Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions des équations.

Exercice 1 1. On résout l'équation $x^2+2x=0$:
On factorise :

$$x(x+2)=0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{array}{lcl} x=0 & \text{ou} & x+2=0 \\ & & x+\cancel{2}\cancel{-2}=0-2 \\ & & x=-2 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=-2$. Autrement dit :

$$\mathscr{S}=\{0;-2\}.$$

2. On résout l'équation $x^2-16=0$:
On « isole » x^2 :

$$\begin{aligned} x^2-16&=0 \\ x^2-\cancel{16}\cancel{+16}&=0+16 \\ x^2&=16 \end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x=\sqrt{16}=4 \qquad \text{ou} \qquad x=-\sqrt{16}=-4.$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\{4;-4\}.$$

3. On résout l'équation $(2x-1)(x-5)=0$:

$$\begin{array}{rcl} 2x-1=0 & \text{ou} & x-5=0 \\ 2x-\cancel{1}\cancel{+1}=0+1 & \text{ou} & x-\cancel{5}+\cancel{5}=0+5 \\ \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=\dfrac{1}{2} & \text{ou} & x=5 \\ x=\dfrac{1}{2} & & \end{array}$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2};5\right\}.$$

4. On résout l'équation $x^2+7=0$:

$$\begin{aligned} x^2+7&=0 \\ x^2+\cancel{7}\cancel{-7}&=0-7 \\ x^2&=-7 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre x ne peut avoir un carré égal à -7).
Conclusion :

$$\mathscr{S}=\emptyset.$$

(On rappelle que $\emptyset$ désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

Exercice 2 Dans chaque cas, on note Δ le discriminant.

1. On résout l'équation $x^2-3x-4=0$:
   - $a=1,\ b=-3$, $c=-4$.
   - $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3-5}{2}=-1,$$
   $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2}=\frac{3+5}{2}=4.$$

   Conclusion :
   $$\mathscr{S}=\{-1;4\}.$$

2. On résout l'équation $2x^2-12x=-18$:
   On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme $ax^2+bx+c=0$) en « transposant -18 » :

   $$2x^2-12x+18=-\cancel{18}\cancel{+18}$$
   $$2x^2-12x+18=0$$

   - $a=2,\ b=-12$, $c=18$.
   - $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times2\times18=144-144=0$.
   - $\Delta=0$, donc il y a une seule solution :
   $$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-12)}{2\times2}=\frac{12}{4}=3.$$

   Conclusion :
   $$\mathscr{S}=\{3\}.$$

3. On résout l'équation $x^2-4x+5=0$:
   - $a=1,\ b=-4$, $c=5$.
   - $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times5=16-20=-4$.
   - $\Delta<0$, donc il n'y a pas de solution.

   Conclusion :
   $$\mathscr{S}=\emptyset.$$

4. On résout l'équation $x^2+2x-4=0$:
   - $a=1,\ b=2$, $c=-4$.
   - $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-4)=4+16=20$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{20}}{2\times1}=\frac{-2-\sqrt{20}}{2},$$
   $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{20}}{2\times1}=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}.$$

   Conclusion :
   $$\mathscr{S}=\left\{\frac{-2-\sqrt{20}}{2};\frac{-2+\sqrt{20}}{2}\right\}.$$

   Remarque : On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que
   $$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\times\sqrt{5},$$
   on trouve
   $$x_2=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}=\frac{\cancel{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)}{\cancel{2}}=-1+\sqrt{5}.$$
   De même, $x_1=-1-\sqrt{5}$.

5. On résout l'équation $x^2 = -6x$:
À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le « $-6x$ » dans le membre de gauche, qui devient « $+6x$ ».

$$x^2 = -6x$$
$$x^2 + 6x = 0.$$

Ici, il y a deux méthodes possibles :
- soit on utilise le discriminant, avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 0$ (puisque $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$) ;
- soit on factorise.

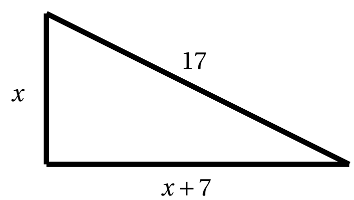
On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide [1] :

$$x(x+6) = 0$$
$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + 6 = 0$$
$$x = -6.$$

Conclusion :

$$\mathscr{S} = \{0; -6\}.$$

Exercice 3 On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas x.



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe $(x+7)^2$ avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = 289$$
$$2x^2 + 14x + 49 - 289 = 0$$
$$2x^2 + 14x - 240 = 0.$$

- $a = 2$, $b = 14$, $c = -240$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1920 = 2116$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 - \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 - 46}{4} = -15,$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 + \sqrt{2116}}{2 \times 2} = \frac{-14 + 46}{4} = 8.$$

Or x désigne une longueur, donc la première solution (x_1) est impossible. On a donc $x = 8$.

Remarque : Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

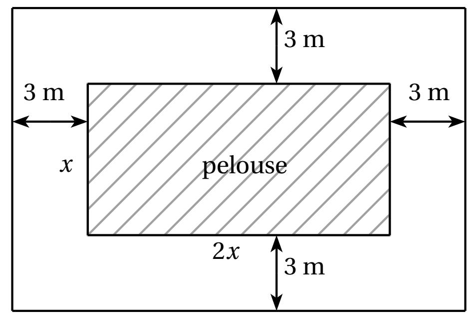
$$x = 8, \qquad x + 7 = 8 + 7 = 15 \qquad \text{et} \qquad 17.$$

On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec Δ dans le cas où b ou c valent 0.

