabilité que Stéphane Curry marque 0 pt est

$$0,53 \times 0,48 + 0,47 \times 0,56 = 0,5176.$$

Remarque : Pour le 3e calcul, on aurait pu utiliser le résultat de la question 3 et faire le calcul

$$1-0{,}4824=0{,}5176.$$

On aurait aussi pu calculer

$$1-0{,}2068-0{,}2756=0{,}5176.$$

La loi de X est donc donnée par le tableau :

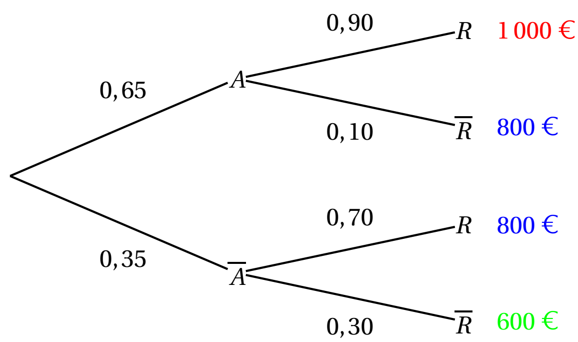
x	3	2	0
$P(X=x)$	0,2068	0,2756	0,5176

Enfin, l'espérance de X est

$$E(X)=0{,}2068\times 3+0{,}2756\times 2+0{,}5176\times 0=1{,}1716.$$

En moyenne, Stephen Curry marque 1,171 6 point par tir.

Exercice 115 1. On indique à l'extrémité droite des branches le coût des trajets (utile pour la question 3).



2. (a) La probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau est

$$P(A\cap R)=0,65\times 0,90=0,585.$$

(b) La probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est

$$P\left(A\cap\overline{R}\right)+P\left(\overline{A}\cap R\right)=0,65\times 0,10+0,35\times 0,70=0,31.$$

(c) On calcule d'abord $P(R)$: d'après la formule des probabilités totales,

$$P(R)=P\left(A\cap R\right)+P\left(\overline{A}\cap R\right)=0,65\times 0,90+0,35\times 0,70=0,83.$$

Le client a fait le retour en bateau. La probabilité qu'il ait aussi fait l'aller en bateau est

$$P_R(A)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{0,585}{0,83}\approx 0,705.$$

3. (a) On a déjà fait deux des trois calculs utiles dans les questions précédentes :

y	1 000	800	600
$P(Y=y)$	0,585	0,31	?

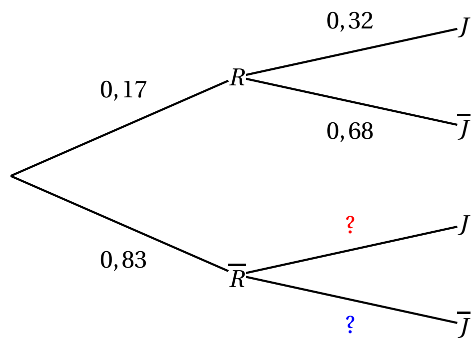
$$P(Y=600)=1-0,585-0,31=0,105.$$

(b) L'espérance mathématique de Y est

$$E(Y)=0,585\times 1000+0,31\times 800+0,105\times 600=896.$$

C'est la dépense moyenne des clients pour leurs transports du week-end.

Exercice 116 1. On construit l'arbre et on le complète à partir des données de l'énoncé :



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0{,}0544$.
3. L'énoncé donne $P(J) = 0,11$. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(J) &= P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right) \\ 0,11 &= 0{,}0544 + P\left(\overline{R} \cap J\right) \\ 0,11 - 0{,}0544 &= P\left(\overline{R} \cap J\right) \\ 0{,}0556 &= P\left(\overline{R} \cap J\right) \end{aligned}$$

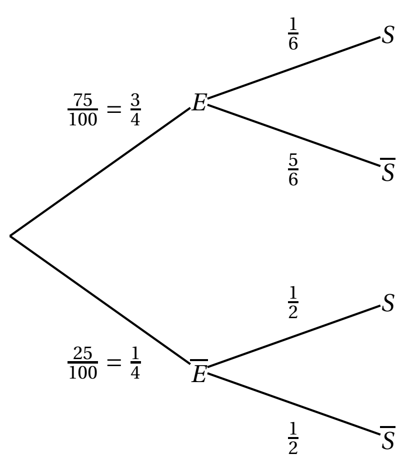
Conclusion : $P\left(\overline{R} \cap J\right) = 0{,}0556$.

4. La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est égale à la probabilité qu'un utilisateur non régulier soit un jeune. Cette proportion vaut donc

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P\left(\overline{R} \cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{0{,}0556}{0,83} \approx 0{,}0670.$$

C'est le point d'interrogation rouge de l'arbre pondéré du début.

Exercice 117 Il faut prendre l'initiative de nommer des événements et de construire un arbre pondéré. On pose ainsi :
- E : « le dé est équilibré »,
- $\overline{E}$: « le dé est pipé »,
- S : « on obtient 6 ».



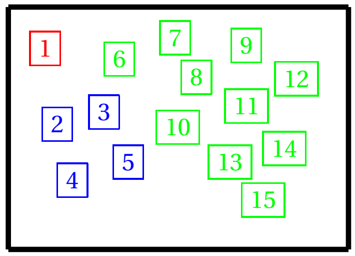
La probabilité qu'il faut calculer est $P_S\left(\overline{E}\right)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_S\left(\overline{E}\right) = \frac{P\left(\overline{E} \cap S\right)}{P(S)}.$$

Or $P\left(\overline{E}\cap S\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ et $P(S)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ (formule des probabilités totales), donc :

$$P_S\left(\overline{E}\right)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Exercice 118



1. (a) La probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair est $\frac{9}{15}$.
   (Billes concernées : $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{8}\boxed{10}\boxed{12}\boxed{14}$.)

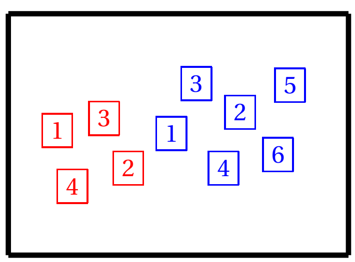
   Remarque : Si on note A : « le numéro est pair » et B : « la bille est bleue », alors on a calculé la probabilité de l'événement $A\cup B$. On aurait aussi pu utiliser la formule du cours de 2^de^ (pas franchement judicieuse ici, mais dont il faut se rappeler) :

   $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

   (b) Sachant que la bille tirée est verte, la probabilité qu'elle soit numérotée 7 est $\frac{1}{10}$.
   (Parmi les 10 boules vertes, une seule porte le numéro 7.)

2. • $G=5$ lorsque le joueur remporte 15 euros. Ce n'est possible que s'il tire la bille $\boxed{5}$ (puisque $3\times5=15$) ou la bille $\boxed{15}$.
   Conclusion : $P(G=5)=\frac{2}{15}$.
   • Si le joueur choisit une bille rouge, il ne remporte rien, donc $G=-10$. On a donc $P_R(G=0)=0$.
   • Il y a deux façons possibles d'avoir $G=-4$:
   — soit le joueur tire la bille $\boxed{2}$, et dans ce cas $G=3\times2-10=6-10=-4$;
   — soit le joueur tire la bille $\boxed{6}$, et dans ce cas $G=6-10=-4$.
   Donc sachant que $G=-4$ il y a une chance sur deux que la bille soit bleue, une chance sur deux qu'elle soit verte : $P_{(G=-4)}(V)=\frac{1}{2}$.

Exercice 119 ⚠J'ai remplacé le mot « pair » par le mot « impair » dans l'énoncé.



On note

- B : « les deux boules sont bleues »,
- I : « les deux boules portent un numéro impair ».

Il faut calculer $P_I(B)=\frac{P(B\cap I)}{P(I)}$. Comme le tirage des boules est simultané, l'utilisation d'un arbre pondéré n'est pas adaptée à la situation ; il faut utiliser des combinaisons pour comptabiliser les cas possibles et les cas favorables aux événements :

- Il y a $\binom{10}{2}=\frac{10\times9}{2}=45$ tirages possibles.
- L'événement I est réalisé quand on tire 2 des 5 boules portent un numéro impair $\boxed{1}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}$, donc il y a $\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2}=10$ cas favorables à I.
- L'événement $B\cap I$ est réalisé quand on tire deux boules parmi $\boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}$, donc il y a $\binom{3}{2}=\frac{3\times2}{2}=3$ cas favorables à $B\cap I$.

On en déduit $P(I)=\frac{10}{45}$ et $P(B\cap I)=\frac{3}{45}$, puis

$$P_I(B)=\frac{P(B\cap I)}{P(I)}=\frac{\frac{3}{45}}{\frac{10}{45}}=\frac{3}{45}\times\frac{45}{10}=\frac{3}{10}.$$

Exercice 120 1. On répète 10 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $0,04$, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$, $p=0,04$. On a donc $E(X)=n\times p=10\times 0,04=0,4$.

⚠ $p=0,04$ et non $0,96$ (X désigne le nombre d'adresses **illisibles**).

2. $P(X=2)=\binom{10}{2}\times 0,04^2\times(1-0,04)^{10-2}=45\times 0,04^2\times 0,96^8\approx 0,052$.

Schéma pour retenir :

nb adresses lues — proba adresse illisible — nb adresses lisibles

$$P(X=2)=\binom{10}{2}\times 0,04^2\times 0,96^8$$

nb adresses illisibles — proba adresse lisible

3. La probabilité qu'au moins une adresse soit illisible est

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\underbrace{\binom{10}{0}}_{=1}\times\underbrace{0,04^0}_{=1}\times(1-0,04)^{10-0}=1-0,96^{10}\approx 0,335.$$

Exercice 121 1. Pour chaque question, l'élève a une chance sur 4 de donner la bonne réponse, 3 chances sur 4 de donner une mauvaise réponse.
On répète 10 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}=0,25$, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$, $p=0,25$.

2. • A est réalisé quand $X=3$, donc

$$P(A)=P(X=3)=\binom{10}{3}\times 0,25^3\times(1-0,25)^{10-3}=120\times 0,25^3\times 0,75^7\approx 0,250.$$

• On utilise l'événement contraire :

$$P(B)=P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\underbrace{\binom{10}{0}}_{=1}\times\underbrace{0,25^0}_{=1}\times 0,75^{10-0}=1-0,75^{10}\approx 0{,}944.$$

3. L'élève a au moins une bonne réponse. La probabilité qu'il en ait exactement trois est

$$P_{(X\geq 1)}(X=3)=\frac{P((X\geq 1)\cap(X=3))}{P(X\geq 1)}.$$

Ici, il y a une petite subtilité : l'événement $(X\geq 1)\cap(X=3)$ est égal à $(X=3)$. En effet, dire que X est à la fois plus grand que 1 et égal à 3 revient simplement à dire qu'il est égal à 3. On a donc finalement

$$P_{(X\geq 1)}(X=3)=\frac{P(X=3)}{P(X\geq 1)}\approx\frac{0,250}{0,944}\approx 0,265.$$

Exercice 122 1. On répète 100 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=100$, $p=\frac{1}{10}=0,1$.

D'après le cours :

$$E(X)=n\times p=100\times 0,1=10.$$

2. À l'aide de la calculatrice, on obtient $P(5\leq X\leq 15)\approx 0,936$.

3. On cherche par tâtonnement, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier naturel k tel que

$$P(X > k) \leq 0,01.$$

C'est très rapide avec une NUMWORKS, un peu moins avec les CASIO et les TI. Une méthode qui fonctionne quel que soit le modèle consiste à utiliser l'événement contraire :

$$P(X > k) \leq 0,01 \iff P(X \leq k) \geq 0,99.$$

Par tâtonnement, on trouve

$$P(X \leq 17) = 0,989\cdots \qquad \text{et} \qquad P(X \leq 18) = 0,995\cdots,$$

donc le plus petit entier k qui convienne est 18.

Exercice 123 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p = 0,8$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$P(X \geq 35) \approx 0,969$$
$$P(X \geq 40) \approx 0,584.$$

On raisonne comme dans l'exercice 121 : l'événement $(X \geq 35) \cap (X \geq 40)$ est égal à $(X \geq 40)$, donc

$$P_{(X\geq 35)}(X \geq 40) = \frac{P((X \geq 35) \cap (X \geq 40))}{P(X \geq 35)} = \frac{P(X \geq 40)}{P(X \geq 35)} \approx \frac{0,584}{0,969} \approx 0,603.$$

Exercice 124 On note X le nombre de 6. On répète n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$, donc X suit la loi binomiale de paramètres n, $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité de faire au moins un 6 est

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^0}_{=1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-0} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Exercice 125 1. (a) On répète 5 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre 0,103, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$, $p = 0,103$.

(b) L'espérance de X est

$$E(X) = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515.$$

(c) La probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \underbrace{\binom{5}{0}}_{=1} \times \underbrace{0,103^0}_{=1} \times (1 - 0,103)^{5-0} = 1 - 0,897^5 \approx 0{,}419.$$

2. Si on interroge n athlètes, la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif est

$$1 - 0,897^n$$

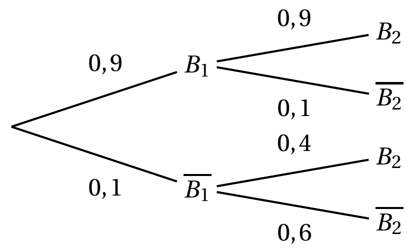
(c'est le même calcul que dans la question précédente).

On cherche donc par tâtonnement la plus petite valeur de n telle que $1 - 0,897^n \geq 0,75$: on trouve $1 - 0,897^{12} \approx 0,729$ et $1 - 0,897^{12} \approx 0,757$.

Conclusion : il faut contrôler au moins 13 athlètes pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 126 1. Au départ, la trottinette est en bon état, donc la probabilité qu'elle le soit encore après 1 semaine est $p_1 = 0,9$.

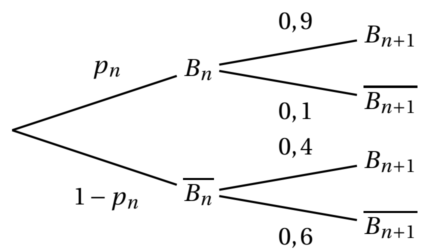
Pour calculer p_2, on utilise un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,85.$$

2. La méthode de la question 1 se généralise : la probabilité de l'événement B_n est p_n, celle de l'événement contraire $\overline{B_n}$ est $1 - p_n$. On a donc l'arbre :



3. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\ &= P(B_n \cap B_{n+1}) + P\left(\overline{B_n} \cap B_{n+1}\right) \\ &= p_n \times 0,9 + \left(1 - p_n\right) \times 0,4 \\ &= 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n \\ &= 0,5p_n + 0,4. \end{aligned}$$

4. On admet que la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note ℓ sa limite. On « passe à la limite » dans la formule de récurrence :

$$p_{n+1} = 0,5u_n + 0,4 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\ell = 0,5\ell + 0,4.$$

On résout cette équation :

$$\ell = 0,5\ell + 0,4 \iff \ell - 0,5\ell = 0,4 \iff 0,5\ell = 0,4 \iff \ell = \frac{0,4}{0,5} \iff \ell = 0,8.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,8$.

Interprétation : À long terme, la probabilité qu'une trottinette prise au hasard soit en bon état est égale à 80 %. Autre façon de dire : sur le long terme, 80 % des trottinettes seront en bon état de fonctionnement.

Exercice 127 1. (a) En 2024, 85 % des 1 700 sportifs qui sont dans le club A en 2023 restent dans ce club, et 10 % des 1 300 sportifs qui sont dans le club B en 2023 quittent ce club pour adhérer au club A. Il y a donc

$$a_1 = 0,85 \times 1700 + 0,10 \times 1300 = 1575$$

membres dans le club A en 2024.

De plus, le nombre total de membres dans le groupe n'évolue pas au cours des années, car les membres se contentent de changer de club (il n'y a aucune arrivée, ni aucun départ) ; il y a donc toujours $1700 + 1300 = 3000$ membres au total. Par conséquent, il y a

$$b_1 = 3000 - 1575 = 1425$$

membres dans le club B en 2024.

(b) On reprend l'argument que l'on a utilisé juste au-dessus : le nombre total de membres n'évolue pas au cours du temps, donc pour tout entier naturel n,

$$a_n + b_n = 3\,000.$$

(c) D'une année à la suivante :
- 85 % des membres du club A y restent ;
- 10 % des membres du club B adhèrent au club A.

On a donc

$$a_{n+1} = 0,85a_n + 0,10b_n.$$

Or on a vu que $a_n + b_n = 3\,000$, donc $b_n = 3\,000 - a_n$ et

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0,85a_n + 0,10b_n \\ & 0,85a_n + 0,10\,(3\,000 - a_n) \\ &= 0,85a_n + 0,10 \times 3\,000 - 0,10a_n \\ &= 0,75a_n + 300. \end{aligned}$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700.$$

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 & = 1\,700 \\ a_1 & = 1\,575 \\ 1\,200 & \leq 1\,575 \leq 1\,700 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1\,200 \leq a_1 \leq a_0 \leq 1\,700 \Longrightarrow \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$1\,200 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1\,700.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$1\,200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1\,700.$$

On part de

$$1\,200 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1\,700.$$

On multiplie par $0,75$:

$$\begin{gathered} 1\,200 \times 0,75 \leq a_{k+1} \times 0,75 \leq a_k \times 0,75 \leq 1\,700 \times 0,75 \\ 900 \leq 0,75a_{k+1} \leq 0,75a_k \leq 1\,275. \end{gathered}$$

Puis on ajoute 300 :

$$\begin{gathered} 900 + 300 \leq 0,75a_{k+1} + 300 \leq 0,75a_k + 300 \leq 1\,275 + 300 \\ 1\,200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1\,575. \end{gathered}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) D'après la question précédente :
- $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $a_n \geq 1\,200$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 200.

Or toute suite décroissante minorée converge, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(c) On note ℓ la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et « on passe à la limite » dans la formule de récurrence :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\ell = 0,75\ell + 300.$$

On résout cette équation :

$$\ell = 0,75\ell + 300 \iff \ell - 0,75\ell = 300 \iff 0,25\ell = 300 \iff \ell = \frac{300}{0,25} \iff \ell = 1200.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1200$.

