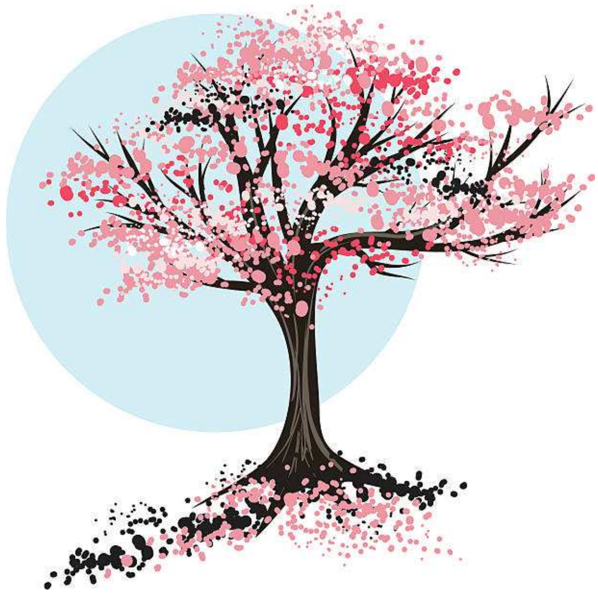
Lycée Mariette | Boulogne-sur-Mer | 2024–2025



Exercices de Mathématiques

Terminale Spécialité

Nicolas Perpète

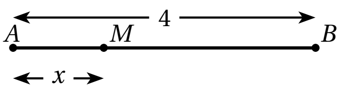
Table des matières

I. Compléments sur la dérivation

Exercice 1
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-2;6]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 4.$$

Exercice 2 (🏛)
On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 et un point mobile M pouvant se déplacer librement sur ce segment.



On note x la longueur du segment $[AM]$ et $f(x)$ le produit des longueurs $AM \times BM$.

1. Prouver que $f(x) = 4x - x^2$.

2. Où faut-il placer le point M pour que le produit des longueurs $AM \times BM$ soit maximal ?

Exercice 3
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 0,5x^3 + 0,75x^2 - 3x - 1.$$

Exercice 4
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction h définie sur $[1;+\infty[$ par

$$h(x) = (x-6)\sqrt{x}.$$

Exercice 5
La fonction f est définie sur $[1;4]$ par $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, 2, 4 ; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. Prouver que $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$ pour tout $x \in [1;4]$.

2. Construire le tableau de variations de f.

3. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de T_A.

4. Déterminer également les équations de T_B et T_C.

5. Tracer les trois tangentes dans un repère orthonormé, puis construire la courbe de la fonction f.

Exercice 6 (🏛)
Calculer la dérivée et construire le tableau de variations de la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par

$$i(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. Étudier les variations de i.

2. **a.** Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative (C) de la fonction i au point d'abscisse 0.

b. Étudier les positions relatives de (T) et (C).

3. Construire (C) et (T) dans un même repère.

Exercice 7
La distance (en m) parcourue au temps t (en s) par une pierre en chute libre est $d(t) = 5t^2$.
On lance cette pierre d'une hauteur de 20 m.

1. Combien de temps la pierre met-elle pour arriver au sol ?

2. Construire la courbe représentative de la fonction d dans un repère orthogonal (graduer de 0,2 en 0,2 en abscisse, et de 2 en 2 en ordonnée).

3. Déterminer la vitesse de la pierre au moment de l'impact au sol.

Exercice 8
Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,5x+1},\ g(x) = \mathrm{e}^{-1,5x},\ h(x) = \mathrm{e}^{2x-2},\ i(x) = \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Exercice 9 (🏛)
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Prouver que pour tout $x \in [0;4]$:

$$f'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Construire le tableau de variations de f.

Exercice 10 (🏛)
Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

Exercice 11
Exprimer chacun des nombres ci-dessous sous la forme e^a, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^3},\quad \frac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2}{\left(\mathrm{e}^2\right)^2},\quad \left(\mathrm{e}^2\right)^3 \times \mathrm{e}^{-5}.$$

Exercice 12
Résoudre les équations :

1. $e^x = -3$. **2.** $e^{2x-1} = 1$. **3.** $e^{2x} + 2e^x = 3$.

Exercice 13
Démontrer que pour tout nombre réel x :

1. $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$.

2. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Exercice 14 (🏛)
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = e^{-x^2}$.

2. $h(x) = (-4x+1)^3$.

3. $i(x) = e^{5x-9}$.

4. $j(x) = \left(x^2 - 3x\right)^5$.

5. $k(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$.

Exercice 15
Étudier la convexité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^2$. **2.** $g(x) = x^3$. **3.** $h(x) = e^x$.

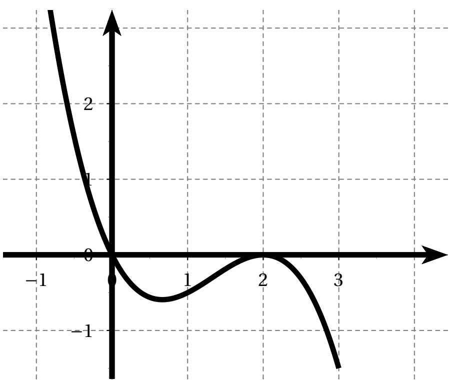
Exercice 16 (🏛)
La fonction g est définie sur l'intervalle $[-1;3]$ par

$$g(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 - 2x.$$

1. Étudier les variations de g.

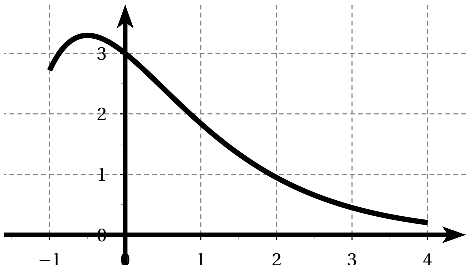
2. Calculer la dérivée seconde de g et étudier sa convexité. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion.

3. Reproduire et coder la figure ci-dessous pour illustrer ces résultats.



Exercice 17 (🏛)
Étudier la convexité de la fonction h définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par

$$h(x) = (2x+3)e^{-x}.$$



Indication : On obtient $h''(x) = (2x-1)e^{-x}$.

Exercice 18 (🏛)
On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle et T sa tangente au point $A(0;1)$.

1. Déterminer l'équation de T et faire une figure.

2. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.

Exercice 19
Déterminer $v \circ u(x)$ dans les cas suivants :

1. $u(x) = x^2$, $v(x) = 4x+1$.

2. $u(x) = x+2$, $v(x) = x^3 - 3x$.

3. $u(x) = x-4$, $v(x) = \sqrt{x}$.

4. $u(x) = 2x+3$, $v(x) = e^x$.

Exercice 20
Dans chaque cas, déterminer une formule pour $v(x)$ et pour $u(x)$ connaissant $v(u(x))$.

1. $v \circ u(x) = \sqrt{x^2+1}$.

2. $v \circ u(x) = (x-3)^2 + 5(x-3) + 1$.

3. $v \circ u(x) = e^{3x-1}$.

Exercice 21 (🏅)
On considère dans un repère orthonormé la parabole $P : y = x^2$ et le point $A(3;0)$.

1. Soit m un réel et soit M le point de P d'abscisse m. Quelle est l'ordonnée de M ? Prouver que

$$AM = \sqrt{m^4 + m^2 - 6m + 9}.$$

2. On pose $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prouver que

$$f'(x) = \frac{(x-1)\left(2x^2+2x+3\right)}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}},$$

puis construire le tableau de variations de la fonction f.

3. Pour quelle valeur de m la longueur AM est-elle minimale ? Prouver que, dans ce cas, la tangente à P au point M est orthogonale à la droite (AM). Illustrer par une figure.

II. Raisonnement par récurrence

Exercice 22

Dans chaque question, calculer les premiers termes des suites.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n^2-1}{n+2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
3. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$
4. $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = v_n + n \qquad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23

Pour soigner son cancer de la thyroïde, un patient doit ingérer une unique gélule contenant 10 μg (microgrammes) d'iode 131. Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8 %. On note v_n la masse (en μg) d'iode 131 après n jours.

1. Déterminer v_0, v_1 et v_2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Quelle est la masse d'iode 131 après 10 jours (arrondir à 0,1 μg près).
3. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'iode 131 se désintègrent. Déterminer la valeur de la demi-vie de l'iode 131.

Exercice 24

Une plaque en verre teinté atténue de 15 % l'intensité lumineuse d'un rayon qui la traverse.
On note v_n l'intensité lumineuse (mesurée en lumens) d'un rayon à la sortie si on superpose n plaques identiques ($n \geq 1$).
On suppose que l'intensité lumineuse à l'entrée de la première plaque est $v_0 = 12$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Quel est le nombre minimal de plaques à superposer pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 100 ?

Exercice 25

Une suite v est définie par $v_0 = 4$ et la relation de récurrence
$$v_{n+1} = 2v_n + 2$$
pour tout entier naturel n.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Prouver que v n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Exercice 26 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = 3u_n - 1$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = u_n - 0,5$ pour tout entier naturel n. Calculer v_0, v_1 et v_2.
3. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. Déduire de la question 3 l'expression de v_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Exprimer enfin u_n en fonction de n.

