

# Mathématiques – Seconde

Corrigés des exercices

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels de calcul et de géométrie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Nombres réels</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Géométrie repérée</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Études graphiques de fonctions</b>	<b>25</b>

# 1 Rappels de calcul et de géométrie

**Exercice 1** Dans chaque question, on obtient la réponse à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

1.

Nombre de personnes	4	6
Farine (en g)	250	?
Lait (en mL)	500	?
Œufs	4	6

Pour 6 personnes, il faut  $\frac{250 \times 6}{4} = \frac{1500}{4} = 375$  g de farine,  $\frac{500 \times 6}{4} = \frac{3000}{4} = 750$  mL de lait et, bien sûr, 6 œufs.

2. Les 6 yaourts pèsent  $6 \times 125 = 750$  g.

masse (en g)	1000	750
prix (en €)	2	?

Je payerai  $\frac{750 \times 2}{1000} = \frac{1500}{1000} = 1,5$  €.

3. Généralement, dans ce type de question, il vaut mieux convertir en minutes<sup>1</sup>.

temps (en min)	60	?
distance (en km)	20	45

On mettra  $\frac{60 \times 45}{20} = \frac{20 \times 3 \times 45}{20} = 135$  min, soit 2 h 15 min (puisque  $135 = 120 + 15$ ).

4. L'énoncé donne les informations recensées dans le tableau ci-dessous et demande de compléter la case ①.

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	②
Deniers	?	5	30

On complète d'abord la case ② : en échange de 30 deniers, on a  $4 \times 30 \div 5 = 24$  pistoles :

Florins	7	?	①
Pistoles	6	4	24
Deniers	?	5	30

On peut alors compléter la case ① : en échange de 30 deniers, on a  $\frac{7 \times 24}{6} = \frac{7 \times 4 \times 6}{6} = 28$  florins.

**Exercice 2** 1. On complète deux tableaux de proportionnalité (on travaille en min et en km) :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	3	0,5

temps (en min)	60	?
distance (en km)	15	5

Stéphane nage  $\frac{60 \times 0,5}{3} = \frac{30}{3} = 10$  min, puis il court  $\frac{60 \times 5}{15} = \frac{300}{15} = 20$  min.

2. Stéphane a parcouru un total de  $5 + 0,5 = 5,5$  km, en  $10 + 20 = 30$  min.

temps (en min)	30	60
distance (en km)	5,5	?

La vitesse moyenne de Stéphane sur l'ensemble de son parcours est donc  $\frac{60 \times 5,5}{30} = \frac{30 \times 2 \times 5,5}{30} = 11$  km/h.

**Exercice 3**



1. Les calculs ne sont pas toujours plus faciles en minutes qu'en heures, mais c'est généralement le cas.

Le trapèze est constitué :

- d'un rectangle  $BHDC$ , d'aire  $\ell \times L = 3 \times 2 = 6$  ;
- d'un triangle  $AHD$ , d'aire  $\frac{B \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ .

Donc l'aire du trapèze est  $6 + 2 = 8$ .

**Remarque :** On peut aussi utiliser la formule (hors-programme) :

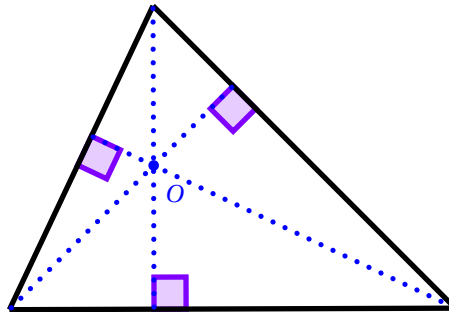
$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(5 + 3) \times 2}{2} = 8.$$

**Exercice 4** Le losange est « la moitié » d'un rectangle de côtés  $\ell$  et  $L$ , donc son aire est  $\frac{\ell \times L}{2}$ .

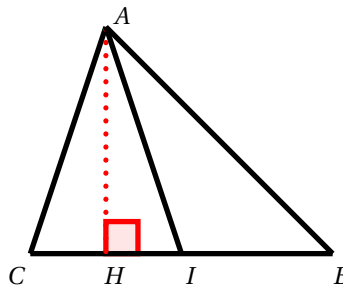


**Exercice 5 Rappels :**

- une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (les hauteurs sont tracées en pointillés bleus) ;
- le fait que les hauteurs soient « concourantes » signifie qu'elles passent toutes les trois par un même point – qu'on appelle « orthocentre du triangle » (nommé  $O$  sur la figure ci-dessous).



**Exercice 6** On note  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .



$[AH]$  est une hauteur dans les triangles  $BIA$  et  $CIA$ , donc

$$\mathcal{A}_{BIA} = \frac{BI \times AH}{2}$$

$$\mathcal{A}_{CIA} = \frac{CI \times AH}{2}.$$

Or  $BI = CI$  puisque  $I$  est le milieu de  $[BC]$ , donc  $BIA$  et  $CIA$  ont la même aire.

**Exercice 7** La méthode la plus simple pour écrire la négation d'une affirmation est d'utiliser des « ne pas », comme vous avez appris à le faire à l'école primaire. Par exemple, la négation de



Elle est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : 10 est multiple de 5, mais il ne se termine pas par 5.

## 2. L'implication

Si un nombre se termine par 0, alors il est multiple de 10.

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_B$

et sa réciproque

Si un nombre est multiple de 10, alors il se termine par 0.

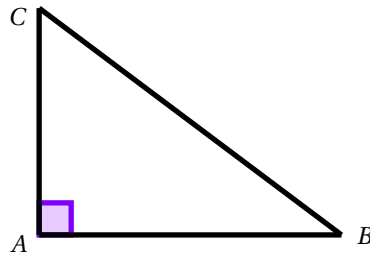
$\underbrace{\hspace{10em}}_B$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

sont vraies toutes les deux.

**Exercice 9** Soit  $ABC$  un triangle

### 1. Théorème de Pythagore.

Si  $ABC$  est rectangle en  $A$ , alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .



### 2. Théorème contraposé de Pythagore.

Si  $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ , alors  $ABC$  n'est pas rectangle en  $A$ .

### 3. Théorème réciproque de Pythagore.

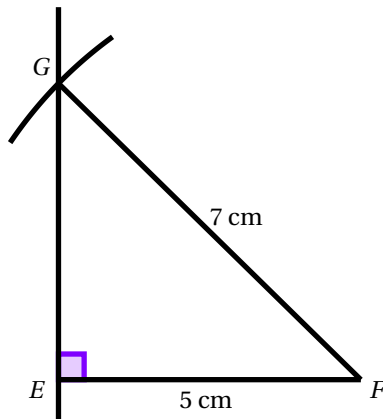
Si  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , alors  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

Le théorème réciproque est bien sûr vrai, comme vous l'avez appris au collège.

⚠ En devoir, le correcteur sera très attentif au nom du théorème utilisé dans les démonstrations : théorème, théorème contraposé ou théorème réciproque – il ne faudra pas confondre !

**Exercice 10** 1. Pour construire la figure, on trace successivement :

- Le segment  $[EF]$ .
- La perpendiculaire à  $[EF]$  passant par  $E$ .
- Un arc de cercle de centre  $F$ , de rayon 7 cm. Il coupe la perpendiculaire que nous venons de tracer en  $G$ .



D'après le **théorème de Pythagore** dans  $EFG$  rectangle en  $E$  :

$$\begin{aligned}
 FG^2 &= EF^2 + EG^2 \\
 7^2 &= 5^2 + EG^2 \\
 49 &= 25 + EG^2 \\
 49 - 25 &= EG^2 \\
 \sqrt{24} &= EG
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $EG = \sqrt{24}$  cm.