3. (a) On complète la fonction **seuil** afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil():
        A=1700
        n=0
        while A>=1280:
                A=0.75*A+300
                n=n+1
        return n
```

(b) Il y a essentiellement deux méthodes pour déterminer la valeur renvoyée par la fonction : soit on rentre le programme en machine, soit on calcule les termes successifs de la suite.

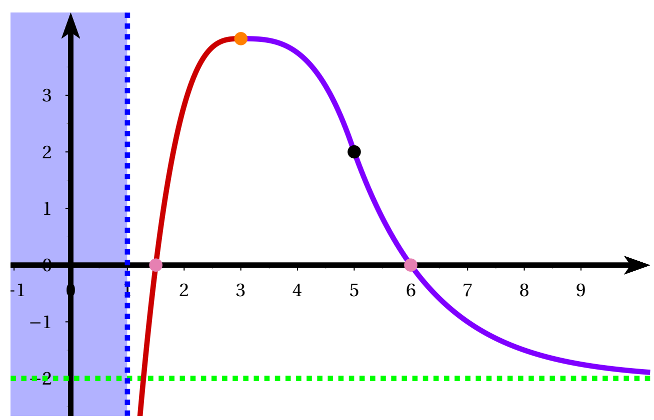
Avec la deuxième méthode, on obtient $a_6 \approx 1289$ et $a_7 \approx 1267$. C'est donc après 7 ans qu'il y aura moins de 1 280 inscrits dans le club A – et donc la valeur renvoyée par la fonction est « 7 ».

8 Limites de fonctions

Exercice 128 On trace un exemple de courbe correspondant aux conditions de l'énoncé. On indique par une couleur quelle condition correspond à quel élément du graphique.

1. La fonction h est définie sur $]1;+\infty[$.
   (a) La droite d'équation $y=-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   (b) La droite d'équation $x=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   (c) h est strictement croissante sur $]1;3]$ et strictement décroissante sur $[3;+\infty[$.
   (d) $h(3)=4$.
   (e) Les solutions de l'équation $h(x)=0$ sont 1,5 et 6.
   (f) Le point de coordonnées $(5;2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

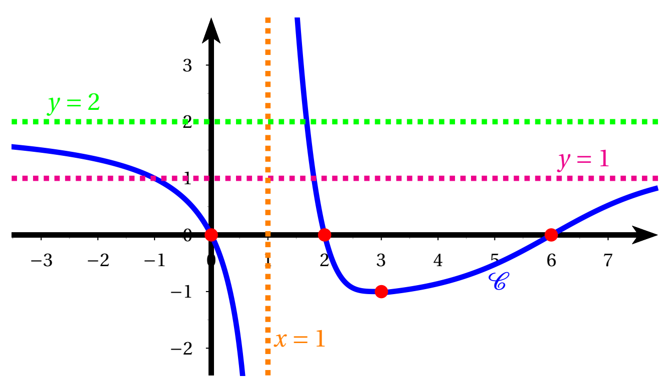
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.



Exercice 129

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$i(x)$	2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	1

- la droite d'équation $y=1$ (en rose) est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- la droite d'équation $y=2$ (en vert) est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
- la droite d'équation $x=1$ (en orange) est asymptote à $\mathscr{C}$.



Exercice 130 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2+3\times\frac{1}{x}\right) = 2+3\times 0 = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right) & = 1-0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) & = 1+0 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1\times 1 = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to0,\ x>0} \left(1-\frac{1}{x}\right) = & \text{« } 1-(+\infty) \text{ »} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0,\ x>0} \left(1+\frac{1}{x}\right) = & \text{« } 1+(+\infty) \text{ »} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to0,\ x>0} \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) = \text{« } (-\infty)\times(+\infty) \text{ »} = -\infty.$$

4.

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x & = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x & = \text{« } 3\times(-\infty) \text{ »} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 & = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^x + 3x - 1\right) = \text{« } 0+(-\infty)-1 \text{ »} = -\infty.$$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x) = \text{« } 1+(-\infty) \text{ »} = -\infty$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+x} = \text{« } \frac{2}{-\infty} \text{ »} = 0.$$

6. $\lim\limits_{x\to0,\ x<0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc

$$\lim_{x\to0,\ x<0} \left(5+\frac{1}{x^2}\right) = \text{« } 5+(+\infty) \text{ »} = +\infty.$$

7.

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} & = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x & = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(-x)}{x} = \text{« } \frac{0}{+\infty} \text{ »} = 0.$$

Exercice 131 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Remarque : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ est l'ensemble de tous les nombres sauf 0 – ici 0 est « valeur interdite ».

1. On peut écrire $f(x) = 1 + 4 \times \frac{1}{x}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 1 + 4\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}.$$

Remarque : On aurait pu s'arrêter à $1-\frac{4}{x^2}$, mais c'eût été malcommode pour étudier le signe.

2. Les racines de x^2-4 sont évidentes : ce sont $x=2$ et $x=-2$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

3. Les bornes de l'ensemble de définition sont $-\infty$, 0 et $+\infty$. Cela fait quatre limites à calculer (car il faut distinguer les limites à gauche et à droite en 0). Pour les calculer, on écrit $f(x) = x + 4\times\frac{1}{x}$.

   •

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to-\infty} x & = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} & = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(x + 4\times\frac{1}{x}\right) = \text{« } -\infty + 4\times 0 \text{ »} = -\infty.$$

   Cette limite ne permet de mettre aucune asymptote en évidence.

- $$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty} x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} & = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(x+4\times\frac{1}{x}\right) = \text{« } +\infty+4\times 0 \text{ »} = +\infty.$$

  Cette limite ne permet de mettre aucune asymptote en évidence.

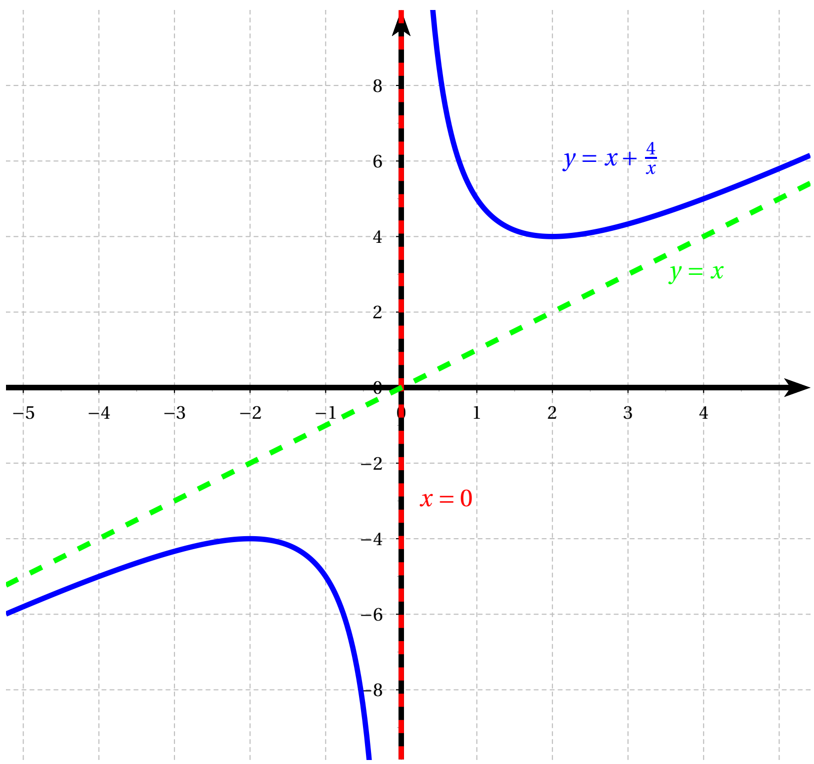
- $$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} x & = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \frac{1}{x} & = -\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0,\ x<0}\left(x+4\times\frac{1}{x}\right) = \text{« } 0+4\times(-\infty) \text{ »} = -\infty.$$

  On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote (verticale) à $\mathscr{C}$.

- $$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} x & = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \frac{1}{x} & = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0,\ x>0}\left(x+4\times\frac{1}{x}\right) = \text{« } 0+4\times(+\infty) \text{ »} = +\infty.$$

  On en déduit (pour la 2e fois) que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote (verticale) à $\mathscr{C}$.

4. Avant de tracer la courbe, on construit la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées, en pointillés rouge) ; puis on fait un petit tableau de valeurs. Il semble judicieux de choisir 1 carreau ou 1 cm pour 1 en abscisse, et 1 cm ou 1 carreau pour 2 en ordonnée.



Remarque : La droite d'équation $y = x$ (tracée en pointillés verts) est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$. Mais c'est une asymptote « oblique », et l'étude de ces asymptotes n'est pas au programme.

Exercice 132 La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient avec

$$\begin{array}{lcl} u(x) = e^x - 1 & , & v(x) = e^x + 1, \\ u'(x) = e^x & , & v'(x) = e^x. \end{array}$$

On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{e^x\times(e^x+1)-(e^x-1)\times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x\times e^x + e^x\times 1 - e^x\times e^x + 1\times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}}+e^x-\cancel{e^{2x}}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

2. Une exponentielle est strictement positive, donc on obtient le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-1 $\nearrow$	1

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-1) & = 0-1=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+1) & =0+1=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y=-1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

4. On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{-x}. Pour tout réel x :

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{(\mathrm{e}^x-1)\times\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x+1)\times\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{x-x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x-x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On peut alors calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-x}) & =1-0=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\mathrm{e}^{-x}) & =1+0=1\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

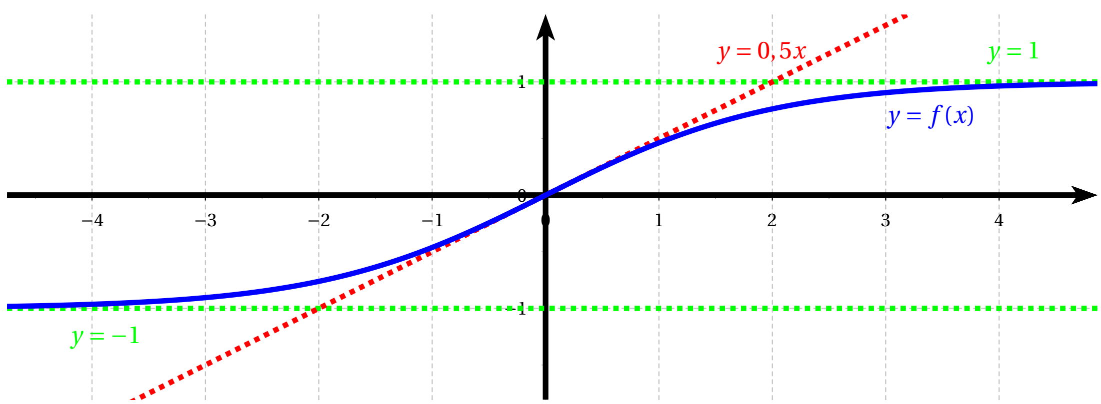
5. L'équation de T est

$$y=g'(0)(x-0)+g(0).$$

Or $g(0)=\frac{\mathrm{e}^0-1}{\mathrm{e}^0+1}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$ et $g'(0)=\frac{2\mathrm{e}^0}{(\mathrm{e}^0+1)^2}=\frac{2\times1}{(1+1)^2}=\frac{2}{4}=0,5$, donc

$$\begin{aligned}&T: y=g'(0)(x-0)+g(0)\\&T: y=0,5(x-0)+0\\&T: y=0,5x.\end{aligned}$$

6. Avant de construire $\mathscr{C}$, on trace les deux asymptotes et la tangente T.



Exercice 133 1. On met le terme de plus haut degré, x^2, en facteur :

$$x^2-5x+3=x^2\left(1-\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)=x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right).$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 & =+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right) & =1-5\times0+3\times0=1\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-5x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=\text{« }(+\infty)\times1\text{ »}=+\infty.$$

2. On met le terme de plus haut degré, x^3, en facteur :

$$x^3-2x=x^3\left(1-\frac{2x}{x^3}\right)=x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right).$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 & =-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}\right) & =1-2\times 0=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=\text{« } -\infty\times 1 \text{ »}=-\infty.$$

3. On met x en facteur au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{6x-1}{2x+1}=\frac{\cancel{x}\left(6-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{6-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}.$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\frac{1}{x}\right) & =6-0=6 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) & =2+0=2\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{6x-1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{6}{2}=3.$$

Exercice 134

1.
2.

x	$-\infty$		▶ 1 ◀		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

Quand x se rapproche de 1 en étant supérieur à 1, donc par la droite (flèche ◀), $x-1$ se rapproche de 0 en étant positif, donc

$$\lim_{x\to1,x>1}\frac{1}{x-1}=\text{« }\frac{1}{0^{+}}\text{ »}=+\infty.$$

Quand x se rapproche de 1 en étant inférieur à 1, donc par la gauche (flèche ▶), $x-1$ se rapproche de 0 en étant négatif, donc

$$\lim_{x\to1,x<1}\frac{1}{x-1}=\text{« }\frac{1}{0^{-}}\text{ »}=-\infty.$$

3.
4.

x	$-\infty$		▶ 1 ◀		$+\infty$
$-x+4$		$+$	0	$-$	

Quand x se rapproche de 4 en étant supérieur à 4, donc par la droite (flèche ◀), $-x+4$ se rapproche de 0 en étant négatif, donc

$$\lim_{x\to4,x>4}\frac{x+2}{-x+4}=\text{« }\frac{4+2}{0^{-}}\text{ »}=\text{« }\frac{6}{0^-}\text{ »}=-\infty.$$

Quand x se rapproche de 4 en étant inférieur à 4, donc par la gauche (flèche ▶), $-x+4$ se rapproche de 0 en étant positif, donc

$$\lim_{x\to4,x<4}\frac{x+2}{-x+4}=\text{« }\frac{4+2}{0^{+}}\text{ »}=\text{« }\frac{6}{0^+}\text{ »}=+\infty.$$

5.
6.

- On résout l'équation $e^x-e^{-x}=0$ pour construire le tableau de signe de e^x-e^{-x} :

$$e^x-e^{-x}=0 \iff e^x=e^{-x} \iff x=-x \iff x+x=0 \iff 2x=0 \iff x=0.$$

- Pour obtenir le signe, on remplace par des valeurs de x :
  — Par exemple, pour la case de droite, $e^1-e^{-1}\approx 3{,}09$; donc il faut mettre un ⊕.

— Par exemple, pour la case de gauche, $e^{-1} - e^{-(-1)} \approx -3,09$; donc il faut mettre un ⊖.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - e^{-x}$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = « \frac{e^0 + e^{-0}}{0^+} » = « \frac{2}{0^+} » = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0, x<0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = « \frac{e^0 + e^{-0}}{0^-} » = « \frac{2}{0^-} » = -\infty.$$

Exercice 135 La fonction i est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $i(x) = \frac{x}{2x+1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Remarque : $-\frac{1}{2}$ est valeur interdite, car le dénominateur de la fraction $\frac{x}{2x+1}$ s'annule lorsque $x = -\frac{1}{2}$:

$$2x + 1 = 0 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient avec

$$u(x) = x \quad , \quad v(x) = 2x + 1,$$
$$u'(x) = 1 \quad , \quad v'(x) = 2.$$

On obtient, pour $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$:

$$i'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - x \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x + 1 - 2x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}.$$

On a donc le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$i'(x)$		$+$	‖	$+$	
$i(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$

2. • On calcule d'abord les limites en $\pm\infty$.
On met x en facteur au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x}{2x+1} = \frac{\cancel{x}(1)}{\cancel{x}\left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}.$$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 & = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) & = 2 + 0 = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to-\infty} 1 & = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) & = 2 + 0 = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

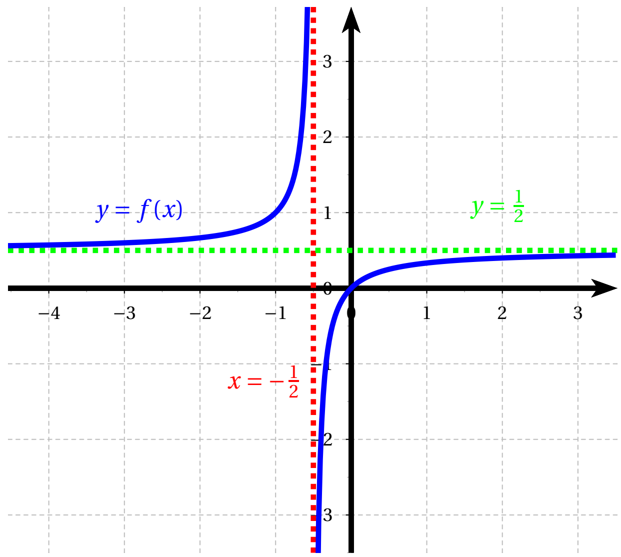
• On calcule ensuite les limites à droite et à gauche en 0.
On construit le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}, x>-\frac{1}{2}} \frac{x}{2x+1} = « \frac{-\frac{1}{2}}{0^+} » = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\frac{1}{2}, x<-\frac{1}{2}} \frac{x}{2x+1} = « \frac{-\frac{1}{2}}{0^-} » = +\infty.$$

On en déduit que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3. On construit les asymptotes d'équations $y=\frac{1}{2}$ (en pointillés verts), $x=-\frac{1}{2}$ (en pointillés rouges), puis la courbe $\mathscr{C}$ (un tableau de valeurs avec $x=-1$ et $x=0$ est suffisant pour avoir un bon tracé).



Exercice 136 1. On calcule d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)$. Pour cela, on met le terme de plus haut degré, x^2, en facteur :

$$x^2-2x=x^2\left(1-\frac{2x}{x^2}\right)=x^2\left(1-\frac{2}{x}\right).$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 & =+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) & =1-2\times0=1\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)=+\infty.$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2-2x}=\text{« }\mathrm{e}^{+\infty}\text{ »}=+\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{1/x}=\mathrm{e}^0=1$.

Remarque : Pour justifier rigoureusement la 2e limite, il faut invoquer **la continuité en 0** de la fonction exponentielle.

3. On factorise comme dans la question 1 : $x^2-2x=x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2 & =+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) & =1-2\times0=1\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)=+\infty.$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)^3=\text{« }(+\infty)^3\text{ »}=+\infty.$$

4. $\lim\limits_{x\to0,x<0}\frac{1}{x}=-\infty$, donc

$$\lim_{x\to0,x<0}\mathrm{e}^{1/x}=\text{« }\mathrm{e}^{-\infty}\text{ »}=0.$$

Exercice 137 La fonction k est définie sur $[0;+\infty[$ par

$$k(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit, avec