Exercice 27

Le 01/01/2020, on emprunte 10 000 € à la banque au taux d'intérêt mensuel de 2 %. À chaque fin de mois on rembourse 300 €.

Comment ça marche ?... Le 01/01/2020 on emprunte 10 000 € au taux d'intérêt mensuel de 2 %, donc à la fin du mois de janvier 2020 la somme à rembourser est passée à
$$1,02 \times 10000 = 10200 \text{ €}.$$
À ce moment on rembourse 300 €, donc le 01/02/2020 il reste à rembourser
$$10200 - 300 = 9900 \text{ €}.$$
On note u_n la somme à rembourser le 1er jour du ne mois (en convenant que janvier 2020 est le mois 0, février 2020 le mois 1, etc.). On a donc $u_0 = 10000$ et $u_1 = 9900$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose
$$v_n = u_n - 15000.$$
Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
4. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer la durée du crédit. Calculer la somme totale remboursée.

Exercice 28 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = 2^n - 1.$$

Exercice 29 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (n+1)^2.$$

Exercice 30 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq 6.$$

Exercice 31 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 32

Soit q un réel différent de 1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Exercice 33 (Inégalité de Bernoulli 🏅)

Soit x un réel positif. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 34 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose également $v_n = \frac{4}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 35 (🏛)

Une salle de sport compte 500 abonnés en 2020. On suppose qu'à partir de cette date, chaque année, 80 % des personnes inscrites renouvellent leur abonnement et 40 nouvelles personnes s'abonnent.
On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année $2020 + n$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Compléter les pointillés : pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \ldots u_n + \ldots.$$

c. Justifier brièvement le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On pose $v_n = u_n - 200$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 200 + 300 \times 0{,}8^n.$$

c. Suivant ce modèle, quel devrait être le nombre d'abonnés en 2030 ? (arrondir à l'unité)

3. Redémontrer par récurrence la formule obtenue pour u_n dans la question 2.b.

Exercice 36 (🏛)

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $v_0 = 8$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2. Placer ces nombres, ainsi que u_0 et v_0, sur une droite graduée.

2. On pose $s_n = v_n + u_n$ et $d_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Prouver que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3. Exprimer d_n, puis u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37

Éditer en machine un programme Python qui affiche les carrés des entiers de 1 à 5.

Exercice 38

Éditer en machine un programme Python qui affiche les uns en-dessous des autres les nombres de la table de 8 :

$$8\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ \cdots\ ,\ 80.$$

Exercice 39
Que calcule le programme suivant ?

```
s=0
for i in range(1,101):
        s=s+i
print(s)
```

Exercice 40
Éditer en machine un programme Python qui calcule :

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10.$$

Exercice 41
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que calcule le programme suivant ?

```
u=3
for i in range(4):
        u=2*u-1
print(u)
```

Exercice 42
Éditer en machine un programme Python qui affiche **la liste** des nombres de la table de 8 :

$$[8\ ,\ 16\ ,\ 24\ ,\ \cdots\ ,\ 80]\,.$$

Exercice 43
On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir exercice 41).
Écrire un programme Python qui affiche la liste des termes de u_0 à u_6.

Exercice 44
Quels seront les affichages des programmes suivants ?

Programme 1

```
x=3
if x==4:
    print(5*x)
else:
    print(2*x)
```

Programme 2

```
x=3
if x<=4:
    print(5*x)
else:
    print(2*x)
```

Exercice 45
On rappelle que si a et b sont deux entiers, les instructions Python $a//b$ et $a\%b$ donnent respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b. Par exemple :

$$\begin{array}{r|l} 3\ 4 & 6 \\ \cline{2-2} -\ 3\ 0 & 5 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Donc, avec Python, $34//6 = 5$ et $34\%6 = 4$.

Éditer un programme Python qui renvoie la liste des diviseurs positifs de 30 (c'est-à-dire $[1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]$).

Exercice 46
Éditer la fonction suivante en machine :

```
def f(x):
        return x**2
```

Quelle est la valeur renvoyée lorsqu'on entre f(3) ? Et f(−2) ?

Exercice 47
Que fait la fonction suivante ?

```
def g():
        return 5
```

Exercice 48
Écrire une fonction **moyenne** de façon que l'instruction

```
moyenne(a,b)
```

renvoie la moyenne des deux nombres a et b.

Exercice 49
Comme les notes à un DS sont mauvaises, un professeur de mathématiques décide de multiplier toutes les notes par 1,2, mais sans dépasser 20.
Éditer une fonction **transforme** qui renvoie la nouvelle note d'un élève après transformation. Par exemple,

```
transforme(15)
```

renvoie 18, puisque $15 \times 1{,}2 = 18$; et

```
transforme(19)
```

renvoie 20, puisque $19 \times 1{,}2 = 22{,}8$.

Exercice 50

On reprend encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 41 : $u_0 = 3$ et

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Éditer une fonction **terme** de manière que

```
terme(n)
```

renvoie la valeur de u_n.

2. Éditer une fonction **liste** de manière que

```
terme(n)
```

renvoie la liste de tous les termes de u_0 à u_n.

Exercice 51

On considère la fonction :

```
def somme(n):
        s=0
        for k in range(1,n+1):
                s=s+1/k
        return s
```

Détailler le calcul correspondant à l'instruction

```
somme(100)
```

Exercice 52

On considère la fonction **mystere** définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.

```
def mystere(L):
        M=L[0]
        for i in range(len(L)):
                if L[i]>M:
                        M=L[i]
        return M
```

Déterminer ce que renvoie la commande

```
mystere([2,3,7,0])
```

Exercice 53

Une suite de Syracuse est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier strictement positif; s'il est pair, on le divise par 2; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers strictement positifs.

1. On part de $u_0 = 26$. Calculer les termes successifs de la suite, jusqu'à observer un phénomène particulier.
Indication : On trouve $u_6 = 16$.

2. Écrire une fonction **syracuse** de manière que

```
syracuse()
```

calcule et renvoie **la liste** de tous les termes de $u_0 = 26$ jusqu'à $u_{10} = 1$ (c'est-à-dire la liste que vous avez obtenue dans la question 1).

III. Dénombrement

Exercice 54

Un clavier de 12 touches comportant les chiffres de 1 à 9 et les lettres A, B, C se trouve à l'entrée d'un immeuble. Pour accéder à cet immeuble, il faut composer un code à 4 symboles.

1. Combien y a-t-il de codes d'entrée possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes d'entrée ne comportant pas la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes d'entrée formés de 4 symboles différents ?

Exercice 55

1. Combien le mot VOYAGE a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) ?
2. Même question avec le mot ANTILLES.

Exercice 56

Dans un test d'aptitude, on pose 10 questions à un candidat auxquelles il doit répondre par « Vrai » ou « Faux ».
De combien de façons différentes peut-il remplir ce questionnaire ?

Exercice 57

Lors de la finale des mondiaux d'athlétisme huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont Américains.

1. Combien de podiums possibles y a-t-il (en distinguant le 1^{er}, le 2^{e} et le 3^{e} de la course) ?
2. Combien de podiums y a-t-il comportant au moins un Américain ?

Exercice 58

On considère la fonction :

```
def fact(n):
        p=1
        for i in range(1,n+1):
                p=p*i
        return p
```

Que calcule fact(4) ?

Exercice 59 (🏛)

Un candidat à un examen connaît trois questions d'histoire sur les six possibles et deux questions de géographie sur les cinq possibles. Un examinateur lui pose une question d'histoire et une question de géographie.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Quelle est la probabilité que le candidat connaisse les deux questions ? Au moins une des deux questions ?

Exercice 60 (🏛)

Lorsqu'on actionne la manette d'une machine à sous, on fait apparaître sur l'écran trois symboles choisis au hasard parmi ♡ (cœur), ♢ (carreau), ♠ (pique) et ♣ (trèfle).

♠ ♡ ♠

Calculer la probabilité des événements :

G : « Les trois symboles à l'écran sont différents. »

H : « Au moins un cœur apparaît à l'écran. »

Exercice 61 (🏛)

1. On demande aux 30 élèves d'une classe de choisir un nombre au hasard entre 1 et 200. Quelle est la probabilité qu'ils choisissent tous un nombre différent ?

2. Calculer explicitement cette probabilité grâce à un programme Python.

Exercice 62

Douze chevaux sont au départ d'une course. Un joueur joue au tiercé, c'est-à-dire qu'il mise sur le 1er, le 2e et le 3e de la course à venir. Il choisit les chevaux au hasard. À l'arrivée, ce sont les n°7, 4 et 10 qui arrivent aux trois premières places.

Calculer la probabilité de l'événement

A : « Le joueur obtient le tiercé. »

(c'est-à-dire qu'il a trouvé les trois chevaux sur le podium, mais pas forcément dans l'ordre).

