

Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1

Les affirmations correctes sont A, D, E, F et G.

- A. $14 \equiv 2 [3]$, car $14 - 2 = 12$ est divisible par 3.
- B. $6 \not\equiv -4 [4]$, car $6 - (-4) = 10$ n'est pas divisible par 4.
- C. $6^{100} \not\equiv 1 [2]$, car 6 est pair donc 6^{100} est pair.
- D. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n + 1 \equiv 1 [n]$, car $(2n + 1) - 1 = 2n$ est divisible par n .
- E. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $39k \equiv 4k [5]$, car $39 - 4 = 35$ est divisible par 5, donc $39 \equiv 4 [5]$ (il n'y a ensuite plus qu'à multiplier par k , ce qui est autorisé d'après le cours).
- F. Soient a , b , q , r dans \mathbb{N}^* . Si $a = bq + r$, alors $a \equiv r [b]$.

Cette propriété est écrite dans le cours. Pour la justifier, on dit que $a - r = bq$ est bien divisible par b .

- G. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \equiv 3 [9]$, alors n est divisible par 3. Cette propriété est vraie : si $n \equiv 3 [9]$, alors $n - 3$ est divisible par 9, donc aussi par 3; et donc $n = (n - 3) + 3$ l'est aussi.
- H. Le seul entier $0 \leq n \leq 12$ qui vérifie $n \equiv -5 [6]$ est $n = 1$. Cette propriété est fausse puisque $n = 7$ convient également : $0 \leq 7 \leq 12$ et $7 - (-5) = 12$ est divisible par 6.

Exercice 2

1. On complète le tableau :

modulo 3, n est congru à	0	1	2
modulo 3, $n^2 - 1$ est congru à	2	0	0

Justifications :

- Si $n \equiv 0 [3]$, alors $n^2 - 1 \equiv 0^2 - 1 [3]$, soit $n^2 - 1 \equiv -1 [3]$; et donc $n^2 - 1 \equiv 2 [3]$.
- Si $n \equiv 1 [3]$, alors $n^2 - 1 \equiv 1^2 - 1 [3]$, soit $n^2 - 1 \equiv 0 [3]$.
- Si $n \equiv 2 [3]$, alors $n^2 - 1 \equiv 2^2 - 1 [3]$, soit $n^2 - 1 \equiv 3 [3]$; et donc $n^2 - 1 \equiv 0 [3]$.

2. Si n n'est pas multiple de 3, alors $n \equiv 1 [3]$ ou $n \equiv 2 [3]$, donc $n^2 - 1 \equiv 0 [3]$ d'après la question précédente. On en déduit que

$$n^2 - 1 \text{ est multiple de } 3.$$

3. Ce résultat est aussi une conséquence du **petit théorème de Fermat** : le nombre 3 est premier, donc si n n'est pas multiple de 3, on a $\text{PGCD}(n, 3) = 1$ et le petit théorème de Fermat donne

$$n^{3-1} \equiv 1 [3],$$

ce qui se réécrit

$$n^2 - 1 \equiv 0 [3].$$

Exercice 3

1. $7^2 = 49$ et $49 - (-1) = 50$ est un multiple de 10, donc

$$7^2 \equiv -1 [10].$$

2. On part de $7^2 \equiv -1 [10]$ et on élève à la puissance 50 :

$$(7^2)^{50} \equiv (-1)^{50} [10]$$

$$7^{100} \equiv 1 [10].$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{le chiffre des unités de } 7^{100} \text{ est } 1.}$$

3. On part de $7^{100} \equiv 7^{99} \times 7 [10]$, et on multiplie par 3 :

$$7^{100} \times 3 \equiv 7^{99} \times 7 \times 3 [10].$$

Or $7^{100} \equiv 1 [10]$ d'après la question 2, donc $7^{100} \times 3 \equiv 3 [10]$; et $7 \times 3 = 21$, donc $7 \times 3 \equiv 1 [10]$. L'égalité ci-dessus se réécrit donc

$$3 \equiv 7^{99} [10].$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{le chiffre des unités de } 7^{99} \text{ est } 3.}$$

Exercice 4

On note (E) : $13u - 5v = 2$.

- **Analyse.** Supposons que (u, v) soit une solution de (E) . On a donc

$$13u - 5v = 2.$$

On travaille modulo 5 : $5 \equiv 0 [5]$ et $13 \equiv 3 [5]$, donc

$$3u - 0v \equiv 2 [5]$$

$$3u \equiv 2 [5].$$

Puis on multiplie par 2, pour « éliminer » le 3 :

$$2 \times 3u \equiv 2 \times 2 [5]$$

$$6u \equiv 4 [5]$$

$$u \equiv 4 [5] \quad (\text{car } 6 \equiv 1 [5]).$$

Par conséquent, il existe un entier k tel que $u = 4 + 5k$.

On remplace dans (E) :

$$13u - 5v = 2$$

$$13(4 + 5k) - 5v = 2$$

$$52 + 65k - 2 = 5v$$

$$v = \frac{50 + 65k}{5} = 10 + 13k.$$

- **Synthèse.** Réciproquement, si on prend $u = 4 + 5k$ et $v = 10 + 13k$, on a bien

$$13u - 5v = 13(4 + 5k) - 5(10 + 13k) = 52 + 65k - 50 - 65k = 2,$$

donc (u, v) est solution de (E) .

- **Conclusion.** Les solutions de (E) sont les couples de la forme

$$\boxed{u = 4 + 5k, \quad v = 10 + 13k, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.}$$