Devoir surveillé n°3

- Le soin, la rédaction et l'orthographe seront pris en compte dans l'évaluation des copies.
- On demande aux élèves de rendre le sujet du devoir avec leur copie.

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.

Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.

Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Prouver que P est inversible et qu'elle est sa propre inverse : $P^{-1} = P$.
   En déduire, sans faire de nouveau calcul, la valeur de P^2.

3. Soit $D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$. Prouver que $M = PDP$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

7. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.

8. En déduire une expression de V_n en fonction de M, n et V_0.

9. Exprimer enfin U_n en fonction M, n, U_0 et X.

10. En utilisant la question précédente, on démontre que pour tout entier naturel n,

$$U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}.$$

   On ne demande pas de justifier cette formule pour U_n, qui est donc admise.

   Les quantités d'eau dans chaque bassin se rapprochent-elles de valeurs limites ? Si oui, lesquelles ? Justifier.