Exercice 63

1. Donner les valeurs explicites de

$$A=\binom{5}{2},\quad B=\binom{6}{3},\quad C=\binom{50}{1},\quad D=\binom{4}{0}.$$

2. Comparer les nombres $\binom{10}{3}$ et $\binom{10}{7}$, puis les nombres $\binom{100}{60}$ et $\binom{100}{40}$. Généraliser.

Exercice 64

On coche trois numéros sur une grille de neuf cases numérotées de 1 à 9.

Combien y a-t-il de grilles possibles ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Exercice 65 (🏛)

On prend 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de mains possibles ?

Exercice 66

Lorsqu'ils se rencontrent en arrivant le matin au lycée, les 24 élèves d'une classe se serrent la main. Combien de poignées de mains sont-elles échangées ?

Exercice 67 (🏅)

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Que vaut $(p-1)!\times p$?

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que

$$\binom{n+1}{2}=\frac{n^2+n}{2}.$$

3. Soient $1\leq k\leq n$ deux entiers naturels. Démontrer que $n\times\binom{n-1}{k-1}=k\times\binom{n}{k}$.

Exercice 68

Une association a vendu des calendriers dans le but de financer un voyage. Malheureusement, seuls 12 des 20 membres pourront effectivement partir compte tenu du peu d'argent récolté.

1. Quel est le nombre de groupes différents de 12 personnes que l'on peut constituer pour participer au voyage ?

2. David est un des membres de l'association. Combien y a-t-il :

- de groupes de 12 personnes contenant David ?
- de groupes de 12 personnes ne contenant pas David ?

3. Quelle égalité résulte des questions 1 et 2 ?

4. Généraliser : si $1\leq k\leq n-1$:

$$\binom{n}{k}=\cdots+\cdots$$

5. Redémontrer par le calcul la formule obtenue à la question précédente.

Exercice 69 ()
Un sélectionneur d'une équipe de football dispose de vingt joueurs dont trois gardiens de but.
Combien d'équipes différentes de onze joueurs, dont un gardien, peut-il former ?

Exercice 70 ()
Une colonie de vacances compte 40 enfants et 5 moniteurs. Cette colonie possède un mini-bus de 12 places pour les excursions.
Sachant que deux moniteurs doivent accompagner les excursions, combien y a-t-il de remplissages possibles du mini-bus ?

Exercice 71 ()
Un jeu de 32 cartes est formé des cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as dans chacune des quatre couleurs cœur, carreau, pique, trèfle.

1. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes possibles ?
2. Quelle est la probabilité qu'une main contienne :
   - exactement 3 dames ?
   - trois cœurs et deux carreaux ?
   - exactement un roi et deux valets ?

Exercice 72 ()

1. Huit candidats se présentent à un concours d'orchestre. Les recruteurs peuvent choisir autant de candidats qu'ils le souhaitent, et même n'en choisir aucun s'ils estiment qu'ils n'ont pas le niveau suffisant.
   a. Si 3 candidats sont recrutés, montrer qu'il y a 56 façons possibles de les choisir.
   b. Si 7 candidats sont recrutés, de combien de façons différentes peuvent-ils être choisis ?
   c. Combien y a-t-il de recrutements différents possibles ? Écrire la réponse sous forme de somme, en utilisant les combinaisons.
   d. Montrer, par une autre méthode de dénombrement, qu'il y a 256 recrutements différents possibles.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En vous inspirant de la question précédente, calculer

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}.$$

Exercice 73 ()

On dispose de deux urnes :

- une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;
- une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.

On tire simultanément et au hasard deux boules de chaque urne. Calculer la probabilité de l'événement
A : « parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches. »

Pour simplifier le calcul, on pourra supposer que les boules portent toutes un numéro différent.

IV. Limites de suites

Exercice 74 ()
On a vu dans le cours que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. En utilisant ce résultat et les règles de calcul sur les limites, calculer les limites des suites de termes généraux :

1. $u_n = 3+\frac{1}{n}$.
2. $v_n = 4-\frac{1}{n^2}$.
3. $w_n = \left(5+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$.
4. $x_n = \frac{1}{1+\frac{2}{n}}$.
5. $y_n = \frac{3n-5}{4n+1}$.
   On pourra mettre n en facteur au numérateur et au dénominateur.

Exercice 75
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 6$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n - 4$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On admet qu'elle converge. Calculer sa limite.

Exercice 76
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 = 20$ et de raison $q = -0{,}5$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. On admet que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer sa limite.

Exercice 77

1. Prouver que pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n}.$$

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

Exercice 78 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}4n + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $u_1 = 1{,}6$ et calculer u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq u_n \leq n+1.$$

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.

Exercice 79

En utilisant la définition, prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{4} = +\infty.$$

Exercice 80

Démontrer le théorème de limite par comparaison :

Théorème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Exercice 81 (🏛)

Dans chaque cas, dire si la suite est majorée, minorée, croissante, décroissante.

1. $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$w_{n+1} = \frac{w_n}{1+2w_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pourra admettre, sans le justifier, que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.

Exercice 82

On reprend la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice précédent. Prouver qu'elle converge.

Exercice 83 (🏛)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $v_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.
2. Prouver que

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)v_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 84 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 10$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 85 (🏅)

On définit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admet que cette suite est à termes positifs.

1. Étudier les variations de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous souhaitons prouver à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty. \qquad (\clubsuit)$$

On suppose donc que $(\clubsuit)$ n'est pas vraie.

2. Prouver que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie $\ell \geq 2$.
3. En déduire que

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$$

et aboutir à une absurdité. Conclure.

Exercice 86 (🏛)

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = 0{,}8^n + (-0{,}2)^n$.
2. $v_n = 4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. $w_n = \frac{0{,}5^n - 1}{0{,}5^n + 1}$.
4. $x_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$.

Exercice 87 (🏛)

On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 84 : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$v_n = u_n - 4$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

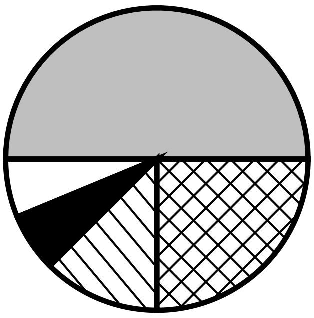
1. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

2. En déduire l'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 88 (🏅)

1. Interpréter en termes de somme infinie le découpage du disque ci-dessous.



2. Soit q un réel dans l'intervalle $]-1;1[$. Vous savez (cours de première) que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

À l'aide de ce résultat, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(q + q^2 + \cdots + q^n\right).$$

3. Démontrer rigoureusement le résultat de la question 1.

Exercice 89

Quel est l'affichage en sortie du programme suivant ?

```
n=10
while n<=14:
        n=n+1
print(n)
```

Exercice 90

Éditer en machine une fonction **div** dont le but est le suivant : on part d'un nombre réel x, que l'on divise par 2 jusqu'à avoir un résultat strictement inférieur à 1. On affiche le dernier résultat obtenu.

Par exemple, l'instruction

div(15)

renvoie 0.9375, puisque

$$15\div2 = 7.5\,;\ 7.5\div2 = 3.75\,;\ 3.75\div2 = 1.875\,;\ 1.875\div2 = 0.9375.$$

Exercice 91 (🏛)

On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exercice 84 : $u_0 = 10$ et

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a vu qu'elle était décroissante, et qu'elle convergeait vers 4.

Quelle est la valeur renvoyée par la fonction suivante ?

```
def seuil():
        u=10
        n=0
        while u>=4.5:
                u=0.5*u+2
                n=n+1
        return n
```

Exercice 92 (🏛)

On place 100 € sur un compte au taux d'intérêt annuel de 5 %. On a donc :

- $100 \times 1,05 = 105$ € après 1 an ;
- $105 \times 1,05 = 110,25$ € après 2 ans ;
- etc.

Écrire une fonction **seuil** qui permette de déterminer le nombre d'années nécessaires pour avoir plus de 200 € sur le compte.

Exercice 93 (🏅)

On reprend l'algorithme de Syracuse (exercice 53). Éditer en machine une fonction **syr** de manière que l'instruction

```
syr(a)
```

renvoie la liste des termes de la suite de Syracuse, en partant de $u_0 = $ a, et jusqu'à obtenir 1. Par exemple,

```
syr(26)
```

renvoie la liste

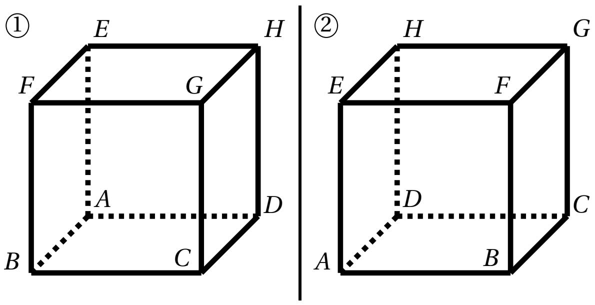
$$[26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]\,.$$

V. Géométrie repérée dans l'espace

Attention

Tous les repères utilisés dans les exercices sont orthonormés.

Dans tous les exercices où on parle d'un cube $ABCDEFGH$, les sommets sont placés comme sur l'une des deux figures ci-contre, suivant les indications de l'énoncé : ① ou ②.