Exercice 4 1. Voici un schéma du terrain en notant x la largeur de la pelouse (donc la longueur est $2x$) :



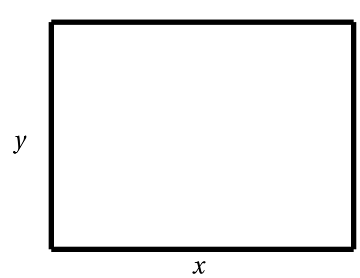
2. La longueur du terrain (en m) est
$$2x+3+3=2x+6,$$
sa largeur est
$$x+3+3=x+6.$$
Donc la surface du terrain (en m²) est
$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x+6)\times(x+6).$$
Or on sait que cette surface vaut 360 m², donc
$$(2x+6)\times(x+6)=360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente[2] :
$$\begin{aligned}
&(2x+6)\times(x+6) &&= 360\\
\iff\ &2x\times x+2x\times 6+6\times x+6\times 6 &&= 360\\
\iff\ &2x^2+12x+6x+36 &&= 360\\
\iff\ &2x^2+18x+36-360 &&= 0\\
\iff\ &2x^2+18x-324 &&= 0.
\end{aligned}$$
Il s'agit d'une équation du second degré.
- $a=2,\ \ b=18\ ,\ c=-324.$
- $\Delta=18^2-4\times2\times(-324)=2916.$
- $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18-\sqrt{2916}}{2\times2}=\frac{-18-54}{4}=\frac{-72}{4}=-18,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18+\sqrt{2916}}{2\times2}=\frac{-18+54}{4}=\frac{36}{4}=9.$$

Or x désigne une longueur, donc x ne peut pas être négatif et seule la solution $x_2=9$ est valable.
Conclusion : $x=9$, donc la longueur du terrain (en m) est $2\times9+3+3=24$, sa largeur est $9+3+3=15$.

Exercice 5 On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note x et y les dimensions du champ.



2. Les « $\iff$ » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est

$$x+y=27.$$

- L'aire est 180, donc

$$x\times y=180.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} x+y=27 & L_1 \\ xy=180 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie L_1 par x :

$$(x+y)\times x=27\times x, \qquad \text{soit} \qquad x^2+xy=27x.$$

Or d'après L_2, $xy=180$, donc

$$x^2+180=27x, \qquad \text{et ainsi} \qquad x^2-27x+180=0.$$

On aboutit à une équation du 2$^{\text{d}}$ degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) : $x_1=12$, $x_2=15$.

On sait que $x+y=27$, donc si $x=12$, alors $y=27-x=27-12=15$; et si $x=15$, alors $y=27-x=27-15=12$.
Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

Exercice 6 On note n le nombre d'amis initialement présents, et p le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc

$$n\times p=2400. \tag{1}$$

- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas $(n-2)$ amis, et chacun paye alors $(p+40)$ €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit

$$(n-2)\times(p+40)=2400.$$

En développant, cela donne encore

$$np+40n-2p-80=2400. \tag{2}$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2400 dans les deux cas, on obtient l'égalité

$$\cancel{np}=\cancel{np}+40n-2p-80,$$

soit

$$40n-2p-80=0.$$

Finalement, le couple (n,p) est solution du système

$$\begin{cases} n\times p=2400 \\ 40n-2p-80=0. \end{cases}$$

On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient

$$n=12 \qquad , \qquad p=200.$$

Conclusion : comme $12-10=2$, ce sont 10 amis qui sont finalement partis.

Exercice 7 1. $P_1 : y=x^2-6x+5$.

- $a=1$, $b=-6$, $c=5$.
- a est $\oplus$, donc P_1 est vers le haut.
- On note S le sommet de P_1. D'après le cours

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 1}=\frac{6}{2}=3.$$

On en déduit

$$y_S=3^2-6\times 3+5=9-18+5=-4.$$

On a donc $S(3;-4)$.

Venons-en au tracé de la parabole. On fait un tableau de valeurs sur $[0;6]$, avec un pas de 1 [3]. Pour cela, on utilise la calculatrice :

3. Nous choisissons un intervalle symétrique par rapport à l'abscisse du sommet, et qui ne soit ni trop court, ni trop long. On choisit un pas de 1 par facilité, mais le graphique serait bien sûr plus précis avec un pas plus petit.

Calculatrices collège

- $\boxed{\text{MODE}}$ ou $\boxed{\text{MENU}}$
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=X^2-6X+5 $\boxed{\text{EXE}}$ (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- Fin ? 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas ? 1 $\boxed{\text{EXE}}$

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{x}}$

-
- Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$ puis choisir Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$
- f(x)=x^2-6x+5 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Tableau $\boxed{\text{EXE}}$ puis Régler l'intervalle $\boxed{\text{EXE}}$
- X début 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- X fin 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas 1 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Valider

TI graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{x,t,\theta,n}$

- $\boxed{f(x)}$
- $Y_1 = X^2-6X+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{déf table}}$
- DébTable=0 $\boxed{\text{EXE}}$
- PasTable=1 $\boxed{\text{EXE}}$ ou ΔTbl=1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{table}}$

CASIO graphiques

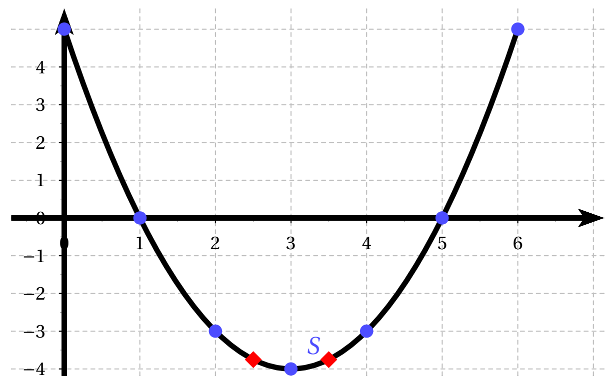
X s'obtient avec la touche $\boxed{X,\theta,T}$

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis choisir TABLE $\boxed{\text{EXE}}$
- $Y_1 : X^2-6X+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{F5}}$ (on choisit donc SET)
- Start :0 $\boxed{\text{EXE}}$
- End :6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Step :1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{EXIT}}$
- $\boxed{\text{F6}}$ (on choisit donc TABLE)

On obtient le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Enfin on construit le graphique (j'ai un peu « écrasé » l'axe des ordonnées pour gagner de la place) :



Remarque : On peut avoir intérêt à ajouter des points près du sommet pour obtenir un tracé plus précis. C'est ce que l'on a fait ci-dessus avec les deux losanges rouges, correspondant au tableau de valeurs ci-dessous.

x	2,5	3,5
y	$-3{,}75$	$-3{,}75$

2. $P_2 : y = -0{,}5x^2 - x + 4$.
   - $a = -0{,}5$, $b = -1$, $c = 4$.
   - a est $\ominus$, donc P_2 est vers le bas.
   - On note S le sommet de P_2. D'après le cours

