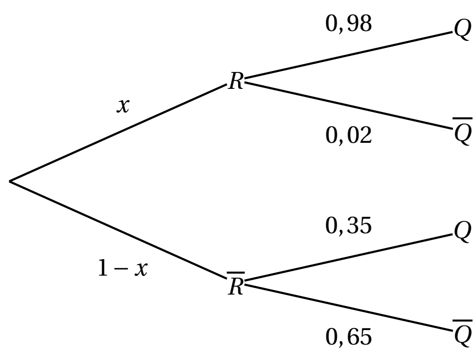
Corrigé du devoir surveillé n°9

1. D'après l'énoncé :

$$\boxed{P(Q) = 0,917 \qquad P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right) = 0,65.}$$

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.

   (a)



   (b) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Q) = x \times 0,98 + (1-x) \times 0,35.$$

   Or on sait que $P(Q) = 0,917$, donc

$$\begin{aligned} 0,917 &= 0,98x + 0,35 - 0,35x \\ 0,917 - 0,35 &= 0,63x \\ x &= \frac{0,567}{0,63} \end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{x = 0,9.}$$

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. La probabilité qu'il ait réussi l'examen est

$$\boxed{P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx 0,962.}$$

4. $1 - 0,615 = 0,385$, donc

$$\begin{aligned} P(N \geq 18) &= P(N = 18) + P(N = 19) + P(N = 20) \\ &= \binom{20}{18} \times 0,615^{18} \times 0,385^{2} + \binom{20}{19} \times 0,615^{19} \times 0,385^{1} + \binom{20}{20} \times 0,615^{20} \times 0,385^{0} \\ &\approx 0,005. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(N \geq 18) \approx 0,005.}$$

5. (a)

$$Z_1 = \begin{cases} 50 & \text{si l'élève n°1 obtient une note supérieure ou égale à 18,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   donc d'après la question précédente, la loi de Z_1 est donnée par le tableau :

x	0	50
$P(Z_1 = x)$	0,995	0,005

$$\boxed{E(Z_1) = 0,995 \times 0 + 0,005 \times 50 = 0,25.}$$

(b) La variable aléatoire Z représente

$$\boxed{\text{la somme totale dépensée par la directrice pour payer les chèques cadeaux.}}$$

(c) Les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ ont même loi, donc aussi même espérance. Donc d'après la question précédente et par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(Z_1) + E(Z_2) + \cdots + E(Z_{640}) = 640 \times 0,25 = 160.$$

Conclusion :

$$\boxed{E(Z) = 160 \text{ ; c'est ce que dépensera en moyenne la directrice pour payer les chèques cadeaux.}}$$

6. Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ suivent chacune la loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0,615$, donc d'après le cours :
   - leur espérance est $n \times p = 20 \times 0,615 = 12,3$;
   - leur variance est $n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

   Par linéarité de l'espérance :
   $$E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \cdots + E(N_{10}) = 10 \times 12,3 = 123.$$

   Et comme les N_i sont indépendantes :

   $$V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \cdots + V(N_{10}) = 10 \times 4,77355 = 47,355.$$

   Conclusion :
   $$\boxed{E(S) = 123 \qquad V(S) = 47,355.}$$

7. (a) La variable aléatoire M est

   $$\boxed{\text{la moyenne des 10 candidats.}}$$

   (b) D'après le cours :
   $$\boxed{E(M) = \frac{E(S)}{10} = \frac{123}{10} = 12,3 \qquad V(M) = \frac{V(S)}{10^2} = \frac{47,355}{100} = 0,47355.}$$

   (c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

   $$P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2},$$

   soit
   $$P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4}.$$

   Donc en prenant l'événement contraire :

   $$P(|M - 12,3| < 2) \geq 1 - \frac{0,47355}{4},$$

   c'est-à-dire
   $$P(10,3 < M < 14,3) \geq 0,8816125.$$

   Conclusion : la probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 $\boxed{\text{vaut plus de 88 \%.}}$