Exercice 94

$ABCDEFGH$ est un cube ②. On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Faire une figure et placer les points $I(0;0;0,75)$ et $J(1;1;0,25)$.
2. Prouver que $BJHI$ est un parallélogramme. Est-ce un losange ?

Exercice 95

$ABCDEFGH$ est un cube ①. On note J et K les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

1. Faire une figure.
2. On travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Déterminer dans ce repère les coordonnées de tous les points de la figure.
3. Prouver que les droites (FH) et (JK) sont parallèles.
4. En déduire que les droites (FJ) et (HK) sont sécantes. Construire leur point d'intersection sur la figure.

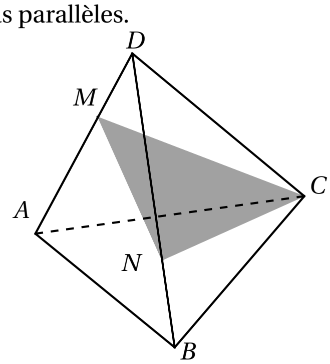
Exercice 96

$ABCDEFGH$ est un cube ①. Les points J et K sont définis par $\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{DB}$.

1. Faire une figure.
2. On travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Donner sans justification les coordonnées des points F et K, puis prouver que J a pour coordonnées $(2;-1;0)$.
3. Prouver que les points K, F et J sont alignés.

Exercice 97

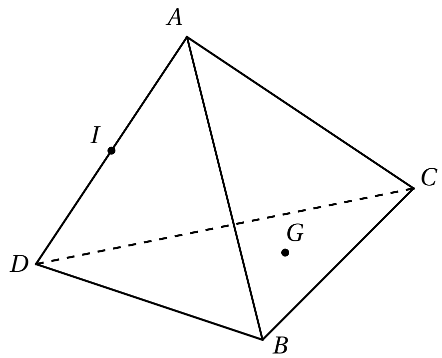
$ABCD$ est un tétraèdre. M est un point de l'arête $[AD]$ et N de l'arête $[BD]$. Les droites (MN) et (AB) ne sont pas parallèles.



Reproduire la figure et construire sans justification la droite d'intersection des plans (ABC) et (MNC).

Exercice 98

$ABCD$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[AD]$, G est un point de la face ABC distinct des sommets et tel que la droite (IG) ne soit pas parallèle au plan (BCD).



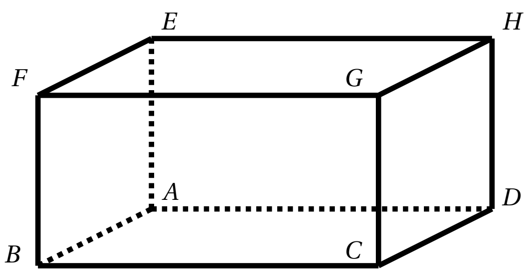
Reproduire la figure et construire sans justification l'intersection de la droite (IG) avec le plan (BCD).

Exercice 99

$ABCDEFGH$ est un cube ①, I est le point tel que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées des points H, I, J, E, G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
3. Le plan (EGJ) coupe la droite (AB) en K. Construire le point K et déterminer ses coordonnées.
4. Prouver que la droite (HI) est parallèle au plan (EGJ).

Exercice 100
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = AE$ et $AD = 2AB$, le point I est le milieu du segment $[GH]$.



Reproduire la figure et construire la section du parallélépipède par le plan (EBI).

Exercice 101
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé de centre O, on considère les points $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$ et $D(4;3;0)$.

1. Faire une figure et construire la pyramide $OADBC$. Calculer son volume.
2. Prouver que le point M de coordonnées $\left(\frac{8}{3};2;\frac{4}{3}\right)$ appartient au segment $[CD]$ et préciser sa position sur ce segment.
3. M se projette orthogonalement en P sur le plan (OAB) et P se projette orthogonalement en H sur la droite (OA).
   Compléter la figure et donner sans justification les coordonnées des points P et H.

Exercice 102
$ABCDEFGH$ est un cube ①.

1. Démontrer que (AE) est orthogonale au plan (ABD).
2. En déduire que (AE) est orthogonale à la droite (BD).
3. Montrer que (BD) est orthogonale au plan (AEC).
4. Que peut-on dire des droites (BD) et (AG) ?

Exercice 103
On reprend l'énoncé de l'exercice précédent et on travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

En utilisant le produit scalaire, prouver que (BD) est orthogonale à (AG).

Exercice 104 (🏛)
$ABCDEFGH$ est un cube ①, I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[BC]$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (AK) et (DI) sont orthogonales.
3. Prouver que (AK) est orthogonale au plan (DIJ).

Exercice 105 (🏛)
On reprend l'énoncé de l'exercice précédent. Calculer une mesure à $1°$ près de l'angle $\widehat{DIJ}$.

Exercice 106 (🏅)

1. Prouver que les points $A(2;4;5)$ et $B(6;3;0)$ sont situés sur une même sphère $\mathscr{S}$ de centre $O(0;0;0)$.
2. Calculer la distance géodésique entre A et B, c'est-à-dire la distance minimale pour aller de A à B en restant à la surface de la sphère. Arrondir à $0,01$ près.

VI. Continuité et limites de suites

Exercice 107 (🏛)

La fonction f est définie sur $[0;2]$ par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

1. Construire son tableau de variations.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0;2]$.
3. Déterminer un encadrement de x_0 au centième.

Exercice 108

1. La fonction f est définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 1.$$

   a. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$.

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   c. Construire le tableau de signe de f.

2. a. La fonction g est définie sur $[0;1]$ par

$$g(x) = -\mathrm{e}^{-2x} - x + 2.$$

   Construire son tableau de variations (on ne demande pas de compléter l'extrémité des flèches).

   b. Déterminer un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 109 (🏛)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Tracer dans un même repère les droites d'équations $y = x$ et $y = 0{,}5x + 3$ sur l'intervalle $[0;10]$ (on prendra 1 cm ou 1 carreau comme unité graphique).
3. Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$

5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 110 (🏛)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0{,}5$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.
2. Tracer dans un même repère les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$ (on prendra 10 cm ou 10 car. comme unité graph.). Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Déterminer la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 111 (🏛)

On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad g(x) = x - \mathrm{e}^{-x}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0;1]$ (on prendra 10 cm ou 10 carreaux comme unité graphique), puis construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in [0;1]$.

   a. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $[0;1]$, puis que cette solution est ℓ.

   b. Déterminer une valeur approchée de ℓ au centième.

Exercice 112

La partie entière d'un nombre réel x, notée $E(x)$, est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
Construire la courbe de cette fonction.

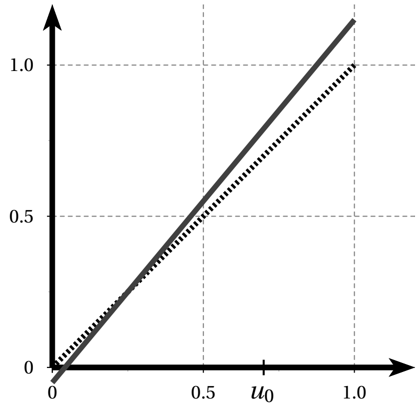
Exercice 113

Sur chacune des figures ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f en traits pleins et la droite d'équation $y = x$ en pointillés. Dans chaque cas, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence

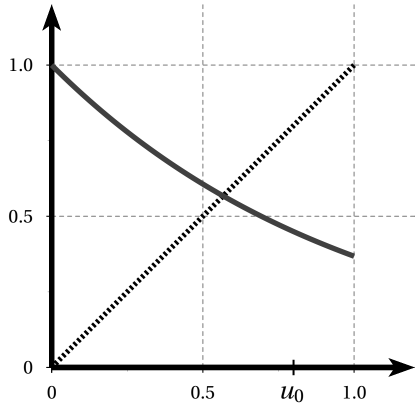
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

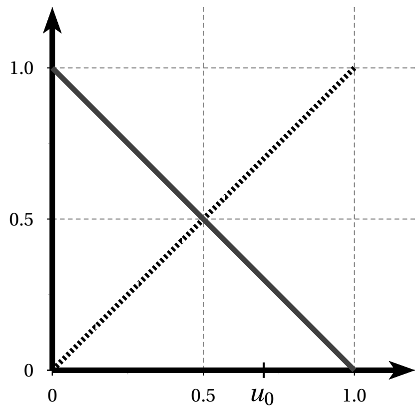
Représenter graphiquement les premiers termes des suites, puis compléter les pointillés sous chacune des figures (on ne demande pas de justification)..



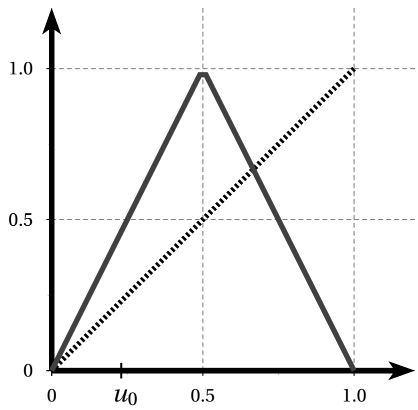
$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$



$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$



La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ....