$$\begin{array}{lcl}u(x)=x^2 & , & v(x)=\mathrm{e}^{-x},\\ u'(x)=2x & , & v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}.\end{array}$$

On obtient, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$k'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. $2x - x^2 = x(2-x)$, donc les racines de $2x - x^2$ sont 0 et 2 et on a le tableau :

x	0		2		$+\infty$
$2x - x^2$	0	$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$k'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$k(x)$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	

$$k(0) = 0^2\mathrm{e}^{-0} = 0 \qquad\qquad k(2) = 2^2\mathrm{e}^{-2} = 4\mathrm{e}^{-2}.$$

3. La fonction k est positive (car un carré et une exponentielle le sont) et son maximum est $4\mathrm{e}^{-2}$, donc pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$0 \leqslant x^2\mathrm{e}^{-x} \leqslant 4\mathrm{e}^{-2}.$$

On divise par x (qui est strictement positif, donc le sens des inégalités ne change pas) :

$$\frac{0}{x} \leqslant \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{x} \leqslant \frac{4\mathrm{e}^{-2}}{x}$$
$$0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{4\mathrm{e}^{-2}}{x}.$$

4. On sait que $0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{4\mathrm{e}^{-2}}{x}$ pour tout $x > 0$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4\mathrm{e}^{-2}}{x} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

5. **Application :** On met e^{-x} en facteur : pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$\mathrm{e}^x - x - 2 = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{2}{\mathrm{e}^x}\right) = \mathrm{e}^x\left(1 - x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (d'après la question précédente) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc :

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1 - x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}) & = 1 - 0 - 2\times 0 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x - x - 2\right) = \text{« } +\infty \times 1 \text{ »} = +\infty.$$

Exercice 138
Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1.$$

1. On met e^x en facteur :

$$\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1 = \mathrm{e}^x(1-x) + 1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) & = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(1-x) + 1 = \text{« } +\infty \times (-\infty) + 1 \text{ »} = -\infty.$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2.

On dérive $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ grâce à la formule pour la dérivée d'un produit :

$$u(x) = x \quad , \quad v(x) = \mathrm{e}^x,$$
$$u'(x) = 1 \quad , \quad v'(x) = \mathrm{e}^x.$$

On a donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^x - \left(1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x \\ &= -x\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

On obtient le tableau :

x	0		$+\infty$
$-x$	0	$-$	
e^x		$+$	
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

$$g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 \times \mathrm{e}^0 + 1 = 2.$$

3. (a)
   - La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$;
   - $g(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$;
   - $0 \in]-\infty;2]$.

   D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution α dans $[0;+\infty[$.

   (b) On obtient grâce à la calculatrice :

$$1,27 \leqslant \alpha \leqslant 1,28.$$

4. On complète le tableau de variations de g en faisant apparaître α :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit le tableau de signe :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2

Soit A la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$A(x) = \frac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient :

$$u(x) = 4x \quad , \quad v(x) = \mathrm{e}^x + 1,$$
$$u'(x) = 4 \quad , \quad v'(x) = \mathrm{e}^x.$$

On a donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{4 \times (\mathrm{e}^x + 1) - 4x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^x + 4 - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{4\left(\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x\right)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= g(x) \times \frac{4}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Or $\frac{4}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ est strictement positif sur $[0;+\infty[$, donc $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$. On a donc, grâce à la question 4 de la partie 1 :

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie 3

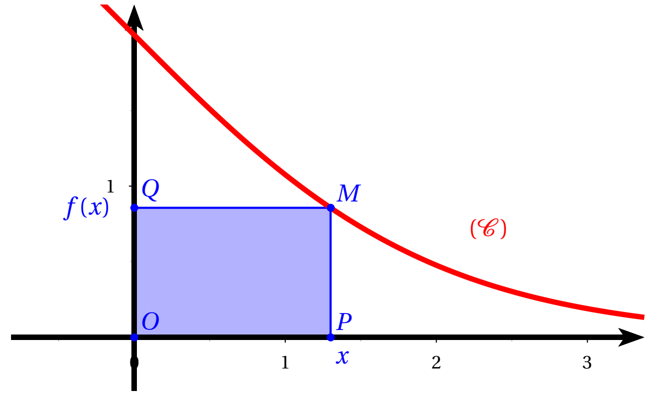
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{4}{\mathrm{e}^x+1}.$$

1. L'aire du rectangle $OPMQ$ est

$$\begin{aligned}OP\times OQ&=x\times f(x)\\&=x\times\frac{4}{\mathrm{e}^x+1}\\&=\frac{4x}{\mathrm{e}^x+1}\\&=A(x).\end{aligned}$$

Or A atteint son maximum pour $x=\alpha$ (cf partie 2), donc l'aire de $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.



2. On suppose dans cette question que le point M a pour abscisse α.

On rappelle que deux droites (non verticales) sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur. On rappelle également que la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$. Ceci étant dit :

- La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ a pour coefficient $f'(\alpha)$. Or on obtient facilement (par exemple avec la dérivée d'un quotient)

$$f'(x)=-\frac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2},$$

donc

$$f'(\alpha)=-\frac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2}.$$

- La droite (PQ) a pour coefficient directeur

$$c_{(PQ)}=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{0-f(\alpha)}{\alpha-0}=\frac{-\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha}=-\frac{4}{\alpha\,(\mathrm{e}^\alpha+1)}.$$

Pour prouver l'égalité $f'(\alpha)=c_{(PQ)}$, on réduit au même dénominateur et on met -4 en facteur :

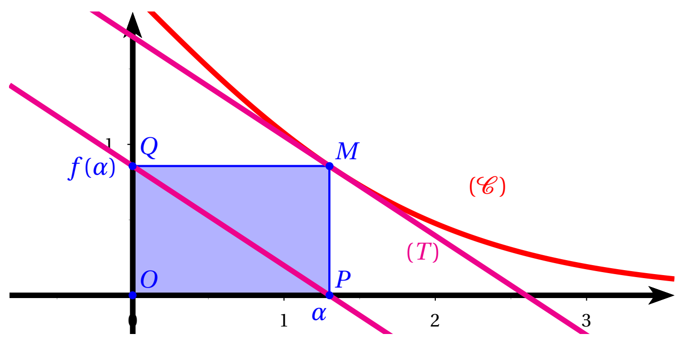
$$f'(\alpha)=-\frac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2}=-4\times\frac{\alpha\mathrm{e}^\alpha}{\alpha\,(\mathrm{e}^\alpha+1)^2}$$

$$c_{(PQ)}=-\frac{4}{\alpha\,(\mathrm{e}^\alpha+1)}=-\frac{4\times(\mathrm{e}^\alpha+1)}{\alpha\,(\mathrm{e}^\alpha+1)\times(\mathrm{e}^\alpha+1)}=-4\times\frac{\mathrm{e}^\alpha+1}{\alpha\,(\mathrm{e}^\alpha+1)^2}$$

On sait que $g(\alpha)=0$, donc $\mathrm{e}^\alpha-\alpha\mathrm{e}^\alpha+1=0$; et donc

$$\alpha\mathrm{e}^\alpha=\mathrm{e}^\alpha+1.$$

Il s'ensuit que $f'(\alpha)=c_{(PQ)}$, et donc que la tangente (T) et la droite (PQ) ont le même coefficient directeur. Elles sont donc bien parallèles.



Exercice 139 La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}.$$

1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1\times x^2}{2\times x^2} - \frac{1\times 2}{x^2\times 2} = \frac{x^2}{2x^2} - \frac{2}{2x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2}.$$

2. On étudie le signe de $\frac{x^2-2}{2x^2}$:
   - Les racines de x^2-2 sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; seule la première est dans $[0;+\infty[$.
   - Sur $\mathbb{R}$ tout entier, le signe serait de la forme $\boxed{+ \ \phi \ - \ \phi \ +}$, avec un ϕ au niveau des racines ; mais comme on travaille dans $[0;+\infty[$ seulement, le signe est de la forme $\boxed{- \ \phi \ +}$.

   On obtient finalement :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}.$$

3.
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{2}x &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty. \qquad \left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0,\ x>0} \tfrac{1}{2}x &= 0 \\ \lim_{x\to 0,\ x>0} \tfrac{1}{x} &= +\infty \end{aligned}\right\} \implies \lim_{x\to 0,\ x>0} g(x) = +\infty.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$\sqrt{2} \leq a_n \leq 2.$$

   - **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$a_0 = 2 \implies \sqrt{2} \leq a_0 \leq 2 \implies \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

   - **Hérédité.**

   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$\sqrt{2} \leq a_k \leq 2.$$

   La fonction g est strictement croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$, donc

$$g\left(\sqrt{2}\right) \leq g\left(a_k\right) \leq g(2)$$
$$\sqrt{2} \leq a_{k+1} \leq \frac{3}{2}.$$

   (cf illustration avec le tableau de variations ci-contre).

   Or $\frac{3}{2} \leq 2$, donc

$$\sqrt{2} \leq a_{k+1} \leq 2,$$

   c'est-à-dire que la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

x	0		$\sqrt{2}$	a_k	2	$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	a_{k+1}	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

Remarque : $g\left(a_k\right) = a_{k+1}$.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{1\times 2}{a_n \times 2} - \frac{a_n \times a_n}{2\times a_n} = \frac{2-a_n^2}{2a_n}.$$
Or $\sqrt{2} \leq a_n$ d'après la question précédente, donc $\sqrt{2}^2 \leq a_n^2$ (deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés). On a donc $2 \leq a_n^2$; et ainsi
$$\frac{\overbrace{2-a_n^2}^{\ominus}}{\underbrace{2a_n}_{\oplus}} \leq 0.$$
Conclusion : $a_{n+1} - a_n \leq 0$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
   - décroissante d'après la question précédente;
   - minorée par $\sqrt{2}$ d'après la question 4.

   Or toute suite décroissante minorée converge (théorème de limite monotone du chapitre 4), donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, sa limite ℓ est supérieure ou égale au minorant $\sqrt{2}$.

   Pour déterminer ℓ, on reprend un raisonnement du chapitre 6 :

   La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ est continue sur $\left[\sqrt{2}; +\infty\right[$, donc on peut « passer à la limite » dans la formule de récurrence :
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
   donc
$$\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{\ell}. \tag{3}$$
   On résout cette équation dans $\left[\sqrt{2}; +\infty\right[$:
$$\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{\ell} \iff \ell - \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{\ell} \iff \frac{\ell}{2} = \frac{1}{\ell} \iff \ell \times \ell = 2 \times 1 \iff \ell^2 = 2 \iff \ell = \sqrt{2} \text{ ou } \underbrace{\ell = -\sqrt{2}}_{\text{impossible}}.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2}$.

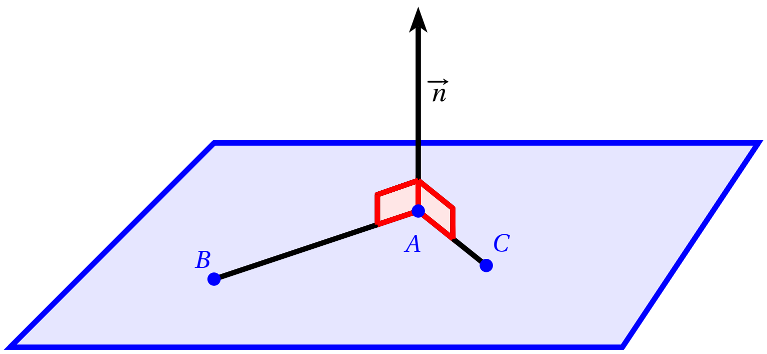
9 Équations de plans, représentations de droites

Dans tout ce chapitre, on n'a plus intérêt à placer les points précisément dans un repère. On fait tout de même des figures pour illustrer les situations et guider les raisonnements.

Exercice 140 1. Soient $A(2;1;-1)$, $B(0;2;3)$, $C(1;-1;0)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}9\\-2\\5\end{pmatrix}$.

(a) On calcule les coordonnées des vecteurs :
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\\ z_B - z_A\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\2-1\\3-(-1)\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\\ z_C - z_A\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-2\\-1-1\\0-(-1)\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminent un plan.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puisque
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 9\times(-2) + (-2)\times 1 + 5\times 4 = 0,$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 9\times(-1) + (-2)\times(-2) + 5\times 1 = 0.$$
Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC), donc il est orthogonal au plan (ABC).



(b) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}9\\-2\\5\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$ est orthogonal au plan (ABC), donc (ABC) a une équation de la forme

$$\begin{aligned}ax+by+cz+d&=0\\9x-2y+5z+d&=0.\end{aligned}$$

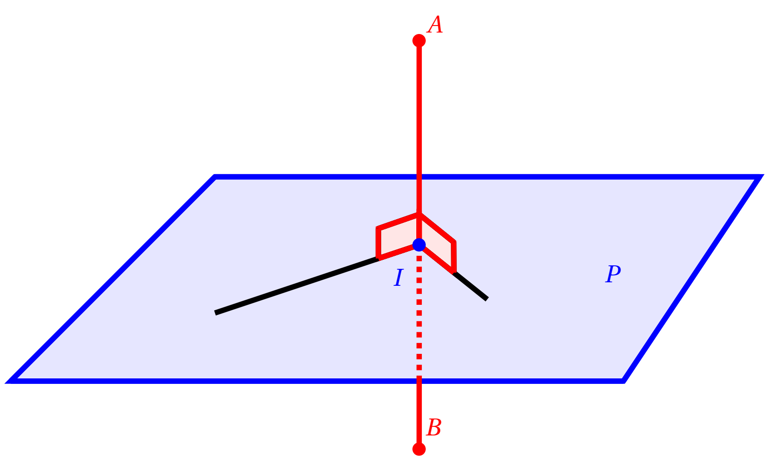
Et comme (ABC) passe par $A(2;1;-1)$:

$$\begin{aligned}9\times 2-2\times 1+5\times(-1)+d&=0\\11+d&=0\\d&=-11.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$(ABC): 9x-2y+5z-11=0.$$

2. Soient $A(2;-1;3)$ et $B(2;5;0)$. On note P le plan médiateur de $[AB]$. Ce plan passe par le milieu I de $[AB]$ et il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.



On calcule donc, avec les formules habituelles :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)\qquad I\left(\frac{2+2}{2};\frac{-1+5}{2};\frac{3+0}{2}\right)\qquad I(2;2;1,5),$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-2\\5-(-1)\\0-3\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}.$$

Le plan P a donc une équation de la forme

$$0x+6y-3z+d=0.$$

Et comme il passe par I :

$$\begin{aligned} 0\times 2+6\times 2-3\times 1{,}5+d &= 0\\ 7{,}5+d &= 0\\ d &= -7{,}5. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$P : 6y-3z-7{,}5=0.$$

Remarque : En multipliant par $\frac{2}{3}$, on a une écriture plus agréable : $P : 4y-2z-5=0$.

3. Soient (P) le plan d'équation $4x+y-z-3=0$, et soient $M(1;2;3)$ et $N(9;4;1)$.

   (a) Le point M appartient au plan (P), car (on remplace x, y, z par les coordonnées de M) :

   $$4\times 1+2-3-3=0.$$

   Le point N n'appartient pas au plan (P), car :

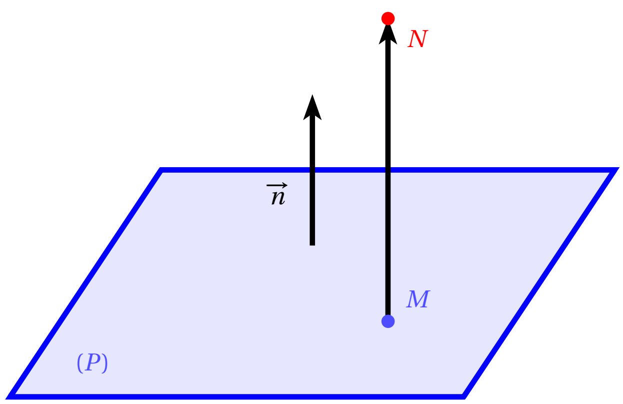
   $$4\times 9+4-1-3=36\neq 0.$$

   (b) Le plan (P) a pour équation $4x+1y+(-1)z-3=0$, donc le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (P).

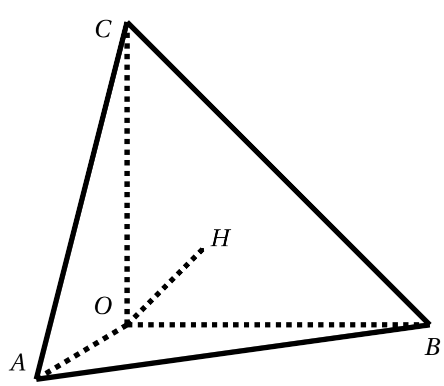
   Par ailleurs

   $$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N-x_M\\y_N-y_M\\z_N-z_M\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}9-1\\4-2\\1-3\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}8\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

   On remarque que $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{n}$, donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Or le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (P), donc la droite (MN) est orthogonale à (P).



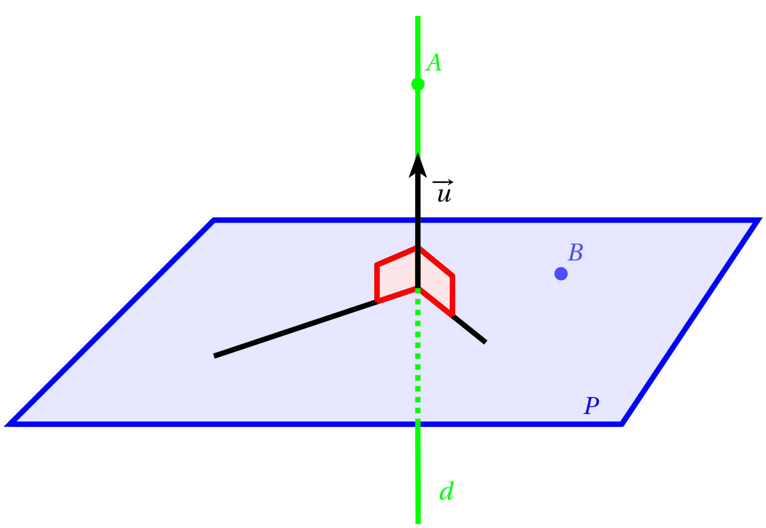
Exercice 141 $OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, c'est-à-dire que OAB, OAC et OBC sont rectangles en O. On suppose de plus que $OA=OB=OC=1$. On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), c'est-à-dire que $H\in(ABC)$ et $(OH)\perp(ABC)$.



On travaille dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$.

1. Pour prouver que (ABC) a pour équation $x+y+z=1$, il suffit de prouver que les coordonnées des points A, B, C vérifient cette égalité. On le fait pour A (le travail est le même pour B et C) :
$$A(1;0;0) \qquad \text{et} \qquad 1+0+0=1 \qquad \text{donc } A \text{ appartient au plan.}$$
2. Notons $(x_H; y_H; z_H)$ les coordonnées du point H. Puisque ce point est sur le plan $(ABC) : x+y+z=1$, on a $x_H+y_H+z_H=1$, et donc en transposant :
$$z_H = 1 - x_H - y_H.$$
Il existe donc bien deux réels x_H, y_H tels que H ait pour coordonnées $(x_H; y_H; 1-x_H-y_H)$.
3. On a $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ et $H\left(x_H; y_H; 1-x_H-y_H\right)$. Donc
$$\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ 1-x_H-y_H \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
puis