⚠ Sauf si l'énoncé le demande, ne donnez pas de valeur approchée.

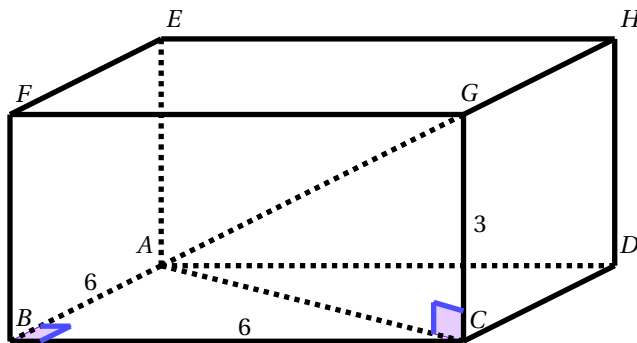
2. Le plus grand côté est  $[BC]$ , donc le triangle ne pourrait être rectangle qu'en  $A$ .

On calcule :

$$\left. \begin{array}{l} BC^2 = 6^2 = 36 \\ AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \end{array} \right\} BC^2 \neq AB^2 + AC^2.$$

D'après la **contraposée du théorème de Pythagore**,  $ABC$  n'est pas rectangle en  $A$ .

**Exercice 11**  $ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle tel que  $AB = BC = 6$  et  $CG = 3$ .



On utilise deux fois de suite le théorème de Pythagore :

Dans  $ABC$  rectangle en  $B$ ,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= 6^2 + 6^2 \\ AC^2 &= 36 + 36 \\ AC^2 &= 72 \\ &\text{(Inutile de donner } AC \text{ !)} \end{aligned}$$

Dans  $ACG$  rectangle en  $C$ ,

$$\begin{aligned} AG^2 &= AC^2 + CG^2 \\ AG^2 &= 72 + 3^2 \\ AG^2 &= 72 + 9 \\ AG^2 &= 81 \\ AG &= \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

Conclusion :  $AG = 9$ .

**Exercice 12** Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), le segment  $[MK]$  mesure 3 cm, le segment  $[MN]$  mesure 5 cm et  $h = 1,2$  cm.



1.  $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{MN \times h}{2} = \frac{5 \times 1,2}{2} = 3 \text{ cm}^2$ .

2. On a aussi  $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{PN \times MK}{2}$ , donc  $3 = \frac{PN \times 3}{2}$ , soit  $3 \times 2 = PN \times 3$ ; et donc  $PN = 2$  cm.

3. (Non détaillé.) Il faut calculer successivement  $KN$ , puis  $KP$  et  $MP$ .

△ On ne sait pas, à ce stade, que  $P$  est le milieu de  $[KN]$ .

- Pour  $KN$ , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle  $KMN$ . On obtient  $KN = 4$  cm.
- $KP = KN - PN = 4 - 2 = 2$  cm.
- Enfin, pour calculer  $MP$ , on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle  $KMP$ . On obtient  $MP = \sqrt{13}$  cm.

**Exercice 13** 1. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent  $a$  et  $b$ , l'hypoténuse mesure  $c$ .



D'après le théorème de Pythagore,  $c^2 = a^2 + b^2$ , donc

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

## 2. L'affirmation

Pour tous nombres positifs  $a$  et  $b$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ .

est FAUSSE! Voici deux justifications :

- **Par le calcul.** Il suffit de donner un contre-exemple : on choisit  $a = 4$  et  $b = 3$ . Dans ce cas

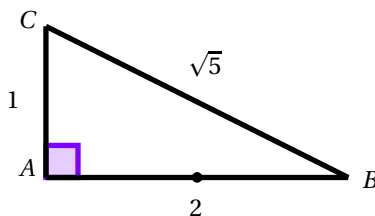
$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{est différent de} \quad a + b = 4 + 3 = 7.$$

- **Géométriquement.**  $\sqrt{a^2 + b^2}$  est la longueur de l'hypoténuse  $c$  du triangle rectangle de la question 1 ; tandis que  $a + b$  est la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Or cette somme est strictement plus grande que celle de l'hypoténuse, puisque le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite.

**Exercice 14** 1. L'égalité  $1^2 + 2^2 = 5$  peut encore s'écrire

$$1^2 + 2^2 = \sqrt{5}^2.$$

Donc d'après le théorème réciproque de Pythagore, un triangle de côtés  $AB = 2$ ,  $AC = 1$  et  $BC = \sqrt{5}$  est rectangle en  $A$ .



## 2. On propose deux méthodes :

- (a) **Méthode géométrique.** L'hypoténuse  $[BC]$  du triangle construit dans la question 1 est strictement plus grande que le côté de l'angle droit  $[AB]$ , donc  $2 < \sqrt{5}$ .

Par ailleurs, la distance la plus courte de  $B$  à  $C$  est la ligne droite, donc le chemin qui part de  $B$  et passe par  $A$  avant d'arriver à  $C$  a une longueur strictement plus grande que celle du segment  $[BC]$ . Autrement dit,  $\sqrt{5} < 2 + 1$  ; c'est-à-dire  $\sqrt{5} < 3$ .

Conclusion :

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

- (b) **Méthode par le calcul.** On compare les carrés :

$$2^2 = 4, \quad \sqrt{5}^2 = 5 \quad \text{et} \quad 3^2 = 9.$$

Or  $4 < 5 < 9$ , donc

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

3. On calcule en posant les multiplications :

$$2,0^2 = 4$$

$$2,1^2 = 4,41$$

$$2,2^2 = 4,84$$

$$2,3^2 = 5,29.$$

Or  $4,84 < 5 < 5,29$ , donc

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3.$$

**Remarques :**

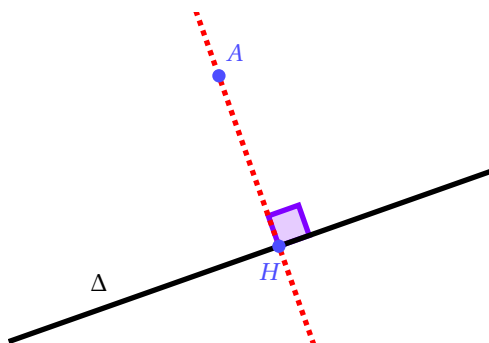
- L'écart entre 2,2 et 2,3 est bien égal à 0,1.
- On devait continuer les calculs jusqu'à dépasser 5 – donc on aurait pu avoir besoin de calculer  $2,4^2$ ,  $2,5^2$ , etc. On était sûr cependant de ne pas dépasser 3,0.
- Rappel pour poser une multiplication avec un exemple :

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times 2.3 \\ \hline 6\ 9 \\ 4\ 6 \\ \hline 5.2\ 9 \end{array}$$

Rappelons que comme les facteurs 2,3 et 2,3 ont chacun 1 chiffre après la virgule, le résultat final en a  $1 + 1 = 2$ .

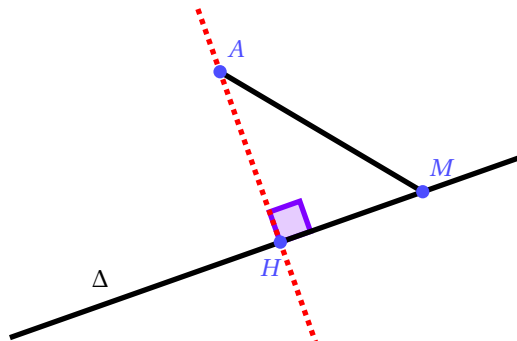
**Exercice 15** Soit  $A$  un point et  $\Delta$  une droite du plan. Le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\Delta$  est le point  $H$  de  $\Delta$  tel que  $(AH) \perp \Delta$ .

