Mathématiques – Maths expertes

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Divisibilité, nombres premiers

Exercice 1 1. • On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 20 :

$$20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5,$$

donc les diviseurs de 20 sont

$$1, 2, 4, 5, 10 \text{ et } 20.$$

- On écrit tous les produits d'entiers positifs qui donnent 36 :

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6,$$

donc les diviseurs de 36 sont

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 \text{ et } 36.$$

2. Le nombre 1452 est :
   - divisible par 2, car il est pair ;
   - divisible par 3, car la somme de ses chiffres, $1+4+5+2=12$, est divisible par 3 ;
   - non divisible par 5, car il ne se termine ni par 0, ni par 5 ;
   - non divisible par 9, car la somme de ses chiffres, 12, n'est pas divisible par 9.

Exercice 2 On factorise : l'égalité $x^2 - 2xy = 14$ se réécrit

$$x(x-2y) = 14.$$

x et y sont des entiers naturels, donc $x-2y$ est un entier. C'est même un entier naturel, car x et 14 sont positifs, donc par la règle des signes, $x-2y$ est positif.
Or les différentes manières d'écrire 14 comme un produit d'entiers naturels sont :

$$14 = 1 \times 14 = 2 \times 7 = 7 \times 2 = 14 \times 1.$$

Il y a donc quatre possibilités :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ x-2y &= 14 \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= 2 \\ x-2y &= 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= 7 \\ x-2y &= 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= 14 \\ x-2y &= 1 \end{cases}.$$

On résout de tête chacun des quatre systèmes :

$$(x=1, y=-6,5) \quad , \quad (x=2, y=-2,5) \quad , \quad (x=7, y=2,5) \quad , \quad (x=14, y=6,5).$$

Aucun couple n'est un couple d'entiers naturels, donc le problème n'a aucune solution.

Exercice 3 1. Trois entiers consécutifs sont de la forme $n,\ n+1,\ n+2$, avec n entier (dans $\mathbb{Z}$), donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = 3(n+1).$$

$n+1$ est un entier, donc $n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

2. Quatre entiers consécutifs sont de la forme $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$, avec n entier, donc leur somme est

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n+6 = 4(n+1,5).$$

Or $n+1,5$ n'est pas un entier, donc la somme des quatre entiers consécutifs n'est pas un multiple de 4.

Exercice 4 On factorise :

$$n^2 - 2n = n(n-2).$$

D'après le point 1 de la proposition 1, si 5 divise n, il divise aussi $n(n-2)$.

Exercice 5 Commençons par rappeler que les nombres pairs sont les multiples de 2.

Pour démontrer le résultat de l'énoncé, on factorise

$$n^2 + n = n(n+1),$$

puis on distingue deux cas :

- Si n est pair, il est multiple de 2, donc $n(n+1)$ est également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair, donc multiple de 2 ; $n(n+1)$ est donc également multiple de 2 d'après le point 1 de la proposition 1.

Dans tous les cas, n^2+n est un multiple de 2, donc un nombre pair.

Exercice 6 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 1.

1. Si $a|b$, alors $a|ub$ pour tout $u \in \mathbb{Z}$.
2. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(ub+vc)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

On commence par le point 1. Si $a|b$, on peut écrire $b = k \times a$, où k est un entier. Donc

$$ub = u(k \times a) = (uk) \times a,$$

qui est donc bien un multiple de a (car uk est un entier).

On démontre ensuite le point 2. Par hypothèse $a|b$ et $a|c$, donc on peut écrire $b = k \times a$ et $c = j \times a$, où k et j sont deux entiers. Mais alors

$$ub + vc = u(k \times a) + v(j \times a) = a(uk + vj).$$

Il s'agit bien d'un multiple de a, puisque $uk + vj$ est un entier (du fait que u, v, k, j sont des entiers).

Remarque : Une façon agréable d'énoncer le point 2 de la proposition 1 est de dire que

« Si a divise b et c, alors il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de b et c »

($ub + vc$ est ce que l'on appelle une combinaison linéaire de b et c).

Exercice 7 On fait un raisonnement par analyse-synthèse :

- **Analyse.** Soit n un entier naturel tel que $n+3$ divise $n+15$.
  De façon évidente, $n+3$ divise $n+3$, donc d'après la proposition 1 du cours, $n+3$ divise la combinaison linéaire

  $$1(n+15) - 1(n+3) = n + 15 - n - 3 = 12.$$

  On cherche les solutions avec n entier naturel, donc $n+3$ est supérieur ou égal à 3. Or les seuls diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à 3 sont 3, 4, 6 et 12. On a donc quatre possibilités :

  $$n+3=3 \quad , \quad n+3=4 \quad , \quad n+3=6 \quad , \quad n+3=12,$$

  qui donnent

  $$n=0 \quad , \quad n=1 \quad , \quad n=3 \quad , \quad n=9.$$

- **Synthèse.** On vérifie les solutions trouvées :
  — Si $n=0$, on on bien $n+3=0+3=3$, qui divise $n+15=0+15=15$.
  — Si $n=1$, on on bien $n+3=1+3=4$, qui divise $n+15=1+15=16$.
  — Si $n=3$, on on bien $n+3=3+3=6$, qui divise $n+15=3+15=18$.
  — Si $n=9$, on on bien $n+3=9+3=12$, qui divise $n+15=9+15=24$.

  Conclusion : les entiers naturels n tels que $n+3$ divise $n+15$ sont 0, 1, 3 et 9.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation

$$a^2 + 1 = 2^n, \tag{1}$$

d'inconnue $a \in \mathbb{Z}$.

1. • On commence par le cas $n = 1$. Comme $2^1 = 2$, l'équation (1) s'écrit

   $$a^2 + 1 = 2.$$

   On résout :

   $$a^2 = 2 - 1 \iff a^2 = 1 \iff (a = 1 \text{ ou } a = -1).$$

   Il y a deux solutions : $a = 1$ et $a = -1$.

- Ensuite le cas $n=2$. Comme $2^2=4$, l'équation (1) s'écrit
$$a^2+1=4.$$
On résout :
$$a^2=4-1 \iff a^2=3 \iff (a=\sqrt{3} \text{ ou } a=-\sqrt{3}).$$
Or $\sqrt{3}\approx 1,732$ n'est pas un entier, donc il n'y a pas de solution.

2. On suppose à présent que $n \geq 3$.
   (a) On peut écrire
   $$2^n=2^{n-3}\times 2^3=2^{n-3}\times 8.$$
   Par hypothèse $n\geq 3$, donc $n-3\geq 0$, et donc 2^{n-3} est un entier. Il s'ensuit que $2^n=\underbrace{2^{n-3}}_{\text{entier}}\times 8$ est un multiple de 8.