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} &= x_H \times (-1) + y_H \times 1 + \left(1-x_H-y_H\right) \times 0 = -x_H + y_H, \\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} &= x_H \times (-1) + y_H \times 0 + \left(1-x_H-y_H\right) \times 1 = -x_H + 1 - x_H - y_H = 1 - 2x_H - y_H. \end{aligned}$$
4. La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC), donc elle est orthogonale à (AB) et à (AC). On a donc $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. Soit, d'après la question précédente :
$$\begin{cases} -x_H + y_H & = 0 \\ 1 - 2x_H - y_H & = 0 \end{cases}$$
La première ligne donne $y_H = x_H$, puis en remplaçant dans la deuxième :
$$-2x_H - x_H + 1 = 0 \qquad -3x_H + 1 = 0 \qquad 1 = 3x_H \qquad x_H = \frac{1}{3}.$$
Finalement $x_H = y_H = \frac{1}{3}$, puis
$$z_H = 1 - x_H - y_H = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$
Conclusion : le point H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Exercice 142 Faire une figure n'est pas évident ici, parce que l'énoncé part de la droite d et du point A, puis définit B et enfin le plan P. On préférerait que ce soit l'inverse ; et c'est justement en faisant tout à l'envers que l'on construit la figure [11] : on trace un plan P, on y place un point B, puis on trace une droite d orthogonale à P et ne passant pas par B, sur laquelle on place un point A.



11. La figure, que nous faisons en premier, n'est là que pour illustrer l'exercice et guider l'intuition. Lorsque nous ferons les calculs, en revanche, nous irons « dans l'ordre ».

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc B n'appartient pas à la droite d passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Le plan P est orthogonal à d, donc il est orthogonal à $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$. Il a donc une équation de la forme

$$-x+5y+3z+d=0.$$

Et comme P passe par $B(2;-4;1)$, on a

$$\begin{aligned}-2+5\times(-4)+3\times1+d&=0\\ -19+d&=0\\ d&=19.\end{aligned}$$

Finalement

$$P:-x+5y+3z+19=0.$$

Exercice 143 1. On considère les points $A(2;-1;4)$ et $B(1;3;4)$.

(a) Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases}x&=x_A+t\times(-1)\\ y&=y_A+t\times4\\ z&=z_A+t\times0\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\begin{cases}x&=2-t\\ y&=-1+4t\\ z&=4\end{cases}.$$

(b) Savoir si K appartient à (AB) revient à savoir s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases}0&=2-t\\ 7&=-1+4t\\ 4&=4\end{cases}.$$

Il est clair que $t=2$ est solution, donc $K\in(AB)$.

2. La droite (D) passe par $C(2;-1;0)$ et elle est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix}$, donc sa représentation paramétrique est

$$\begin{cases}x&=x_C+t\times2\\ y&=y_C+t\times(-8)\\ z&=z_C+t\times0\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\begin{cases}x&=2+2t\\ y&=-1-8t\\ z&=0\end{cases}.$$

3. On remarque que $\overrightarrow{u}=-2\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ; et donc (D) est parallèle à (AB).

Exercice 144 Soient D et D' les droites de représentations paramétriques respectives

$$\begin{cases}x&=1t+1\\ y&=2t-1\\ z&=3t+2\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}x&=1t+1\\ y&=1t+3\\ z&=-1t+4\end{cases}.$$

1. D'après leur représentation paramétrique :
   - un vecteur directeur de D est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$;
   - un vecteur directeur de D' est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc D et D' ne sont pas parallèles.

En revanche, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, puisque

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times (-1) = 0.$$

Les droites D et D' sont donc orthogonales.

2. Pour prouver que le plan $P : x + y - z + 2 = 0$ contient la droite D, il suffit de prouver que tous les points de la droite D sont dans le plan P. Or la représentation paramétrique de D dit que ces points ont des coordonnées de la forme $\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 2t-1 \\ z &= 3t+2 \end{cases}$. Il suffit donc de prouver qu'ils vérifient l'équation de P (on « injecte » la représentation paramétrique de D dans l'équation de P) :

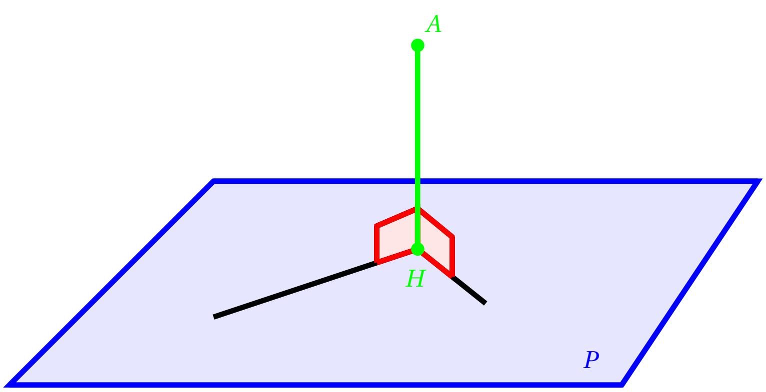
$$x + y - z + 2 = (t+1) + (2t-1) - (3t+2) + 2 = t + 1 + 2t - 1 - 3t - 2 + 2 = 0.$$

La droite D est donc bien incluse dans le plan P.

Pour prouver que le plan P est orthogonal à la droite D', on utilise un vecteur normal : P a pour équation $\underset{a}{1}x+\underset{b}{1}y+\underset{c}{-1}z+2=0$, donc un vecteur normal à P est $\vec{n}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} a \\ b. \\ c \end{array}$

Ce vecteur est égal[12] au vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de la droite D', donc D' est orthogonale au plan P.

Exercice 145 Soient $P : -3x + y + 2z - 10 = 0$ et $A(2;0;1)$. On cherche les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P.



1. La droite (AH) est orthogonale au plan P, donc elle est dirigée par un vecteur normal au plan P.

L'équation de P est $-3x + y + 2z - 10 = 0$, donc un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La droite (AH) a donc pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= x_A + t \times (-3) \\ y &= y_A + t \times 1 \\ z &= z_A + t \times 2 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x &= 2 - 3t \\ y &= t \\ z &= 1 + 2t \end{cases}.$$

12. La colinéarité suffirait.

2. Le point H est le point d'intersection de la droite (AH) avec le plan P, donc pour obtenir ses coordonnées, on « injecte » la représentation paramétrique de (AH) dans l'équation de P, puis on résout :

$$\begin{aligned}
-3x+y+2z-10&=0\\
-3(2-3t)+(t)+2(1+2t)-10&=0\\
-6+9t+t+2+4t-10&=0\\
14t-14&=0\\
t&=\frac{14}{14}=1.
\end{aligned}$$

Enfin on remplace t par 1 dans la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 2-3t = 2-3\times 1 = -1\\ y &= t = 1\\ z &= 1+2t = 1+2\times 1 = 3\end{cases}.$$

Conclusion : $H(-1;1;3)$.

Exercice 146 Soient $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1;-3;2)$, $D(4;-2;5)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. (a) On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad ; \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés (et déterminent un plan).

(b) Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC), puisqu'il est orthogonal aux vecteurs directeurs du plan $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} &= 2\times(-1)+(-1)\times(-1)+1\times 1 = 0,\\
\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= 2\times(-2)+(-1)\times(-5)+1\times(-1) = 0.
\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} & \begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\end{array}$ étant orthogonal au plan (ABC), ce dernier a une équation de la forme

$$\begin{aligned}
ax+by+cz+d&=0\\
2x-y+z+d&=0.
\end{aligned}$$

Et comme (ABC) passe par $A(1;2;3)$:

$$\begin{aligned}
2\times 1-2+3+d&=0\\
3+d&=0\\
d&=-3.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$(ABC): 2x-y+z-3=0.$$

2. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 2-2t\\ y &= -1+t\\ z &= 4-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

(a) Lorsqu'on prend $t=-1$ dans la représentation paramétrique de Δ, on obtient :

$$\begin{cases} x &= 2-2t = 2-2\times(-1) = 4 \\ y &= -1+t = -1+(-1) = -2 \\ z &= 4-t = 4-(-1) = 5 \end{cases}.$$

Ce sont les coordonnées de D, donc D appartient bien à Δ.[13]

D'après sa représentation paramétrique, un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$. On sait aussi que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC). On remarque que $\overrightarrow{n}=-\overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{u}$ est aussi orthogonal au plan (ABC). Comme c'est un vecteur directeur de Δ, la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

(b) Le projeté orthogonal E de D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de Δ et de (ABC), donc pour obtenir ses coordonnées, on « injecte » la représentation paramétrique de Δ dans l'équation de (ABC), puis on résout :

$$\begin{aligned} 2x-y+z-3&=0\\ 2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3&=0\\ 4-4t+1-t+4-t-3&=0\\ -6t+6&=0\\ t&=\frac{-6}{-6}=1. \end{aligned}$$

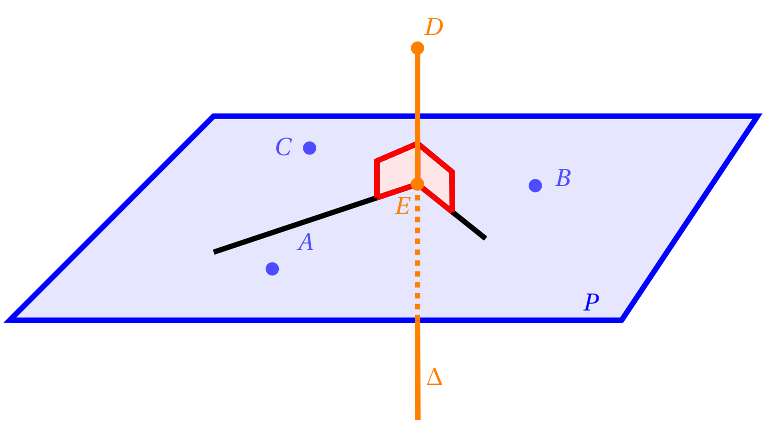
Enfin on remplace t par 1 dans la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 2-2t = 2-2\times 1 = 0 \\ y &= -1+t = -1+1 = 0 \\ z &= 4-t = 4-1 = 3 \end{cases}.$$

Conclusion : $E(0;0;3)$.

(c) La distance du point D au plan (ABC) est la longueur DE :

$$d(D,(ABC)) = DE = \sqrt{(0-4)^2+(0-(-2))^2+(3-5)^2} = \sqrt{24}.$$



3. (a) Pour prouver que le point $H(-1;0;5)$ est le projeté orthogonal de C sur (AB), il suffit de prouver que :
   - H appartient à (AB),
   - (CH) est orthogonale à (AB).

   Pour le premier point, on utilise la colinéarité : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ; et donc H appartient à (AB).

13. J'ai « deviné » qu'il fallait prendre $t=-1$, mais ce n'était vraiment pas difficile.

Pour le deuxième point, on utilise le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=(-1)\times 0+(-1)\times 3+1\times 3=0.$$

On en déduit que (CH) est orthogonale à (AB).

Finalement, comme H appartient à (AB) et que (CH) est orthogonale à (AB), H est bien le projeté orthogonal de C sur (AB).

(b) L'aire du triangle ABC est

$$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times \text{base}\times h=\frac{1}{2}\times AB\times h.$$

Or $AB=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$ et $CH=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=\sqrt{18}$, donc

$$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{18}=\frac{1}{2}\times\sqrt{54}.$$

(c) La formule pour le volume d'un tétraèdre (cas particulier de pyramide) est

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h,$$

où $\mathscr{B}$ désigne l'aire de la base et h la hauteur.

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est donc :

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{ABC}\times DE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{54}\times\sqrt{24}=\frac{1}{6}\times\sqrt{54\times 24}=\frac{1}{6}\times\sqrt{1296}=\frac{1}{6}\times 36=6.$$

Exercice 147 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé de centre O, on considère les points : $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ et $C(0;0;1)$.

1. (a) On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\quad;\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC), puisqu'il est orthogonal aux vecteurs directeurs du plan $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En effet :

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times(-2)+2\times 3+6\times 0=0,$$
$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-2)+2\times 0+6\times 1=0.$$

(b) Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}$ étant orthogonal au plan (ABC), ce dernier a une équation de la forme

$$ax+by+cz+d=0$$
$$3x+2y+6z+d=0.$$

Et comme (ABC) passe par $A(2;0;0)$:

$$\begin{aligned}3\times 2+2\times 0+6\times 0+d&=0\\6+d&=0\\d&=-6.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$(ABC): 3x+2y+6z-6=0.$$

2. (a) La droite d est orthogonale au plan (ABC), donc elle est dirigée par le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$. Elle passe par $O(0;0;0)$, donc sa représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x &= x_O + t\times 3\\ y &= y_O + t\times 2\\ z &= z_O + t\times 6\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x &= 3t\\ y &= 2t\\ z &= t\end{cases}.$$

(b) On « injecte » la représentation paramétrique de d dans l'équation de (ABC), puis on résout :

$$\begin{aligned} 3x+2y+6z-6&=0\\ 3(3t)+2(2t)+6(6t)-6&=0\\ 9t+4t+36t-6&=0\\ 49t-6&=0\\ t&=\frac{6}{49}.\end{aligned}$$

Enfin on remplace t par $\frac{6}{49}$ dans la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 3t = 3\times\frac{6}{49} = \frac{18}{49}\\ y &= 2t = 2\times\frac{6}{49} = \frac{12}{49}\\ z &= 6t = 6\times\frac{6}{49} = \frac{36}{49}\end{cases}.$$

Conclusion : $H\left(\frac{18}{49};\frac{12}{49};\frac{36}{49}\right)$.

(c)

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{(x_H-x_O)^2+(x_H-x_O)^2+(x_H-x_O)^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{49}-0\right)^2+\left(\frac{12}{49}-0\right)^2+\left(\frac{36}{49}-0\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{324}{2401}+\frac{144}{2401}+\frac{1296}{2401}} = \sqrt{\frac{1764}{2401}} = \frac{\sqrt{1764}}{\sqrt{2401}} = \frac{42}{49} = \frac{6}{7}.\end{aligned}$$

3. La formule pour le volume d'une pyramide est

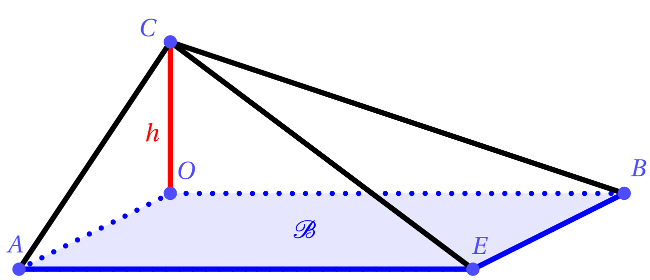
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h,$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire de la base et h la hauteur.

On fait le calcul avec deux choix de bases et de hauteurs différents :

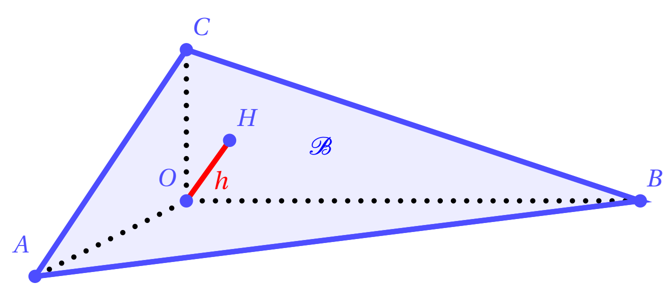
On prend comme base le rectangle $OAEB$ et comme hauteur OC. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{OAEB}\times OC\\ &= \frac{1}{3}\times(3\times 2)\times 1 = 6.\end{aligned}$$



On prend comme base le triangle ABC et comme hauteur OH. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ABC}\times OH\\ &= \frac{1}{3}\times\mathcal{A}_{ABC}\times\frac{6}{7} = \frac{2}{7}\mathcal{A}_{ABC}.\end{aligned}$$



On compare les deux calculs du volume. On obtient :

$$\frac{2}{7}\mathscr{A}_{ABC} = 6$$
$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{6}{\frac{2}{7}}$$
$$\mathscr{A}_{ABC} = 6\times\frac{7}{2} = 21.$$

Exercice 148 1. • Un vecteur normal à $P : x+2y-z+1=0$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

- Un vecteur normal à $P' : -x+y+z=0$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont orthogonaux, puisque

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}' = 1\times(-1)+2\times 1+(-1)\times 1 = 0,$$

donc P est orthogonal à P'.

2. Pour prouver que P et P' se coupent suivant la droite d, il suffit de prouver que cette droite est incluse à la fois dans P et dans P'. On le fait en « injectant » la représentation paramétrique dans les équations de plans :
   - Pour le plan P :
   $$x+2y-z+1 = \left(-\frac{1}{3}+t\right)+2\left(-\frac{1}{3}\right)-t+1 = -\frac{1}{3}+t-\frac{2}{3}-t+1 = 0,$$
   donc $d\subset P$.
   - Pour le plan P' :
   $$-x+y+z = -\left(-\frac{1}{3}+t\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+t = \frac{1}{3}-t-\frac{1}{3}+t = 0,$$
   donc $d\subset P'$.

   Conclusion : P et P' se coupent bien suivant d.
3. Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P, on cherche d'abord la représentation paramétrique de (AH).

   Cette droite est orthogonale à P, donc elle est dirigée par $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et elle a pour représentation

   $$\begin{cases} x &= x_A + t\times 1\\ y &= y_A+t\times 2\\ z &= z_A+t\times(-1)\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x &= t\\ y &= 1+2t\\ z &= 1-t\end{cases}.$$

   On « injecte » ensuite cette représentation dans l'équation de P et on résout :

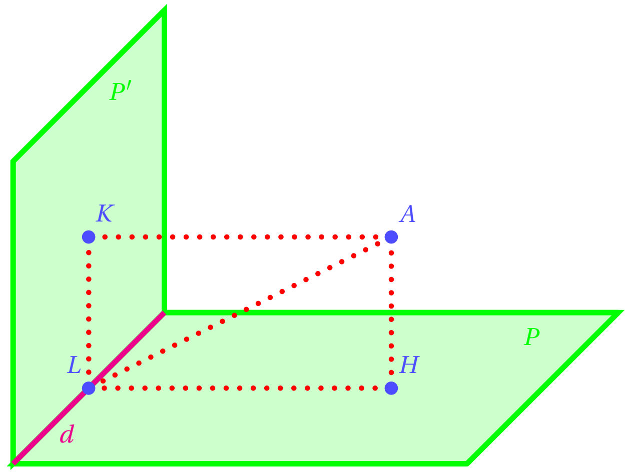
   $$x+2y-z+1=0$$
   $$t+2(1+2t)-(1-t)+1=0$$
   $$t+2+4t-1+t+1=0$$
   $$6t+2=0$$
