Mathématiques – Première spécialité

Corrigés des exercices

Table des matières

1 Le second degré : équations et paraboles

Dans chaque exercice, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions des équations.

Exercice 1 1. On résout l'équation $x^2+2x=0$:

On factorise :

$$x(x+2)=0.$$

Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc il y a deux possibilités :

$$\begin{aligned} x=0 \qquad \text{ou} \qquad & x+2=0 \\ & x+\cancel{2}\cancel{-2}=0-2 \\ & x=-2 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions : $x=0$ et $x=-2$. Autrement dit :

$$\mathscr{S}=\{0;-2\}.$$

2. On résout l'équation $x^2-16=0$:
   On « isole » x^2 :

$$\begin{aligned} x^2-16&=0 \\ x^2-\cancel{16}\cancel{+16}&=0+16 \\ x^2&=16 \end{aligned}$$

Comme 16 est positif, il y a deux solutions :

$$x=\sqrt{16}=4 \qquad \text{ou} \qquad x=-\sqrt{16}=-4.$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\{4;-4\}.$$

3. On résout l'équation $(2x-1)(x-5)=0$:

$$\begin{aligned} 2x-1&=0 & \text{ou} \quad & x-5=0 \\ 2x-\cancel{1}\cancel{+1}&=0+1 & \text{ou} \quad & x-\cancel{5}+\cancel{5}=0+5 \\ \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}&=\frac{1}{2} & \text{ou} \quad & x=5 \\ x&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2};5\right\}.$$

4. On résout l'équation $x^2+7=0$:

$$\begin{aligned} x^2+7&=0 \\ x^2+\cancel{7}\cancel{-7}&=0-7 \\ x^2&=-7 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution, car un carré est positif (donc aucun nombre x ne peut avoir un carré égal à -7).
Conclusion :

$$\mathscr{S}=\emptyset.$$

(On rappelle que $\emptyset$ désigne l'ensemble vide : l'ensemble qui ne contient aucun élément.)

Exercice 2 Dans chaque cas, on note Δ le discriminant.

1. On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$:
   - $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3-5}{2} = -1,$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4.$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S} = \{-1; 4\}.$$

2. On résout l'équation $2x^2 - 12x = -18$:
   On se ramène d'abord à la situation du cours (équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$) en « transposant -18 » :

$$2x^2 - 12x + 18 = -\cancel{18} + \cancel{18}$$
$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

   - $a = 2$, $b = -12$, $c = 18$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$.
   - $\Delta = 0$, donc il y a une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S} = \{3\}.$$

3. On résout l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$:
   - $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$.
   - $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solution.

   Conclusion :

$$\mathscr{S} = \emptyset.$$

4. On résout l'équation $x^2 + 2x - 4 = 0$:
   - $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$.
   - $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$.
   - $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2},$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2}.$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{20}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \right\}.$$

   Remarque : On peut écrire les solutions de façon plus élégante : sachant que

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5},$$

   on trouve

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{\cancel{2}} = -1 + \sqrt{5}.$$

   De même, $x_1 = -1 - \sqrt{5}$.

5. On résout l'équation $x^2 = -6x$:
   À partir de maintenant, on s'autorise à aller un peu plus vite : on transpose directement le « $-6x$ » dans le membre de gauche, qui devient « $+6x$ ».

$$\begin{aligned} x^2 &= -6x \\ x^2 + 6x &= 0. \end{aligned}$$

   Ici, il y a deux méthodes possibles :
   - soit on utilise le discriminant, avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 0$ (puisque $x^2 + 6x = 1x^2 + 6x + 0$) ;
   - soit on factorise.

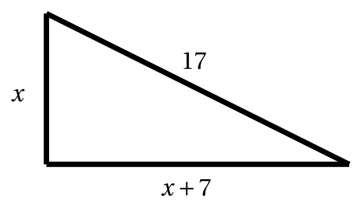
   On utilise la deuxième méthode, qui est plus rapide [1] :

$$\begin{aligned} &x(x+6) = 0 \\ &x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x+6 = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x = -6. \end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\mathscr{S} = \{0; -6\}.$$

Exercice 3 On commence par un schéma indicatif, qui n'est bien sûr pas à l'échelle puisqu'on ne connaît pas x.