   (b) On raisonne par contraposée [1].
   Si a est pair, alors $a=2k$ avec $k\in\mathbb{Z}$, donc $a^2+1=(2k)^2+1=4k^2+1=2\left(2k^2\right)+1$ est impair. D'un autre côté, 2^n est pair (car $n\in\mathbb{N}^*$). Il est donc impossible que a^2+1 (qui est impair) soit égal à 2^n (qui est pair).

   Conclusion : si a est pair, alors il n'est pas solution de (1). Donc par contraposée, si a est solution de (1), alors il est nécessairement impair.

   (c) On suppose que a est impair, donc de la forme $a=2k+1$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Dans ce cas
   $$a^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times 2k\times 1+1^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4\left(k^2+k\right).$$

   ⚠On a utilisé l'identité remarquable
   $$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2.$$

   D'après l'exercice 5, k^2+k est un nombre pair, donc multiple de 2 : on peut l'écrire $k^2+k=2m$, avec $m\in\mathbb{Z}$. Il vient donc finalement
   $$a^2-1=4\left(k^2+k\right)=4(2m)=8m,$$
   ce qui prouve que a^2-1 est multiple de 8.

   (d) On suppose que $n\geq 3$ et que a est solution de (1). On a prouvé dans la question 2.(a) que 2^n était un multiple de 8, donc a^2+1 est un multiple de 8. D'un autre côté, d'après les questions 2.(b) et 2.(c), a^2-1 est également un multiple de 8. Donc d'après la proposition 1 du cours, la différence
   $$2^n-\left(a^2-1\right)=\left(a^2+1\right)-\left(a^2-1\right)=a^2+1-a^2+1=2$$
   est un multiple de 8, ce qui est absurde.

   Conclusion : supposant que (1) admet une solution lorsque $n\geq 3$, on aboutit à une absurdité; c'est donc qu'il n'y a pas de solution dans ce cas-là.

3. D'après la question 1, il y a deux solutions, $a=1$ et $a=-1$, lorsque $n=1$. En revanche, il n'y a aucune solution quand $n=2$. On vient par ailleurs de démontrer qu'il n'y avait aucune solution dans le cas $n\geq 3$. On peut donc conclure avec un tableau :

n	solutions de (1)
1	$a=1$ et $a=-1$
≥ 2	aucune solution

Exercice 9 • On effectue la division euclidienne de 587 par 13 :

$$\begin{array}{rr|l} & 5\,8\,7 & 1\,3 \\ - & \underline{5\,2} & 4\,5 \\ & 6\,7 & \\ - & \underline{6\,5} & \\ & 2 & \end{array}$$

1. Pour prouver qu'une implication de la forme

Si A alors B,

est vraie, il suffit de prouver que sa contraposée

Si (non B) alors (non A)

est vraie.

$$587 = 45 \times 13 + 2.$$

Remarque : On obtient directement la réponse avec une calculatrice en faisant les calculs $587 \div 13 = 45,\cdots$, puis $587 - 45 \times 13 = 2$.

- On effectue la division euclidienne de 10000 par 11 :

$$\begin{array}{r|l} 1\,0\,0\,0\,0 & 1\,1 \\ \cline{2-2} -\underline{\;\;9\,9\;\;\;\;\;\;} & 9\,0\,9 \\ 1\,0\,0 & \\ -\underline{\;\;9\,9} & \\ 1 & \end{array}$$

$$10000 = 909 \times 11 + 1.$$

Exercice 10 1. On suppose que la différence entre a et b est 538, et que le quotient dans la division de a par b est 13, le reste 34. On peut donc écrire

$$\begin{cases} a = b + 538 \\ a = 13b + 34 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$b + 538 = 13b + 34,$$

donc

$$538 - 34 = 13b - b \qquad b = \frac{504}{12} = 42.$$

Conclusion : $b = 42$ et $a = b + 538 = 42 + 538 = 580$.

2. Quand on divise n par 29 et par 27, les quotients sont les mêmes et les restes sont respectivement 1 et 25. En notant q les quotients identiques, on obtient le système

$$\begin{cases} n = 29q + 1 \\ n = 27q + 25 \end{cases}.$$

Par comparaison,

$$29q + 1 = 27q + 25,$$

donc

$$29q - 27q = 25 - 1 \qquad 2q = 24 \qquad q = \frac{24}{2} = 12.$$

Conclusion : $n = 29q + 1 = 29 \times 12 + 1 = 349$.

Exercice 11 On écrit tous les produits d'entiers qui donnent 48 et 84 :

$$\begin{aligned} 48 &= 1 \times 48 \\ &= 2 \times 24 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 4 \times 12 \\ &= 6 \times 8. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 48 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

$$\begin{aligned} 84 &= 1 \times 84 \\ &= 2 \times 42 \\ &= 3 \times 28 \\ &= 4 \times 21 \\ &= 6 \times 14 \\ &= 7 \times 12. \end{aligned}$$

Les diviseurs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.

Le PGCD est le plus grand nombre qui divise à la fois 48 et 84. L'examen des listes ci-dessus donne

$$\text{PGCD}(48, 84) = 12.$$

Exercice 12

- On cherche le PGCD de 840 et 144. On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned}840 &= 5\times 144+120,\\ 144 &= 1\times 120+24,\\ 120 &= 5\times 24+0.\end{aligned}$$

  Le PGCD est le dernier reste non nul :

$$\text{PGCD}(144,840)=24.$$

- On cherche le PGCD de 215 et 28. On effectue les divisions successives :

$$\begin{aligned}215 &= 7\times 28+19,\\ 28 &= 1\times 19+9,\\ 19 &= 2\times 9+1\\ 9 &= 9\times 1+0.\end{aligned}$$

  On a donc $\text{PGCD}(215,28)=1$.

  Remarque : Comme $\text{PGCD}(215,28)=1$, on dit que 215 et 28 sont premiers entre eux – leur seul diviseur positif commun est 1.

Exercice 13 Le côté de chaque dalle (exprimé en cm) doit être un entier qui divise 840 et 350; on veut de plus que ce côté soit le plus grand possible. On cherche donc le PGCD de 840 et 350 :

$$\begin{aligned}840 &= 2\times 350+140,\\ 350 &= 2\times 140+70,\\ 140 &= 2\times 70+0.\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{PGCD}(840,350)=70$, donc chaque dalle a un côté de 70 cm.
De plus, il y a $840\div 70=12$ dalles en longueur; et $350\div 70=5$ dalles en largeur, donc un total de

$$12\times 5=60 \text{ dalles.}$$

Exercice 14 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 2.