1. On trace la perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $A$ . Elle coupe  $\Delta$  en  $H$ .



2. Par construction, le triangle  $AMH$  est rectangle en  $H$ , donc son hypoténuse  $AM$  est strictement plus grande que le côté de l'angle droit  $AH$  (c'est le même raisonnement que celui de l'exercice précédent) :

$$AM > AH.$$



3. Le segment  $[AH]$  est la hauteur<sup>2</sup> issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .

2. Le mot *hauteur* est polysémique (il a plusieurs sens) : le segment  $[AH]$  peut être appelé *hauteur*, la droite  $(AH)$  peut également être appelée *hauteur*; enfin la longueur  $AH$  peut elle aussi être appelée *hauteur* – c'est cette longueur, par exemple, que l'on retrouve dans la formule  $\frac{B \times h}{2}$  pour l'aire du triangle.





**Exercice 16** On résout les équations :

$x + 7 = 18$ $x + \cancel{7} - \cancel{7} = 18 - 7$ $x = 11$	$3x + 4 = 19$ $3x + \cancel{4} - \cancel{4} = 19 - 4$ $3x = 15$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$ $x = 5$	$3,5x - 9 = 5$ $3,5x - \cancel{9} + \cancel{9} = 5 + 9$ $3,5x = 14$ $\frac{\cancel{3,5}x}{\cancel{3,5}} = \frac{14}{3,5}$ $x = \frac{14}{3,5}$ <p>Or <math>\frac{14}{3,5} = \frac{14 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{28}{7} = 4</math>, donc la solution est <math>x = 4</math>.</p>	$x + 1 = -2x - 5$ $x + 1 + \cancel{2x} = \cancel{-2x} - 5 + \cancel{2x}$ $3x + 1 = -5$ $3x + \cancel{1} - \cancel{1} = -5 - 1$ $3x = -6$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{-6}{3}$ $x = -2$	$-2x + 4 = 3x - 6$ $-2x + 4 - \cancel{3x} = \cancel{3x} - 6 - \cancel{3x}$ $-5x + 4 = -6$ $-5x + \cancel{4} - \cancel{4} = -6 - 4$ $-5x = -10$ $\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{-10}{-5}$ $x = 2$
La solution est $x = 11$	La solution est $x = 5$ .	4.	La solution est $x = -2$ .	La solution est $x = 2$ .

**Exercice 17** Les deux plateaux de la balance ci-dessous sont en équilibre. Les poids noirs ont tous la même masse  $M$  kg.



Le fait que la balance soit en équilibre se traduit par l'équation

$$3M + 7 = 10 + M.$$

On la résout :

$$3M + 7 - \cancel{M} = 10 + \cancel{M} - \cancel{M}$$

$$2M + 7 = 10$$

$$2M + \cancel{7} - \cancel{7} = 10 - 7$$

$$2M = 3$$

$$\frac{\cancel{2}M}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$M = 1,5$$

Conclusion : la solution est  $M = 1,5$ .

**Exercice 18** Le stade des Gones compte 15 000 places. Il y a  $x$  places dans les virages et les autres dans les tribunes. Une place en virage coûte 15 € et une place dans les tribunes coûte 25 €.

Aujourd'hui, le stade est plein et la recette est de 295 000 €.

1. Il y a  $x$  places dans les virages, donc  $(15\,000 - x)$  places dans les tribunes. La recette totale en € est donc

$$15 \times x + 25 \times (15\,000 - x).$$

Comme cette recette est 295 000 €,  $x$  est solution de l'équation

$$15x + 25(15\,000 - x) = 295\,000.$$

2. On résout l'équation de la question précédente :

$$\begin{aligned} 15x + 25(15\,000 - x) &= 295\,000 \\ 15x + 25 \times 15\,000 + 25 \times (-x) &= 295\,000 \\ 15x + 375\,000 - 25x &= 295\,000 \\ -10x + 375\,000 &= 295\,000 \\ -10x + \cancel{375\,000} - \cancel{375\,000} &= 295\,000 - \cancel{375\,000} \\ -10x &= -80\,000 \\ \frac{-10x}{-10} &= \frac{-80\,000}{-10} \\ x &= 8\,000. \end{aligned}$$

Conclusion : il y a  $x = 8\,000$  places dans les virages (et donc 7 000 dans les tribunes).

### Exercice 19

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\ B &= \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12} \\ C &= 2 + \frac{1}{5} = \frac{2}{1} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \\ D &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{10 \times 6} = \frac{15}{60} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{15} \times 4} = \frac{1}{4} \\ E &= 2 \times \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{10 \times 3}{6 \times 3} - \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{30}{18} - \frac{8}{18} = \frac{30-8}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11 \times \cancel{2}}{9 \times \cancel{2}} = \frac{11}{9} \\ F &= 4 - 3 \times \frac{5}{6} = \frac{4}{1} - \frac{3 \times 5}{6} = \frac{4 \times 6}{1 \times 6} - \frac{15}{6} = \frac{24}{6} - \frac{15}{6} = \frac{24-15}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3}} = \frac{3}{2} \\ G &= \frac{6}{10} \times \frac{15}{8} = \frac{6 \times 15}{10 \times 8} = \frac{90}{80} = \frac{9 \times \cancel{10}}{8 \times \cancel{10}} = \frac{9}{8} \\ H &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

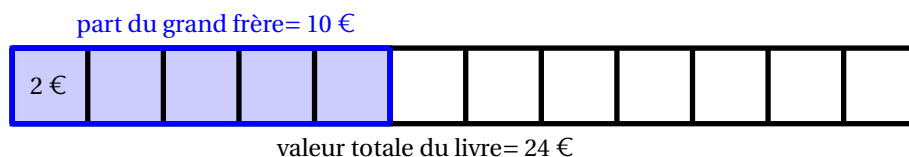
**Exercice 20** Le père donne le tiers de la somme nécessaire et le petit-frère donne le quart, donc à eux deux ils en donnent

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi il reste  $\frac{5}{12}$  du prix à payer à la charge du grand-frère. Or on sait que le grand frère a donné 10 €, donc le prix du livre (soit  $\frac{12}{12}$  du prix) est égal à

$$\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12 \times 10}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ €}.$$

**Remarque :** Il peut être agréable de présenter les choses avec le schéma ci-dessous : chaque petite tranche représente  $\frac{1}{12}$  du prix du livre et vaut 2 €. Ainsi, les  $\frac{5}{12}$  du prix payé (c'est-à-dire le prix payé par le grand-frère) valent  $5 \times 2 = 10$  € ; et la valeur totale du livre est  $12 \times 2 = 24$  €.



## Exercice 21

$$A = \frac{2^{15} \times 3^6}{2^{12} \times 3^4} = \frac{2^{15}}{2^{12}} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{15-12} \times 3^{6-4} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

$$B = \frac{5^3 \times 5^6}{5^7} = \frac{5^{3+6}}{5^7} = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$$

$$C = \frac{2^{18}}{8 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^3 \times 2^{12}} = \frac{2^{18}}{2^{3+12}} = \frac{2^{18}}{2^{15}} = 2^{18-15} = 2^3 = 8$$

$$D = \frac{6^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{(2 \times 3)^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{2^5 \times 3^4} = \frac{2^6}{2^5} \times \frac{3^6}{3^4} = 2^{6-5} \times 3^{6-4} = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$E = \frac{(10^4)^3}{10^8} = \frac{10^{4 \times 3}}{10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^{12-8} = 10^4 = 10\,000$$

$$F = \frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{2 \times 5}}{2^{3 \times 3}} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2^{10-9} = 2$$

$$G = \frac{10^{10} + 10^8}{10^7} = \frac{10^{10}}{10^7} + \frac{10^8}{10^7} = 10^{10-7} + 10^{8-7} = 10^3 + 10^1 = 1\,000 + 1 = 1\,001$$

**Exercice 22** Pour ranger les nombres par ordre croissant, on les écrit sous forme décimale, en écrivant à chaque fois quatre chiffres après la virgule pour simplifier les comparaisons.