....

VII. Variables aléatoires, loi binomiale

Exercice 114 (🏛)

Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53 % de chances que ce soit un tir à 2 points et 47 % de chances que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est 52 % contre 44 % à 3 points.
On choisit un tir au hasard. On considère les événements :
D : « Stephen Curry tire à 2 points »,
M : « Stephen Curry marque ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque.
3. Montrer que $P(M) = 0,4824$.
4. Calculer $P_M(D)$. Arrondir au centième.
5. On note X le nombre de points pour le tir choisi au hasard. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 115

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas. Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10. Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

A : « le client choisit de faire l'aller en bateau »,

R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.

2. **a.** Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.

b. Calculer la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport.

c. Le client a fait le retour en bateau. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi fait l'aller en bateau? (Arrondir au millième.)

3. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 500 € en bateau ; il est de 300 € en train.

On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euros de son trajet aller-retour.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer l'espérance mathématique de Y.

Exercice 116

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

On interroge une personne au hasard et on note :

R : « la personne utilise régulièrement les transports en commun »,

J : « la personne est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré – on ne peut pas le compléter en entier pour l'instant.

2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française. Calculer $P\left(\overline{R} \cap J\right)$.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun. (Arrondir au millième.)

Exercice 117

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 118

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15. La bille numérotée 1 est rouge, les billes numérotées 2 à 5 sont bleues, les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.

On note R (respectivement B et V) l'événement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

1. **a.** Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

b. Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

2. Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.

Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ.

Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est $3 \times 3 - 10 = -1$ euro.

Calculer $P(G = 5)$, $P_R(G = 0)$ et $P_{(G=-4)}(V)$.

Exercice 119

Une urne contient quatre boules rouges numérotées de 1 à 4 et six boules bleues numérotées de 1 à 6.

On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité qu'elles soient toutes les deux bleues sachant qu'elles portent toutes les deux un numéro pair.

Exercice 120

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 96 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de dix adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses **illisibles** parmi ces dix adresses.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

2. Calculer $P(X = 2)$. Arrondir au millième.

3. Quelle est la probabilité qu'au moins une adresse soit illisible ? Arrondir au millième.

Exercice 121 (🏛)

Un QCM comporte 10 questions. Pour chacune d'entre elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On note X le nombre de bonnes réponses à ce QCM pour un élève qui répond au hasard à toutes les questions.
On arrondira les réponses au millième.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité des événements :
   A : « l'élève a exactement trois bonnes réponses. »
   B : « l'élève a au moins une bonne réponse. »
3. L'élève a au moins une bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il en ait exactement trois ?

Exercice 122 (🏛)

On lance un dé équilibré à dix faces cent fois de suite. On note X le nombre de 10.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. À l'aide de la calculatrice, calculer $P(5 \leq X \leq 15)$ (arrondir au millième).

Exercice 123 (🏛)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p = 0,8$.
À l'aide de la calculatrice, calculer :

$$P(X \geq 35) \quad , \quad P(X \geq 40) \quad , \quad P_{(X\geq 35)}(X \geq 40).$$

Exercice 124 (🏛)

On lance n fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité de faire au moins un 6 ?

Exercice 125 (🏛)

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   b. Calculer l'espérance $E(X)$.
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

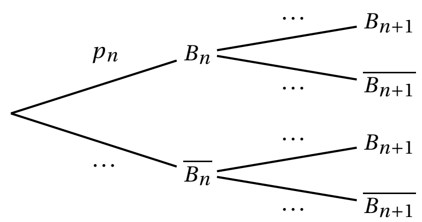
Exercice 126 (🏛 🏅)

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi. On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Pour tout entier naturel n, on note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4.$$

4. On admet que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer sa limite et interpréter la réponse.

Exercice 127 (🏛)

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B. En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. **a.** Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

b. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700.$$

b. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Déterminer la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. **a.** Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil():
        A=1700
        n=0
        while ...........
            .........
                n=n+1
        return ...
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction **seuil**.

VIII. Limites de fonctions

Exercice 128

1. Construire soigneusement la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction h définie sur $]1;+\infty[$ et telle que :

a. La droite d'équation $y = -2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c. h est strictement croissante sur $]1;3]$ et strictement décroissante sur $[3;+\infty[$.

d. $h(3) = 4$ et $h(5) = 2$.

e. Les solutions de l'équation $h(x) = 0$ sont 1,5 et 6.

f. Le point de coordonnées $(5;2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

2. Quelles sont les limites de h en $+\infty$ et en 1 ?

Exercice 129 (🏛)

Construire soigneusement la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction i admettant le tableau de variations ci-dessous, sachant de plus que les solutions de l'équation $i(x) = 0$ sont 0, 2 et 6.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$i(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Interpréter les limites en termes d'asymptotes.

Exercice 130 (🏛)

Calculer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to0,x>0}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x+3x-1\right)$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+x}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to0,x<0}\left(5+\frac{1}{x^2}\right)$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(-x)}{x}$.

Exercice 131 (🏛)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x+\dfrac{4}{x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}.$$

2. Étudier les variations de f.

3. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, c'est-à-dire en $+\infty$, en $-\infty$, en $(0,\ x>0)$ et en $(0,\ x<0)$. Le cas échéant, interpréter en termes d'asymptotes.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal.

Exercice 132 (🏛)

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$
2. Étudier les variations de g.
3. Calculer la limite de g en $-\infty$. Interpréter en termes d'asymptote.
4. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$
Calculer ensuite la limite de g en $+\infty$ et interpréter en termes d'asymptote.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Construire la droite T, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

Exercice 133 (🏛)

Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 5x + 3\right)$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x\right)$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x - 1}{2x + 1}$.

Exercice 134 (🏛)

Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x \to 1, x > 1} \dfrac{1}{x - 1}$.
2. $\lim\limits_{x \to 1, x < 1} \dfrac{1}{x - 1}$.
3. $\lim\limits_{x \to 4, x > 4} \dfrac{x + 2}{-x + 4}$.
4. $\lim\limits_{x \to 4, x < 4} \dfrac{x + 2}{-x + 4}$.
5. $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
6. $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Exercice 135 (🏛)

La fonction j est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par $j(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer la dérivée et étudier les variations de j.
2. Calculer les limites de j aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter en termes d'asymptotes.
3. Construire $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

Exercice 136 (🏛)

Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2 - 2x}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x}$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - 2x\right)^3$.
4. $\lim\limits_{x \to 0, x < 0} e^{1/x}$.

Exercice 137

La fonction k est définie sur $[0; +\infty[$ par
$$k(x) = x^2 e^{-x}.$$

1. Prouver que pour tout $x \in [0; +\infty[$:
$$k'(x) = \left(2x - x^2\right) e^{-x}.$$
2. Construire le tableau de variations de k.
3. En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[$:
$$0 \leq x e^{-x} \leq \frac{4e^{-2}}{x}.$$
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x}$.
5. Application : calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x - 2)$.

Exercice 138 (🏛)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g.

3. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$A(x) = \frac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

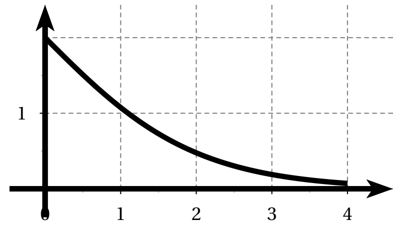
Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1. En déduire les variations de la fonction A sur $[0;+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative, donnée sur la figure ci-dessous :



Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,
- Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α.
La tangente (T) en M à la courbe $(\mathscr{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Exercice 139 (🥇)

La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}.$$

1. Prouver que pour tout $x \in\,]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}.$$

2. Étudier les variations de g.

3. Calculer les limites de g en $(0,\ x > 0)$ et en $+\infty$. Compléter le tableau de variations.

On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$a_{n+1} = g(a_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Démontrer par récurrence que

$$\sqrt{2} \leq a_n \leq 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Prouver que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le sens de variations de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

IX. Équations de plans, représentations de droites

Attention

Dans toute la leçon, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

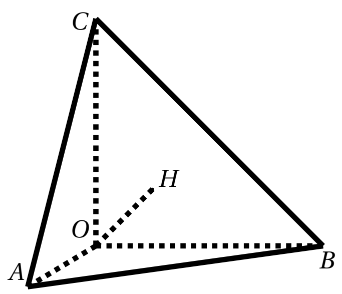
Exercice 140

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soient $A(2;1;-1)$, $B(0;2;3)$, $C(1;-1;0)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}9\\-2\\5\end{pmatrix}$.
   - **a.** Prouver que A, B, C déterminent un plan, puis que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à ce plan.
   - **b.** En déduire une équation du plan (ABC).
2. Soient $A(2;-1;3)$ et $B(2;5;0)$. Déterminer l'équation du plan P orthogonal au segment $[AB]$ et passant par son milieu (ce plan est appelé plan médiateur de $[AB]$).
3. Soient (P) le plan d'équation $4x+y-z-3=0$, et soient $M(1;2;3)$ et $N(9;4;1)$.
   - **a.** Le point M est-il sur le plan (P) ? Et le point N ?
   - **b.** Prouver que la droite (MN) est orthogonale au plan (P).