Dans la division euclidienne

$$a=bq+r,$$

(i) si $r\neq 0$, $\text{PGCD}(a,b)=\text{PGCD}(b,r)$;
(ii) si $r=0$, $\text{PGCD}(a,b)=b$.

1. Dans la situation de la division euclidienne $a=bq+r$, si l'entier k divise a et b, alors d'après la proposition 1 du cours, il divise la combinaison linéaire

$$r=a\times 1-b\times q.$$

   Par conséquent, on a l'implication

$$k \text{ divise } a \text{ et } b \implies k \text{ divise } b \text{ et } r.$$

   Réciproquement, si k divise b et r, alors k divise a, puisque $a=b\times q+r\times 1$ (on utilise à nouveau la proposition 1). Il divise donc a et b.
   On a finalement l'équivalence

$$k \text{ divise } a \text{ et } b \iff k \text{ divise } b \text{ et } r.$$

2. D'après l'équivalence de la question 1, la liste des diviseurs communs à a et b est la même que la liste des diviseurs communs à b et r. Il s'ensuit que le plus grand élément de chacune des deux listes est le même. Autrement dit :

$$\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r).$$

3. Si $r=0$, alors $a = bq$, donc b est un diviseur de a. Le plus grand diviseur commun à a et b est donc b :

$$\text{PGCD}(a,b) = b.$$

Exercice 15 1. On développe et on réduit :

$$2(3n+2)-3(2n+1) = 6n+4-6n-3 = 1.$$

2. Si un entier naturel k divise à la fois $3n+2$ et $2n+1$, alors il divise la combinaison linéaire $2(3n+2)-3(2n+1) = 1$. On a donc nécessairement $k=1$, c'est-à-dire que $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. La fraction

$$\frac{3n+2}{2n+1}$$

est donc irréductible.

Exercice 16 Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = 3n+1$ et $b_n = 3n-1$.

1. On présente avec un tableau :

n	a_n	b_n	PGCD (a_n, b_n)	1ers entre eux
1	4	2	2	non
2	7	5	1	oui
3	10	8	2	non
4	13	11	1	oui

On constate que le PGCD vaut 1 ou 2, suivant que n est pair ou impair. On va le démontrer rigoureusement dans les questions suivantes.

2. Si un entier naturel k divise a_n et b_n, alors il divise la combinaison linéaire

$$a_n - b_n = (3n+1)-(3n-1) = 3n+1-3n+1 = 2.$$

Cet entier k ne peut donc être que 1 ou 2.

3. D'après la question précédente, le PGCD de a_n et b_n ne peut être que 1 ou 2. On distingue alors deux cas :
   - Si n est impair, alors $3n$ est impair (comme produit de deux nombres impairs – facile à justifier). Donc $3n-1$ et $3n+1$ sont pairs, et leur PGCD est égal à 2.
   - Si n est pair, alors $3n$ est pair (cf le point 1 de la proposition 1). Donc $3n-1$ et $3n+1$ sont impairs; ils ne sont pas divisibles par 2 et leur PGCD est nécessairement égal à 1.

   Finalement, on a bien l'équivalence :

$$a_n \text{ et } b_n \text{ premiers entre eux} \iff n \text{ pair}.$$

Exercice 17 Rappelons pour commencer que les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7 et 11.

Pour savoir si un nombre n est premier, on essaye de le diviser par tous les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{n}$. D'après la proposition 3 du cours, s'il n'est divisible par aucun d'entre eux, c'est qu'il est premier; sinon, qu'il ne l'est pas. Parfois, il y a un diviseur évident, ce qui nous épargne de fastidieux calculs.

- 425 n'est pas premier, car il est divisible par 5 (diviseur évident).
- $\sqrt{53} = 7, \cdots$
  53 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à 7 (à savoir 2, 3, 5 et 7), donc il est premier.
- $7\,777 = 7 \times 1\,111$, donc 7 777 n'est pas premier (7 est un diviseur évident).
- $\sqrt{97} \approx 9, \cdots$, et 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7. Il est donc premier.
- $\sqrt{143} = 11, \cdots$ Le test avec 2, 3, 5 et 7 pourrait laisser penser que 143 est premier; mais ce n'est pas le cas, puisque $143 = 11 \times 13$ (il faut tester jusque 11, et ça ne fonctionne que pour 11).

Exercice 18 On barre les multiples de 2 (sauf 2), puis ceux de 3 (sauf 3), ceux de 5 (sauf 5) ; et enfin ceux de 7 (sauf 7). Comme $\sqrt{100} = 10$ et que les nombres premiers inférieurs à 10 sont 2, 3, 5 et 7, il ne reste plus dans le tableau que les nombres premiers (cf proposition 3 du cours) – ainsi que 1 !

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ce tableau est appelé *crible d'Ératosthène*.

Exercice 19 Soit $p > 2$ un nombre premier. En factorisant, l'équation

$$x^2 - y^2 = p \tag{2}$$

se réécrit

$$(x+y)(x-y) = p.$$

Les facteurs $x+y$ et $x-y$ sont des entiers. Or p est premier, donc les quatre seules possibilités de l'écrire comme un produit d'entiers sont

$$p = p \times 1 = 1 \times p = (-p) \times (-1) = (-1) \times (-p).$$

On a donc quatre possibilités :

$$\begin{cases} x+y = p \\ x-y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y = -p \\ x-y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = p \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y = -1 \\ x-y = -p \end{cases}.$$

⚠Dans cet exercice, les solutions négatives sont autorisées (on ne se restreint pas aux entiers naturels).

On résout chacun des quatre systèmes en ajoutant membre à membre les deux lignes. Par exemple, pour le premier :

$$x+y+x-y = p+1 \qquad 2x = p+1 \qquad x = \frac{p+1}{2} \qquad \text{puis} \qquad y = p - x = \frac{2p}{2} - \frac{p+1}{2} = \frac{2p-p-1}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

Conclusion : dans ce cas-là, le couple $x = \frac{p+1}{2}$, $y = \frac{p-1}{2}$ est solution. C'est de plus bien un couple d'entiers, car $p > 2$ étant premier, il est impair, donc $p+1$ et $p-1$ sont pairs, et finalement $\frac{p+1}{2}$ et $\frac{p-1}{2}$ sont des entiers.