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\times(-0{,}5)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

On en déduit

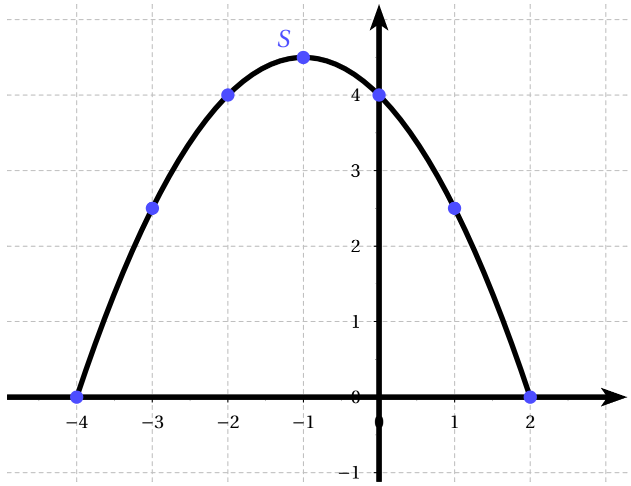
$$y_S = -0{,}5\times(-1)^2 - (-1) + 4 = -0{,}5 + 1 + 4 = 4{,}5.$$

On a donc $S(-1\,;\,4{,}5)$.

Tableau de valeurs :

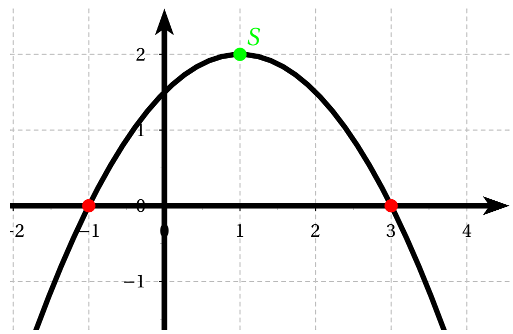
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

Tracé de la parabole :



Exercice 8 1. On trace la parabole P :

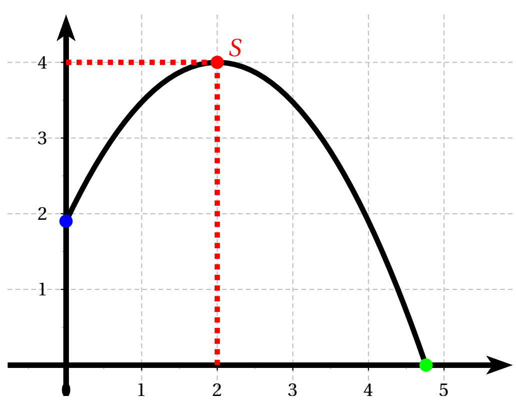
- qui coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -1$ et en $x_2 = 3$.
- dont le sommet est le point $S(1;2)$.



Remarque : Il est difficile de faire un tracé hyper précis avec si peu d'informations. L'élève intéressé peut essayer de prouver – en faisant un bel effort – que $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$. Auquel cas, il pourra faire un tableau de valeurs et obtenir une courbe presque aussi parfaite que celle dessinée ci-dessus avec l'ordinateur.

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Comme P est vers le bas, a est du signe $\ominus$.
   - Comme P coupe l'axe des abscisses en deux points, il y a deux racines et Δ est du signe $\oplus$.

Exercice 9 La trajectoire de la balle en fonction du temps est la parabole $P : y = -0,525t^2 + 2,1t + 1,9$, tracée ci-dessous :



1. Clément commence sa passe à la hauteur

$$h(0) = -0,525 \times 0 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9 \text{ mètres.}$$

   Cela correspond au point bleu sur la figure.

2. La hauteur maximale de la balle est l'ordonnée du sommet S de la parabole, en rouge sur la figure.

- $a = -0,525$, $b = 2,1$, $c = 1,9$.
- On calcule avec la formule :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2,1}{2\times(-0,525)} = \frac{-2,1}{-1,05} = 2.$$

On en déduit

$$y_S = -0,525\times 2^2 + 2,1\times 2 + 1,9 = 4,$$

et donc la hauteur maximale de la balle est de 4 mètres.

3. Pour déterminer le temps de vol de la balle, on cherche à quel moment elle retombe au sol (point vert sur la figure). On résout donc l'équation

$$-0,525t^2 + 2,1t + 1,9 = 0.$$

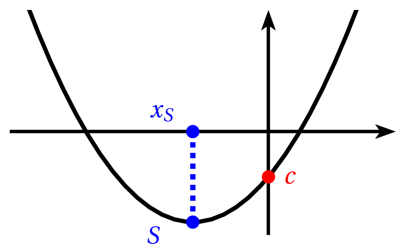
- $\Delta = 2,1^2 - 4\times(-0,525)\times 1,9 = 8,4$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1-\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)} \approx 4,76,$$
$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2,1+\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)} \approx -0,76.$$

La deuxième solution est impossible, car le temps cherché est positif.

Conclusion : la balle retombe au sol après 4,76 secondes environ.

Exercice 10 On a tracé une parabole $P : y = ax^2 + bx + c$.



1. - $a > 0$, car P est vers la haut.
   - Si $x = 0$, alors $y = a\times 0^2 + b\times 0 + c = c$, donc la P passe par le point de coordonnées $(0;c)$ – autrement dit, elle coupe l'axe des ordonnées en c.
     Par lecture graphique, on obtient donc $c < 0$.
   - Il y a deux racines, car P coupe l'axe des abscisses deux fois. On a donc $\Delta > 0$.
2. D'après le cours, $x_S = -\frac{b}{2a}$, donc

$$x_S\times 2a = -\frac{b}{\cancel{2a}}\times\cancel{2a}$$
$$x_S\times 2a = -b$$
$$-x_S\times 2a = b.$$

On sait que $x_S < 0$ et $a > 0$, donc $b = -\underbrace{x_S}_{\ominus}\times\underbrace{2a}_{\oplus}$ est du signe $\oplus$: $b > 0$.