On rappelle avant cela que  $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \underbrace{0,00}_3 1$ , donc multiplier un nombre par  $10^{-3}$  revient à décaler la virgule de 3 rangs vers la gauche (le raisonnement est le même pour  $10^{-2}$ ).

$$A = 35,4 \times 10^{-3} = 0,0354$$

$$B = 0,034 = 0,0340$$

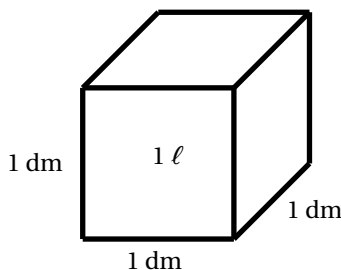
$$C = 3,6 \times 10^{-2} = 0,036 = 0,0360$$

$$D = \frac{355}{10^4} = \frac{355}{10\,000} = 0,0355$$

$$E = \frac{7}{60} \times \frac{3}{10} = \frac{7 \times 3}{60 \times 10} = \frac{7 \times \cancel{3}}{20 \times \cancel{3} \times 10} = \frac{7}{200} = 0,0350$$

Conclusion :  $B < E < A < D < C$ .

**Exercice 23** Avant de commencer, il est utile de se rappeler que  $10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}$ ; et que  $1 \ell = 1 \text{ dm}^3$ . Autrement dit, un litre est le volume d'un cube qui mesure  $1 \text{ dm}$  sur  $1 \text{ dm}$  sur  $1 \text{ dm}$ , ou encore  $10 \text{ cm}$  sur  $10 \text{ cm}$  sur  $10 \text{ cm}$  (la figure ci-dessous n'est bien sûr pas à l'échelle).



On remplit d'eau un aquarium rectangulaire dont la largeur est  $80 \text{ cm}$ , la profondeur  $30 \text{ cm}$  et la hauteur  $40 \text{ cm}$ . On dispose d'un robinet dont le débit est de  $6 \text{ litres par minute}$ .

1. Les dimensions de l'aquarium sont :

largeur =  $8 \text{ dm}$ ,      profondeur =  $3 \text{ dm}$ ,      hauteur =  $4 \text{ dm}$ ,

donc son volume est

$$8 \times 3 \times 4 = 96 \ell.$$



2. On peut se passer d'un tableau de proportionnalité : le débit du robinet est de  $6 \ell/\text{min}$ , donc il faut  $96 \div 6 = 16 \text{ min}$  pour remplir les  $96 \ell$  de l'aquarium.

**Exercice 24** On utilise les identités remarquables pour calculer :

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801 \quad (\text{IR n}^\circ 2)$$

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609 \quad (\text{IR n}^\circ 1)$$

$$71 \times 69 = (70 + 1)(70 - 1) = 70^2 - 1^2 = 4900 - 1 = 4899 \quad (\text{IR n}^\circ 3)$$

$$2,05^2 = (2 + 0,05)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 0,05 + 0,05^2 = 4 + 0,2 + 0,0025 = 4,2025 \quad (\text{IR n}^\circ 1)$$

$$4,3 \times 3,7 = (4 + 0,3)(4 - 0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91 \quad (\text{IR n}^\circ 3)$$

**Remarque :** Comment calculer  $0,05^2$  de tête? Comme  $0,05^2 = 0,05 \times 0,05$  et que  $0,05$  a deux chiffres après la virgule,  $0,05^2$  en aura  $2 + 2 = 4$ . Il ne reste alors plus qu'à calculer  $5^2 = 25$  pour pouvoir conclure :  $0,05^2 = 0,0025$ .

Attention cependant à cette méthode : les derniers chiffres du résultat peuvent être des 0, comme dans l'exemple suivant :

$$0,05 \times 0,0006 = 0,000030,$$

puisque  $6 \times 5 = 30$  et que le résultat doit avoir  $2 + 4 = 6$  chiffres après la virgule (le dernier, ici, étant un 0).

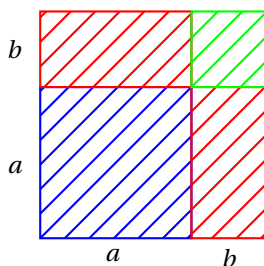
**Exercice 25** Le côté du grand carré mesure  $a + b$ , donc son aire est  $(a + b)^2$ .

D'un autre côté, le grand carré peut être découpé en quatre parties : un carré de côté  $a$ , donc d'aire  $a^2$  (hachuré en bleu), un carré de côté  $b$ , donc d'aire  $b^2$  (hachuré en vert) et deux rectangles de côtés  $a$  et  $b$ , donc d'aires  $a \times b$  (hachurés en rouge). Ainsi l'aire du grand carré est-elle aussi égale à

$$a^2 + b^2 + 2 \times a \times b.$$

En comparant avec la première méthode de calcul de l'aire, on obtient la relation attendue :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



**Exercice 26** 1. Pour comparer les fractions  $a = \frac{4}{5}$  et  $b = \frac{5}{6}$ , on les réduit au même dénominateur :

$$a = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30} \quad , \quad b = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}.$$

Comme  $24 < 25$ , on obtient  $a < b$ .

2. On compare à présent  $c = \frac{524}{525}$  et  $d = \frac{525}{526}$ . On réduit là aussi au même dénominateur, mais on n'effectue aucun calcul (comme nous allons le voir, ce n'est pas nécessaire) :

$$c = \frac{524 \times 526}{525 \times 526} \quad , \quad d = \frac{525 \times 525}{526 \times 525}.$$

Les dénominateurs sont identiques, donc il suffit de comparer les numérateurs. D'après l'identité remarquable n°3,

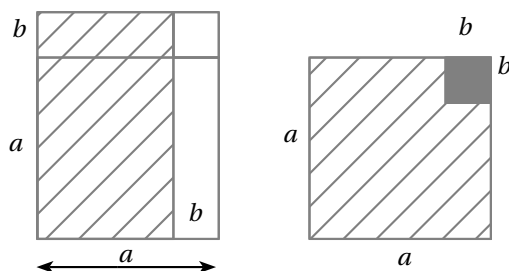
$$524 \times 526 = (525 - 1)(525 + 1) = 525^2 - 1^2 = 525^2 - 1.$$

Ce nombre est strictement inférieur à  $525 \times 525 = 525^2$ , donc  $c < d$ .

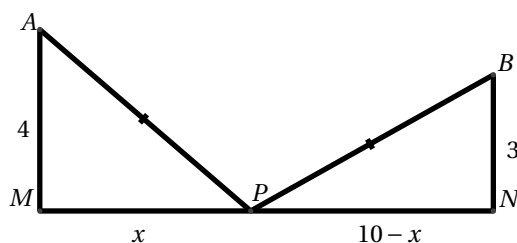
**Exercice 27** La partie hachurée de la figure de gauche est un rectangle de côtés  $(a - b)$  et  $(a + b)$ , donc son aire est égale à  $(a - b)(a + b)$ .

Quant à la partie hachurée de la figure de droite, c'est un carré de côté  $a$  duquel on a retiré un carré de côté  $b$ . Son aire est donc égale à  $a^2 - b^2$ .