On résout de la même façon les trois autres systèmes pour obtenir quatre couples solutions :

$$\left(x = \frac{p+1}{2}, y = \frac{p-1}{2}\right) \quad , \quad \left(x = \frac{-p-1}{2}, y = \frac{-p+1}{2}\right) \quad , \quad \left(x = \frac{p+1}{2}, y = \frac{-p+1}{2}\right) \quad , \quad \left(x = \frac{-p-1}{2}, y = \frac{p-1}{2}\right).$$

Exercice 20

1. On décompose en produits de nombres premiers :

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$168 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1$. $\qquad$ $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$.

Pour obtenir le PGCD, on fait le produit de tous les nombres en commun, en prenant la plus petite puissance :

$$\text{PGCD}(168, 60) = 2^2 \times 3^1 = 12.$$

2. On décompose en produits de nombres premiers :

$$
\begin{array}{r|l}
224 & 2 \\
112 & 2 \\
56 & 2 \\
28 & 2 \\
14 & 2 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
196 & 2 \\
98 & 2 \\
49 & 7 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

$224 = 2^5 \times 7^1$. $196 = 2^2 \times 7^2$.

Pour obtenir le PGCD, on fait le produit de tous les nombres en commun, en prenant la plus petite puissance :

$$\text{PGCD}(224, 196) = 2^2 \times 7^1 = 28.$$

Exercice 21 Je verrai à nouveau les objets en même temps dans un nombre de jours multiple à la fois de 168 et 90. Comme on cherche la plus petite solution, il faut déterminer le plus petit multiple commun à 168 et 90.

On décompose comme d'habitude en produits de nombres premiers (je ne détaille pas) ; on obtient :

$$\begin{aligned} 168 &= 2^3 \times 3^1 \times 7^1, \\ 90 &= 2^1 \times 3^2 \times 5^1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\text{PPCM}(168, 90) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 2\,520.$$

Les objets A et B apparaîtront de nouveau en même temps dans 2 520 jours.

Remarque : Le même type de calcul que celui que nous venons de mener permet de comprendre que le Soleil, la Terre et la Lune se retrouvent dans des configurations sensiblement identiques tous les 18 ans et 11 jours. Cette période, appelée « saros », est utilisée pour prédire les éclipses.

Exercice 22 Une boîte à chaussures de dimensions intérieures 31,2 cm, 13 cm et 7,8 cm est entièrement remplie par des cubes à jouer dont l'arête est un nombre entier de millimètres.

Pour minimiser le nombre de cubes, il faut maximiser la longueur de leur arête. Comme ce doit être un nombre entier de millimètres, il doit diviser à la fois 312, 130 et 78 ; et c'est donc leur PGCD. On décompose en produits de nombres premiers :

$$\begin{aligned} 312 &= 2^3 \times 3^1 \times 13^1, \\ 130 &= 2^1 \times 5^1 \times 13^1, \\ 78 &= 2^1 \times 3^1 \times 13^1. \end{aligned}$$

On en déduit que la longueur de l'arête optimale est

$$\text{PGCD}(312, 130, 78) = 2^1 \times 13^1 = 26.$$

Conclusion : les cubes auront une arête de 26 mm. On en mettra $312 \div 26 = 12$ en longueur, $130 \div 26 = 5$ en largeur et $78 \div 13 = 6$ en hauteur, soit

$$12 \times 5 \times 6 = 360$$

en tout.

Exercice 23 D'après la proposition 4 du cours, les diviseurs de $n = 2^6 \times 3^2 \times 7^4$ sont les nombres de la forme

$$2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma,$$

avec $0 \leq \alpha \leq 6$, $0 \leq \beta \leq 2$ et $0 \leq \gamma \leq 4$.

Il y a donc 7 possibilités pour α (de 0 à 6), 3 pour β (de 0 à 2) et 5 pour γ (de 0 à 4), soit

$$7 \times 3 \times 5 = 105$$

diviseurs positifs de n en tout.

Exercice 24

1. Soit n le carré d'un entier m, c'est-à-dire que $n = m^2$. On décompose m en produit de nombres premiers :
$$m = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k},$$
d'où l'on tire
$$n = m^2 = \left(p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}\right)^2 = p_1^{2\beta_1} \times p_2^{2\beta_2} \times \cdots \times p_k^{2\beta_k},$$
décomposition dans laquelle tous les exposants sont pairs.

   Le nombre $2^6 \times 3^9 \times 5^2$ de l'exercice n'est donc pas un carré parfait, puisque l'un des exposants de sa décomposition (à savoir le nombre 9) est impair.

2. On s'inspire de la question précédente. Le nombre $B = 2^8 \times 3^8 \times 7^4$ est un multiple de de $A = 2^7 \times 3^8 \times 7^3$, puisque tous les exposants dans sa décomposition sont supérieurs à ceux de la décomposition de A (proposition 4). De plus, B est le carré de $b = 2^4 \times 3^4 \times 7^2$ – donc c'est bien un carré parfait.

   Remarque : Il n'y a pas une seule solution au problème. On aurait par exemple pu choisir $B = 2^{10} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^6$ – en prenant garde d'avoir des exposants pairs, et plus grands que ceux de la décomposition de A.

Exercice 25 Le but de l'exercice est de démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers strictement positifs.

1. Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, alors $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, soit $2 = \frac{p^2}{q^2}$. On a donc
$$p^2 = 2q^2.$$

2. On décompose p et q en produits de nombres premiers :
$$p = 2^{\alpha} \times p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k},$$
$$q = 2^{\beta} \times q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_k^{\beta_k}.$$
   Dans ces décompositions, les p_i et les q_i sont des nombres premiers distincts de 2. Par ailleurs, l'un des exposants α ou β pourrait être nul (il se peut que 2 n'apparaisse pas dans l'une des deux décompositions, voire dans les deux).

   On élève q au carré, comme dans l'exercice 24 :
$$q^2 = \left(2^{\beta} \times q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_k^{\beta_k}\right)^2 = 2^{2\beta} \times q_1^{2\beta_1} \times \cdots \times q_k^{2\beta_k},$$
d'où l'on tire
$$2q^2 = 2^{2\beta+1} \times q_1^{2\beta_1} \times \cdots \times q_k^{2\beta_k}.$$
On obtient de même
$$p^2 = 2^{2\alpha} \times p_1^{2\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{2\alpha_k}.$$
   On sait que $p^2 = 2q^2$, donc par unicité de la décomposition d'un entier naturel en produit de nombres premiers (théorème 3 du cours), les exposants dans les décompositions de p^2 et de $2q^2$ devraient être les mêmes. En comparant les exposants de 2, cela donne
$$2\beta + 1 = 2\alpha,$$
ce qui est absurde, puisque le membre de gauche de cette égalité est impair, celui de droite pair.

   Conclusion : supposant que que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers strictement positifs, on aboutit à une absurdité. C'est donc que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous cette forme : il est irrationnel.