D'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 + (x+7)^2 = 17^2.$$

On développe $(x+7)^2$ avec l'identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2.$$

L'équation se réécrit :

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 &= 289 \\ 2x^2 + 14x + 49 - 289 &= 0 \\ 2x^2 + 14x - 240 &= 0. \end{aligned}$$

- $a = 2$, $b = 14$, $c = -240$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 2 \times (-240) = 196 + 1\,920 = 2\,116$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14-\sqrt{2\,116}}{2 \times 2} = \frac{-14-46}{4} = -15, \\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14+\sqrt{2\,116}}{2 \times 2} = \frac{-14+46}{4} = 8. \end{aligned}$$

Or x désigne une longueur, donc la première solution (x_1) est impossible. On a donc $x = 8$.

Remarque : Ce n'est pas demandé, mais on peut donner la longueur des trois côtés :

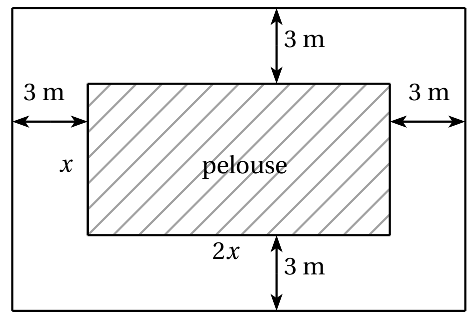
$$x = 8, \qquad x + 7 = 8 + 7 = 15 \qquad \text{et} \qquad 17.$$

On peut alors vérifier que

$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

1. De plus, il y a un gros risque d'erreur de résolution lorsqu'on utilise la méthode avec Δ dans le cas où b ou c valent 0.

Exercice 4 1. Voici un schéma du terrain en notant x la largeur de la pelouse (donc la longueur est $2x$) :



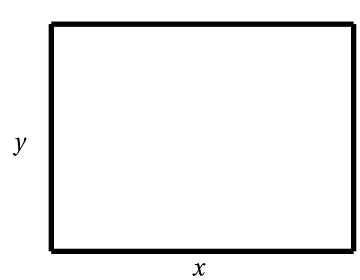
2. La longueur du terrain (en m) est
$$2x+3+3=2x+6,$$
sa largeur est
$$x+3+3=x+6.$$
Donc la surface du terrain (en m^2) est
$$\text{longueur} \times \text{largeur} = (2x+6)\times(x+6).$$
Or on sait que cette surface vaut 360 m^2, donc
$$(2x+6)\times(x+6)=360.$$

3. On résout l'équation obtenue dans la question précédente[2] :
$$\begin{aligned}
& (2x+6)\times(x+6) &&= 360\\
\iff\ & 2x\times x+2x\times 6+6\times x+6\times 6 &&= 360\\
\iff\ & 2x^2+12x+6x+36 &&= 360\\
\iff\ & 2x^2+18x+36-360 &&= 0\\
\iff\ & 2x^2+18x-324 &&= 0.
\end{aligned}$$
Il s'agit d'une équation du second degré.
- $a=2,\ b=18\ , c=-324$.
- $\Delta=18^2-4\times2\times(-324)=2916$.
- $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18-\sqrt{2916}}{2\times2}=\frac{-18-54}{4}=\frac{-72}{4}=-18,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18+\sqrt{2916}}{2\times2}=\frac{-18+54}{4}=\frac{36}{4}=9.$$

Or x désigne une longueur, donc x ne peut pas être négatif et seule la solution $x_2=9$ est valable.
Conclusion : $x=9$, donc la longueur du terrain (en m) est $2\times9+3+3=24$, sa largeur est $9+3+3=15$.

Exercice 5 On utilise le mètre comme unité de longueur, le mètre carré comme unité de surface. On note x et y les dimensions du champ.



2. Les « $\iff$ » que l'on place entre les lignes se lisent « équivalent à ». Cela signifie que la résolution de l'équation écrite à une ligne est équivalente à la résolution de l'équation écrite à la ligne suivante.

- Le périmètre est 54, donc la moitié du périmètre est
$$x+y=27.$$
- L'aire est 180, donc
$$x\times y=180.$$

On obtient ainsi le système
$$\begin{cases} x+y=27 & L_1 \\ xy=180 & L_2 \end{cases}$$
On multiplie L_1 par x :
$$(x+y)\times x=27\times x, \qquad \text{soit} \qquad x^2+xy=27x.$$
Or d'après L_2, $xy=180$, donc
$$x^2+180=27x, \qquad \text{et ainsi} \qquad x^2-27x+180=0.$$
On aboutit à une équation du 2^d degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) : $x_1=12$, $x_2=15$.