Exercice 11 Soit $P : y = ax^2 + bx + c$ une parabole et S son sommet. On sait que $x_S = -\frac{b}{2a}$, donc

$$y_S = a\times\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\times\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \cancel{a}\times\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2\times 2}{2a\times 2} + \frac{c\times 4a}{1\times 4a}$$
$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Exercice 12 1. Le coût de fabrication des x objets est

$$C(x) = x^2 + 230x + 325.$$

Chaque objet est vendu 300 €, donc la recette issue de la vente des x objets est

$$R(x) = 300x.$$

On en déduit que le bénéfice est

$$B(x) = \text{Recette} - \text{Coût} = R(x) - C(x) = 300x - \left(x^2 + 230x + 325\right) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325.$$

2. Le bénéfice est une expression du second degré, avec $a < 0$. Il est donc représenté par une parabole orientée vers le bas. Maximiser le bénéfice revient donc à trouver le (l'abscisse du) sommet de cette parabole :
   - $a = -1,\ b = 70$, $c = -325$.
   - $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2\times(-1)} = \frac{-70}{-2} = 35$.

   Conclusion : le bénéfice est maximal lorsqu'on produit et vend 35 objets.

   Remarque : Le bénéfice maximal est
   $$-35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900 \text{ €}.$$

Exercice 13 1. On résout l'équation :

$$\begin{aligned} & & x^3 = 2x \\ \iff & & x^3 - 2x = 0 \\ \iff & & x\left(x^2 - 2\right) = 0 \\ \iff & & x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2 = 0 \\ \iff & & x^2 = 2 \\ \iff & & x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conclusion : il y a trois solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}.$$

2. (a) Pour démontrer l'égalité, on développe et on réduit le membre de droite : pour tout nombre x,

$$\begin{aligned} (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right) &= x \times x^2 + x \times 3x + x \times (-4) + 1 \times x^2 + 1 \times 3x + 1 \times (-4) \\ &= x^3 + 3x^2 - 4x + x^2 + 3x - 4 \\ &= x^3 + 4x^2 - x - 4. \end{aligned}$$

Conclusion : on a bien
$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right).$$

(b) On utilise la factorisation de la question 2.(a) pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} & & x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \\ \iff & & (x+1)\left(x^2 + 3x - 4\right) = 0 \\ \iff & & x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

On résout chaque équation séparément :
$$x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

L'autre équation est du second degré, on utilise le discriminant :

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

- $a = 1,\ b = 3$, $c = -4$.
- $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.

- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-3-5}{2} = -4,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Conclusion : l'équation $x^3+4x^2-x-4=0$ a trois solutions :

$$\mathscr{S} = \{-1;-4;1\}.$$

2 Probabilités

Exercice 14 1. On traduit les données de l'énoncé par un tableau d'effectif :

	Abonnés au soir	Pas abonnés au soir	Total
Abonnés au matin	50	20	70
Pas abonnés au matin	50	160	210
Total	100	180	280

2. (a) $P(S) = \frac{100}{280} = \frac{5}{14}$ et $P\left(\overline{M}\right) = \frac{210}{280} = \frac{3}{7}$.

   (b) - L'événement « le pensionnaire est abonné aux deux journaux » s'écrit $S\cap M$[4]. On a

$$P(S\cap M) = \frac{50}{280} = \frac{5}{28}.$$

   - L'événement « le pensionnaire est abonné à au moins un journal » s'écrit $S\cup M$[5]. Il y a plusieurs façons de dénombrer les cas favorables à cet événement :
     - ajouter les pensionnaires qui sont abonnés au *Soir* et ceux qui sont abonnés au *Matin*, puis retrancher ceux qui sont abonnés aux deux journaux (sinon ils sont comptés deux fois) : $100+70-50=120$.
     - ajouter ceux qui ne sont abonnés qu'au *Soir*, ceux qui ne sont abonnés qu'au *Matin*, et ceux qui sont abonnés aux deux journaux : $50+20+50=120$.
     - retrancher l'effectif de pensionnaires qui ne sont abonnés à aucun journal de l'effectif total : $280-160=120$.

     Quelle que soit la méthode de calcul, on obtient :

$$P(S\cup M) = \frac{120}{280} = \frac{3}{7}.$$

   (c) On choisit au hasard un pensionnaire abonné au *Matin*. La probabilité qu'il soit aussi abonné au *Soir* est[6]

$$P_M(S) = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}.$$

Exercice 15 1. Le candidat connaît 3 des questions d'histoire, donc $P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; et il connaît 2 des 5 questions de géographie, donc $P(G) = \frac{2}{5}$.

2. Pour simplifier et sans rien enlever à la généralité du raisonnement, on suppose que les questions sont numérotées de 1 à 6 en histoire et de 1 à 5 en géographie, et que le candidat connaît les questions n°1, 2, 3 en histoire, n°1 et 2 en géographie. Dans le tableau ci-dessous, les questions connues sont écrites en bleu, les questions inconnues sont écrites en rouge.

   On a colorié les cases de trois couleurs :
   - en vert : le candidat connaît les deux questions ;
   - en orange : le candidat connaît une seule des deux questions ;
   - en magenta : le candidat ne connaît aucune des deux questions.

4. On rappelle que ∩ se lit « inter » et correspond au mot français « ET ».
5. On rappelle que ∪ se lit « union » et correspond au mot français « OU ».
6. On utilise la notation des probabilités conditionnelles, qui sera vue dans le paragraphe 2 du cours.

Géo \ Hist	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						

6 des 30 cases sont coloriées en vert, donc la probabilité que le candidat connaisse les deux questions est

$$P(G \cap H) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

3. $6+15 = 21$ des 30 cases sont coloriées en vert ou en orange, donc la probabilité que le candidat connaisse au moins l'une des deux questions est

$$P(G \cup H) = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}.$$

Remarque : On peut aussi obtenir 21 avec le calcul $30-9$, ou utiliser la formule du cours de 2^{de} :

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

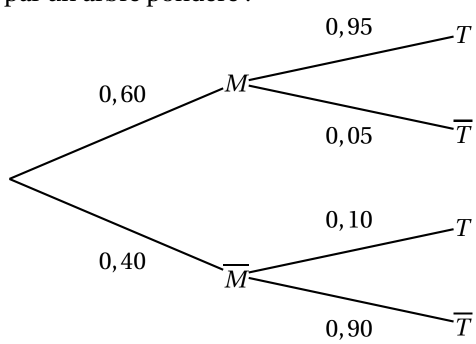
Exercice 16 On utilise un tableau à double entrée. On place un symbole dans chacune des cases favorable à l'événement

A : « les deux dés montrent la même couleur ».