2 Les nombres complexes

Exercice 26 On écrit les nombres sous forme algébrique :

1. $(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = 6-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}-2\underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1} = 6-\mathrm{i}+2 = 8-\mathrm{i}$.
2. $-(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}(2-\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-\underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1} = -1+\mathrm{i}+1 = \mathrm{i}$.
3. $(3-2\mathrm{i})^2 = 3^2-2\times3\times2\mathrm{i}+(2\mathrm{i})^2 = 9-12\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2 = 9-12\mathrm{i}-4 = 5-12\mathrm{i}$.
4. $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})(2+\mathrm{i}\sqrt{3}) = 2^2-\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 = 4-\mathrm{i}^2\sqrt{3}^2 = 4+3 = 7$.
5. $\mathrm{i}^4 = \left(\mathrm{i}^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$.
6. $(1+\mathrm{i})^2 = 1+2\times1\times\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 1+2\mathrm{i}-1 = 2\mathrm{i}$.

Exercice 27 Dans chaque cas, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions. On fera grand usage de l'identité remarquable

$$A^2-B^2 = (A+B)(A-B).$$

1. $$z^2 = 4\mathrm{i}z \iff z^2-4\mathrm{i}z = 0 \iff z(z-4\mathrm{i}) = 0 \iff (z=0 \text{ ou } z-4\mathrm{i}=0) \iff (z=0 \text{ ou } z=4\mathrm{i}) \quad \boxed{\mathscr{S} = \{0, 4\mathrm{i}\}}$$
2. $$z^2 = 9 \iff z^2-9 = 0 \iff z^2-3^2 = 0 \iff (z+3)(z-3) = 0 \iff (z+3=0 \text{ ou } z-3=0) \iff (z=-3 \text{ ou } z=3) \quad \boxed{\mathscr{S} = \{3, -3\}}$$
3. L'astuce consiste à écrire $-4 = (2\mathrm{i})^2$!
   $$z^2 = -4 \iff z^2 = (2\mathrm{i})^2 \iff z^2-(2\mathrm{i})^2 = 0 \iff (z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i}) = 0 \iff (z+2\mathrm{i}=0 \text{ ou } z-2\mathrm{i}=0) \iff (z=-2\mathrm{i} \text{ ou } z=2\mathrm{i}) \quad \boxed{\mathscr{S} = \{2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}}$$
4. Ici, on multiplie par $-\mathrm{i}$ pour « éliminer le i » :
   $$\mathrm{i}z = 5 \iff -\mathrm{i}\times\mathrm{i}z = -\mathrm{i}\times5 \iff -\mathrm{i}^2z = -5\mathrm{i} \iff z = -5\mathrm{i} \quad \boxed{\mathscr{S} = \{-5\mathrm{i}\}}$$

Exercice 28 On écrit sous forme algébrique en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur. On fait usage de la nouvelle identité remarquable

$$(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$$

lorsque a et b sont réels (elle est vraie aussi si ce sont des complexes !).

1. $$\frac{1}{3-4\mathrm{i}} = \frac{1(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{3+4\mathrm{i}}{3^2+4^2} = \frac{3+4\mathrm{i}}{25} = \frac{3}{25}+\frac{4}{25}\mathrm{i}.$$
2. $$\frac{1+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} = \frac{2+\mathrm{i}+1}{5} = \frac{3}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

Exercice 29 Soit $z = a+\mathrm{i}b$ un nombre complexe, où $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Par définition $\overline{z} = a-\mathrm{i}b$, donc

1. $z+\overline{z} = a+\mathrm{i}b+a-\mathrm{i}b = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.
2. $z-\overline{z} = a+\mathrm{i}b-(a-\mathrm{i}b) = a+\mathrm{i}b-a+\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

Exercice 30 On résout les équations :

1. $$z = 1-\mathrm{i}z \iff z+\mathrm{i}z = 1 \iff z(1+\mathrm{i}) = 1 \iff z = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \quad \boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}}$$
2. $$(2+\mathrm{i})z = 2-\mathrm{i} \iff z = \frac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{2^2-2\times2\times\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} = \frac{4-4\mathrm{i}-1}{5} = \frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i} \quad \boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}\right\}}$$

Exercice 31 Pour tous complexes $z = a+\mathrm{i}b$, $w = c+\mathrm{i}d$ écrits sous forme algébrique :

1. $\overline{z+w} = \overline{a+\mathrm{i}b+c+\mathrm{i}d} = \overline{a+c+\mathrm{i}(b+d)} = a+c-\mathrm{i}(b+d) = a-\mathrm{i}b+c-\mathrm{i}d = \overline{z}+\overline{w}$.
2. D'un côté :
$$z\times w = (a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = ac+\mathrm{i}ad+\mathrm{i}bc+\mathrm{i}^2bd = ac-bd+\mathrm{i}(ad+bc),$$
donc
$$\overline{z\times w} = ac-bd-\mathrm{i}(ad+bc).$$
De l'autre,
$$\overline{z}\times\overline{w} = (a-\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d) = ac-\mathrm{i}ad-\mathrm{i}bc+\mathrm{i}^2bd = ac-bd-\mathrm{i}(ad+bc).$$
On a donc bien
$$\overline{z\times w} = \overline{z}\times\overline{w}.$$

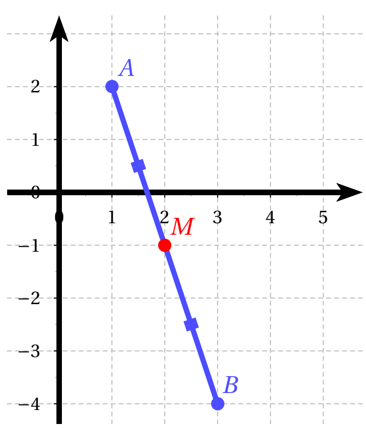
Exercice 32 Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = a+\mathrm{i}b$. On pose
$$Z = z-2\overline{z}+2+3\mathrm{i}.$$

1. On écrit Z sous forme algébrique :
$$Z = z-2\overline{z}+2+3\mathrm{i} = a+\mathrm{i}b-2(a-\mathrm{i}b)+2+3\mathrm{i} = a+\mathrm{i}b-2a+2\mathrm{i}b+2+3\mathrm{i} = -a+2+\mathrm{i}(3b+3).$$
2. On raisonne par équivalences :
   - Z imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(Z)=0 \iff -a+2=0 \iff a=2$.
     Conclusion : Z est imaginaire pur lorsque z est de la forme $z = 2+\mathrm{i}b$, avec b réel quelconque.
   - Z réel $\iff \mathrm{Im}(Z)=0 \iff 3b+3=0 \iff b=-1$.
     Conclusion : Z est réel lorsque z est de la forme $z = a-\mathrm{i}$, avec a réel quelconque.