On sait que $x+y=27$, donc si $x=12$, alors $y=27-x=27-12=15$; et si $x=15$, alors $y=27-x=27-15=12$.
Dans les deux cas, on obtient un champ qui mesure 12 m sur 15 m.

Exercice 6 On note n le nombre d'amis initialement présents, et p le prix à payer par chacun (en euros).

- Le montant total de la location est 2 400 €, donc
$$n\times p=2400. \tag{1}$$
- Si deux amis s'en vont, le montant individuel augmente de 40 €. On a donc dans ce cas $(n-2)$ amis, et chacun paye alors $(p+40)$ €. En revanche, le montant total de la location ne change pas, il vaut toujours 2 400 €. On en déduit
$$(n-2)\times(p+40)=2400.$$
En développant, cela donne encore
$$np+40n-2p-80=2400. \tag{2}$$

On compare (1) et (2) : comme les membres de droite valent 2400 dans les deux cas, on obtient l'égalité
$$\cancel{np}=\cancel{np}+40n-2p-80,$$
soit
$$40n-2p-80=0.$$
Finalement, le couple (n,p) est solution du système
$$\begin{cases} n\times p=2400 \\ 40n-2p-80=\quad 0. \end{cases}$$
On résout ce système comme dans l'exercice 5 (je ne détaille pas) et l'on obtient
$$n=12 \qquad , \qquad p=200.$$
Conclusion : comme $12-10=2$, ce sont 10 amis qui sont finalement partis.

Exercice 7 1. $P_1 : y=x^2-6x+5$.

- $a=1$, $b=-6$, $c=5$.
- a est $\oplus$, donc P_1 est vers le haut.
- On note S le sommet de P_1. D'après le cours
$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 1}=\frac{6}{2}=3.$$
On en déduit
$$y_S=3^2-6\times 3+5=9-18+5=-4.$$
On a donc $S(3;-4)$.

Venons-en au tracé de la parabole. On fait un tableau de valeurs sur $[0;6]$, avec un pas de 1 [3]. Pour cela, on utilise la calculatrice :

3. Nous choisissons un intervalle symétrique par rapport à l'abscisse du sommet, et qui ne soit ni trop court, ni trop long. On choisit un pas de 1 par facilité, mais le graphique serait bien sûr plus précis avec un pas plus petit.

Calculatrices collège

- $\boxed{\text{MODE}}$ ou $\boxed{\text{MENU}}$
- 4 : TABLE ou 4 : Tableau
- f(X)=X^2-6X+5 $\boxed{\text{EXE}}$ (si on demande g(X)=, ne rien rentrer)
- Début ? 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- Fin ? 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas ? 1 $\boxed{\text{EXE}}$

NUMWORKS

x s'obtient avec les touches $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{x}}$

-
- Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$ puis choisir Fonctions $\boxed{\text{EXE}}$
- f(x)=x^2-6x+5 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Tableau $\boxed{\text{EXE}}$ puis Régler l'intervalle $\boxed{\text{EXE}}$
- X début 0 $\boxed{\text{EXE}}$
- X fin 6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Pas 1 $\boxed{\text{EXE}}$
- choisir Valider

TI graphiques

X s'obtient avec la touche $\boxed{x,t,\theta,n}$

- $\boxed{f(x)}$
- $Y_1=X^2-6X+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{déf table}}$
- DébTable=0 $\boxed{\text{EXE}}$
- PasTable=1 $\boxed{\text{EXE}}$ ou ΔTbl=1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{table}}$

CASIO graphiques

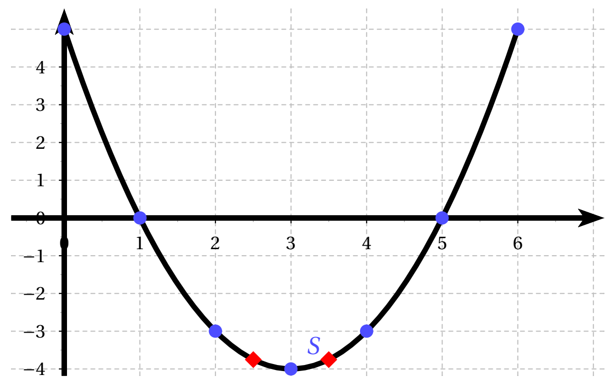
X s'obtient avec la touche $\boxed{X,\theta,T}$

