Dérivation et applications

Variations

- $f' > 0$ sur l'intervalle I $\Longrightarrow$ f strictement croissante sur I
- $f' < 0$ sur l'intervalle I $\Longrightarrow$ f strictement décroissante sur I

Théorème fondamental

Études de signes

(E) $\quad ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0)$

- discriminant : $\Delta = b^2-4ac$
- $\Delta > 0 \implies (E)$ a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0 \implies (E)$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0 \implies (E)$ n'a pas de solution

- signe de $ax+b$

Cas $a>0$

$ax+b$	$-$	0	$+$

Cas $a<0$

$ax+b$	$+$	0	$-$

- signe de ax^2+bx+c
  → du signe de a, sauf entre les racines, si elles existent
- une exponentielle est strictement positive

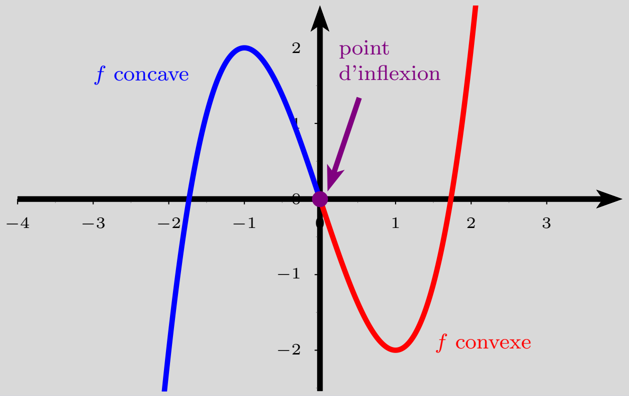
Théorème de la bijection

- cas usuel $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue et st. } \nearrow \text{ (ou } \searrow\text{) sur } [a,b] \\ f(a) = \cdots,\ f(b) = \cdots \\ k \in [\ldots,\ \ldots] \end{array}\right\} \implies f(x)=k$ a une unique solution x_0 dans $[a,b]$
  (rédaction à connaître par ♥)
- algorithme de balayage pour donner une valeur approchée de x_0
- extension au cas d'un intervalle ouvert, y compris avec $a=-\infty$ ou $b=+\infty$

⚠ dans ce cas, prendre des limites au lieu de $f(a)$ et $f(b)$

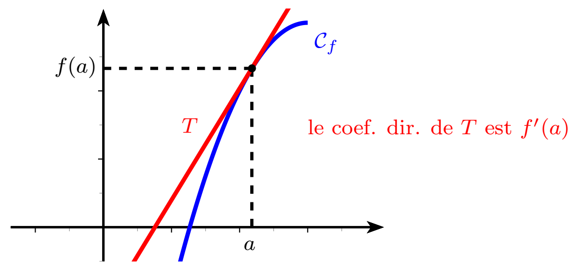
Convexité

- f convexe sur I $\iff$ f'' positive sur I $\iff$ $\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses tangentes sur I
- f concave sur I $\iff$ f'' négative sur I $\iff$ $\mathcal{C}_f$ en dessous de ses tangentes sur I
- le pt d'abscisse a est un pt d'inflexion $\iff$ f'' change de signe en a



Nombre dérivé et tangente

- $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
  (nombre dérivé)
- pour le physicien : $f'(t_0)$ =vitesse au tps $t=t_0$
- $y = f'(a)(x-a)+f(a)$
  (équation de la tangente au point d'abscisse a)



Calculs de dérivées

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les dérivées

fonction	dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$
e^u	$u' \times e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$