Exercice 141 (🏛)

$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O, c'est-à-dire que OAB, OAC et OBC sont rectangles en O. On suppose de plus que $OA = OB = OC = 1$. On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), c'est-à-dire que $H \in (ABC)$ et $(OH) \perp (ABC)$.



On travaillera dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$.

1. Démontrer que (ABC) a pour équation
$$x+y+z-1=0.$$
2. En déduire qu'il existe deux réels x_H, y_H tels que H ait pour coordonnées $\left(x_H; y_H; 1-x_H-y_H\right)$.
3. Calculer $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de x_H et y_H.
4. En déduire les coordonnées de H.

Exercice 142

Soit d la droite passant par $A(1;0;-2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$. Prouver que $B(2;-4;1)$ n'appartient pas à d et donner une équation cartésienne du plan P passant par B et orthogonal à d.

Exercice 143

1. On considère les points $A(2;-1;4)$ et $B(1;3;4)$.
   - **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   - **b.** Le point $K(0;7;4)$ appartient-il à (AB) ?
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant $C(2;-1;0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix}$.
3. Les droites (D) et (AB) sont-elles parallèles ? Sont-elles orthogonales ?

Exercice 144 (🏛)

Soient D et D' les droites de représentations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 2t-1 \\ z &= 3t+2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x &= t+1 \\ y &= t+3 \\ z &= -t+4 \end{cases} .$$

1. Les droites D et D' sont-elles parallèles, orthogonales ou ni l'un ni l'autre ?
2. Prouver que le plan $P : x+y-z+2=0$ contient la droite D et est orthogonal à la droite D'.

Exercice 145

Soit $P : -3x+y+2z-10=0$ et $A(2;0;1)$. On cherche les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AH).
2. En déduire les coordonnées de H.

Exercice 146 (🏛)

Soient $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1;-3;2)$, $D(4;-2;5)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC), puis déterminer une équation cartésienne de ce plan.

2. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 2-2t \\ y &= -1+t\ ,\ t\in\mathbb{R}. \\ z &= 4-t \end{cases}$$

a. Montrer que D appartient à la droite Δ et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal E de D sur le plan (ABC).

c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

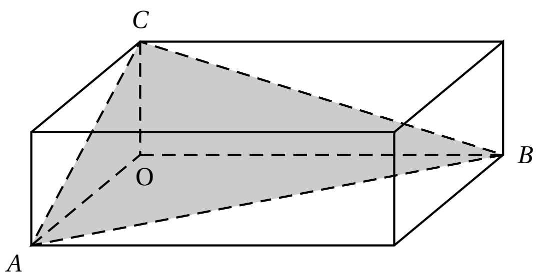
3. **a.** Prouver que le point $H(-1;0;5)$ est le projeté orthogonal de C sur (AB).

b. Calculer l'aire du triangle ABC.

c. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 147 (🏛)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé de centre O, on considère les points :
$A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ et $C(0;0;1)$.



1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $3x+2y+6z-6=0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49};\frac{12}{49};\frac{36}{49}\right)$.

c. Calculer la distance OH.

3. En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide $OABC$, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 148 (🏛)

On dit que deux plans sont orthogonaux si un vecteur normal à l'un est normal à l'autre.

Soient $P : x+2y-z+1=0$, $P' : -x+y+z=0$ et $A(0;1;1)$.

1. Prouver que P et P' sont orthogonaux.

2. Soit d une droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{3}+t \\ y &= -\frac{1}{3} \quad ,\ t\in\mathbb{R}. \\ z &= t \end{cases}$$

Démontrer que P et P' se coupent suivant la droite d.

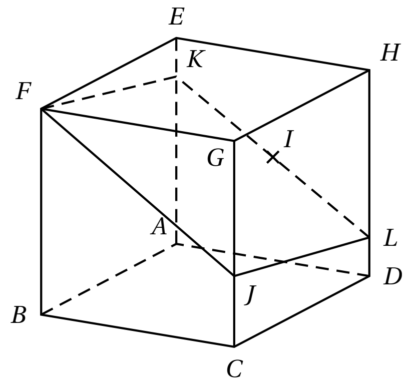
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P.

On pourra admettre que $K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P'.

4. Calculer la distance du point A à la droite d.

Exercice 149 (🏛)

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le centre du carré $ADHE$, c'est-à-dire, le milieu du segment $[AH]$ et du segment $[ED]$. Soit J un point du segment $[CG]$.
L'intersection du cube $ABCDEFGH$ avec le plan (FIJ) est le quadrilatère $FKLJ$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Dans cette question 1, le point J a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{2}{5}\right)$

- **a.** Donner sans justification les coordonnées des points F et I.
- **b.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (FIJ).
- **c.** Déterminer l'équation cartésienne du plan (FIJ).
- **d.** Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B. Prouver que cette droite coupe le plan (FIJ) au point $M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$.

2. Dans cette question, J est un point quelconque du segment $[CG]$.
Ses coordonnées sont donc $(1;1;a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0;1]$.

- **a.** Prouver que $FKLJ$ est un parallélogramme.
- **b.** Démontrer que L a pour coordonnées $\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$.
- **c.** Pour quelle valeur de a le quadrilatère $FKLJ$ est-il un losange ?

X. Le logarithme népérien

Exercice 150

Calculer la dérivée et étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-2\ln x$.

Exercice 151

Calculer la dérivée et étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-8x$.

Exercice 152 (🏛)

Calculer la dérivée et étudier les variations de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=x\ln x$.

Exercice 153

La fonction ln est-elle convexe ? Concave ? Ni l'un ni l'autre ?

Exercice 154 (🏛)

Résoudre les équations et inéquations :

1. $\mathrm{e}^{x}=5$
2. $\mathrm{e}^{x}-4=0$
3. $\mathrm{e}^{2x}\leq 2$
4. $\mathrm{e}^{-2x}=-5$
5. $\ln x=3$
6. $2\ln x-3=0$
7. $\ln(2x-3)=0$
8. $\ln x\leq 2$
9. $\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}-4=0$

Exercice 155

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par

$$f(x)=\ln\left(-x^2+2x+3\right).$$

Exercice 156

Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction.

1. $f(x)=\ln(2x-1)$, définie pour $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.
2. $g(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$, définie pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 157 (🏛)

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$:

$$\ln(8),\qquad \ln\left(\frac{1}{4}\right),\qquad \ln 6-\ln 3+\ln\left(\sqrt{2}\right).$$

2. Les réels a et b sont strictement positifs. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme $\ln\alpha$, pour un certain nombre réel α :

$$2\ln a+\ln b,\qquad \ln a-2\ln b,\qquad \ln a+\frac{1}{2}\ln b.$$

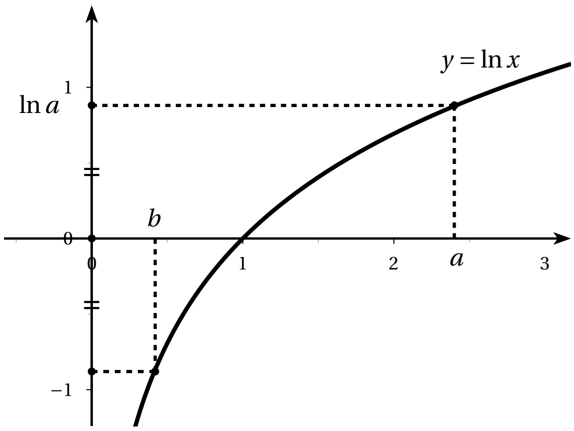
3. Résoudre les équations (écrire chaque solution comme le logarithme d'un nombre) :

$$\mathrm{e}^{-x}-1=3\quad,\quad \mathrm{e}^{2x}+1=10.$$

Exercice 158 (🏛)
Résoudre l'équation

$$(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0.$$

Exercice 159
On a construit ci-dessous la courbe de la fonction ln. À l'aide du codage, exprimer b en fonction de a.



Exercice 160 (🏅)
On construit la courbe de la fonction ln dans un repère du plan et on place deux réels x et y supérieurs à 1 sur l'axe des abscisses.

Expliquer comment placer précisément $x \times y$ sur l'axe des abscisses sans faire aucun calcul.

Exercice 161 (🏛)
La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2\ln x - x^2.$$

1. Calculer la valeur exacte de $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ (on simplifiera au maximum la réponse).
2. Prouver que pour tout $x \in]0;+\infty[$:
$$f'(x) = x(2\ln x - 1).$$
3. Construire le tableau de variations de f (on ne demande pas le calcul des limites).

Exercice 162 (🏛)
Résoudre l'inéquation d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

$$2^n \geq 10^{100}.$$

Exercice 163 (🏛)
Pour soigner son cancer de la thyroïde, un patient doit ingérer une unique gélule contenant 10 μg (microgrammes) d'iode 131. Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8 %. On note v_n la masse (en μg) d'iode 131 après n jours.