Dé n°1 \ Dé n°2	■	■	■	■	□	□
■	★	★				
■	★	★				
■			★	★		
■			★	★		
□					★	★
□					★	★

Il y a 12 cases favorables à A sur 36, donc $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

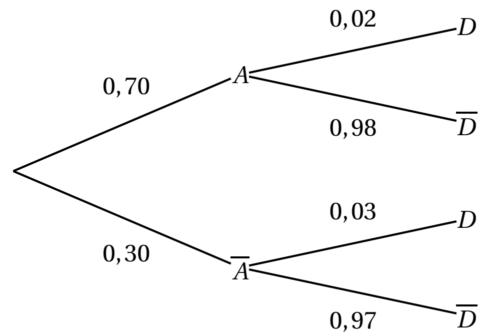
Exercice 17 1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. D'après l'arbre :
   - $P(M \cap T) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$;
   - D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) \\ &= 0,60 \times 0,95 + 0,40 \times 0,10 = 0,61. \end{aligned}$$

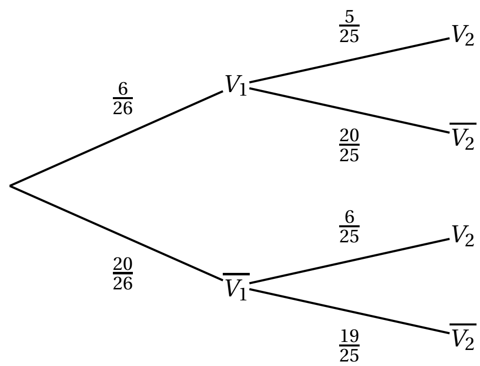
Exercice 18 1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la pièce ait un défaut est :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P\left(\overline{A} \cap D\right) \\ &= 0,70 \times 0,02 + 0,30 \times 0,03 = 0,023. \end{aligned}$$

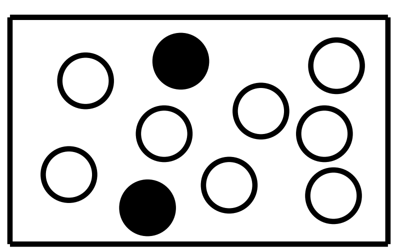
Exercice 19 Rappelons pour commencer que 6 des 26 lettres de l'alphabet sont des voyelles : A – E – I – O – U – Y.
Venons-en à l'arbre pondéré. Notons que si une première voyelle a été tirée, il reste 25 jetons dans le sac, parmi lesquels ne figurent plus que 5 voyelles. Cela explique le $\frac{5}{25}$ ci-dessous ; et avec un raisonnement similaire, on justifie tous les nombres sur les branches de droite.



L'événement A : « on tire une voyelle et une consonne (dans n'importe quel ordre) » est réalisé quand on prend l'un des deux chemins $V_1 \cap \overline{V_2}$, ou bien $\overline{V_1} \cap V_2$, donc

$$P(A) = P\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) + P\left(\overline{V_1} \cap V_2\right) = \frac{6}{26} \times \frac{20}{25} + \frac{20}{26} \times \frac{6}{25} = \frac{120}{650} + \frac{120}{650} = \frac{240}{650} = \frac{24}{65}.$$

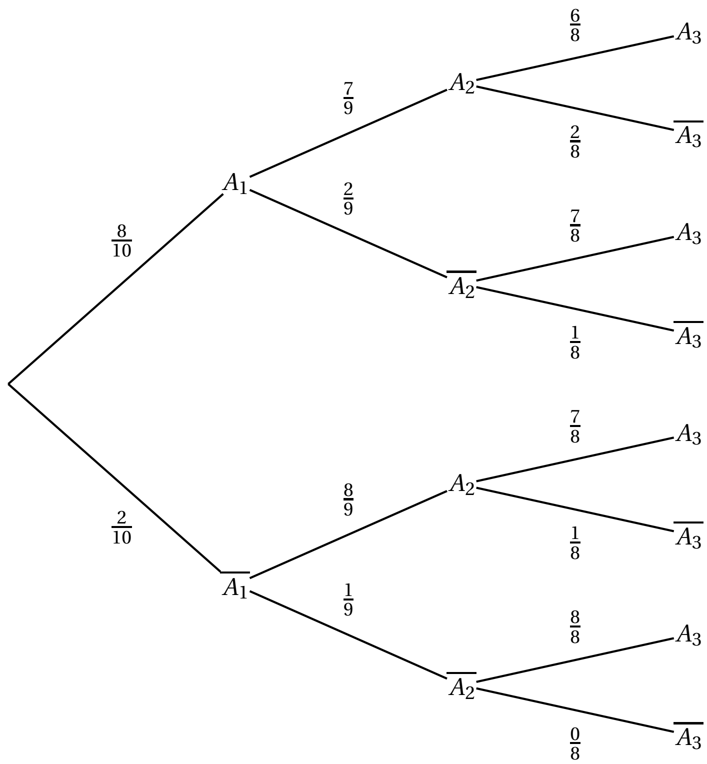
Exercice 20 Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.



Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'événement

$$A_i : \text{« la } i\text{-ème boule tirée est blanche ».}$$

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. Le contraire de

$$B : \text{« on a tiré au moins une boule noire »}$$

est

$$\overline{B} : \text{« on n'a tiré que des boules blanches ».}$$

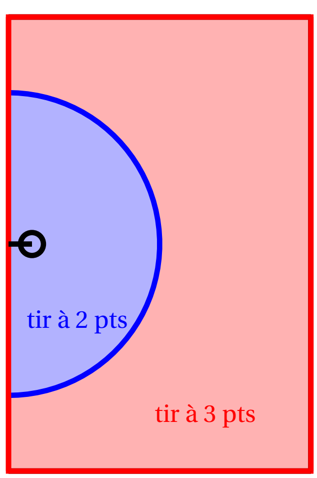
D'après l'arbre (chemin tout en haut)

$$P\left(\overline{B}\right) = \frac{\cancel{8}}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{\cancel{8}} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15},$$

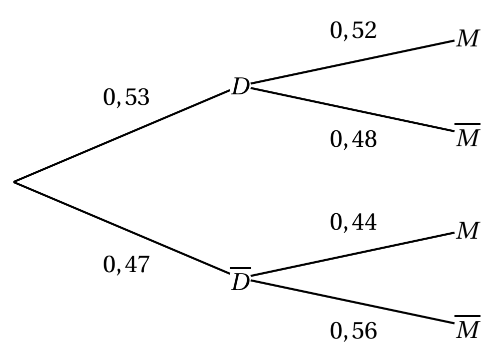
donc

$$P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Exercice 21 1. On rappelle les zones de tir à 2 et 3 points :



On représente la situation par un arbre pondéré :



Remarque : $\overline{D}$ signifie « Stephen Curry tire à 3 points ».