   $$t=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

   Enfin on remplace t par $-\frac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique :

   $$\begin{cases} x &= -\frac{1}{3}\\ y &= 1+2t = 1+2\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\\ z &= 1-t = 1-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3}+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\end{cases}.$$

   Conclusion : $H\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

4. On admet que $K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P'. On note L le projeté orthogonal de A sur d ; la distance du point A à la droite d est donc la longueur AL.



D'après le théorème de Pythagore :

$$AL = \sqrt{AH^2 + HL^2} = \sqrt{AH^2 + AK^2}.$$

Or

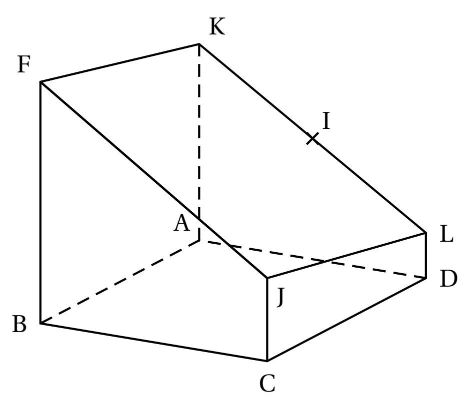
$$AH = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}},$$

$$AK = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}},$$

donc la distance du point A à la droite d est

$$AL = \sqrt{\frac{6}{9}+\frac{12}{9}} = \sqrt{2}.$$

Exercice 149



1. (a) Les coordonnées sont $F(1;0;1)$ et $I(0;0,5;0,5)$.

   (b) On a $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\-0,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-0,6\end{pmatrix}$. On calcule les produits scalaires :

$$\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{n} = -1\times(-1)+0,5\times 3+(-0,5)\times 5 = 0,$$
$$\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{n} = 0\times(-1)+1\times 3+(-0,6)\times 5 = 0.$$

   On en déduit que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}$ du plan (FIJ), et donc aussi au plan (FIJ).

(c) Le vecteur $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$ est orthogonal au plan (FIJ), donc ce plan a une équation de la forme

$$-x+3y+5z+d=0.$$

$F(1;0;1) \in (FIJ)$ donc $-1+3\times 0+5\times 1+d=0$, ce qui donne $d=-4$.

Finalement $(FIJ) : -x+3y+5z-4=0$.

(d) Pour prouver que d coupe le plan (FIJ) en $M\left(\frac{6}{7}\,;\,\frac{3}{7}\,;\,\frac{5}{7}\right)$, il suffit de prouver que :

i. M appartient au plan (FIJ) ;

ii. (MB) est orthogonale au plan (FIJ).

Pour le point i, il suffit de remplacer x, y, z par les coordonnées de M dans l'équation de (FIJ) :

$$-\frac{6}{7}+3\times\frac{3}{7}+5\times\frac{5}{7}-4=-\frac{6}{7}+\frac{9}{7}+\frac{25}{7}-\frac{28}{7}=0,$$

donc $M \in (FIJ)$.

Pour le point ii, on utilise les vecteurs : d'une part $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 1-\frac{6}{7} \\ 0-\frac{3}{7} \\ 0-\frac{5}{7} \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$, d'autre part un vecteur normal à (FIJ) est $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{7}\vec{n}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Et comme $\vec{n}$ est orthogonal à (FIJ), le vecteur $\overrightarrow{MB}$ (et la droite (MB)) l'est aussi.

Remarque : Une autre méthode consistait à trouver la représentation paramétrique de d, puis à injecter cette représentation dans l'équation du plan (FIJ). C'est un peu plus long à faire.

2. (a) Les faces $ABFE$ et $CDHG$ sont parallèles, donc le plan (FIJ) les coupe suivant deux segments parallèles. Les segments $[FK]$ et $[JL]$ sont donc parallèles. On prouve de même que $[FJ]$ est parallèle à $[KL]$.

Conclusion : les côtés opposés de $FKLJ$ sont parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.

(b) Le point L a pour abscisse 0 et pour ordonnée 1, donc il a des coordonnées de la forme $L(0;1;b)$. De plus les vecteurs $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ b-0,5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires puisque (IL) est parallèle à (FJ). Donc le tableau

1	$a-1$
0,5	$b-0,5$

est un tableau de proportionnalité. On a donc $b-0,5=(a-1)\times 0,5$, d'où

$$b=0,5+0,5a-0,5=0,5a=\frac{a}{2}.$$

Conclusion : $L\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$.

(c) Un parallélogramme est un losange lorsqu'il a deux côtés consécutifs égaux. On calcule donc :

$$FJ=\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(a-1)^2}=\sqrt{0+1+a^2-2a+1}=\sqrt{a^2-2a+2}$$

$$LJ=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+\left(a-\frac{1}{2}a\right)^2}=\sqrt{1+0+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}.$$

Il s'ensuit :

$$FKJL \text{ parallélogramme} \iff FJ=LJ \iff a^2-2a+2=1+\frac{1}{4}a^2 \iff a^2-2a+2-1-\frac{1}{4}a^2=0 \iff \frac{3}{4}a^2-2a+1=0.$$

On aboutit à une équation du second degré. Le discriminant est $\Delta=(-2)^2-4\times\frac{3}{4}\times 1=1$.

$\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$a_1=\frac{2-\sqrt{1}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{6}{4}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \qquad , \qquad a_2=\frac{2+\sqrt{1}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{3}{\frac{6}{4}}=3\times\frac{4}{6}=\frac{12}{6}=2.$$

On sait que $a\in[0;1]$, donc seule la valeur $a_1=\frac{2}{3}$ convient.

Conclusion : $FKJL$ est un losange lorsque $a=\frac{2}{3}$.

10 Le logarithme népérien

Exercice 150 Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

On a donc le tableau :

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$	

⚠Ne pas oublier la double-barre en 0 : la fonction ln n'est pas définie en 0, qui est donc « valeur interdite ».

Exercice 151 Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 8.$$

Jusqu'à présent, nous n'aurions pas pu résoudre l'équation $g'(x) = 0$. Avec le logarithme népérien, désormais, nous pouvons le faire :

$$\begin{aligned}
2\mathrm{e}^{2x} - 8 &= 0 \\
\frac{\cancel{2}\mathrm{e}^{2x}}{\cancel{2}} &= \frac{8}{2} \\
\mathrm{e}^{2x} &= 4 \\
\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) &= \ln 4 && \text{(on prend le logarithme pour « éliminer » l'exponentielle)} \\
2x &= \ln 4 && \text{(le logarithme et l'exponentielle s'éliminent)} \\
\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{\ln 4}{2} \\
x &= \frac{1}{2}\ln 4.
\end{aligned}$$

On a donc le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\ln 4$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$4-4\ln 4$	$\nearrow$	

Remarques :
- $\frac{1}{2}\ln 4 \approx 0,69$.

- $g\left(\frac{1}{2}\ln 4\right) = e^{2\times\frac{1}{2}\ln 4} - 8 \times \frac{1}{2}\ln 4 = e^{\ln 4} - 4\ln 4 = 4 - 4\ln 4$.
- Pour avoir le signe de la dérivée, on remplace par une valeur de x dans chacune des deux cases. Par exemple, pour avoir le signe dans la case de droite (sur $\left]\frac{1}{2}\ln 4; +\infty\right[$), on calcule (la calculatrice s'avère nécessaire) :

$$g'(1) = 2e^{2\times 1} - 8 = 2e^2 - 8 \approx 6,8 \qquad \text{signe } \oplus$$

Exercice 152 On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$\begin{aligned} u(x) &= x, & v(x) &= \ln x, \\ u'(x) &= 1, & v'(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1 \\ e^{\ln x} &= e^{-1} && \text{(on prend l'exponentielle pour « éliminer » le logarithme)} \\ x &= e^{-1} && \text{(le logarithme et l'exponentielle s'éliminent).} \end{aligned}$$

On a donc le tableau :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$\ln x + 1$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	||	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	

Remarques :
- $h\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \times \ln\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \times (-1) = -e^{-1}$.
- Pour avoir le signe de la dérivée, on remplace par une valeur de x dans chacune des deux cases. Par exemple, pour avoir le signe dans la case de droite (sur $\left]e^{-1}; +\infty\right[$), on calcule :

$$h'(1) = \ln 1 + 1 = 1 \qquad \text{signe } \oplus$$

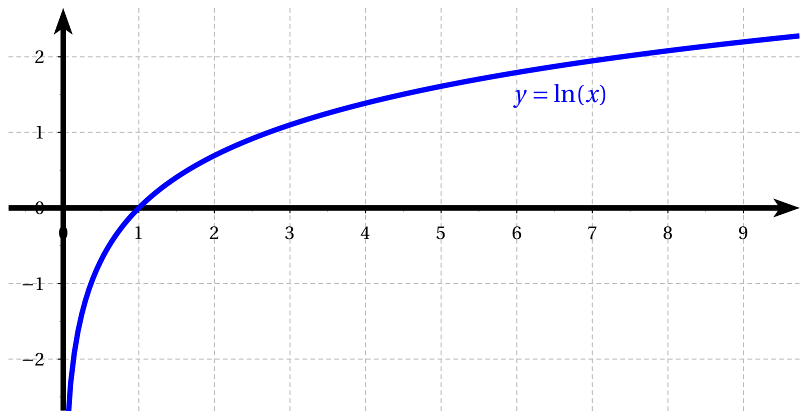
Exercice 153 On pose $f(x) = \ln x$ pour $x \in]0; +\infty[$ et on calcule les dérivées 1re et 2de :

Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Clairement f'' est strictement négative sur $]0; +\infty[$, donc f est concave sur $]0; +\infty[$.

Illustration graphique :



Exercice 154 On résout les équations et inéquations :

1. $$\begin{aligned} e^x &= 5 \\ \ln\left(e^x\right) &= \ln 5 \\ x &= \ln 5. \end{aligned}$$
   Il y a une seule solution : $x = \ln 5$.
2. $$\begin{aligned} e^x - 4 &= 0 \\ e^x &= 4 \\ \ln\left(e^x\right) &= \ln 4 \\ x &= \ln 4. \end{aligned}$$
   Il y a une seule solution : $x = \ln 4$.
3. $$\begin{aligned} e^{2x} &\leq 2 \\ \ln\left(e^{2x}\right) &\leq \ln 2 \qquad \text{(car la fonction ln est strictement croissante sur }]0;+\infty[) \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &\leq \frac{\ln 2}{2} \\ x &\leq \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$
   Les solutions sont les nombres de l'intervalle $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$.
4. $e^{-2x} = -5$.
   Il n'y a pas de solution car une exponentielle est strictement positive.
5. On résout dans $]0;+\infty[$ (c'est-à-dire que les x que l'on considère doivent être strictement positifs – la raison en est le terme $\ln x$) :
   $$\begin{aligned} \ln x &= 3 \\ e^{\ln x} &= e^3 \\ x &= e^3. \end{aligned}$$
   Il y a une seule solution : $x = e^3$.
6. On résout dans $]0;+\infty[$:
   $$\begin{aligned} 2\ln x - 3 &= 0 \\ \frac{\cancel{2}\ln x}{\cancel{2}} &= \frac{3}{2} \\ \ln x &= \frac{3}{2} \\ e^{\ln x} &= e^{\frac{3}{2}} \\ x &= e^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Il y a une seule solution : $x = e^{\frac{3}{2}}$.

7. $2x-3>0$ lorsque $x>\frac{3}{2}$, donc on résout dans $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$:

$$\begin{aligned}
\ln(2x-3) &= 0\\
e^{\ln(2x-3)} &= e^0\\
2x-3 &= 1\\
\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{3+1}{2}\\
x &= 2.
\end{aligned}$$

Il y a une seule solution : $x=2$.

8. On résout dans $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\ln x &\leq 2\\
e^{\ln x} &\leq e^2 \qquad \text{(car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{)}\\
x &\leq e^2.
\end{aligned}$$

⚠Les solutions ne sont pas les nombres de l'intervalle $\left]-\infty;e^2\right]$, car on résout dans $]0;+\infty[$.

Les solutions sont les nombres de l'intervalle $\left]0;e^2\right]$.

9. On note (E_1) l'équation à résoudre :

$$e^{2x}-3e^x-4=0 \qquad (E_1).$$

Cette équation se réécrit

$$\left(e^x\right)^2-3e^x-4=0,$$

donc en posant $X=e^x$:

$$X^2-3X-4=0 \qquad (E_2).$$

Nous allons résoudre (E_2). Les solutions que nous trouverons seront les valeurs possibles de X. Mais attention, c'est (E_1) que l'on nous a demandé de résoudre, donc il faudra déduire de la résolution de (E_2) celle de (E_1).

Allons-y pour (E_2) : c'est une équation habituelle du second degré. Le discriminant est $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times(-4)=25$, donc (E_2) a deux solutions :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2}=\frac{3+5}{2}=4\,,\ X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-5}{2}=-1.$$

Revenons à (E_1). Puisque $X=e^x$ et compte tenu des solutions que l'on vient de trouver pour (E_2), il y a deux possibilités :

$$e^x=4 \text{ ou } e^x=-1.$$

La première de ces deux équations a pour solution $x=\ln 4$. La deuxième, elle, n'a pas de solution, car une exponentielle est strictement positive.

Conclusion : (E_1) a une seule solution : $x=\ln 4$.

Exercice 155 On cherche l'ensemble de définition de la fonction définie par

$$f(x)=\ln\left(-x^2+2x+3\right).$$

Le seul problème concerne le logarithme : on ne peut calculer $\ln X$ que quand $X>0$. Donc $f(x)$ est bien défini si, et seulement si, $-x^2+2x+3>0$.

Nous sommes ramenés à l'étude du signe de $-x^2+2x+3$: le discriminant est $\Delta=2^2-4\times(-1)\times3=16$, donc il y a deux racines :

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{-2-4}{-2}=\frac{-6}{-2}=3 \qquad , \qquad x_2=\frac{-2+4}{-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

On a donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $-x^2+2x+3$ est strictement positif lorsque $x \in]-1;3[$, donc l'ensemble de définition de f est $]-1;3[$.

Exercice 156 Dans chaque question, on utilise la formule

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

1. $f(x) = \ln(2x-1)$, définie pour $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ (car $2x-1>0 \iff x > \frac{1}{2}$).

   On a
   $$u(x) = 2x-1 \qquad , \qquad u'(x) = 2.$$
   Donc pour tout $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$:
   $$f'(x) = \frac{2}{2x-1}.$$

2. $g(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$, définie pour $x \in \mathbb{R}$ (car $1+\mathrm{e}^{-x}>0$ pour tout réel x).

   On a
   $$u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x} \qquad , \qquad u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$g'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Exercice 157

1.
$$\begin{aligned}
\ln 8 &= \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2\\
\ln\left(\frac{1}{4}\right) &= -\ln 4 = -\ln\left(2^2\right) = -2\ln 2\\
\ln 6 - \ln 3 + \ln\left(\sqrt{2}\right) &= \ln\left(\frac{6}{3}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
2\ln a + \ln b &= \ln\left(a^2\right) + \ln b = \ln\left(a^2 \times b\right)\\
\ln a - 2\ln b &= \ln a - \ln\left(b^2\right) = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right)\\
\ln a + \frac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln\left(\sqrt{b}\right) = \ln\left(a \times \sqrt{b}\right).
\end{aligned}$$

3. • On résout l'équation $\mathrm{e}^{-x} - 1 = 3$:
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x} - 1 &= 3\\
\mathrm{e}^{-x} &= 1+3\\
\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) &= \ln 4\\
-x &= \ln 4\\
x &= -\ln 4\\
x &= \ln\left(\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$
   Il y a une seule solution : $x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

- On résout l'équation $e^{2x}+1=10$:

$$\begin{aligned}
e^{2x}+1&=10\\
e^{2x}&=10-1\\
\ln\left(e^{2x}\right)&=\ln 9\\
2x&=\ln 9\\
x&=\frac{1}{2}\ln 9\\
x&=\ln\left(\sqrt{9}\right).
\end{aligned}$$

  Il y a une seule solution : $x=\ln\left(\sqrt{9}\right)$.

Exercice 158 On résout l'équation

$$(\ln x)^2-3\ln x-4=0 \qquad (E)$$

dans $]0;+\infty[$.

On pose $X=\ln x$; l'équation se réécrit alors $X^2-3X-4=0$.
Le discriminant est $\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-4)=25$, donc il y a deux racines :

$$X_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{3-5}{2}=-1 \qquad , \qquad X_2=\frac{3+5}{2}=4.$$

Revenons à (E). Il y a deux possibilités :

$\ln x=-1$	ou	$\ln x=4$
$x=e^{-1}$	ou	$x=e^4$

Il y a donc deux solutions (qui sont bien dans $]0;+\infty[$) : $x=e^{-1}$ et $x=e^4$.

Exercice 159 D'après le codage, $\ln a$ et $\ln b$ sont deux nombres opposés :

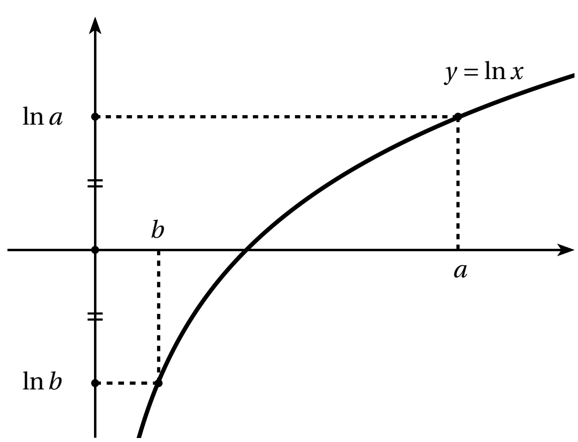
$$\ln b=-\ln a,$$

donc

$$\ln b=\ln\left(\frac{1}{a}\right).$$

On en déduit

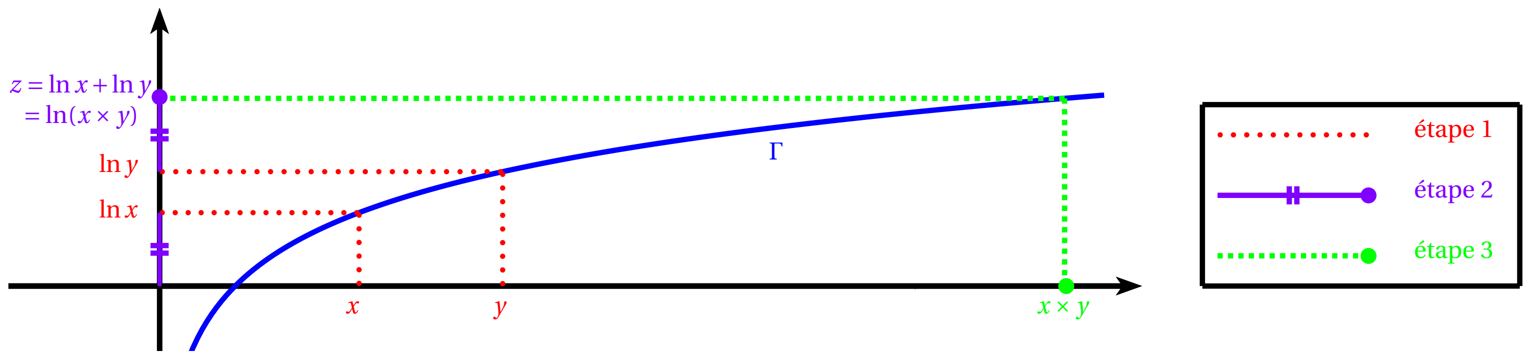
$$\begin{aligned}
e^{\ln b}&=e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}\\
b&=\frac{1}{a}.
\end{aligned}$$



Exercice 160 Voici comment on construit le produit de deux réels x, y, à partir de la courbe Γ de la fonction ln :

- Étape 1 : on place x, y sur l'axe des abscisses et leurs images $\ln x$, $\ln y$ sur l'axe des ordonnées.