L'identité remarquable n°3 nous dit que  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ , donc les aires des deux zones hachurées sont les mêmes.



### Exercice 28



On pose  $MP = x$ , on a donc  $PN = MN - MP = 10 - x$ .

D'après le théorème de Pythagore dans chacun des deux triangles rectangles  $AMP$  et  $BNP$  :

$$AP^2 = MP^2 + MA^2$$

$$AP^2 = x^2 + 4^2$$

$$AP^2 = x^2 + 16$$

$$BP^2 = PN^2 + BN^2$$

$$BP^2 = (10 - x)^2 + 3^2$$

$$BP^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times x + x^2 + 9 \quad (\text{on développe grâce à l'IR n°2})$$

$$BP^2 = 100 - 20x + x^2 + 9$$

$$BP^2 = x^2 - 20x + 109$$

On sait que  $AP = BP$ , donc  $AP^2 = BP^2$  ; et d'après les deux calculs ci-dessus :

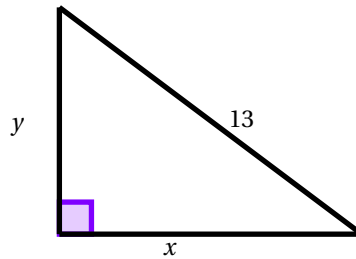
$$x^2 + 16 = x^2 - 20x + 109.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned}
 16 &= -20x + 109 \\
 16 - 109 &= -20x + 109 - 109 \\
 \frac{-93}{-20} &= \frac{-20x}{-20} \\
 4,65 &= x
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $MP = 4,65$ .

### Exercice 29



1. D'après le théorème de Pythagore,

$$x^2 + y^2 = 13^2 = 169.$$

D'après l'IR n°1,  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ . Or  $x^2 + y^2 = 169$ , et  $\frac{x \times y}{2} = 30$ , puisque c'est l'aire du triangle. On en déduit  $x \times y = 30 \times 2 = 60$ , puis

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 169 + 2 \times 60 = 169 + 120 = 289.$$

Finalement, comme  $(x + y)^2 = 289$ ,

$$x + y = \sqrt{289} = 17.$$

2. On utilise cette fois l'IR n°2 :

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 169 - 2 \times 60 = 169 - 120 = 49.$$

Or  $x - y \geq 0$ , puisque  $x$  est plus grand que  $y$ , donc

$$x - y = \sqrt{49} = 7.$$

△ Si on ne savait pas lequel des deux côtés est le plus grand, on pourrait avoir  $x - y = -7$  !!!

On sait à présent que  $x + y = 17$  et  $x - y = 7$ . On ajoute membre à membre ces égalités et on en déduit  $x$  :

$$\begin{aligned}
 (x + y) + (x - y) &= 17 + 7 \\
 x + \cancel{y} + x - \cancel{y} &= 24 \\
 \frac{2x}{2} &= \frac{24}{2} \\
 x &= 12
 \end{aligned}$$

Enfin, comme  $x + y = 17$ , on trouve  $y = 17 - x = 17 - 12 = 5$ .

Conclusion :  $x = 12$ ,  $y = 5$ .

## 2 Nombres réels

**Exercice 30** 1.  $-7 \in \mathbb{Q}$ . **VRAI**.

Justification :  $-7 = \frac{-7}{1}$ , donc  $-7 \in \mathbb{Q}$  (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

2.  $-7 \in \mathbb{N}$ . **FAUX**.

Justification :  $-7$  est strictement négatif, donc ce n'est pas un entier naturel.

3.  $-\frac{13}{4} \in \mathbb{Z}$ . **FAUX.**

Justification :  $-\frac{13}{4} = -3,25$  a des chiffres après la virgule, donc il n'est pas entier.

**Remarque :** Pour obtenir  $\frac{13}{4} = 3,25$  sans calculatrice, trois possibilités : ① Diviser de tête 13 par 2 deux fois de suite – ②

Poser la division – ③ Remarquer que  $\frac{13}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = 3 + 0,25 = 3,25$ .

4.  $-\frac{13}{4} \in \mathbb{D}$ . **VRAI.**

Justification :  $-\frac{13}{4} = -3,25$  a deux chiffres après la virgule, donc il est décimal.

5.  $5,824 \in \mathbb{D}$ . **VRAI.**

Justification : 5,824 a trois chiffres après la virgule, donc il est décimal

6.  $5,824 \in \mathbb{Q}$ . **VRAI.**

Justification n°1 : 5,824 est décimal (cf question précédente), donc il est rationnel d'après le cours ( $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ ).

Justification n°2 :  $5,824 = \frac{5824}{1000}$ , donc  $5,824 \in \mathbb{Q}$  (il s'écrit comme le quotient de deux entiers).

7.  $\frac{10}{6} \in \mathbb{D}$ . **FAUX.**

Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ -6 & 1,6 \\ \hline 40 & \\ -36 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (4), ça va continuer indéfiniment. Conclusion :  $\frac{10}{6} = 1,666\ldots$  n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

8.  $\frac{17}{11} \in \mathbb{D}$ . **FAUX.**

Justification : On pose la division :

$$\begin{array}{r|l} 17 & 11 \\ -11 & 1,54 \\ \hline 60 & \\ -55 & \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Comme on obtient deux fois le même reste (6), ça va continuer indéfiniment. Conclusion :  $\frac{17}{11} = 1,5454\ldots$  n'est pas décimal, puisqu'il a une infinité de chiffres après la virgule.

### Exercice 31 1.

$$I_1 = [1; 4] \quad I_2 = [5; +\infty[ \quad I_3 = ]-2; 0[$$



2.

$$I_1 = [-1; 1[ \quad I_2 = ]3; +\infty[ \quad I_3 = ]-\infty; -2]$$



- Exercice 32**
1.  $5 \in [2; 6[$
  2.  $-2 \notin ]-2; 1]$
  3.  $\pi \in ]3; 4[$  (on rappelle que  $\pi \approx 3,14$ )

- Exercice 33**
1.  $5 \times |-6| = 5 \times 6 = 30$
  2.  $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
  3.  $|5| - |-5| = 5 - 5 = 0$
  4.  $|-4| \times |2| = 4 \times 2 = 8$
  5.  $|7 - 4| = |3| = 3$
  6.  $|4 - 7| = |-3| = 3$
  7.  $|4 - 3| + |5 - 6| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$
  8.  $|5 - 11| + 2 \times |7 - 8| = |-6| + 2 \times |-1| = 6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
  9.  $|8 - 5| \times |7 - 10| = |3| \times |-3| = 3 \times 3 = 9$
  10.  $|15 - 6| - 4 \times |1 - 4| = |9| - 4 \times |-3| = 9 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$

- Exercice 34**
1. On résout l'équation  $|x - 2| = 3$ .

**Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.**

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.  
Donc dire que

$$|x - 2| = 3$$

revient à dire que

$$x - 2 = 3 \quad \text{ou que} \quad x - 2 = -3$$

Donc

$$\begin{array}{ll} x - \cancel{2} + \cancel{2} = 3 + 2 & \text{ou} \quad x - \cancel{2} + \cancel{2} = -3 + 2 \\ x = 5 & \text{ou} \quad x = -1 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions :  $x = 5$  et  $x = -1$ .

2. On résout l'équation  $|x - 1| = 4$ .

**Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.**

Les nombres dont la valeur absolue vaut 4 sont 4 et -4.  
Donc dire que

$$|x - 1| = 4$$

revient à dire que

$$x - 1 = 4 \quad \text{ou que} \quad x - 1 = -4$$

Donc

$$\begin{array}{ll} x - \cancel{1} + \cancel{1} = 4 + 1 & \text{ou} \quad x - \cancel{1} + \cancel{1} = -4 + 1 \\ x = 5 & \text{ou} \quad x = -3 \end{array}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions :  $x = 5$  et  $x = -3$ .