   ⚠Un complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nul ; il est imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle.

Exercice 33

1.



2. D'après la formule du cours, le milieu M du segment $[AB]$ a pour affixe
$$m = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2\mathrm{i}+3-4\mathrm{i}}{2} = \frac{4-2\mathrm{i}}{2} = 2-\mathrm{i}.$$
3. D'après la formule du cours, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B-z_A = b-a = (3-4\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i}) = 3-4\mathrm{i}-1-2\mathrm{i} = 2-6\mathrm{i}.$$

Exercice 34

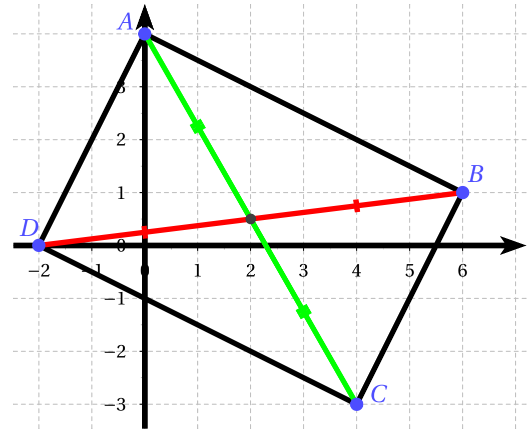
Le milieu de $[AC]$ a pour affixe

$$\frac{a+c}{2} = \frac{4\mathrm{i}+4-3\mathrm{i}}{2} = \frac{4+\mathrm{i}}{2} = 2+0,5\mathrm{i}.$$

Le milieu de $[BD]$ a pour affixe

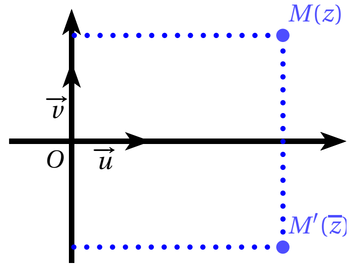
$$\frac{b+d}{2} = \frac{6+\mathrm{i}-2}{2} = \frac{4+\mathrm{i}}{2} = 2+0,5\mathrm{i}.$$

Les affixes sont les mêmes, donc les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu. C'est donc un parallélogramme (propriété du collège).



Exercice 35 Dans chaque cas, s est une transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

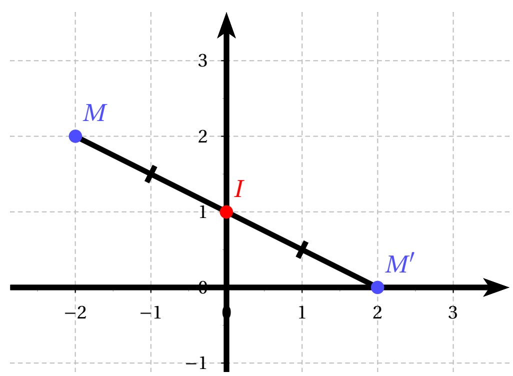
1. Si $z' = \overline{z}$, s est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



2. Si $z' = 2\mathrm{i} - z$, alors

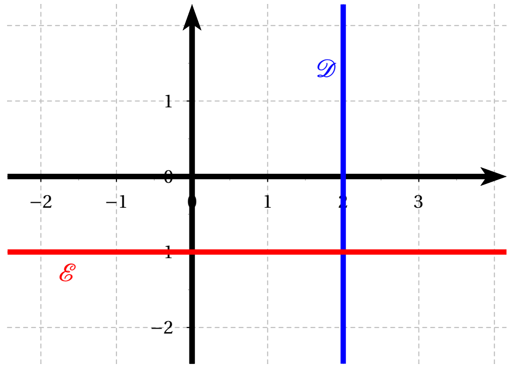
$$\frac{z+z'}{2} = \frac{z+2\mathrm{i}-z}{2} = \mathrm{i},$$

donc le point I d'affixe i est le milieu du segment $[MM']$. On en déduit que s est la symétrie centrale de centre I.



Exercice 36

- La partie réelle d'un complexe est l'abscisse de son image. Donc l'ensemble $\mathscr{D} = \{M(z) \mid \mathrm{Re}(z) = 2\}$ est l'ensemble des points d'abscisse 2, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 2$.
- La partie imaginaire d'un complexe est l'ordonnée de son image. Donc l'ensemble $\mathscr{E} = \{M(z) \mid \mathrm{Im}(z) = -1\}$ est l'ensemble des points d'ordonnée -1, c'est-à-dire la droite d'équation $y = -1$.



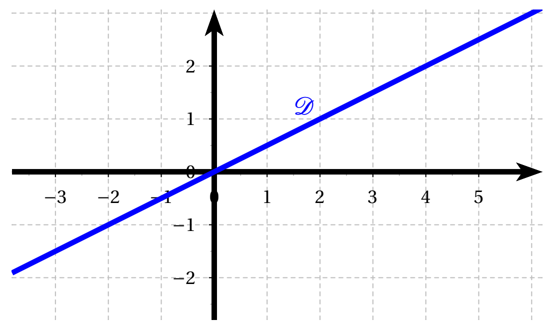
Exercice 37 1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x + \mathrm{i}y$. On écrit sous forme algébrique :

$$\mathrm{i}z + 2\overline{z} = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 2(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{i}x + \mathrm{i}^2 y + 2x - 2\mathrm{i}y = 2x - y + \mathrm{i}(x - 2y).$$

Conclusion :

- la partie réelle de $\mathrm{i}z + 2\overline{z}$ est $2x - y$;
- la partie imaginaire de $\mathrm{i}z + 2\overline{z}$ est $x - 2y$.

2. Soit M un point du plan d'affixe z. On raisonne par équivalences :



$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\iff \left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) \text{ réel} \\ &\iff \mathrm{Im}\left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) = 0 \\ &\iff x - 2y = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{D}$ est donc la droite d'équation $x - 2y = 0$ (ou, sous forme réduite, $y = \frac{1}{2}x$).