- Étape 2 : on construit $z = \ln x + \ln y$ sur l'axe des ordonnées, en reportant une longueur au compas.
- Étape 3 : on a aussi $z = \ln(x \times y)$, donc on obtient $x \times y$ en reportant sur l'axe des abscisses.



Exercice 161 La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln x - x^2.$$

1. $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e^1 \times \frac{1}{2} - e^1 = -\frac{1}{2}e.$
2. On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2, & v(x) &= \ln x, \\ u'(x) &= 2x, & v'(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

   On obtient, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} - 2x \\ &= 2x \ln x + x - 2x \\ &= 2x \ln x - x \\ &= x(2\ln x - 1). \end{aligned}$$

3. On résout l'équation :

$$2\ln x - 1 = 0 \iff 2\ln x = 1 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff e^{\ln x} = e^{\frac{1}{2}} \iff x = e^{\frac{1}{2}}.$$

   On a donc le tableau :

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$2\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e$	$\nearrow$	

Exercice 162 On résout l'inéquation d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

$$2^n \geq 10^{100}.$$

$$\begin{aligned} 2^n \geq 10^{100} &\iff \ln\left(2^n\right) \geq \ln\left(10^{100}\right) && \text{(par stricte croissance de la fonction ln)} \\ &\iff n\ln 2 \geq 100\ln 10 \\ &\iff n \geq \frac{100\ln 10}{\ln 2} && (\triangle \text{ car } \ln 2 > 0, \text{ donc } \geq \text{ reste } \geq). \end{aligned}$$

Avec la calculatrice on trouve $\frac{100\ln 10}{\ln 2} \approx 332,19$, donc l'ensemble des solutions est $[\![333;+\infty[\![$.

Exercice 163

1. $100\ \% - 8\ \% = 92\ \% = 0,92$, donc une diminution de 8 % revient à faire une multiplication par $0,92$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $q = 0,92$ et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times 0,92^n.$$
2. On cherche la demi-vie de l'iode 131, c'est-à-dire le nombre de jours après lequel il restera la moitié de l'iode 131 ingérée au départ.

   $10 \div 2 = 5$, donc il s'agit de résoudre l'inéquation $v_n \leq 5$.
$$\begin{aligned} 10 \times 0,92^n \leq 5 &\iff 0,92^n \leq \frac{5}{10} \\ &\iff 0,92^n \leq 0,5 \\ &\iff \ln\left(0,92^n\right) \leq \ln(0,5) && \text{(par stricte croissance de la fonction ln)} \\ &\iff n\ln 0,92 \leq \ln 0,5 \\ &\iff n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,92} && (\triangle \text{ car } \ln 0,92 < 0, \text{ donc } \leq \text{ devient } \geq). \end{aligned}$$
   Avec la calculatrice on trouve $\frac{\ln 0,5}{\ln 0,92} \approx 8,31$, donc la demi-vie de l'iode 131 est de 8 jours et quelques.

Exercice 164

1. On répète 10 épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $7\ \% = 0,07$, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$, $p = 0,07$.
2. La probabilité pour qu'exactement deux personnes portent le gène ZXC est
$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,07^2 \times (1-0,07)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,07^2 \times 0,93^8 \approx 0,12.$$
3. On cherche le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes porte le gène ZXC, soit supérieure à 99 %.

   Le test auprès de n personnes revient à répéter n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $0,07$. Donc si l'on note X_n le nombre de porteurs du gène ZXC parmi elles, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,07$.

   La probabilité qu'au moins une de ces personnes porte le gène ZXC est
$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1} \times \underbrace{0,07^0}_{=1} \times 0,93^n = 1 - 0,93^n.$$
   Nous sommes ainsi ramenés à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $1 - 0,93^n \geq 0,99$.
$$\begin{aligned} 1 - 0,93^n \geq 0,99 &\iff 1 - 0,99 \geq 0,93^n \\ &\iff 0,01 \geq 0,93^n \\ &\iff \ln 0,01 \geq \ln\left(0,93^n\right) && \text{(par stricte croissance de la fonction ln)} \\ &\iff \ln 0,01 \geq n\ln 0,93 \\ &\iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,93} \leq n && (\triangle \text{ car } \ln 0,93 < 0, \text{ donc } \geq \text{ devient } \leq). \end{aligned}$$
   Avec la calculatrice on trouve $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,93} \approx 63,46$, donc il faut interroger au moins 64 personnes.

Exercice 165 On abrégera « croissance comparée » en C.C.

1. $\lim_{x\to+\infty}(-x+1)=-\infty$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x+1} = \text{« } \mathrm{e}^{-\infty} \text{ »} = 0.$$
2. $\lim_{x\to-\infty}(-x+1)=+\infty$ donc
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x+1} = \text{« } \mathrm{e}^{+\infty} \text{ »} = +\infty.$$
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ par croissance comparée.
4. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to-\infty}(x\times\mathrm{e}^{-x})=\text{« } (-\infty)\times(+\infty) \text{ »}=-\infty$.
5. $\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-x+1)=\text{« } 0-(-\infty)+1 \text{ »}=+\infty$.
6. On met e^x en facteur : pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^x-x+1=\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)=\mathrm{e}^x\left(1-x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\right).$$
$$\left.\begin{array}{ll}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x & =+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}(1-x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}) & =1-0+0=1 \text{ (par C.C. pour le terme } x\mathrm{e}^{-x})\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x-x+1\right)=\text{« } +\infty\times 1 \text{ »}=+\infty.$$
7. $$\left.\begin{array}{ll}\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+1) & =0+1=1\\ \lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+2) & =0+2=2\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}.$$
8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}=\frac{1}{2}$ d'après la question précédente, donc
$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$$
par continuité de la fonction ln en $\frac{1}{2}$.
9. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ par croissance comparée.
10. Si $x>1$, alors $0<\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}$ (car deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses), donc en multipliant par $\ln x$ (qui est strictement positif, puisqu'on a supposé $x>1$) :
$$0<\frac{\ln x}{x+1}<\frac{\ln x}{x}.$$
Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}0=0$, donc d'après le théorème des gendarmes :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}=0.$$
11. $\lim_{x\to0,\ x>0}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to0,\ x>0}\left(\ln x\times\frac{1}{x}\right)=\text{« } (-\infty)\times(+\infty) \text{ »}=-\infty$.
12. On développe : pour tout $x>0$,
$$x(\ln x+1)=x\ln x+x.$$
$$\left.\begin{array}{ll}\lim_{x\to0,\ x>0}x\ln x & =0 \text{ (par C.C.)}\\ \lim_{x\to0,\ x>0}x & =0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to0,\ x>0}x(\ln x+1)=0+0=0.$$
13. D'après le point 6, $\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x-x+1)=+\infty$, donc
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\mathrm{e}^x-x+1\right)=\text{« } \ln(+\infty) \text{ »}=+\infty.$$
14. $\lim_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}=0$ par C.C., donc $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x\mathrm{e}^{-x})=\ln(1+0)=0$, par continuité de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0.

Exercice 166 Soit $q > 1$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire

$$q^n = \mathrm{e}^{\ln(q^n)} = \mathrm{e}^{n \ln q}.$$

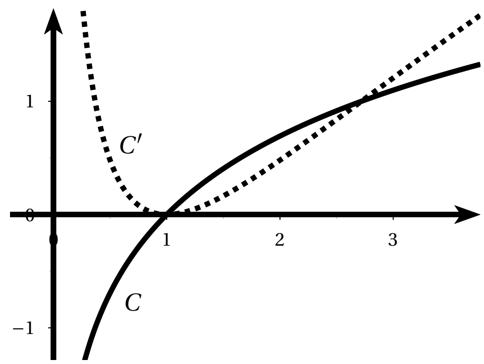
Or $q > 1 \implies \ln q > 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n \ln q\right) = +\infty$, et donc

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n \ln q} = « \ \mathrm{e}^{+\infty} \ » = +\infty.$$

Exercice 167 Les fonctions f et g sont définies sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x \qquad\qquad g(x) = (\ln x)^2.$$

On note C et C' leurs courbes représentatives respectives, tracées ci-dessous.



1. On utilise la formule $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$, avec

$$u(x) = \ln x, \qquad u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad n = 2.$$

Pour tout $x \in \,]0; +\infty[$:

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x.$$

On a donc le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$2 \times \frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(1) = (\ln 1)^2 = 0^2 = 0.$$

On calcule les limites en $+\infty$ et à droite en 0 :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = « \ (+\infty)^2 \ » = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0,\ x > 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0,\ x > 0} (\ln x)^2 = « \ (-\infty)^2 \ » = +\infty$.

2. Étudier les positions relatives de C et C' revient à étudier le signe de leur différence. Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\ln x - (\ln x)^2 = 1 \times \ln x - \ln x \times \ln x = \ln x(1 - \ln x).$$

On résout les équations :

- $\ln x = 0 \iff e^{\ln x} = e^0 \iff x = 1,$
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff e^1 = e^{\ln x} \iff e^1 = x.$

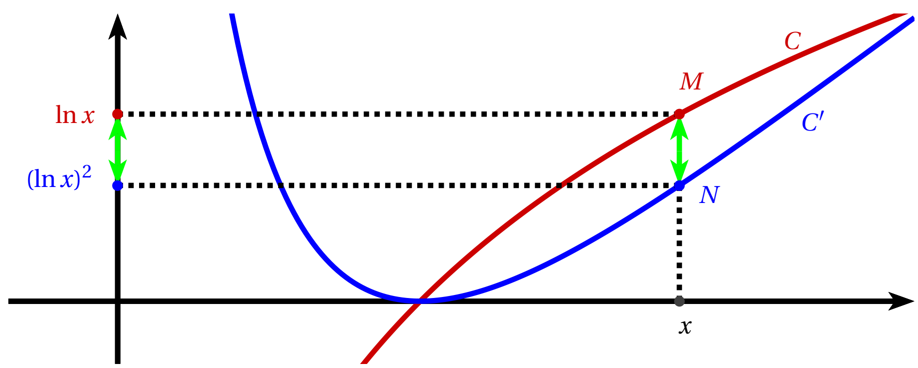
On a donc le tableau :

x	0		1		e^1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \ln x$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x(1 - \ln x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

- les courbes C et C' se coupent aux points d'abscisses 1 et e^1 ;
- la courbe C est au dessus de C' sur l'intervalle $\left]1;e^1\right[$;
- la courbe C est en dessous de C' sur les intervalles $]0;1[$ et $\left]e^1;+\infty\right[$.

3. Pour tout réel $x \in [1;e]$, on note M (respectivement N) le point de C (resp. C') d'abscisse x.



La longueur MN est la longueur verte. Comme $y_M = f(x) = \ln x$ et $y_N = g(x) = (\ln x)^2$:

$$MN = y_M - y_N = \ln x - (\ln x)^2.$$

Étudier la valeur de x pour laquelle la longueur MN est maximale revient donc à déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction h, définie sur $\left[1;e^1\right]$ par $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$, atteint son maximum. Pour résoudre le problème, on utilise la dérivation : pour tout $x \in \left[1;e^1\right]$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= \frac{1 - 2\ln x}{x}. \end{aligned}$$

Or

$$1 - 2\ln x = 0 \iff 1 = 2\ln x \iff \frac{1}{2} = \ln x \iff e^{\frac{1}{2}} = e^{\ln x} \iff e^{\frac{1}{2}} = x.$$

On a donc le tableau (il est inutile ici de compléter l'extrémité des flèches) :

x	1		$e^{\frac{1}{2}}$		e^1
$1-2\ln x$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Conclusion : h atteint son maximum pour $x = e^{\frac{1}{2}}$, donc la longueur MN est maximale lorsque $x = e^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 168 1. Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x.$$

(a) Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$u'(x) = 3x^2 + 2 \times \frac{1}{x}.$$

Clairement u' est strictement positive. On a donc le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	$\|\|$				
$u(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

(b) $u(1) = 1^3 - 1 + 2\ln 1 = 1 - 1 + 2 \times 0 = 0$. On a donc le tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

2. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

(a) On utilise la formule pour la dérivée d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, avec

$$u(x) = \ln x, \qquad v(x) = x^2,$$
$$u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad v'(x) = 2x.$$

On obtient, pour tout $x \in \,]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{\left(x^2\right)^2} \\
&= 1 - \frac{x - \ln x \times 2x}{x^4} \\
&= 1 - \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln x)}{\cancel{x} \times x^3} \\
&= \frac{x^3}{x^3} - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{u(x)}{x^3}.
\end{aligned}$$

(b) On a étudié le signe de u dans la question 1.(b). On a donc le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$u(x)$	||	$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = 1 - \frac{\ln 1}{1^2} = 1 - \frac{0}{1} = 1.$$

(c) On commence par calculer $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} f(x)$. Pour cela on écrit $f(x) = x - \ln x \times \frac{1}{x^2}$.

On a

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{x \to 0,\ x>0} \ln x &= -\infty \\
\lim_{x \to 0,\ x>0} \frac{1}{x^2} &= +\infty
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to 0,\ x>0} \ln x \times \frac{1}{x^2} = -\infty,$$

et donc

$$\lim_{x \to 0,\ x>0} \left(x - \ln x \times \frac{1}{x^2}\right) = \text{« } 0 - (-\infty) \text{ »} = +\infty.$$

Ensuite on calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x &= +\infty \\
\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} &= 0 \quad \text{par croissance comparée}
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty.$$

Exercice 169 1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln x + x - 2.$$

(a)

- $$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} 2\ln x & = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} (x-2) & = 0-2 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} g(x) = -\infty.$$
- $$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln x & = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (x-2) & = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$$

(b) Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$:

$$g'(x) = 2\times\frac{1}{x}+1 = \frac{2}{x}+1.$$

Clairement g' est strictement positive sur $\left]0;+\infty\right[$, donc on a le tableau :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$		$+$		
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c)
- La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$;
- $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$;
- $0 \in \left]-\infty;+\infty\right[$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution α dans $\left]0;+\infty\right[$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient l'encadrement

$$1,37 < \alpha < 1,38.$$

(d) On déduit des questions précédentes le tableau de signe de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x}\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a)

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \frac{x-2}{x} & = « \frac{0-2}{0^+} » = « \frac{-2}{0^+} » = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \ln x & = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} f(x) = +\infty.$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote (verticale) à $\mathscr{C}_f$.

(b) On écrit, pour $x > 0$:

$$\frac{x-2}{x} = \frac{x}{x}-\frac{2}{x} = 1-2\times\frac{1}{x}.$$

On peut dès lors calculer la limite :

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-2}{x} & = 1-2\times 0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x & = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(c) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \left(1 - 2 \times \frac{1}{x}\right) \ln x$.

