Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1

1. On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 252 &= 1 \times 180 + 72 \\ 180 &= 2 \times 72 + 36 \\ 72 &= 2 \times 36 + 0 \end{aligned}$$

   Le PGCD est le dernier reste non nul :

$$\boxed{\text{PGCD}(252, 180) = 36.}$$

2. Le nombre d'équipes doit diviser le nombre de filles et le nombre de garçons. On veut par ailleurs que ce nombre d'équipes soit le plus grand possible. Il faut donc prendre le PGCD de 180 et 252. Il y aura ainsi 36 équipes ; et comme $180 \div 36 = 5$ et $252 \div 36 = 7$, chacune comportera 5 filles et 7 garçons, soit

$$\boxed{\text{12 membres au total.}}$$

Exercice 2

1. On décompose en produit de nombres premiers avec la méthode du cours. On obtient

$$\boxed{480 = 2^5 \times 3 \times 5.}$$

2. D'après une proposition du cours, les diviseurs de 480 sont les nombres de la forme

$$2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma,$$

   avec $0 \leq \alpha \leq 5$, $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \gamma \leq 1$.

   Il y a donc 6 possibilités pour α (de 0 à 5), 2 pour β (de 0 à 1) et 2 pour γ (de 0 à 1), soit

$$\boxed{6 \times 2 \times 2 = 24 \text{ diviseurs positifs de 480.}}$$

3. Si l'on n'imposait pas de condition sur le nombre minimal d'arbustes par rangée, le jardinier aurait 24 possibilités (autant que de diviseurs de 480) : 480 rangées d'1 arbuste, 240 rangées de 2 arbustes, 160 rangées de 3 arbustes, etc.
   La condition $n \geq 10$ fait qu'il faut exclure les diviseurs inférieurs à 10 : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 8. Il reste donc

$$\boxed{24 - 7 = 17 \text{ manières différentes au jardinier.}}$$

Exercice 3

1. On développe et on réduit :

$$3(5n+7) - 5(3n+4) = 15n + 21 - 15n - 20 = 1.$$

2. Si un entier $k \geq 1$ divise à la fois $5n+7$ et $3n+4$, alors il divise la combinaison linéaire $3(5n+7) - 5(3n+4)$ d'après une proposition du cours. Donc d'après la question 1, k divise 1. Or le seul diviseur positif de 1 est 1 lui-même, donc $k = 1$ et

$$\boxed{\text{PGCD}(5n+7, 3n+4) = 1.}$$

Exercice 4

1. Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5. On note q et q' les quotients dans les deux divisions. On a donc

$$\boxed{\begin{cases} a = bq + 8 \\ 2a = bq' + 5 \end{cases}.}$$

2. On multiplie la première ligne par 2 :

$$\begin{cases} 2a = 2bq + 16 \\ 2a = bq' + 5 \end{cases}$$

et l'on obtient, par comparaison :

$$2bq + 16 = bq' + 5.$$

On en déduit

$$16 - 5 = bq' - 2bq, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{11 = bq' - 2bq.}$$

3. D'après la question précédente,

$$11 = b\left(q' - 2q\right).$$

Ainsi b est-il un diviseur de 11. Mais $b > 1$ par hypothèse et 11 est premier, donc

$$\boxed{b = 11.}$$

N.B. Il y a une infinité de solutions possibles pour a.

Exercice 5

On cherche deux entiers naturels a, b distincts de 12 et de 180 et tels que

$$\text{PGCD}(a, b) = 12 \qquad , \qquad \text{PPCM}(a, b) = 180.$$

On remarque que $180 = 12 \times 3 \times 5$, ce qui conduit à choisir

$$\boxed{a = 12 \times 3 = 36 \qquad \text{et} \qquad b = 12 \times 5 = 60.}$$

Les nombres a et b vérifient bien les conditions de l'énoncé, puisque

$$a = 36 = 2^2 \times 3^2 \qquad , \qquad b = 60 = 2^2 \times 3 \times 5,$$

donc

- $\text{PGCD}(a, b) = 2^2 \times 3 = 12$;
- $\text{PPCM}(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

Le lecteur pourra se convaincre du fait qu'il n'existe pas d'autre solution, sauf à inverser les rôles de a et b.