2. La probabilité que Stephen Curry tire à 2 points et marque est

$$P(D \cap M) = 0,53 \times 0,52 = 0,2756.$$

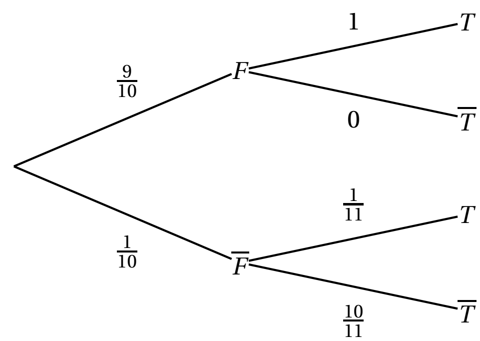
3. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que Stephen Curry marque est :

$$P(M) = P(D \cap M) + P\left(\overline{D} \cap M\right)$$
$$= 0,53 \times 0,52 + 0,47 \times 0,44 = 0,4824.$$

4. Stephen Curry a marqué. La probabilité qu'il ait tiré à deux points est

$$P_M(D) = \frac{P(M \cap D)}{P(M)} = \frac{0,2756}{0,4824} \approx 0,57.$$

Exercice 22 1. On commence par faire un arbre pondéré. Comme un appareil en parfait état de fonctionnement est toujours accepté à l'issue du test, il y a un 1 et un 0 sur les branches en haut à droite.



On en vient au calcul des probabilités demandé par l'énoncé :

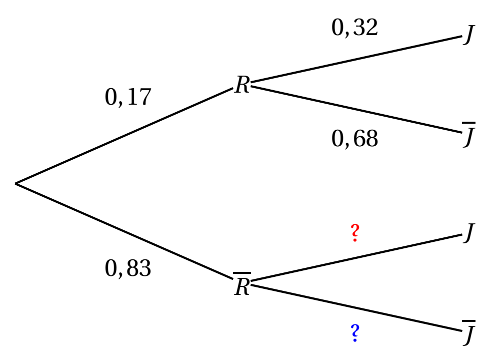
- $P\left(\overline{F} \cap T\right) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$;
- d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(F \cap T) + P\left(\overline{F} \cap T\right) = \frac{9}{10} \times 1 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{9}{10} + \frac{1}{110} = \frac{99}{110} + \frac{1}{110} = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}.$$

2. Sachant qu'un appareil a été accepté à l'issue du test, la probabilité qu'il ne fonctionne pas parfaitement est

$$P_T\left(\overline{F}\right) = \frac{P\left(T \cap \overline{F}\right)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{110}}{\frac{10}{11}} = \frac{1}{110} \times \frac{11}{10} = \frac{11}{1100} = \frac{1}{100}.$$

Exercice 23 1. On construit l'arbre et on le complète à partir des données de l'énoncé :



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$.
3. L'énoncé donne $P(J) = 0,11$. On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(J) = P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right)$$
$$0,11 = 0,0544 + P\left(\overline{R} \cap J\right)$$
$$0,11 - 0,0544 = P\left(\overline{R} \cap J\right)$$
$$0,0556 = P\left(\overline{R} \cap J\right)$$

Conclusion : $P\left(\overline{R} \cap J\right) = 0,0556$.

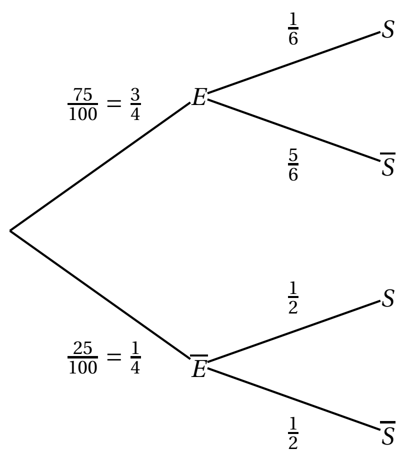
4. La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est égale à la probabilité qu'un utilisateur non régulier soit un jeune. Cette proportion vaut donc

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P\left(\overline{R} \cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{0{,}0556}{0{,}83} \approx 0{,}0670.$$

C'est le point d'interrogation rouge de l'arbre pondéré du début.

Exercice 24 Il faut prendre l'initiative de nommer des événements et de construire un arbre pondéré. On pose ainsi :

- E : « le dé est équilibré »,
- $\overline{E}$: « le dé est pipé »,
- S : « on obtient 6 ».



La probabilité qu'il faut calculer est $P_S\left(\overline{E}\right)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_S\left(\overline{E}\right) = \frac{P\left(\overline{E} \cap S\right)}{P(S)}.$$

Or $P\left(\overline{E} \cap S\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ et $P(S) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (formule des probabilités totales), donc :

$$P_S\left(\overline{E}\right) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 25 Il faut calculer $P_B\left(\overline{A_1}\right)$. On utilise la formule du cours :

$$P_B\left(\overline{A_1}\right) = \frac{P\left(\overline{A_1} \cap B\right)}{P(B)}.$$

L'événement $\overline{A_1} \cap B$ est égal à $\overline{A_1}$, puisque si la première boule tirée est noire, alors on en a au moins une noire. On a donc $P\left(\overline{A_1} \cap B\right) = P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{2}{10}$, puis finalement [7] :

$$P_B\left(\overline{A_1}\right) = \frac{P\left(\overline{A_1} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{2}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}.$$