On utilise la formule pour la dérivée d'un produit, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 - 2 \times \frac{1}{x}, & v(x) &= \ln x, \\ u'(x) &= -2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}, & v'(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x^2} \times \ln x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2\ln x}{x^2} + \frac{1 \times x}{x \times x} - \frac{2}{x} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2\ln x}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{2\ln x + x - 2}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

(d) Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x > 0$ et que $x^2 > 0$, f' et g sont du même signe.

On a étudié le signe de g dans la question 1.(d) ; on en déduit le signe de f' et les variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative Γ de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on étudie le signe de la différence : pour tout $x > 0$,

$$f(x) - \ln x = \frac{x-2}{x} \ln x - \ln x = \ln x \left(\frac{x-2}{x} - 1\right) = \ln x \left(\frac{x-2}{x} - \frac{x}{x}\right) = \ln x \times \frac{-2}{x}.$$

Or

$$\ln x = 0 \iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^0 \iff x = 1,$$

donc on obtient :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2}{x}$		$-$		$-$	
$\ln x \times \frac{-2}{x}$		$+$	0	$-$	
Positions relatives des courbes		$\mathscr{C}_f$ au-dessus de Γ	Se coupent	$\mathscr{C}_f$ en-dessous de Γ	

Exercice 170 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

On note (C) sa courbe représentative et (T) sa tangente au point de coordonnées $(0;0)$.

1. (a) Pour avoir l'équation de la tangente, il faut d'abord calculer la dérivée. Pour cela, on utilise la formule $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, avec

$$u(x) = 1+x, \qquad u'(x) = 1.$$

Pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

L'équation de T est

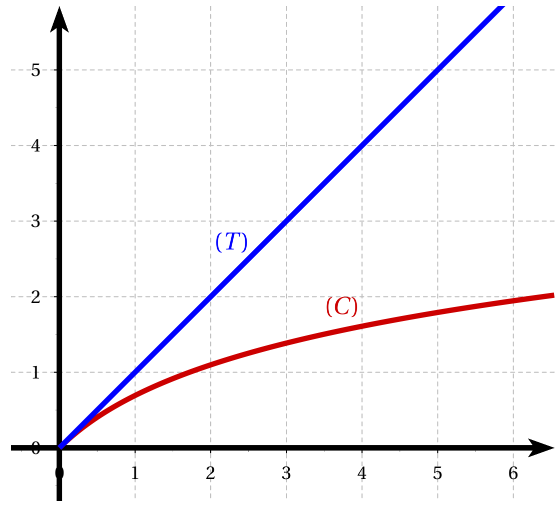
$$y = f'(0)(x-0) + f(0).$$

On calcule donc : $f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$, et l'on obtient :

$$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$T : y = 1(x-0) + 0$$
$$T : y = x.$$

Pour tracer la courbe (C), il suffit de translater la courbe de la fonction ln de 1 carreau vers la gauche[14]. Quant à la droite d'équation $y = x$, c'est la première bissectrice – on l'a déjà tracée maintes fois.

14. En effet, en posant $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \ln x$, les fonctions f et g prennent les mêmes valeurs, mais g a « un temps de retard » sur f. Par exemple, $f(2) = \ln(1+2) = \ln(3) = g(3)$, ou encore $f(5) = \ln(5+1) = \ln 6 = g(6)$.



(b) Pour étudier la convexité, on utilise la dérivée seconde. On sait déjà que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0;+\infty[$. On utilise donc la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$, avec

$$u(x) = 1 + x, \qquad u'(x) = 1.$$

Pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

La dérivée seconde est clairement strictement négative sur $[0;+\infty[$, donc f est concave sur cet intervalle. D'après une propriété du cours de début d'année, la tangente (T) est au dessus de (C) sur $[0;+\infty[$. Autrement dit, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\ln(1+x) \leq x.$$

2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 5$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

(a) Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs revient à prouver que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On fait une démonstration par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathscr{P}_n \, : \, u_n \geq 0.$$

- **Initialisation.** $u_0 = 5 \geq 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc

$$u_k \geq 0.$$

  Donc :

$$\begin{aligned} 1 + u_k &\geq 1 + 0 \\ 1 + u_k &\geq 1 \\ \ln(1+u_k) &\geq \ln 1 \qquad \text{(car la fonction ln est strictement croissante sur }]0;+\infty[) \\ u_{k+1} &\geq 0. \end{aligned}$$

  La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.
- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien à termes positifs.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n) - u_n.$$

On sait d'après la question 1.(b) que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in [0;+\infty[$. Donc

$$\ln(1+x) - x \leq 0,$$

et en appliquant ce résultat avec $x = u_n$ (ce qui est licite, puisqu'on a vu que tous les u_n étaient positifs dans la question précédente) :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n) - u_n \leq 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme de plus elle est minorée par 0 (une nouvelle fois parce qu'on a prouvé qu'elle était à termes positifs), elle converge [15]. De plus, sa limite ℓ est un nombre réel positif.

(c) On fait le raisonnement désormais classique :
- D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell) = \ln(1+\ell)$ car f est continue sur $[0;+\infty[$.

On en déduit $\ell = \ln(1+\ell)$, et donc $\ell = 0$.

Remarque : Je suis allé un peu vite en besogne dans la conclusion ci-dessus. Pourquoi a-t-on $\ell = 0$? Parce que ℓ est solution de l'équation $x = \ln(1+x)$, et donc les courbes (T) et (C) se coupent au point d'abscisse ℓ. Il semble clair sur le graphique et compte tenu de la concavité de f que cela ne se produit que lorsque $\ell = 0$. Mais raisonner à partir du graphique est interdit et il faudrait une preuve plus rigoureuse. Je m'arrête là cependant et je vous laisse chercher cette preuve plus rigoureuse (indication : poser $h(x) = x - \ln(1+x)$ pour $x \in [0;+\infty[$).

11 Équations différentielles

Exercice 171 À chaque fois, C désigne une constante réelle. Les primitives de f sont notées F, celles g sont notée G, etc.

1. $f(x) = 2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.
$$F(x) = x^2 - 3x + C.$$
2. $g(x) = x^2,\ x\in\mathbb{R}$.
$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + C.$$
3. $h(x) = 6x^3 - 3x^2 + 4x - 1,\ x\in\mathbb{R}$.
$$H(x) = 6\times\frac{1}{4}x^4 - 3\times\frac{1}{3}x^3 + 4\times\frac{1}{2}x^2 - x + C = \frac{3}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 - x + C.$$
4. $i(x) = \mathrm{e}^x + x,\ x\in\mathbb{R}$.
$$I(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$
5. $j(x) = \mathrm{e}^{-2x},\ x\in\mathbb{R}$.
$$J(x) = \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + C = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + C.$$
6. $k(x) = 3\mathrm{e}^{0,1x},\ x\in\mathbb{R}$.
$$K(x) = 3\times\frac{1}{0,1}\mathrm{e}^{0,1x} + C = 30\mathrm{e}^{0,1x} + C.$$
7. $\ell(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

   On reconnaît la formule $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = x^2+1$, donc les primitives sont de la forme
$$L(x) = \ln\left(x^2+1\right) + C.$$
8. $m(x) = \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x},\ x\in\mathbb{R}$.
   On reconnaît encore la formule $\frac{u'}{u}$; les primitives sont donc de la forme
$$M(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + x\right) + C.$$

15. Toute suite décroissante minorée converge, c'est le théorème de limite monotone.

Exercice 172 On utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec

$$\begin{aligned} u(x) &= x, & v(x) &= \ln x, \\ u'(x) &= 1, & v'(x) &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

La fonction F est donc bien une primitive de la fonction ln.

Exercice 173

1. Les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = t - 1$ sont les fonctions de la forme

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + C,$$

où C est une constante.

De plus, on a les équivalences

$$y(0) = -5 \iff \frac{1}{2} \times 0^2 - 0 + C = -5 \iff C = -5.$$

Conclusion : l'unique solution de l'équation différentielle $y'(t) = t - 1$ vérifiant de plus la condition initiale $y(0) = -5$ est

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - 5.$$

2. Les solutions de l'équation différentielle $z'(x) = x^2$ sont les fonctions de la forme

$$z(x) = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

où C est une constante.

Exercice 174

1. D'après le théorème 3 du cours, l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 3y$$

a pour solutions les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{3x}$, où C est une constante.

2. On a les équivalences :

$$y(0) = 4 \iff C\mathrm{e}^{3\times 0} = 4 \iff C \times 1 = 4 \iff C = 4.$$

Conclusion : la seule solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 4$ est la fonction définie par

$$y(x) = 4\mathrm{e}^{3x}.$$

Exercice 175

1. L'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2y = 0$$

se réécrit $y' = -2y$, donc d'après le théorème 3 du cours, ses solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est une constante.

2. On a les équivalences :

$$y(1) = 10 \iff C\mathrm{e}^{-2\times 1} = 10 \iff C\underbrace{\mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^2}_{=1} = 10 \times \mathrm{e}^2 \iff C = 10\mathrm{e}^2.$$

Conclusion : la seule solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 10$ est la fonction définie par

$$y(x) = 10\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-2x} = 10\mathrm{e}^{-2x+2}.$$

Exercice 176 1. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = -0,12y$ donc f est définie par

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-0,12x},$$

où C est une constante.
On sait de plus que $f(0) = 1\,013{,}25$, donc $C\mathrm{e}^{-0,12\times 0} = 1\,013{,}25$, et ainsi $C = 1\,013{,}25$.
Conclusion :

$$f(x) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0,12x}.$$

2. La pression atmosphérique à 150 m d'altitude est

$$f(0,150) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0,12\times 0,150} \approx 995,17 \text{ hPa}.$$

3. On résout l'équation $f(x) = 700$:

$$1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0,12x} = 700 \iff \mathrm{e}^{-0,12x} = \frac{700}{1\,013{,}25} \iff \ln\left(\mathrm{e}^{-0,12x}\right) = \ln\left(\frac{700}{1\,013{,}25}\right)$$
$$\iff -0,12x = \ln\left(\frac{700}{1\,013{,}25}\right) \iff x = -\frac{\ln\left(\frac{700}{1\,013{,}25}\right)}{-0,12} \iff x \approx 3,082.$$

Conclusion : c'est à 3 082 m d'altitude que la pression atmosphérique est égale à 700 hPa.

Exercice 177 1. D'après le théorème 4 du cours avec $a = 2$ et $b = 6$, les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 2y + 6$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \frac{6}{2} = C\mathrm{e}^{2x} - 3,$$

où C est une constante.

2. On a les équivalences :

$$y(0) = 2 \iff C\mathrm{e}^{2\times 0} - 3 = 2 \iff C - 3 = 2 \iff C = 5.$$

Conclusion : la seule solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$ est la fonction définie par

$$y(x) = 5\mathrm{e}^{2x} - 3.$$

Exercice 178 1. L'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = 1$$

se réécrit

$$y' = -y + 1.$$

D'après le théorème 4 du cours, ses solutions sont de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{-1} = C\mathrm{e}^{-x} + 1,$$

où C est une constante.

2. On a les équivalences :

$$y(2) = 10 \iff C\mathrm{e}^{-2} + 1 = 10 \iff C\mathrm{e}^{-2} = 9 \iff C = \frac{9}{\mathrm{e}^{-2}} = 9\mathrm{e}^{2}.$$

Conclusion : la seule solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$ est la fonction définie par

$$y(x) = 9\mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{-x} + 1 = 9\mathrm{e}^{-x+2} + 1.$$

Exercice 179 Un corps de masse m est lâché en chute libre sans vitesse initiale. Pour $t \geq 0$, sa vitesse v est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = g,$$

où k est le coefficient de frottement et g l'accélération de la pesanteur.

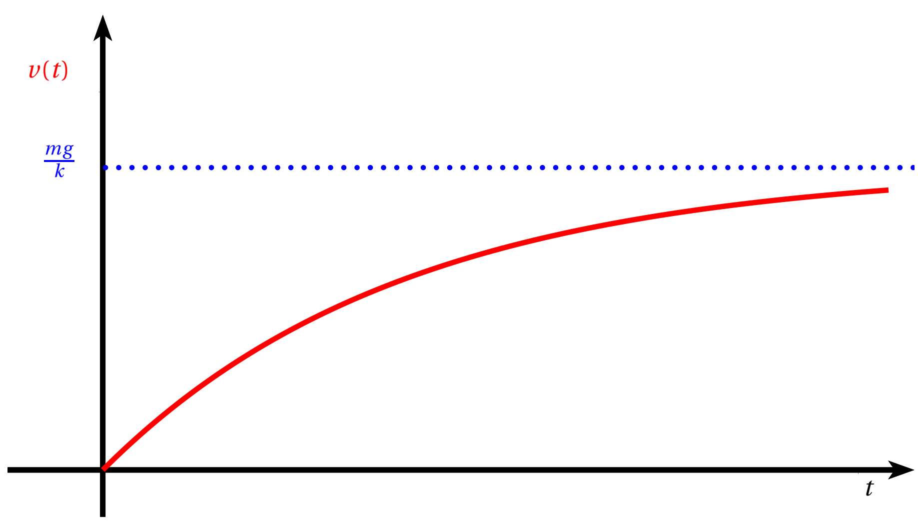
1. L'équation différentielle $y'(t)+\frac{k}{m}y(t)=g$ se réécrit $y'(t)=-\frac{k}{m}y(t)+g$, donc d'après le théorème 4 du cours, la vitesse est une fonction de la forme
$$v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}-\frac{g}{-\frac{k}{m}}=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$
De plus, le corps est lâché sans vitesse initiale, donc $v(0)=0$. On a ainsi les équivalences :
$$Ce^{-\frac{k}{m}\times 0}+\frac{mg}{k}=0 \iff C+\frac{mg}{k}=0 \iff C=-\frac{mg}{k}.$$
Conclusion : la vitesse du corps au temps t est
$$v(t)=-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

2. Pour tout $t\geq 0$:
$$v'(t)=-\frac{mg}{k}\times\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t}=ge^{-\frac{k}{m}t}.$$
Clairement v' est strictement positive, donc v est strictement croissante[16] :

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$v'(t)$	$+$
$v(t)$	0 $\nearrow$ $\frac{mg}{k}$

$-\frac{k}{m}<0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{k}{m}t}=0$. On en déduit
$$\lim_{t\to+\infty}v(t)=\frac{mg}{k}.$$

3. Allure du graphe de v :



Remarque pour les élèves qui font la spécialité sciences physiques :

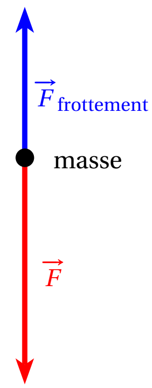
16. C'est bien normal pour une masse en chute libre!

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}, \tag{4}$$

où l'on somme sur toutes les forces qui s'appliquent sur la masse. Ces dernières sont au nombre de deux :

- le poids, dirigé vers le bas, d'intensité mg ;
- les forces de frottement, dirigées vers le haut (car elles freinent la chute), et que l'on suppose proportionnelles à la vitesse de la masse, avec un coefficient de proportionnalité égal à k.



Quant à l'accélération, on sait que c'est la dérivée de la vitesse : $a = v'$. Donc en prenant comme sens positif le sens de haut en bas et en appliquant (4), on obtient :

$$mg - kv = mv'.$$

En transposant et en divisant par m, on aboutit finalement à l'équation (E) :

$$v' + \frac{k}{m}v = g.$$

Exercice 180 L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence. Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.
La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction C du temps t, exprimé en minutes. On admet que la fonction C est solution de l'équation différentielle

$$y' + 0,12y = 0,003$$

sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de 0,5 moles par litre.

1. L'équation différentielle $y' + 0,12y = 0,003$ se réécrit

   $$y' = -0,12y + 0,003,$$

   donc d'après le théorème 4 du cours, ses solutions sont de la forme

   $$C(t) = C\mathrm{e}^{-0,12t} - \frac{0,003}{-0,12} = C\mathrm{e}^{-0,12t} + 0,025,$$

   où C est une constante.

   On sait que la concentration au temps $t = 0$ est de 0,5 mol/ℓ, donc $y(0) = 0,5$. On résout donc une équation pour trouver C :

   $$C\mathrm{e}^{-0,12\times 0} + 0,025 = 0,5 \iff C + 0,025 = 0,5 \iff C = 0,5 - 0,025 = 0,475.$$

   Finalement la concentration au temps t est

   $$C(t) = 0,475\mathrm{e}^{-0,12t} + 0,025 \text{ mol}/\ell.$$

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,12t} = 0$ donc

   $$\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0,475 \times 0 + 0,025 = 0,025.$$

3. Au bout d'une heure (60 minutes), la concentration d'octane est

   $$C(60) = 0,475\mathrm{e}^{-0,12\times 60} + 0,025 \approx 0,0256 \text{ mol}/\ell,$$

   ce qui est tout proche de la concentration limite (0,025 mol/ℓ). Plus précisément :