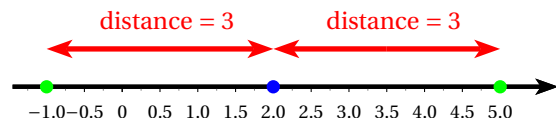
3. On résout l'équation  $|x + 2| = 2$ .

**Méthode n°2 : avec la distance.**

Dire que

$$|x - 2| = 3$$

revient à dire que la distance entre  $x$  et 2 est égale à 3.



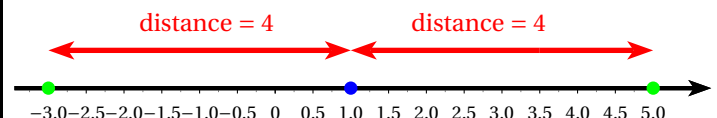
On voit qu'il y a deux solutions :  $x = 5$  et  $x = -1$ .

**Méthode n°2 : avec la distance.**

Dire que

$$|x - 1| = 4$$

revient à dire que la distance entre  $x$  et 1 est égale à 4.



On voit qu'il y a deux solutions :  $x = 5$  et  $x = -3$ .



**Méthode n°1 : avec la définition de la valeur absolue.**

Les nombres dont la valeur absolue vaut 2 sont 2 et -2.

Donc dire que

$$|x + 2| = 2$$

revient à dire que

$$x + 2 = 2 \quad \text{ou que} \quad x + 2 = -2$$

Donc

$$\begin{aligned} x + \cancel{2} - \cancel{2} &= 2 - 2 & \text{ou} & & x + \cancel{2} - \cancel{2} &= -2 - 2 \\ x &= 0 & \text{ou} & & x &= -4 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation a deux solutions :  $x = 0$  et  $x = -4$ .

**Méthode n°2 : avec la distance.**

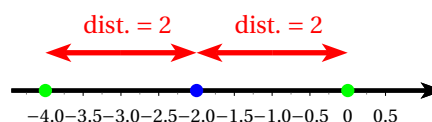
Il y a une vraie difficulté : l'égalité  $|x + 2| = 2$  se réécrit

$$|x - (-2)| = 2$$

(il faut absolument faire apparaître un « - » pour pouvoir interpréter en termes de distance). Donc dire que

$$|x + 2| = 2$$

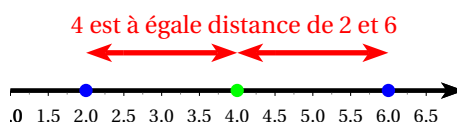
revient à dire que la distance entre  $x$  et  $-2$  est égale à 2.



On voit qu'il y a deux solutions :  $x = 0$  et  $x = -4$ .

4. On résout l'équation  $|x - 2| = |x - 6|$ .

Conformément à l'indication, on travaille avec la distance : dire que  $|x - 2| = |x - 6|$ , c'est dire que la distance entre  $x$  et 2 est la même que la distance entre  $x$  et 6. Autrement dit,  $x$  est à égale distance de 2 et de 6. Il y a un seul nombre  $x$  qui convienne : le milieu de l'intervalle  $[2;6]$ , c'est-à-dire  $x = 4$ .



Conclusion : il y a une seule solution,  $x = 4$ .

**Exercice 35** Commençons par deux exemples :

- si  $x = 3$ , alors  $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ .
- si  $x = -3$ , alors  $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ .

On comprend que quand  $x$  est positif, on aura toujours  $\sqrt{x^2} = x = |x|$  ; tandis que dans le cas où  $x$  est négatif, le signe « disparaît » lorsqu'on élève au carré, ce qui donne finalement  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

Autrement dit, quel que soit  $x$  (y compris si  $x = 0$ ), on a l'égalité

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

**Exercice 36** 1. Dire que  $|x - 2| < 3$ , c'est dire que la distance entre  $x$  et 2 est strictement inférieure à 3. On voit que les  $x$  qui conviennent sont tous les nombres de l'intervalle  $] -1; 5[$  (extrémités exclues, puisque l'inégalité est stricte).



2. Les points de l'intervalle ci-dessous sont les nombres  $x$  dont la distance à 8 est inférieure ou égale à 2 (donc extrémités incluses) ; autrement dit, ce sont les nombres  $x$  tels que

$$|x - 8| \leq 2.$$



**Exercice 37** Le but de l'exercice est de prouver que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel. Pour cela, on fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sous forme de fraction irréductible  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont deux entiers strictement positifs. Il faut, partant de là, aboutir à une absurdité.

1. On part de l'égalité  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , on élève au carré et on multiplie par  $q^2$  :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}^2 &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 \\ 2 &= \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2 \times q^2 &= \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \times \cancel{q^2} \\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

2. Commençons par un exemple : prenons un nombre qui « se termine par 4 » (donc le chiffre des unités est 4). Le carré de ce nombre va « se terminer par 6 », puisque  $4^2 = 16$ . Autrement dit, le chiffre des unités du carré est 6.

Avec la même technique, on voit que si le chiffre des unités est 9, celui du carré est 1 (puisque  $9^2 = 81$ ) ; etc. On remplit ainsi le tableau :

Chiffre des unités de $p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $p^2$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

3. Pour avoir le chiffre des unités de  $2q^2$ , il suffit de reprendre la deuxième ligne du tableau précédent et de multiplier par 2. Par exemple, si le chiffre des unités de  $q$  est 7, alors celui de  $q^2$  est 9 ; et celui de  $2q^2$  est 8 (puisque  $2 \times 9 = 18$ ). On remplit ainsi le nouveau tableau :

Chiffre des unités de $q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

4. D'après la question 1,  $2q^2 = p^2$ . Les nombres  $2q^2$  et  $p^2$  étant égaux, ils ont le même chiffre des unités. Or dans nos deux tableaux, le seul chiffre en commun des deuxièmes lignes est le 0 ; et on l'obtient lorsque le chiffre des unités de  $p$  est 0, et lorsque le chiffre des unités de  $q$  est 0 ou 5.
5. Supposons que  $\sqrt{2}$  soit rationnel : on peut donc l'écrire sous forme de fraction irréductible  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . D'après la question précédente,  $p$  se termine par 0 et  $q$  se termine par 0 ou 5. Mais alors  $p$  et  $q$  sont tous deux multiples de 5, et donc la fraction  $\frac{p}{q}$  n'est pas irréductible, en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite au départ.

Conclusion : supposant que  $\sqrt{2}$  était rationnel, on aboutit à une absurdité ; c'est donc que  $\sqrt{2}$  est irrationnel :  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

### 3 Géométrie repérée

#### Exercice 38 1.



- (a) On a  $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right)$  et  $B\left(\begin{smallmatrix} x_B \\ y_B \end{smallmatrix}\right)$ . On calcule les coordonnées de  $I$  :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) \quad I\left(\frac{5}{2}; \frac{0}{2}\right) \quad I(2,5;0).$$

(b)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

2. (a) On a  $C(-4; 2)$  et  $D(2; -3)$ . On calcule les coordonnées de  $J$  :

$$J\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}\right) \quad J\left(\frac{-4 + 2}{2}; \frac{2 + (-3)}{2}\right) \quad J\left(\frac{-2}{2}; \frac{-1}{2}\right) \quad J(-1; -0,5).$$

(b)

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}.$$

### Exercice 39 1.



2. On calcule les coordonnées de  $M$  :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad M\left(\frac{0 + 7}{2}; \frac{-2 + 5}{2}\right) \quad M\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad M(3,5; 1,5).$$

Puis celles de  $M'$  :

$$M'\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}\right) \quad M'\left(\frac{2 + 5}{2}; \frac{3 + 0}{2}\right) \quad M'\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \quad M'(3,5; 1,5).$$

3. On constate dans la question précédente que  $M = M'$ , les diagonales  $[AB]$  et  $[CD]$  du quadrilatère  $ACBD$  se coupent donc en leur milieu. D'après une propriété du collège, cela entraîne que  $ACBD$  est un parallélogramme, puis que ses côtés opposés sont de même longueur :  $BD = AC$ ,  $CB = AD$ .