Exercice 26

- Les nombres pairs sont 2, 4, 6, ..., 100. Il y en a 50, donc

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0{,}5.$$

7. On rappelle que $P(B)$ a été calculé dans l'exercice 20.

- Les multiples de 5 sont

$$5 = 5 \times 1,\ 10 = 5 \times 2,\ 15 = 5 \times 3,\ \cdots,\ 100 = 5 \times 20.$$

Il y en a 20, donc

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

- L'événement $A \cap B$ s'écrit « le nombre est pair et multiple de 5 », ou de façon plus simple (et plus explicite) « le nombre est multiple de 10 ». Or les multiples de 10 sont 10, 20, 30, ..., 100, et comme il y en a 10,

$$P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

- On calcule le produit

$$P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,2 = 0,1.$$

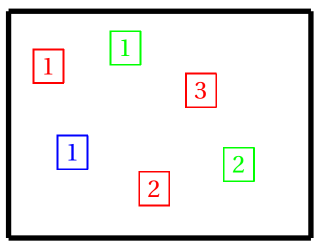
On constate que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,1,$$

donc A et B sont indépendants.

Remarque : La raison profonde de l'indépendance de A et B est que 100 est un multiple de 2 et de 5 d'une part, et que 2 et 5 sont premiers entre eux d'autre part.

Exercice 27



- D'un côté $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(U) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, donc

$$P(R) \times P(U) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

D'un autre côté, $R \cap U$ est réalisé quand on tire le jeton $\boxed{1}$, donc

$$P(R \cap U) = \frac{1}{6}.$$

Conclusion : $P(R \cap U) \neq P(R) \times P(U)$, donc les événements R et U ne sont pas indépendants.
- D'un côté $P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, donc

$$P(R) \times P(U) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

D'un autre côté, $R \cap D$ est réalisé quand on tire le jeton $\boxed{2}$, donc

$$P(R \cap D) = \frac{1}{6}.$$

Conclusion : $P(R \cap D) = P(R) \times P(D)$, donc les événements R et U sont indépendants.

Exercice 28 Les trois questions sont indépendantes.

1. D'après une formule du cours de 2^{de},

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,6 - 0,9 = 0,1.$$

D'un côté $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$, de l'autre $P(A \cap B) = 0,1$; donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.
Conclusion : A et B ne sont pas indépendants.

2. D'après la formule du cours de 2de déjà utilisée dans la question 1 et la propriété d'indépendance :

$$\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) & \\
P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A)\times P(B) & \text{(on utilise l'indépendance)}\\
0,7 &= 0,4+P(B)-0,4\times P(B) & \\
0,7 &= 0,4+x-0,4x & \text{(on pose } x=P(B))\\
0,7 &= 0,4+0,6x & \\
0,7-0,4 &= 0,6x & \text{(on résout l'équation)}\\
\frac{0,3}{0,6} &= \frac{\cancel{0,6}x}{\cancel{0,6}} & \\
0,5 &= x. &
\end{aligned}$$

Conclusion : $P(B)=0,5$.

3. Un événement A est indépendant de lui-même si, et seulement si

$$P(A\cap A)=P(A)\times P(A). \tag{3}$$

Or $A\cap A=A$, donc $P(A\cap A)=P(A)$, et l'égalité (3) ci-dessus se réécrit

$$P(A)=(P(A))^2.$$

On pose $x=P(A)$, on est ramené à résoudre l'équation $x=x^2$:

$$x=x^2 \iff x-x^2=0 \iff x(1-x)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=1.$$

Conclusion : A est indépendant de lui-même lorsque $P(A)=0$ (A est alors un événement impossible) ou lorsque $P(A)=1$ (A est alors un événement certain).

3 Suites numériques

Exercice 29 1. $u_n=0,5n-3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$u_0=0,5\times0-3$ $u_0=-3.$	$u_1=0,5\times1-3$ $u_1=-2,5.$	$u_2=0,5\times2-3$ $u_2=-2.$	$u_3=0,5\times3-3$ $u_3=-1,5.$

2. $v_n=1-\frac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$v_1=1-\dfrac{1}{1}$ $v_1=0.$	$v_2=1-\dfrac{1}{2}$ $v_2=\dfrac{1}{2}.$	$v_3=1-\dfrac{1}{3}$ $v_3=\dfrac{2}{3}.$	$v_4=1-\dfrac{1}{4}$ $v_4=\dfrac{3}{4}.$

3. $\begin{cases} u_0 &= 2\\ u_{n+1} &= 10-u_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

Avec $n=0$: $u_{0+1}=10-u_0$ $u_1=10-2$ $u_1=8.$	Avec $n=1$: $u_{1+1}=10-u_1$ $u_2=10-8$ $u_2=2.$	Avec $n=2$: $u_{2+1}=10-u_2$ $u_3=10-2$ $u_3=8.$	Avec $n=3$: $u_{3+1}=10-u_3$ $u_4=10-8$ $u_4=2.$

On obtient la suite périodique $(2;8;2;8;2;\cdots)$.

4. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 4u_n.$$

Avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_{0+1} &= 4u_0 \\ u_1 &= 4 \times 1 \\ u_1 &= 4. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:

$$\begin{aligned} u_{1+1} &= 4u_1 \\ u_2 &= 4 \times 4 \\ u_2 &= 16. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:

$$\begin{aligned} u_{2+1} &= 4u_2 \\ u_3 &= 4 \times 16 \\ u_3 &= 64. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:

$$\begin{aligned} u_{3+1} &= 4u_3 \\ u_4 &= 4 \times 64 \\ u_4 &= 256. \end{aligned}$$

5. $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} v_{0+1} &= \frac{v_0}{v_0+2} \\ v_1 &= \frac{1}{1+2} \\ v_1 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:

$$\begin{aligned} v_{1+1} &= \frac{v_1}{v_1+2} \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+2} \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{6}{3}} \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} \\ v_2 &= \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{7} \\ v_2 &= \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:

$$\begin{aligned} v_{2+1} &= \frac{v_2}{v_2+2} \\ v_3 &= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+2} \\ v_3 &= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}+\frac{14}{7}} \\ v_3 &= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{15}{7}} \\ v_3 &= \frac{1}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{15} \\ v_3 &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:

$$\begin{aligned} v_{3+1} &= \frac{v_3}{v_3+2} \\ v_4 &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+2} \\ v_4 &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{30}{15}} \\ v_4 &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{31}{15}} \\ v_4 &= \frac{1}{\cancel{15}} \times \frac{\cancel{15}}{31} \\ v_4 &= \frac{1}{31}. \end{aligned}$$

6. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, où $f(x) = (x+1)^2$.
Autrement dit, $u_{n+1} = (u_n+1)^2$.

Avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_{0+1} &= (u_0+1)^2 \\ u_1 &= (0+1)^2 \\ u_1 &= 1. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:

$$\begin{aligned} u_{1+1} &= (u_1+1)^2 \\ u_2 &= (1+1)^2 \\ u_2 &= 4. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:

$$\begin{aligned} u_{2+1} &= (u_2+1)^2 \\ u_3 &= (4+1)^2 \\ u_3 &= 25. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:

$$\begin{aligned} u_{3+1} &= (u_2+1)^2 \\ u_4 &= (25+1)^2 \\ u_4 &= 676. \end{aligned}$$

7. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
⚠Il y a un gros risque de décalage dans les indices!!

Avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_{0+1} &= u_0 + 0 - 3 \\ u_1 &= 4 + 0 - 3 \\ u_1 &= 1. \end{aligned}$$

Avec $n = 1$:

$$\begin{aligned} u_{1+1} &= u_1 + 1 - 3 \\ u_2 &= 1 + 1 - 3 \\ u_2 &= -1. \end{aligned}$$

Avec $n = 2$:

$$\begin{aligned} u_{2+1} &= u_2 + 2 - 3 \\ u_3 &= -1 + 2 - 3 \\ u_3 &= -2. \end{aligned}$$

Avec $n = 3$:

$$\begin{aligned} u_{3+1} &= u_3 + 3 - 3 \\ u_4 &= -2 + 3 - 3 \\ u_4 &= -2. \end{aligned}$$

8. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $f(x) = x^2 - 2x$.
Autrement dit, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n$.

Avec $n = 0$:

$$u_{0+1} = u_0^2 - 2u_0$$
$$u_1 = 2^2 - 2 \times 2$$
$$u_1 = 0.$$

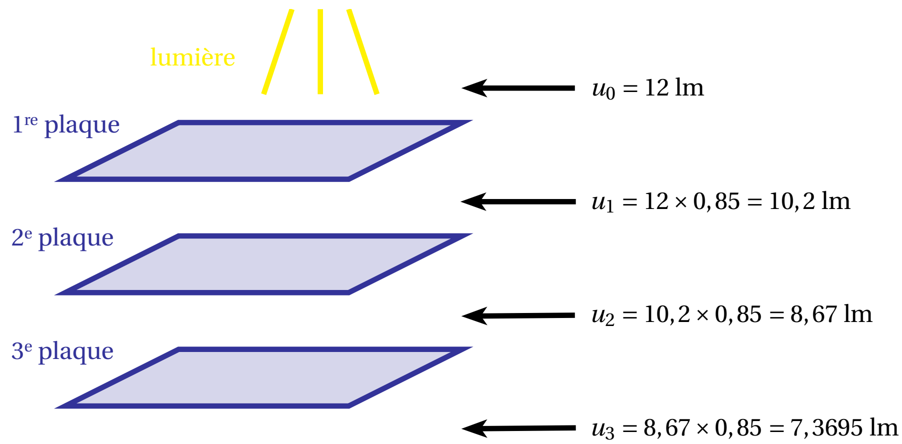
Avec $n = 1$:

$$u_{1+1} = u_1^2 - 2u_1$$
$$u_2 = 0^2 - 2 \times 0$$
$$u_2 = 0.$$

$$u_{2+1} = u_2^2 - 2u_2$$
$$u_3 = 0^2 - 2 \times 0$$
$$u_3 = 0.$$

La suite est constante égale à 0 à partir du rang 1 : $(2;0;0;0;\cdots)$.

Exercice 30 1. $100\,\% - 15\,\% = 85\,\% = 0,85$, donc pour diminuer un nombre de 15 %, il faut le multiplier par 0,85.
Ainsi, dans le schéma ci-dessous, l'intensité lumineuse est-elle multipliée par 0,85 à chaque nouvelle plaque :



Remarque : Le lumen est une unité de mesure du flux lumineux, utilisée notamment pour indiquer la capacité d'éclairement des ampoules électriques.

2. La relation de récurrence est
$$u_{n+1} = 0,85 \times u_n \text{ pour tout entier naturel } n.$$

3. L'intensité lumineuse est divisée par 10 lorsqu'on descend en dessous de $12 \div 10 = 1,2$ lm. Pour savoir le nombre minimal de plaques à superposer pour qu'il en soit ainsi, on rentre les valeurs initiales 0 et 12 dans la colonne B, puis on rentre les formules ci-dessous dans la colonne C, que l'on étire vers la droite jusqu'à obtenir une intensité lumineuse inférieure à 1,2.

	A	B	C	···	P	Q
1	Nb de plaques	0	=B1+1	···	14	15
2	Intensité (lm)	12	=B2*0,85	···	1,23	1,05

Conclusion : il faut superposer au moins 15 plaques pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 10.

Exercice 31 On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. On programme une machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament ;
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

1. $w_0 = 10$. C'est la quantité injectée à l'instant 0.

D'une minute à la suivante, 20% du médicament présent dans le sang est éliminé (multiplication par 0,80), puis on injecte 1 mL, donc :

$$w_1 = 0,8 \times w_0 + 1 = 0,8 \times 10 + 1 = 9$$
$$w_2 = 0,8 \times w_1 + 1 = 0,8 \times 9 + 1 = 8,2$$
$$w_3 = 0,8 \times w_2 + 1 = 0,8 \times 8,2 + 1 = 7,56.$$

2. D'une manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = 0,8 \times w_n + 1.$$

3. On entre :

	A	B	C	$\cdots$	AO	AP
1	Temps (min)	0	=B1+1	$\cdots$	39	40
2	Qtité de médic. (mL)	10	=B2*0,8+1	$\cdots$	$5,0006\cdots$	$5,0005\cdots$

Sur le long terme, la quantité de médicament se rapproche d'une valeur limite : 5 mL (elle s'en rapproche très rapidement, car elle est presque stable au bout de 30 min).