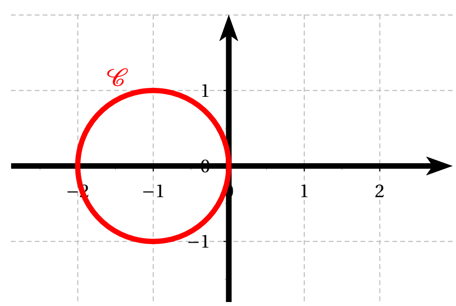
Exercice 38 1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x + \mathrm{i}y$. On écrit sous forme algébrique :

$$(z + 2) \times \overline{z} = (x + \mathrm{i}y + 2) \times (x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2 y^2 + 2x - 2\mathrm{i}y = x^2 + 2x + y^2 - 2\mathrm{i}y.$$

Conclusion :

- la partie réelle de $(z + 2) \times \overline{z}$ est $x^2 + 2x + y^2$;
- la partie imaginaire de $(z + 2) \times \overline{z}$ est $-2y$.

2. Soit M un point du plan d'affixe z. On raisonne par équivalences :



$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff \left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) \text{ imaginaire pur} \\ &\iff \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}z + 2\overline{z}\right) = 0 \\ &\iff x^2 + 2x + y^2 = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{C}$ est un cercle. En effet :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 = 0 &\iff \left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 + y^2 = 0 \\ &\iff (x + 1)^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $I(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{1} = 1$.

Rappel : Le cercle de centre $I(x_I; y_I)$ de rayon R a pour équation

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2.$$

Exercice 39 À tout point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point M' d'affixe $z' = (z + \mathrm{i})\left(\overline{z} + 2\mathrm{i}\right)$.

1. Soit z un nombre complexe, que l'on écrit $z = x + \mathrm{i}y$. On écrit sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z' = (z + \mathrm{i})\left(\overline{z} + 2\mathrm{i}\right) &= (x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}) \times (x - \mathrm{i}y + 2\mathrm{i}) = x^2 - \mathrm{i}xy + 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2 y^2 + 2\mathrm{i}^2 y + \mathrm{i}x - \mathrm{i}^2 y + 2\mathrm{i}^2 \\ &= x^2 - \mathrm{i}xy + 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}xy + y^2 - 2y + \mathrm{i}x + y - 2 = x^2 + y^2 - y - 2 + 3\mathrm{i}x. \end{aligned}$$

Conclusion :

- la partie réelle de z' est x^2+y^2-y-2 ;
- la partie imaginaire de z' est $3x$.

2. On raisonne par équivalences :

$$M' \text{ sur l'axe des abscisses} \iff \operatorname{Im}(z')=0 \iff 3x=0 \iff x=0.$$

Δ est donc la droite d'équation $x=0$.

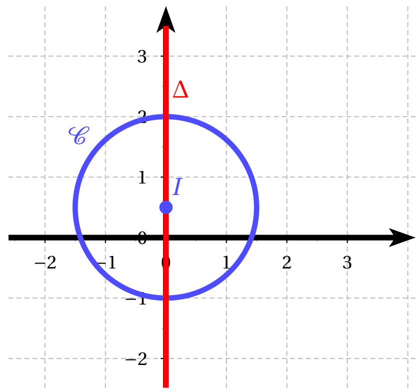
3. On raisonne par équivalences :

$$M' \text{ sur l'axe des ordonnées} \iff \operatorname{Re}(z')=0 \iff x^2+y^2-y-2=0.$$

Or $y^2-y=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, donc

$$x^2+y^2-y-2=0 \iff x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0 \iff x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Conclusion : $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.



Exercice 40 On résout dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2-2z+5=0$.
   - Le discriminant est $\Delta=(-2)^2-4\times1\times5=-16$.
   - $\Delta<0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{2-\mathrm{i}\sqrt{|-16|}}{2\times1}=\frac{2-4\mathrm{i}}{2}=1-2\mathrm{i},$$
$$z_2=\overline{z_1}=1+2\mathrm{i}.$$

2. $z^2-4z+3=0$.
   - Le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$ – qui sont en fait des nombres réels :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4-2}{2}=1,$$
$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4+2}{2}=3.$$

3. $z^2+z+1=0$.
   - Le discriminant est $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$.
   - $\Delta<0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{|-3|}}{2\times1}=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2=\overline{z_1}=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 41 On effectue les divisions euclidiennes :

1.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2z^3-7z^2+13z-5 & 2z-1 \\ \cline{3-3}
- & 2z^3-z^2 & z^2-3z+5 \\ \cline{2-2}
 & -6z^2+13z-5 & \\
- & -6z^2+3z & \\ \cline{2-2}
 & 10z-5 & \\
- & 10z-5 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Conclusion :

$$2z^3-7z^2+13z-5=(2z-1)\left(z^2-3z+5\right).$$

2.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & z^4-4z^3-9z^2+27z+38 & z^2-z-7 \\ \cline{3-3}
- & z^4-z^3-7z^2 & z^2-3z-5 \\ \cline{2-2}
 & -3z^3-2z^2+27z & \\
- & -3z^3+3z^2+21z & \\ \cline{2-2}
 & -5z^2+6z+38 & \\
- & -5z^2+5z+35 & \\ \cline{2-2}
 & z+3 &
\end{array}
$$

On s'arrête car le degré du reste $(z+3)$ est strictement inférieur à celui du diviseur (z^2-z-7). Finalement :

$$z^4-4z^3-9z^2+27z+38=\left(z^2-z-7\right)\left(z^2-3z-5\right)+\underbrace{z+3}_{\text{reste}}.$$

Exercice 42 1. (a) 1 est racine évidente de l'équation $z^3-5z^2+8z-4=0$, puisque

$$1^3-5\times1^2+8\times1-4=0.$$

D'après la proposition 2 du cours, on peut factoriser par $z-1$. Pour obtenir le quotient, on pose la division euclidienne :

$$
\begin{array}{rr|l}
 & z^3-5z^2+8z-4 & z-1 \\ \cline{3-3}
- & z^3-z^2 & z^2-4z+4 \\ \cline{2-2}
 & -4z^2+8z-4 & \\
- & -4z^2+4z & \\ \cline{2-2}
 & 4z-4 & \\
- & 4z-4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

On a donc

$$z^3-5z^2+8z-4=(z-1)\left(z^2-4z+4\right).$$

On peut dès lors résoudre :

$$
\begin{aligned}
z^3-5z^2+8z-4=0 &\iff (z-1)\left(z^2-4z+4\right)=0\\
&\iff z-1=0 \quad \text{ou} \quad z^2-4z+4=0.
\end{aligned}
$$

- L'équation $z-1=0$ a pour solution $z=1$.
- On résout l'équation $z^2-4z+4=0$:
  — Le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times4=0$.

