# Corrigé du devoir surveillé n°3

1. D'une heure à la suivante, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R, puis les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A; enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B. On a donc, pour tout entier naturel $n$ :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,75b_n + 2,$$
$$b_{n+1} = 0,25b_n + 3.$$

⚠On ajoute 2 et 3 et non 200 et 300, car les quantités sont exprimées en centaines de litres.

Les égalités ci-dessus se réécrivent

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

soit

$$\boxed{U_{n+1} = MU_n + C.}$$

2. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant

$$\det(P) = 1 \times (-1) - 3 \times 0 = -1$$

n'est pas nul. Son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{On a bien } P^{-1} = P, \text{ et donc } P^2 = P \times P = I_2.}$$

3. On calcule le produit :

$$PDP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} = M.$$

On a bien

$$\boxed{PDP = M.}$$

4. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{M^n = PD^nP.}$$

D'abord la propriété est vraie pour $n = 0$, puisque $M^0 = I_2$ et $PD^0P = PI_2P = P \times P = I_2$.

Ensuite, si la propriété est vraie pour un entier naturel $n$, alors

$$M^{n+1} = M^n \times M \underset{\text{H.R.}}{=} PD^nP \times PDP = PD^n\,(P \times P)\,DP = PD^n \times I_2 \times DP = P\left(D^n \times D\right)P = PD^{n+1}P.$$

La propriété est donc vraie pour l'entier $n+1$, ce qui achève la récurrence.

**Remarque :** On pouvait aussi utiliser un produit télescopique.

5. La matrice $D$ est diagonale, donc pour tout entier naturel $n$, $D^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$ ; et d'après la question précédente :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,25^n \\ 0 & -0,25^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}.}$$

6. On calcule :

$$MX + C = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = X.$$

On a bien

$$\boxed{X = MX + C.}$$

7. Pour tout entier naturel $n$,

$$\boxed{V_{n+1} = U_{n+1} - X = MU_n + C - (MX + C) = MU_n + \cancel{C} - MX - \cancel{C} = M\,(U_n - X)\,.}$$

8. D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n$,

$$\boxed{V_n = M^n \times V_0.}$$

9. L'égalité de la question précédente se réécrit

$$U_n - X = M^n\,(U_0 - X)\,,$$

donc

$$\boxed{U_n = M^n\,(U_0 - X) + X.}$$

10. D'après la formule de l'énoncé, pour tout entier $n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10, \\ b_n &= 3 \times 0,25^n + 4. \end{aligned}$$

Or $|0,5| < 1$ et $|0,25| < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,25^n = 0$.
On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 10$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 4$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{la quantité d'eau se stabilise autour de } 1\,000\ \ell \text{ dans le bassin A, autour de } 400\ \ell \text{ dans le bassin B.}}$$