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis choisir TABLE $\boxed{\text{EXE}}$
- $Y_1:X^2-6X+5$ $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{F5}}$ (on choisit donc SET)
- Start :0 $\boxed{\text{EXE}}$
- End :6 $\boxed{\text{EXE}}$
- Step :1 $\boxed{\text{EXE}}$
- $\boxed{\text{EXIT}}$
- $\boxed{\text{F6}}$ (on choisit donc TABLE)

On obtient le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Enfin on construit le graphique (j'ai un peu « écrasé » l'axe des ordonnées pour gagner de la place) :



Remarque : On peut avoir intérêt à ajouter des points près du sommet pour obtenir un tracé plus précis. C'est ce que l'on a fait ci-dessus avec les deux losanges rouges, correspondant au tableau de valeurs ci-dessous.

x	2,5	3,5
y	$-3,75$	$-3,75$

2. $P_2 : y=-0,5x^2-x+4$.
   - $a=-0,5,\ \ b=-1$, $c=4$.
   - a est $\ominus$, donc P_2 est vers le bas.
   - On note S le sommet de P_2. D'après le cours

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times(-0,5)}=\frac{1}{-1}=-1.$$

   On en déduit

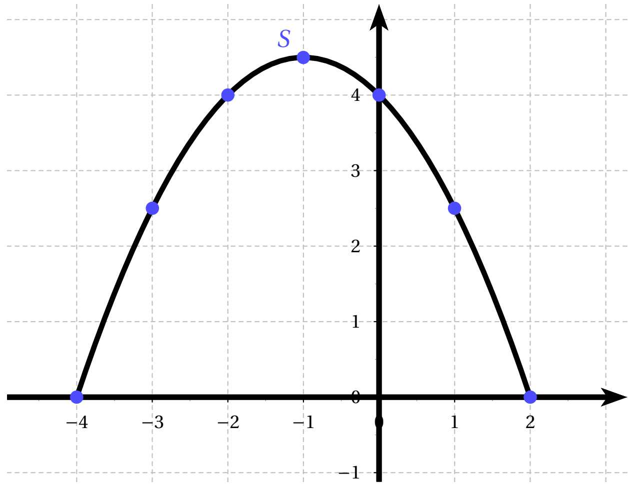
$$y_S=-0,5\times(-1)^2-(-1)+4=-0,5+1+4=4,5.$$

   On a donc $S(-1\ ;\ 4,5)$.

Tableau de valeurs :

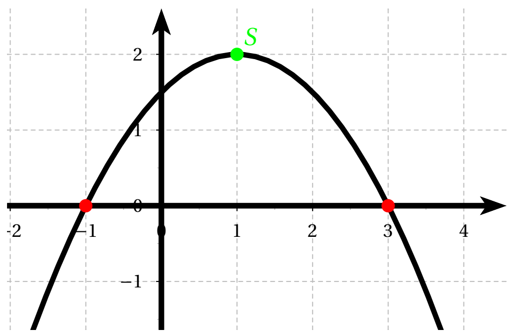
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

Tracé de la parabole :



Exercice 8 1. On trace la parabole P :

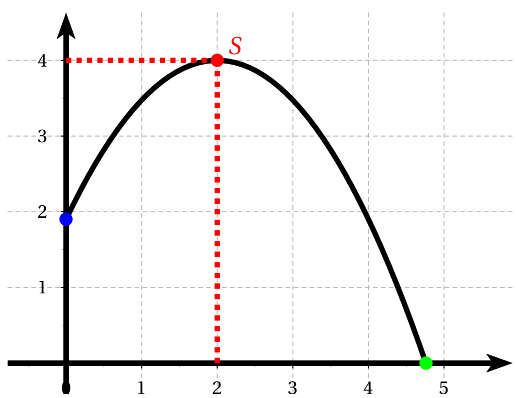
- qui coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -1$ et en $x_2 = 3$.
- dont le sommet est le point $S(1;2)$.



Remarque : Il est difficile de faire un tracé hyper précis avec si peu d'informations. L'élève intéressé peut essayer de prouver – en faisant un bel effort – que $f(x) = -0,5x^2 + x + 1,5$. Auquel cas, il pourra faire un tableau de valeurs et obtenir une courbe presque aussi parfaite que celle dessinée ci-dessus avec l'ordinateur.