1. Exprimer v_n en fonction de n. Justifier.
2. Déterminer la demi-vie de l'iode 131.

Exercice 164 (🏛)
On suppose que 7 % des habitants d'un pays sont porteurs du gène ZXC. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus porteurs du gène ZXC parmi les dix personnes.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes portent le gène ZXC.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
3. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes porte le gène ZXC, soit supérieure à 99 %.

Exercice 165 (🏛)
Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x + 1)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x + 1)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x+2}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1}$
11. $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} \frac{\ln x}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} x(\ln x + 1)$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x - x + 1)$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + xe^{-x})$

Exercice 166
Soit $q > 1$. En utilisant le logarithme, démontrer le théorème admis dans le cours sur les limites de suites :

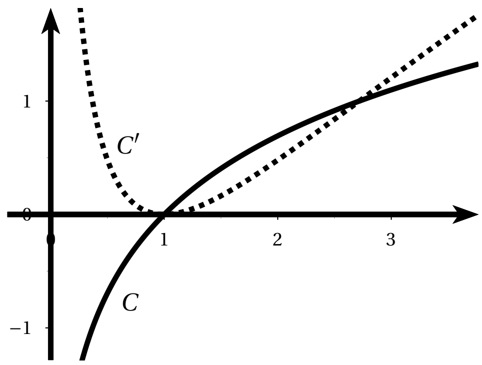
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$

Exercice 167

Les fonctions f et g sont définies sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x \qquad\qquad g(x) = (\ln x)^2.$$

On note C et C' leurs courbes représentatives respectives, tracées ci-dessous.



1. a. Prouver que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

   b. Étudier les variations de g et calculer ses limites.

2. a. Construire le tableau de signe de

$$\ln x - (\ln x)^2.$$

   b. En déduire les positions relatives de C et C'.

3. Pour tout réel $x \in [1;\mathrm{e}]$, on note M (respectivement N) le point de C (resp. C') d'abscisse x.
   Déterminer la valeur de x pour laquelle la longueur MN est maximale.

Exercice 168

1. Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x.$$

   a. Étudier les variations de u.
   b. Calculer $u(1)$ et construire le tableau de signes de u.

2. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

   a. Prouver que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}.$$

   b. En déduire les variations de f.
   c. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et compléter le tableau de variations.

Exercice 169

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln x + x - 2$$

   a. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
   b. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   d. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x}\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   a. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   d. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$,

3. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 170 (♉)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\ln(1+x).$$

On note (C) sa courbe représentative et (T) sa tangente au point de coordonnées $(0;0)$.

1. **a.** Déterminer l'équation de (T). Faire une figure et tracer (T) et (C).
   b. En utilisant la concavité, étudier les positions relatives de (T) et (C).
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=5$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1}=\ln(1+u_n)$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a. Prouver par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
   b. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge.
   c. Calculer la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

XI. Équations différentielles

Exercice 171

Dans chaque cas, déterminer les primitives de la fonction sur son ensemble de définition.

1. $f(x)=2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.
2. $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.
3. $h(x)=6x^3-3x^2+4x-1,\ x\in\mathbb{R}$.
4. $i(x)=\mathrm{e}^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.
5. $j(x)=\mathrm{e}^{-2x},\ x\in\mathbb{R}$.
6. $k(x)=3\mathrm{e}^{0,1x},\ x\in\mathbb{R}$.
7. $\ell(x)=\frac{2x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.
8. $m(x)=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x},\ x\in\mathbb{R}$.

Exercice 172

Prouver que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $\ln$.

Exercice 173

Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle :

1. $\begin{cases} y'(t) & = t-1 \\ y(0) & = -5 \end{cases}$
2. $z'(x)=x^2$.

Exercice 174 (🏛)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'=3y.$$

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0)=4$.

Exercice 175 (🏛)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'+2y=0.$$

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(1)=10$.

Exercice 176 (🏛)

Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f, qui à l'altitude x en kilomètres associe la pression atmosphérique en hectopascals, est la solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'+0,12y=0$$

et qui vérifie $f(0)=1\,013,25$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la pression atmosphérique à 150 m d'altitude.
3. Calculer l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 700 hectopascals.

Exercice 177 (🏛)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'=2y+6.$$

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0)=2$.

Exercice 178 (🏛)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'+y=1.$$

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(2)=10$.

Exercice 179 (🏅)

Un corps de masse m est lâché en chute libre sans vitesse initiale. Pour $t \geq 0$, sa vitesse v est solution de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = g,$$

où k est le coefficient de frottement et g l'accélération de la pesanteur.

1. Résoudre (E).

2. Dresser le tableau de variations de v, en précisant sa limite en $+\infty$.

3. Tracer l'allure du graphe de v.

Exercice 180 (🏅)

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence. Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.
La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction C du temps t, exprimé en minutes.
On admet que la fonction C est solution de l'équation différentielle

$$y' + 0,12y = 0,003$$

sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de 0,5 moles par litre.

1. Exprimer $C(t)$ en fonction de t.

2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$.

3. Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.

Exercice 181 (🏛)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) = y(x) - x^2 + x.$$

1. Vérifier que la fonction $y_P(x) = x^2 + x + 1$ est une solution particulière de (E).

2. Résoudre $(E_0) : y'(x) = y(x)$, puis résoudre (E).

3. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = -1$.

Exercice 182 (🏛)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est solution de (E).

2. Résoudre $(E_0) : y' + y = 0$, puis résoudre (E).

Exercice 183 (🏛)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = -x.$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $y_P(x) = ax + b$.

2. Résoudre (E).

3. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

XII. Trigonométrie

Exercice 184

Calculer le cos et le sin de :

1. π, $\frac{\pi}{2}$, 0, -5π, $\frac{31\pi}{2}$.
2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$.
3. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.
4. $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2025\pi}{4}$.

Exercice 185 (🏛)

Résoudre chaque (in)équation dans l'intervalle donné :

1. $\cos x = \frac{1}{2}$, dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. $2\sin x - 1 = 0$, dans $[0;\pi]$.
3. $\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\cos x = 0$, dans $[-\pi;\pi]$.
4. $2\sin x \cos x = -\sin x$, dans $[0;\pi]$.
5. $2\sin x - 1 \geq 0$, dans $[0;\pi]$.
6. $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[-\pi;\pi]$.
7. $2\sin x \cos x \leq -\sin x$, dans $[0;\pi]$.
8. $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[0;2\pi]$.
9. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, dans $[0;\pi]$.
10. $2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 \geq 0$, dans $[0;2\pi]$.
11. $\cos x = 0$, dans $\mathbb{R}$.
12. $\sin x = 0$, dans $\mathbb{R}$.

Exercice 186 (🏛)

Soit x un nombre réel. Exprimer $\cos(x+\pi)$ et $\sin(x+\pi)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 187

1. **a.** Soit M un point du cercle trigonométrique associé à un réel x. Quelles sont ses coordonnées ?

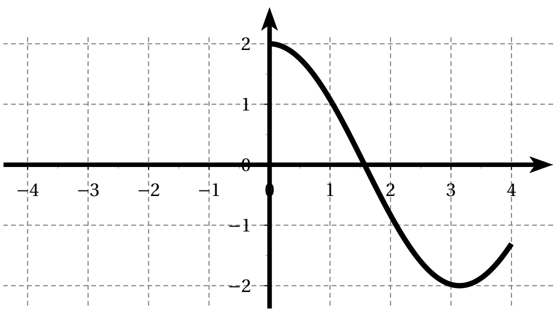
   b. Démontrer que

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2. Soit x un réel tel que $\cos x = 0,6$ et $\sin x > 0$. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.

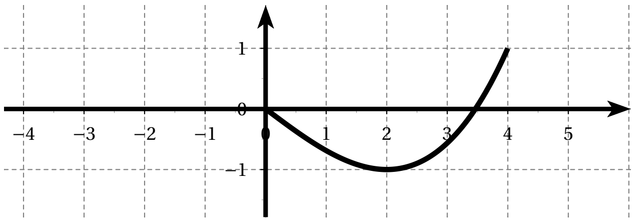
Exercice 188

Compléter la courbe de la fonction sachant qu'elle est paire.



Exercice 189

Compléter la courbe de la fonction sachant qu'elle est impaire.



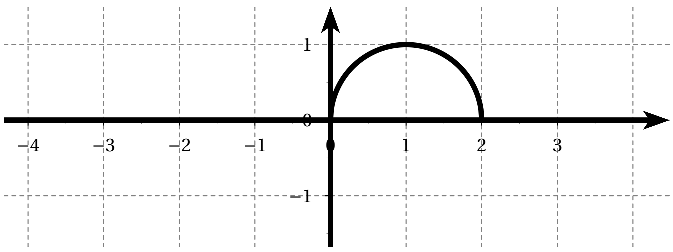
Exercice 190

Étudier la parité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^2 - 1$.
2. $g(x) = 5x$
3. $h(x) = x^4 - 5x^2 + 3$.
4. $i(x) = x^3 - 6x$.
5. $j(x) = |x|$.
6. $k(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.
7. $\ell(x) = \cos x$.
8. $m(x) = \sin x$.
9. $n(x) = |\sin x|$.