4. On calcule les longueurs  $AC$  et  $CB$  :

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$
- $CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(7 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$

On constate que  $AC = CB$ , donc d'après la question précédente :

$$BD = AC = CB = AD.$$

Conclusion : le quadrilatère  $ACBD$  a quatre côtés de même longueur, donc c'est un losange.

### Exercice 40



On calcule la longueur des trois côtés :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 - 4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}.$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

$AB = BC$ , donc  $ABC$  est isocèle en  $B$ . On utilise le théorème réciproque de Pythagore pour prouver qu'il est rectangle :

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array} \right\} AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore,  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

**Exercice 41** 1. •  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}.$

$$\bullet AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}.$$

$$\bullet BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = \sqrt{50}^2 = 50 \\ AC^2 + BC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{10}^2 = 40 + 10 = 50 \end{array} \right\} AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

D'après le théorème réciproque de Pythagore,  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

2. D'après la formule du cours :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = I\left(\frac{6+1}{2}; \frac{0+5}{2}\right) = I(3,5; 2,5).$$

3. Le triangle  $ABC$  étant rectangle en  $C$ , le milieu  $I$  de l'hypoténuse  $[AB]$  est le centre de  $\Gamma$  (rappel de l'énoncé); et le rayon de  $\Gamma$  est

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2} = \sqrt{(6 - 3,5)^2 + (0 - 2,5)^2} = \sqrt{2,5^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{6,25 + 6,25} = \sqrt{12,5}.$$

4. Savoir si  $H(3,5; 6)$  appartient à  $\Gamma$  revient à savoir si la longueur  $IH$  est égale à  $r$  ou non. On calcule cette longueur avec la formule du cours :

$$IH = \sqrt{(x_H - x_I)^2 + (y_H - y_I)^2} = \sqrt{(3,5 - 3,5)^2 + (6 - 2,5)^2} = \sqrt{0^2 + 3,5^2} = \sqrt{0 + 12,25} = \sqrt{12,25}.$$

Comme  $\sqrt{12,25} \neq \sqrt{12,5}$ , le point  $H$  n'appartient pas à  $\Gamma$ .

**N.B.** La figure est trompeuse, puisqu'on a l'impression que  $H$  est sur  $\Gamma$ . En réalité, si vous avez pris 1 cm comme unité graphique, le point  $H$  est à environ trois cheveux (au sens propre) du cercle.



#### Exercice 42



1. • Le milieu du segment  $[AC]$  a pour coordonnées

$$\left( \frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) \quad \left( \frac{0 + 4}{2}; \frac{4 + (-3)}{2} \right) \quad (2; 0,5).$$

- Le milieu du segment  $[BD]$  a pour coordonnées

$$\left( \frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2} \right) \quad \left( \frac{6 + (-2)}{2}; \frac{1 + 0}{2} \right) \quad (2; 0,5).$$

Les diagonales du quadrilatère  $ABCD$  se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme (propriété du collège).

⚠ Si vous donnez un nom aux milieux des diagonales **avant de faire les calculs**, donnez-leur des noms différents : avant de faire les calculs, on n'a pas encore prouvé que les milieux étaient les mêmes.

2. On calcule la longueur des diagonales :

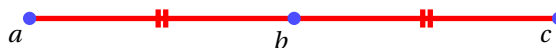
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-3 - 4)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}.$
- $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}.$

Les diagonales du parallélogramme  $ABCD$  sont de même longueur, donc c'est un rectangle (propriété du collège).

**Exercice 43** 1. Le symétrique de 2 par rapport à 5,5 est 9.



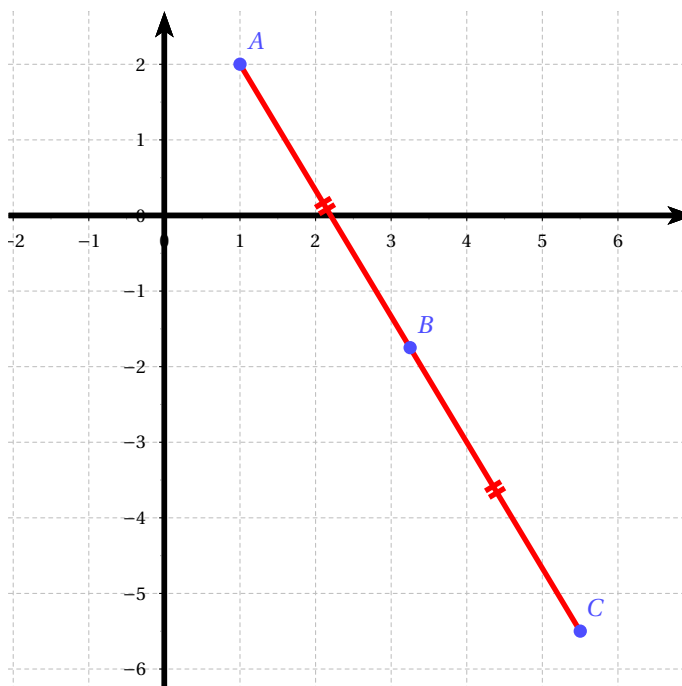
2. On généralise le travail de la question précédente :  $c$  est le symétrique de  $a$  par rapport à  $b$  lorsque  $b$  est le milieu du segment qui va de  $a$  à  $c$ .



Autrement dit  $b = \frac{a+c}{2}$ , ce qui donne  $b \times 2 = \frac{a+c}{2} \times 2$ , soit  $2b = a + c$  ; et donc

$$c = 2b - a.$$

3. On place  $C$ , symétrique du point  $A$  par rapport au point  $B$ .



Par définition d'une symétrie centrale,  $B$  est le milieu du segment  $[AC]$ , donc d'après la formule du cours pour le milieu d'un segment :

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \quad , \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Autrement dit, en remplaçant avec les données de l'énoncé :

$$3,25 = \frac{1 + x_C}{2} \quad , \quad -1,75 = \frac{2 + y_C}{2}.$$

En raisonnant comme dans la question précédente, on obtient

$$x_C = 2 \times 3,25 - 1 = 5,5 \quad , \quad y_C = 2 \times (-1,75) - 2 = -5,5.$$

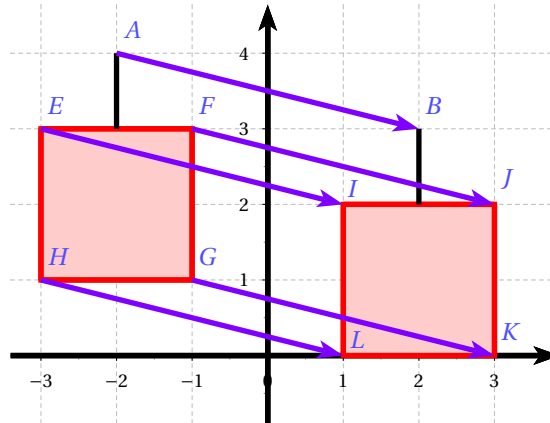
Conclusion :  $C(5,5 ; -5,5)$ .