— $\Delta = 0$, donc il y a une seule solution dans $\mathbb{C}$:

$$z_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2\times 1} = 2.$$

Conclusion : l'équation $z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$ (qui sont en fait des nombres réels) :

$$\mathscr{S} = \{1;2\}.$$

(b) -2 est racine évidente de l'équation $z^3 + 8 = 0$, puisque $(-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$.
D'après la proposition 2 du cours, on peut factoriser par $z - (-2) = z + 2$. Pour obtenir le quotient, on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l}
 & z^3 + 0z^2 + 0z + 8 & z+2 \\ \cline{3-3}
- & z^3 + 2z^2 & z^2 - 2z + 4 \\ \cline{2-2}
 & -2z^2 + 0z + 8 & \\
- & -2z^2 - 4z & \\ \cline{2-2}
 & 4z + 8 & \\
- & 4z + 8 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc

$$z^3 + 8 = (z+2)\left(z^2 - 2z + 4\right).$$

On peut dès lors résoudre :

$$\begin{aligned}
z^3 + 8 = 0 &\iff (z+2)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0 \\
&\iff z + 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad z^2 - 2z + 4 = 0.
\end{aligned}$$

- L'équation $z + 2 = 0$ a pour solution $z = -2$.
- On résout l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$:
  - Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12$.
  - $\Delta < 0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2 - \mathrm{i}\sqrt{|-12|}}{2\times 1} = \frac{2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \\
z_2 &= \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Remarque : $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Conclusion : l'équation $z^3 + 8 = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{C}$:

$$\mathscr{S} = \left\{-2; 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}; 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}.$$

2. Pour résoudre l'équation $z^4 - 1 = 0$, on peut d'abord voir que 1 est racine évidente, puis factoriser avec la division euclidienne. On aura $z^4 - 1 = (z-1)Q(z)$, avec Q de degré 3. Il faudra alors de nouveau factoriser Q, avant de pouvoir finir la résolution. Il y a heureusement plus rapide : on factorise grâce aux identités remarquable $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ et $A^2 + B^2 = (A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B)$.

$$z^4 - 1 = \left(z^2\right)^2 - 1^2 = \left(z^2 + 1\right)\left(z^2 - 1\right) = \left(z^2 + 1^2\right)\left(z^2 - 1^2\right) = (z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})(z+1)(z-1),$$

d'où l'on tire les quatre solutions de l'équation :

$$\mathscr{S} = \{-\mathrm{i}; \mathrm{i}; -1; 1\}.$$

Exercice 43 1 est racine de $P(z) = z^9 + 4z^7 - z^6 - 5z^3 + 3z^2 - 2$, car

$$1^9 + 4\times 1^7 - 1^6 - 5\times 1^3 + 3\times 1^2 - 2 = 1 + 4 - 1 - 5 + 3 - 2 = 0,$$

donc d'après la proposition 2 du cours, $z - 1$ divise P.

Exercice 44 Comme $z+2$ est de degré 1, le reste dans la division euclidienne de z^4+6z-1 par $z+2$ est un polynôme constant : on peut écrire

$$z^4+6z-1=(z+2)Q(z)+c,$$

où Q est un polynôme et c une constante réelle.

On remplace z par -2 :

$$\begin{aligned}(-2)^4+6\times(-2)-1&=(-2+2)Q(-2)+c\\16-12-1&=0\times Q(-2)+c\\3&=c\end{aligned}$$

Conclusion : le reste dans la division euclidienne de z^4+6z-1 par $z+2$ est le polynôme constant égal à 3.

Remarque : L'astuce est de remplacer z par une racine du diviseur – ici, -2 est racine de $z+2$.

Exercice 45 Comme z^2+1 est de degré 2, le reste dans la division euclidienne de z^8+z^3+1 par z^2+1 est un polynôme de la forme $az+b$: on peut écrire

$$z^8+z^3+1=\left(z^2+1\right)Q(z)+az+b,$$

où Q est un polynôme et a, b sont deux constantes réelles.

Une racine de z^2+1 est i, donc en remplace par i :

$$\begin{aligned}\mathrm{i}^8+\mathrm{i}^3+1&=\left(\mathrm{i}^2+1\right)Q(\mathrm{i})+a\mathrm{i}+b\\1-\mathrm{i}+1&=0\times Q(\mathrm{i})+a\mathrm{i}+b\\2-\mathrm{i}&=a\mathrm{i}+b\end{aligned}$$

Comme a et b sont des réels, par unicité de l'écriture sous forme cartésienne d'un nombre complexe :

$$a=-1 \qquad \text{et} \qquad b=2.$$

Conclusion : le reste dans la division euclidienne de z^8+z^3+1 par z^2+1 est le polynôme $-z+2$.

Exercice 46 On rappelle la proposition à démontrer :

Proposition 2.

Soient P un polynôme de degré $n\geq 1$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine de P, c'est-à-dire que $P(\alpha)=0$. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que

$$P(z)=(z-\alpha)Q(z).$$

Le polynôme $z-\alpha$ est de degré 1, donc la division euclidienne de P par $z-\alpha$ s'écrit

$$P(z)=(z-\alpha)Q(z)+c, \tag{3}$$

où c est un polynôme constant.

On remplace z par α :

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+c.$$

Par hypothèse $P(\alpha)=0$, puisque α est racine de P, donc

$$0=0\times Q(\alpha)+c,$$

qui donne $c=0$. En reprenant (3),on obtient

$$P(z)=(z-\alpha)Q(z),$$

c'est-à-dire que $z-\alpha$ divise P.

On rappelle à présent le théorème :

Théorème 2.

Un polynôme de degré $n \geq 1$ a au plus n racines dans $\mathbb{C}$.

On fait une démonstration par récurrence sur le degré du polynôme : pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété « un polynôme de degré n a au plus n racines dans $\mathbb{C}$. »

La propriété est vraie au rang 1, car un polynôme de degré 1 est de la forme $P(z) = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Il a donc une seule racine dans $\mathbb{C}$: $z = -\frac{b}{a}$.

Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \geq 1$: tout polynôme de degré n a au plus n racines dans $\mathbb{C}$; et prenons un polynôme P de degré $n+1$.

Il y a deux cas possibles : ou bien P n'a aucune racine, auquel cas la propriété est vraie au rang $n+1$; ou bien P admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, d'après la proposition 2, on peut écrire

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z),$$

où Q est de degré n (puisque P est de degré $n+1$).

Si $z \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence

$$P(z) = 0 \iff z - \alpha = 0 \text{ ou } Q(z) = 0.$$

L'ensemble des racines de P est donc l'ensemble qui contient α et les racines de Q. Or Q est de degré n, donc par hypothèse de récurrence, il a au plus n racines dans $\mathbb{C}$. On en déduit que P a au plus $n+1$ racines dans $\mathbb{C}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.