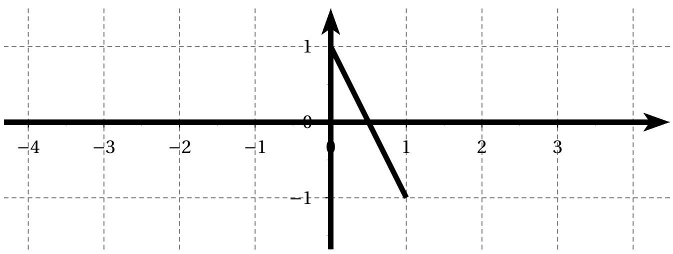
Exercice 191

Compléter la courbe de la fonction sachant qu'elle est impaire et 4-périodique.



Exercice 192

Compléter la courbe de la fonction sachant qu'elle est paire et 2-périodique.



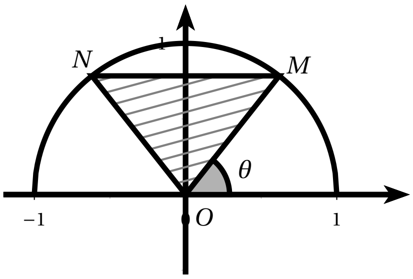
Exercice 193 (🏛)

Dans chaque cas, prouver que la fonction est π-périodique et étudier sa parité. Esquisser l'allure de la courbe.

1. $f(x) = \sin(2x)$.
2. $g(x) = \sin^2 x$.

Exercice 194 (🏛)

Sur la figure ci-dessous, M est un point du cercle trigonométrique associé au réel $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et N est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.



Pour quelle valeur de θ l'aire du triangle OMN est-elle maximale ?

Exercice 195

Redémontrer la formule de l'exercice 187 en utilisant la dérivation.

Exercice 196 (🏛)

Étudier la convexité de la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \sin x$.

Exercice 197

Calculer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = \sin(2x)$.
2. $g(x) = \cos\left(x^2\right)$.
3. $h(x) = \sin(-3x+4)$.

Exercice 198 (🏛)

On pose

$$f(x) = (\cos x - 1)\cos x$$

pour tout réel x. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude réduit I.
2. Prouver que $f'(x) = \sin x(-2\cos x + 1)$ pour tout $x \in I$.
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
5. Construire soigneusement la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 199 (🏛)

On définit une fonction f par

$$f(x) = (\cos x - 1)\sin x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude réduit I.
2. Prouver que $f'(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1$ pour tout $x \in I$.
   On pourra utiliser la formule de l'exercice 187.
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse π.
5. Construire soigneusement la courbe $\mathscr{C}$.

XIII. Intégration

Exercice 200

Calculer :

1. $\int_{-1}^{3} 2\mathrm{d}x$.
2. $\int_{0}^{4} (-x+5)\mathrm{d}x$.

Exercice 201

À l'aide d'une primitive, calculer $\int_0^3 x\mathrm{d}x$. Vérifier géométriquement la réponse.

Exercice 202 (🏛)

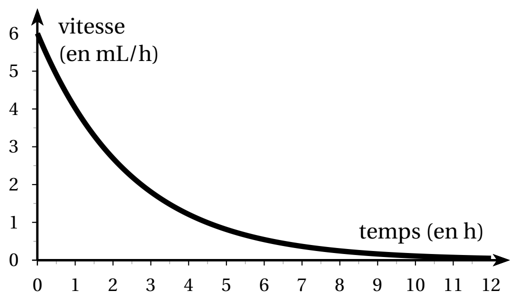
Calculer les intégrales :

1. $I = \int_{-1}^{1} \left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x$.
2. $J = \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.
3. $K = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{3}{t}\mathrm{d}t$.
4. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 203

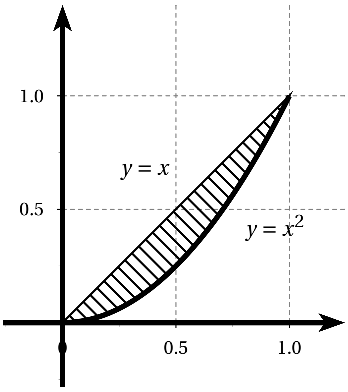
On s'intéresse à la vitesse de diffusion d'un médicament dans l'organisme en fonction du temps lors d'une perfusion. Le temps t est exprimé en heures. La vitesse, en mL/h, est donnée par la fonction

$$f(t) = 6\mathrm{e}^{-0,4t}.$$



1. D'un point de vue physiologique, que représente le nombre
   $$S = \int_0^5 f(t)\mathrm{d}t\,?$$
2. Déterminer la valeur exacte et une valeur approchée au mL de S.

Exercice 204 (🏛)
Calculer l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



Exercice 205
On définit deux fonctions sur $[1;5]$:

$$f(x) = -x+5 \qquad , \qquad g(x) = \ln x.$$

1. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[1;5]$. Interpréter géométriquement.

2. **a.** Prouver que la fonction définie sur $[1;5]$ par $G(x) = x\ln x - x$ est une primitive de g.

b. En déduire la valeur moyenne de g sur $[1;5]$.

Exercice 206 (🏛)
Calculer les intégrales :

1. $I = \int_0^4 (2x-3)\,\mathrm{d}x$.

2. $J = \int_{-1}^1 \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

3. $K = \int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

4. $L = \int_0^2 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

5. $M = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln t)^3}{t}\mathrm{d}t$ $\quad$ (Rappel : $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$).

6. $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\mathrm{d}t$.

7. $O = \int_0^{\frac{\pi}{9}} \sin(3t)\mathrm{d}t$.

Exercice 207 (🏛)
1. Prouver que

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}$$

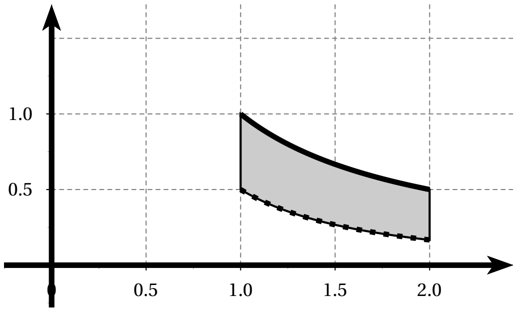
pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2;0\}$.

2. En déduire la valeur de $I = \int_1^4 \frac{x+4}{x(x+2)}\mathrm{d}x$. On écrira la réponse sous la forme du logarithme d'un nombre.

Exercice 208 (🏛)
1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1;0\}$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

2. Calculer l'aire de la zone comprise entre les courbes d'équations $y = \frac{1}{x}$ (traits pleins) et $y = \frac{1}{x(x+1)}$ (pointillés) dessinées ci-dessous sur l'intervalle $[1;2]$.



On écrira la réponse sous la forme du logarithme d'un nombre.

Exercice 209 (🏛)
On pose $I = \int_0^{\ln 4} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^{\ln 4} \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$.

On écrira chaque réponse sous la forme du logarithme d'un nombre.

1. Calculer I.

2. Calculer $I+2K$.

3. En déduire K.

Exercice 210 (🏛)
On admet que la fonction $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{3-x}$ est décroissante sur $[0;1]$. On pose $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

1. Prouver que $\frac{1}{2\mathrm{e}} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [0;1]$.

2. Encadrer I, puis donner une valeur approchée de I au dixième

Exercice 211 (🏛)
Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x.$$

1. Prouver que pour tout $x \geq 0$, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

2. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 212 (🏛)

On pose

$$I_n = \int_0^1 \ln\left(1+t^n\right) \mathrm{d}t$$

pour tout entier naturel n.

1. Calculer I_0 et prouver que $0 \leq I_1 \leq \ln 2$.
2. Étudier la convexité de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par
$$f(x) = \ln(1+x).$$
3. En déduire que pour tout $x \geq 0$:
$$\ln(1+x) \leq x.$$
4. À l'aide de la question précédente, obtenir l'encadrement, pour tout entier naturel n :
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
5. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 213 (🏛)

À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$I = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

Exercice 214 (🏛)

À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$J = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \mathrm{d}x.$$

Exercice 215

On pose $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \mathrm{d}x$ et $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que $K = L$.
2. Calculer $K + L$ et en déduire les valeurs de K et L.

Exercice 216 (🏅)

La fonction F est définie sur $[0;+\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

1. Construire la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+t^2}$ sur l'intervalle $[-4;4]$ et indiquer sur la figure à quoi correspond le nombre $F(2)$.
2. Étudier les variations de F.

Exercice 217 (🏅)

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

1. Écrire sous forme intégrale la primitive F de f qui s'annule en 1.
2. Étudier les variations de F.

Exercice 218 (🏅)

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}x.$$

1. Prouver que pour tout entier naturel n :
$$0 \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$
En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout entier naturel n :
$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n.$$
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$I_n = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
4. Prouver enfin que $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 219 (🏅)

Pour tout entier naturel n non nul on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Soit k un entier naturel non nul. Prouver que pour tout $x \in [k;k+1]$:
$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}.$$
3. En utilisant la relation de Chasles et la question précédente, prouver que pour tout entier naturel n non nul :
$$\ln(n+1) \leq H_n.$$
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$.