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Comme P est vers le bas, a est du signe $\ominus$.
   - Comme P coupe l'axe des abscisses en deux points, il y a deux racines et Δ est du signe $\oplus$.

Exercice 9 La trajectoire de la balle en fonction du temps est la parabole $P : y = -0,525t^2 + 2,1t + 1,9$, tracée ci-dessous :



1. Clément commence sa passe à la hauteur

$$h(0) = -0,525 \times 0 + 2,1 \times 0 + 1,9 = 1,9 \text{ mètres.}$$

   Cela correspond au point bleu sur la figure.

2. La hauteur maximale de la balle est l'ordonnée du sommet S de la parabole, en rouge sur la figure.

- $a=-0,525$, $b=2,1$, $c=1,9$.
- On calcule avec la formule :

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{2,1}{2\times(-0,525)}=\frac{-2,1}{-1,05}=2.$$

  On en déduit

$$y_S=-0,525\times 2^2+2,1\times 2+1,9=4,$$

  et donc la hauteur maximale de la balle est de 4 mètres.

3. Pour déterminer le temps de vol de la balle, on cherche à quel moment elle retombe au sol (point vert sur la figure). On résout donc l'équation

$$-0,525t^2+2,1t+1,9=0.$$

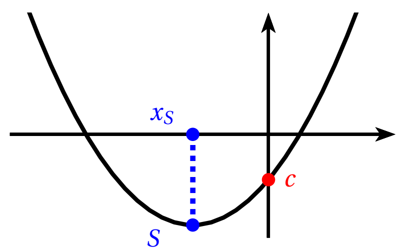
   - $\Delta=2,1^2-4\times(-0,525)\times 1,9=8,4$.
   - $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2,1-\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)}\approx 4,76,$$
$$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2,1+\sqrt{8,4}}{2\times(-0,525)}\approx -0,76.$$

   La deuxième solution est impossible, car le temps cherché est positif.

   Conclusion : la balle retombe au sol après 4,76 secondes environ.

Exercice 10 On a tracé une parabole $P: y=ax^2+bx+c$.



1.
   - $a>0$, car P est vers la haut.
   - Si $x=0$, alors $y=a\times 0^2+b\times 0+c=c$, donc la P passe par le point de coordonnées $(0;c)$ – autrement dit, elle coupe l'axe des ordonnées en c.
     Par lecture graphique, on obtient donc $c<0$.
   - Il y a deux racines, car P coupe l'axe des abscisses deux fois. On a donc $\Delta>0$.
2. D'après le cours, $x_S=-\frac{b}{2a}$, donc

$$x_S\times 2a=-\frac{b}{\cancel{2a}}\times\cancel{2a}$$
$$x_S\times 2a=-b$$
$$-x_S\times 2a=b.$$

   On sait que $x_S<0$ et $a>0$, donc $b=-\underbrace{x_S}_{\ominus}\times\underbrace{2a}_{\oplus}$ est du signe $\oplus$: $b>0$.

Exercice 11 Soit $P: y=ax^2+bx+c$ une parabole et S son sommet. On sait que $x_S=-\frac{b}{2a}$, donc

$$y_S=a\times\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\cancel{a}\times\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}}-\frac{b^2\times 2}{2a\times 2}+\frac{c\times 4a}{1\times 4a}$$
$$=\frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}.$$

Exercice 12 1. Le coût de fabrication des x objets est

$$C(x)=x^2+230x+325.$$

Chaque objet est vendu 300 €, donc la recette issue de la vente des x objets est

$$R(x) = 300x.$$

On en déduit que le bénéfice est

$$B(x) = \text{Recette} - \text{Coût} = R(x) - C(x) = 300x - \left(x^2 + 230x + 325\right) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325.$$

2. Le bénéfice est une expression du second degré, avec $a < 0$. Il est donc représenté par une parabole orientée vers le bas.
Maximiser le bénéfice revient donc à trouver le (l'abscisse du) sommet de cette parabole :
   - $a = -1$, $b = 70$, $c = -325$.
   - $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2\times(-1)} = \frac{-70}{-2} = 35$.

   Conclusion : le bénéfice est maximal lorsqu'on produit et vend 35 objets.

   Remarque : Le bénéfice maximal est
$$-35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900 \text{ €}.$$