   - entre le temps $t = 0$ et le temps $t = +\infty$, la concentration baisse de $0,5 - 0,025 = 0,475$ mol/ℓ ;
   - entre le temps $t = 0$ et le temps $t = 60$, la concentration baisse de $0,5 - 0,0256 = 0,4744$ mol/ℓ environ ;
   - $\frac{0,4744\times 100}{0,475} \approx 99,9$.

Conclusion : 99,9 % du produit pouvant être transformé s'est déjà transformé au bout d'une heure. Inutile donc de prolonger la transformation au-delà de cette durée.

Exercice 181 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) = y(x) - x^2 + x.$$

1. On remplace y par y_P dans chacun des deux membres :
   - $y'_P(x) = 2x + 1$;
   - $y_P(x) - x^2 + x = x^2 + x + 1 - x^2 + x = 2x + 1$.

   On a bien $y'_P(x) = y_P(x) - x^2 + x$, c'est-à-dire que y_P est une solution particulière de (E).
2. D'après le théorème 3 du cours, les solutions de (E_0) : $y'(x) = y(x)$ sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^x$, où C est une constante.
3. D'après le théorème 5 du cours, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme
$$y(x) = C\mathrm{e}^x + y_P(x) = C\mathrm{e}^x + x^2 + x + 1,$$
   où C est une constante.

   De plus,
$$y(0) = -1 \iff C\mathrm{e}^0 + 0^2 + 0 + 1 = -1 \iff C + 1 = -1 \iff C = -2,$$
   donc l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = -1$ est la fonction définie par
$$y(x) = -2\mathrm{e}^x + x^2 + x + 1.$$

Exercice 182 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

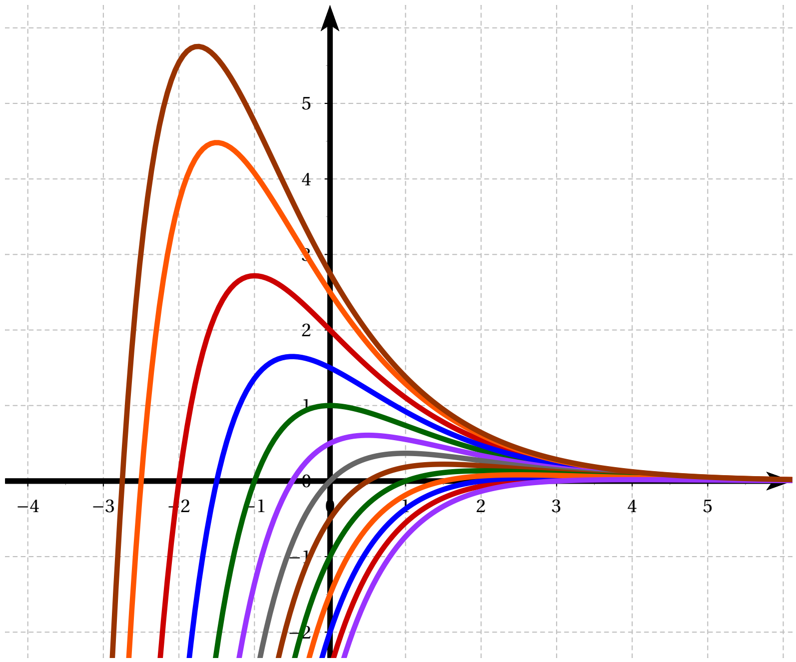
1. On calcule d'abord la dérivée de f : pour cela, on utilise la formule pour la dérivée d'un produit avec
$$\begin{aligned} u(x) &= x, & v(x) &= \mathrm{e}^{-x}, \\ u'(x) &= 1, & v'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$
   On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$
   Ensuite on remplace y par f dans le membre de gauche de l'équation :
$$f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}.$$
   Conclusion : f est bien solution de (E).
2. L'équation (E_0) se réécrit $y'(x) = -y(x)$, donc d'après le théorème 3 du cours, ses solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-x}$, où C est une constante.
3. L'équation (E) se réécrit $y'(x) = -y(x) + \mathrm{e}^{-x}$, donc d'après le théorème 5 du cours, ses solutions sont les fonctions de la forme
$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + f(x) = C\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},$$
   où C est une constante.

Remarque : Donnons-nous une équation différentielle (E) de la forme $y' = ay + g$, où g est une fonction continue, ainsi qu'un point du plan de coordonnées $\left(x_0; y_0\right)$. Dans ce cas, il existe une unique solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Par exemple, avec l'équation (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ de l'exercice précédent, le lecteur vérifiera facilement que :

- l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 4$ est donnée par
$$y(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}.$$
- l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(2) = 3$ est donnée par
$$y(x) = 3\mathrm{e}^{-x+2} + x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}.$$

Une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz est que les courbes des différentes solutions ne se coupent pas. On l'illustre ci-dessous en traçant différentes solutions de (E), correspondant à des conditions initiales différentes.

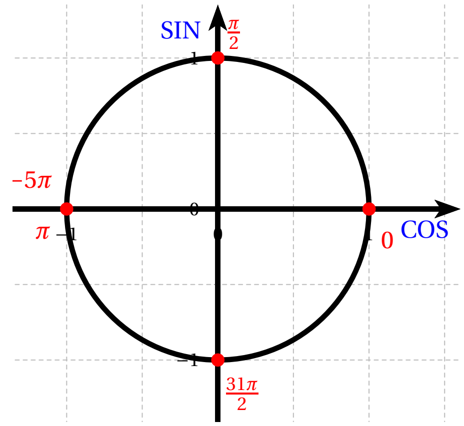


Exercice 183 On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad y' - 2y = -x.$$

1. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_P(x) = ax + b$. Pour cela, on remplace dans le membre de gauche de (E) :
$$y_P'(x) - 2y_P(x) = a - 2(ax + b) = a - 2ax - 2b = -2ax + a - 2b.$$
Donc pour que y_P soit solution de (E) ; autrement dit pour que
$$y_P'(x) - 2y_P(x) = -1x + 0,$$
il suffit que
$$\begin{cases} -2a &= -1 \\ a - 2b &= 0 \end{cases}$$
(on dit qu'on a « identifié » les coefficients écrits en rouge et en bleu).
On obtient $a = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, puis $a = 2b$, donc $b = \frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
Conclusion : la fonction définie $y_P(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E).
2. L'équation (E) : $y' - 2y = -x$ se réécrit $y' = 2y - x$, donc d'après le théorème 5 du cours, ses solutions sont les fonctions de la forme
$$y(x) = C\mathrm{e}^{2x} + y_P(x) = C\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4},$$
où C est une constante.
3. On raisonne par équivalences :
$$y(0) = 1 \iff C\mathrm{e}^{2\times 0} + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} = 1 \iff C + \frac{1}{4} = 1 \iff C = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$
Conclusion : l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$ est la fonction définie par
$$y(x) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

12 Fonctions trigonométriques

Exercice 184 1. Les points associés à 0, π et $\frac{\pi}{2}$ sont dans le cours. Les deux autres sont un peu moins évidents :



- Pour -5π, on tourne de 5 demi-tours dans le sens indirect. On arrive tout à gauche du cercle trigonométrique (au même endroit que π).
- Pour $\frac{31\pi}{2}$, on écrit

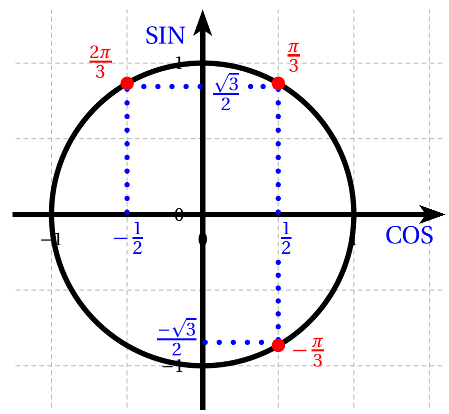
$$\frac{31\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 16\pi - \frac{\pi}{2},$$

donc on fait 8 tours dans le sens direct (car $8 \times 2\pi = 16\pi$), puis un quart de tour dans le sens indirect. On arrive tout en bas du cercle trigonométrique).

Par lecture du cercle trigonométrique :

$\cos 0 = 1$	$\cos\pi = -1$	$\cos 5\pi = -1$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\sin 0 = 0$	$\sin\pi = 0$	$\sin 5\pi = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

2. Le point associé à $\frac{\pi}{3}$ est dans le cours. Voici la méthode pour les deux autres :

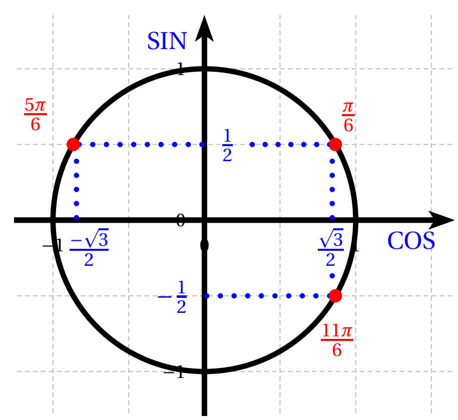


- Pour $\frac{\pi}{3}$, on tourne de 60° dans le sens direct, donc pour $\frac{2\pi}{3}$, on tourne de $2 \times 60° = 120°$. Le point est en haut à gauche du cercle trigonométrique, il a pour abscisse $-\frac{1}{2}$.
- Pour $-\frac{\pi}{3}$, on tourne de 60° dans le sens indirect. Le point est en bas à droite du cercle trigonométrique, c'est le symétrique du point associé à $\frac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe des abscisses.

Par lecture du cercle trigonométrique :

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Le point associé à $\frac{\pi}{6}$ est dans le cours. Voici la méthode pour les deux autres :



- Pour $\frac{\pi}{6}$, on tourne de 30° dans le sens direct, donc pour $\frac{5\pi}{6}$, on tourne de $5 \times 30° = 150°$. Le point est en haut à gauche du cercle trigonométrique, il a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.
- Pour $\frac{11\pi}{6}$, on tourne de $11 \times 30° = 330°$ dans le sens direct. Comme $330° = 360° - 30°$, cela revient à faire un tour complet dans le sens direct, puis à tourner de 30° dans le sens indirect. Le point est en bas à droite du cercle trigonométrique, c'est le symétrique du point associé à $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des abscisses.

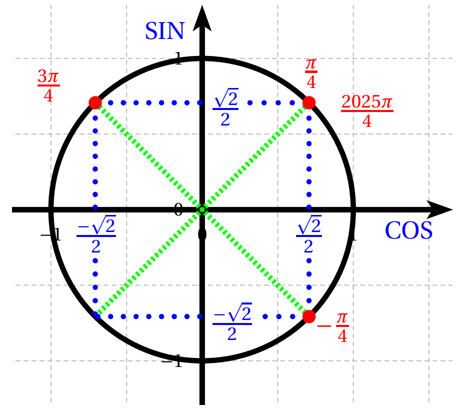
Par lecture du cercle trigonométrique :

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

4. Le point associé à $\frac{\pi}{4}$ est dans le cours. Voici la méthode pour les trois autres :
   - Pour $-\frac{\pi}{4}$, on tourne de 45° dans le sens indirect. Le point est en bas à droite du cercle trigonométrique, c'est le symétrique du point associé à $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des abscisses.
   - Pour $\frac{3\pi}{4}$, on tourne de $3 \times 45° = 135°$ dans le sens direct. Le point est en haut à gauche du cercle trigonométrique, c'est le symétrique du point associé à $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des ordonnées.
   - Pour $\frac{2025\pi}{4}$, on écrit
   $$\frac{2025\pi}{4} = \frac{2024\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 506\pi + \frac{\pi}{4}.$$
   On fait donc 253 tours du cercle trigonométrique dans le sens direct (car $253 \times 2\pi = 506\pi$), et on tourne encore de $\frac{\pi}{4}$. Le point associé à $\frac{2025\pi}{4}$ est donc le même que celui associé à $\frac{\pi}{4}$.



Par lecture du cercle trigonométrique :

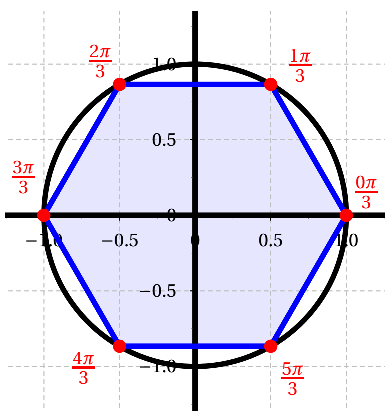
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

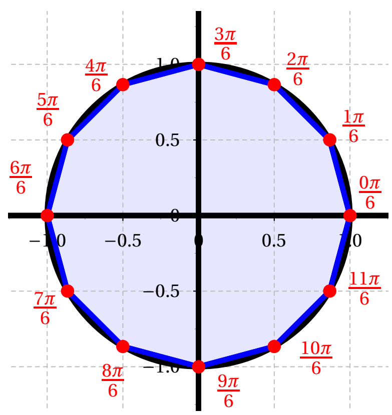
$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

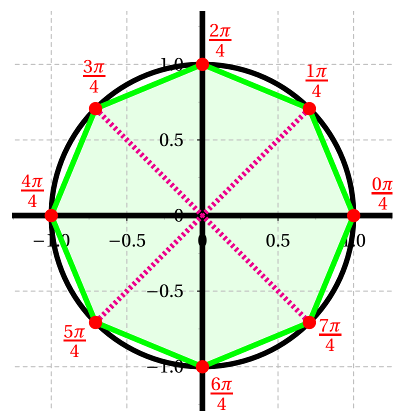
$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{2025\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\frac{2025\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a construit ci-dessous trois figures :
- Sur celle de gauche, les points associés à $\frac{0\pi}{3}, \frac{1\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \cdots$ forment un hexagone régulier.
- Sur celle du centre, les points associés à $\frac{0\pi}{6}, \frac{1\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \cdots$ forment un dodécagone régulier.
- Sur celle de droite, les points associés à $\frac{0\pi}{4}, \frac{1\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \cdots$ forment un octogone régulier.





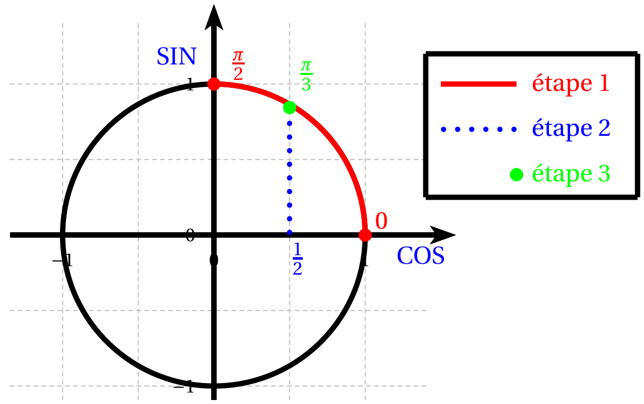


Exercice 185 Dans chaque question, on notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

1. On résout $\cos x = \frac{1}{2}$, dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

   Méthode :
   - **Étape 1.** On commence par repasser en rouge la partie du cercle trigonométrique correspondant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On indique les graduations 0 et $\frac{\pi}{2}$.
   - **Étape 2.** On résout l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$, donc on se place à l'abscisse $\frac{1}{2}$ et on rejoint le cercle trigonométrique.
   - **Étape 3.** On lit la(les) solution(s) sur le cercle trigonométrique. Ici, il y a une seule solution, car $\cos x = \frac{1}{2}$ uniquement lorsque $x = \frac{\pi}{3}$.

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}.}$$

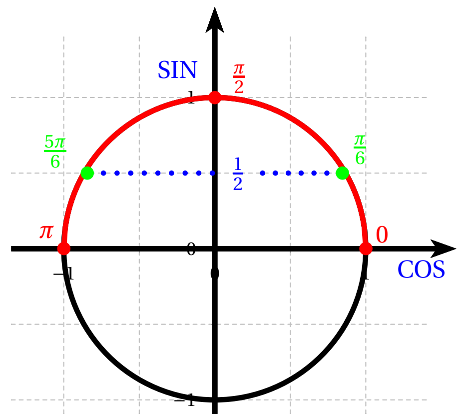


2. On résout $2\sin x - 1 = 0$, dans $[0; \pi]$.

   $$2\sin x - 1 = 0 \iff 2\sin x = 1 \iff \sin x = \frac{1}{2}.$$

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}.}$$

   Remarque : On peut écrire les solutions dans l'ordre que l'on veut – donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$ est correct.



3. On résout $\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\cos x = 0$, dans $[-\pi; \pi]$.

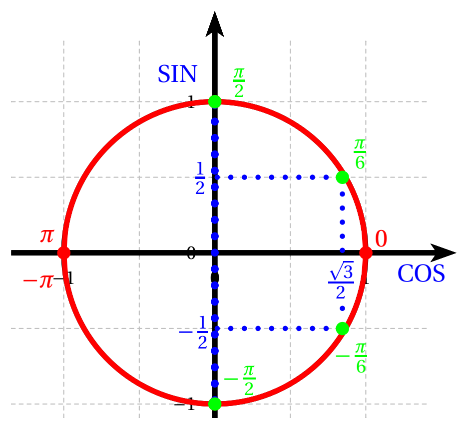
   On utilise la technique habituelle de résolution des équations produits :

   $$\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\cos x = 0 \iff \left(2\cos x - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } \cos x = 0\right)$$
   $$\iff \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = 0.$$

   - L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$;
   - l'équation $\cos x = 0$ a pour solutions $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\}.}$$

   Remarque : L'intervalle de résolution correspond à un tour complet de cercle : on part de $-\pi$, tout à gauche, et on fait un tour complet de cercle pour arriver à π, au même endroit.

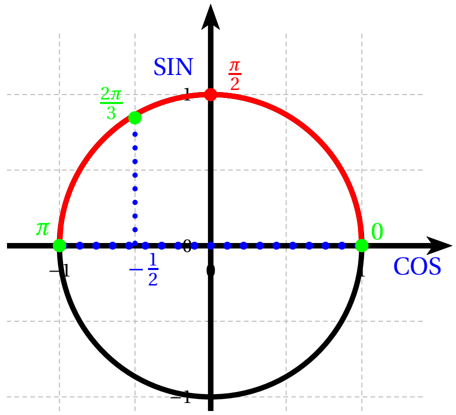


4. On résout $2\sin x \cos x = -\sin x$, dans $[0; \pi]$.

   $$\begin{aligned} 2\sin x \cos x = -\sin x &\iff 2\sin x \cos x + 1 \cdot \sin x = 0 \\ &\iff \sin x(2\cos x + 1) = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \text{ ou } 2\cos x + 1 = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   - L'équation $\sin x = 0$ a pour solutions 0 et π ;
   - l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ a pour solution $\frac{2\pi}{3}$.

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0; \pi; \frac{2\pi}{3}\right\}.}$$



5. On résout $2\sin x - 1 \geq 0$, dans $[0;\pi]$.

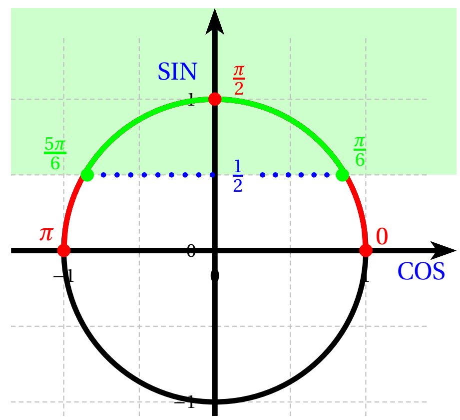
   Il s'agit d'une inéquation. On a les équivalences :

$$2\sin x - 1 \geq 0 \iff 2\sin x \geq 1 \iff \sin x \geq \frac{1}{2}.$$

   Contrairement à la question 2, on ne s'intéresse pas aux points du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$, mais à ceux dont l'ordonnée est **supérieure ou égale** à $\frac{1}{2}$ (partie verte). Les solutions sont tous les nombres de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$.

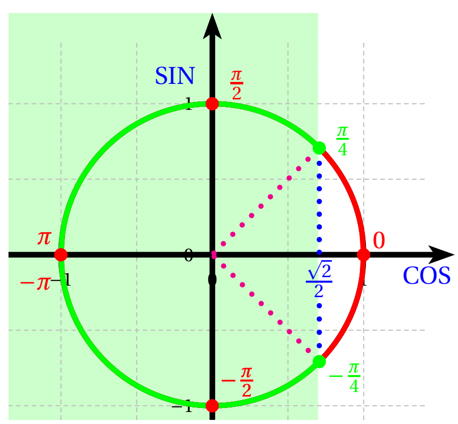
$$\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right].}$$

   Remarque : On tourne dans le sens trigonométrique, donc on lit l'intervalle solution depuis en haut à droite ($\frac{\pi}{6}$) jusqu'à en haut à gauche ($\frac{5\pi}{6}$). L'ordre dans lequel on écrit les bornes de l'ensemble solution n'est pas arbitraire !



6. $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[-\pi;\pi]$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\pi;-\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4};\pi\right].}$$



   Remarque : Les solutions dans la partie basse du cercle correspondent à l'intervalle $\left[-\pi;-\frac{\pi}{4}\right]$, les solutions dans la partie haute correspondent à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$.

7. On résout $2\sin x\cos x \leq -\sin x$, dans $[0;\pi]$.

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos x \leq -\sin x &\iff 2\sin x\cos x + 1\cdot\sin x \leq 0 \\ &\iff \sin x(2\cos x + 1) \leq 0. \end{aligned}$$

   On conclut à l'aide d'un tableau de signe :

   - Les solutions des équations $\sin x = 0$ et $\cos x = -\frac{1}{2}$ ont été obtenues dans la question 4 ;
   - pour déterminer le signe dans chaque case, on remplace par des valeurs de x. Par exemple, pour avoir le signe de $2\cos x + 1$ dans la cas $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$, on prend $x = 0$: on a

$2\cos 0+1=2\times 1+1=3$, donc on met un $\oplus$ dans la case.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	$+$		$+$	0
$2\cos x+1$		$+$	0	$-$	
$\sin x(2\cos x+1)$	0	$+$	0	$-$	0

8. On résout $|\sin x|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[0;2\pi]$.

$$|\sin x|=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Les solutions de l'équation $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$;
- les solutions de l'équation $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}.}$$

Remarque : On résout dans l'intervalle $[0;2\pi]$, ce qui correspond à un tour complet de cercle, comme quand on a résolu dans $[-\pi;\pi]$. Mais il y a une grosse différence :

- quand on résout dans $[0;2\pi]$, le point situé tout en bas du cercle trigonométrique, par exemple, correspond à la graduation $\frac{3\pi}{2}$;

Conclusion : $\sin x(2\cos x+1)$ est du signe $\ominus$ lorsque $x\in\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$, donc

$$\boxed{\mathscr{S}=\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right].}$$

- quand on résout dans $[-\pi;\pi]$, en revanche, ce point situé tout en bas du cercle trigonométrique correspond à la graduation $-\frac{\pi}{2}$.