**Exercice 44** Cet exercice d'introduction à la notion de vecteur appelle quelques commentaires :

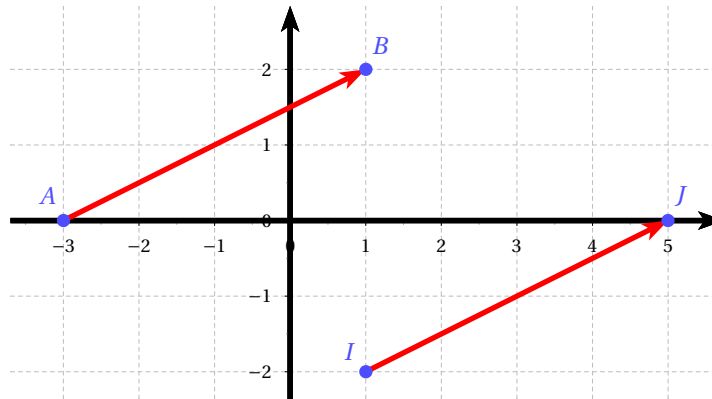
1. La télécabine  $EFGH$  glisse pour aboutir à la position  $IJKL$ . Ce déplacement est appelé « translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  ».
2. Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a été représenté en violet sur la figure, il est égal à chacun des vecteurs  $\overrightarrow{EI}$ ,  $\overrightarrow{FJ}$ ,  $\overrightarrow{GK}$  et  $\overrightarrow{HL}$ . On peut donc écrire

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{HL}.$$

3. Pour aller de  $A$  à  $B$ , on avance de 4 carreaux en abscisse et on descend de 1 carreau en ordonnée; on dit que  $\overrightarrow{AB}$  a pour abscisse 4 et pour ordonnée  $-1$ . On note  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ .



**Exercice 45** 1.



2. On calcule les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. On calcule les coordonnées de  $\overrightarrow{IJ}$  :

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 0 - (-2) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{IJ}$  ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$ .

**Exercice 46** On considère les points  $A(-3; -2)$ ,  $B(5; -2)$ ,  $C(1; 4)$ ,  $D(-1; 1)$ ,  $E(3; 1)$ ,  $F(5; 4)$ .



Il y a trop de possibilités pour que les justifie toutes. Je vais me contenter de donner un couple de vecteurs égaux, avec la justification; puis donner toutes les autres égalités possibles, mais sans les justifier :

1. **Une égalité et sa justification.**

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ . En effet, ces vecteurs ont les mêmes coordonnées :

- $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

2. **Toutes les autres égalités.**

$$\begin{array}{cccccccccccc} \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE} & \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED} & \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE} & \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} & \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FE} & \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF} & \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FD} & \overrightarrow{CE} = \\ \overrightarrow{EB} & \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BE} & & & & & & & & \end{array}$$

⚠ Attention à l'ordre des lettres! Par exemple,  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ , mais  $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{FE}$  (il y a un problème de sens : le vecteur  $\overrightarrow{DC}$  « monte vers le haut et la droite »; tandis que  $\overrightarrow{FE}$  « descend vers le bas et la gauche » – l'erreur se détecte aussi bien sûr en calculant les coordonnées).

**Exercice 47** En physique, un vecteur représente une force, et la longueur (ou norme) du vecteur correspond à l'intensité de la force. L'égalité  $\|\vec{P}_2\| = 2 \|\vec{P}_1\|$  signifie que la masse 2 a un poids deux fois plus important que celui de la masse 1.



**Exercice 48** L'image du triangle  $ABC$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  est le triangle  $DEF$ .





## 4 Études graphiques de fonctions

**Exercice 49** Un voyageur de commerce (= un représentant) fait une note de frais pour chaque jour de travail où il utilise sa voiture. Il reçoit une part fixe de 30 €, et une indemnité de 0,5 €/km.

**Remarque :** On peut penser que l'indemnité kilométrique sert à rembourser les frais de déplacement (par exemple si le représentant utilise sa propre voiture) ; et que la part fixe sert à payer les repas.

1. S'il fait 120 km dans la journée, le montant de la note de frais est de

$$30 + 120 \times 0,5 = 30 + 60 = 90 \text{ €}.$$

2. On note  $x$  le nombre de km parcourus par le voyageur de commerce, et  $f(x)$  le montant de la note de frais. On a alors

$$f(x) = 30 + x \times 0,5 = 0,5x + 30.$$

3. La fonction  $f$  est affine, puisque  $f(x) = 0,5x + 30$  (c'est bien une fonction de la forme  $f(x) = ax + b$ , avec  $a = 0,5$  et  $b = 30$ ). Sa courbe représentative est donc une droite, que l'on trace à partir d'un tableau de valeurs avec deux valeurs ; par exemple :

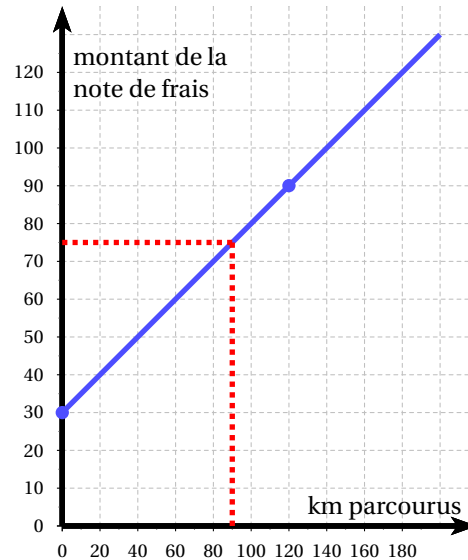
$x$	0	120
$f(x)$	30	90

$$f(0) = 0,5 \times 0 + 30 = 30$$

$$f(120) = 0,5 \times 120 + 30 = 90$$

On place les points de coordonnées (0;30) et (120;90), puis on trace la droite – en réalité un segment, puisqu'on va de 0 à 200 en abscisses.

**Remarque :** On a choisi les valeurs 0 et 120, mais on peut prendre n'importe quelles valeurs – l'avantage de 0, c'est que le calcul est facile ; et l'avantage de 120, c'est qu'on a déjà fait le calcul dans la question 1.



4. Le voyageur de commerce a une note de frais de 75 €. Pour déterminer le nombre de km parcourus dans la journée, il y a deux méthodes :

- **Graphiquement.** On voit qu'il a parcouru 90 km (pointillés rouges) <sup>3</sup>.
- **Par le calcul.** On retire les frais fixes :  $90 - 30 = 60$  € d'indemnité kilométrique. Puis, comme chaque km compte pour 0,5 €, on divise :  $45 \div 0,5 = 45 \times 2 = 90$  km. <sup>4</sup>

**Exercice 50** 1. • Lorsqu'on télécharge 50 Mo, on paye 3 €.

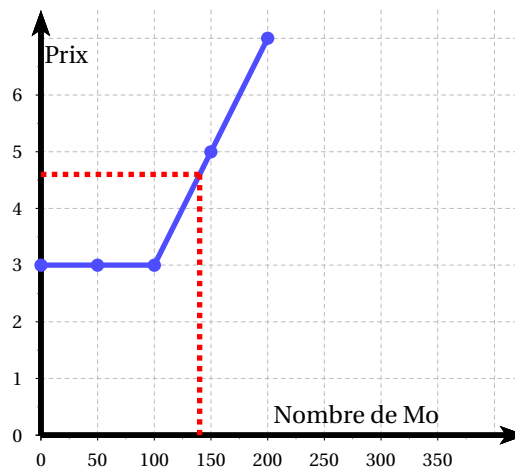
- Lorsqu'on télécharge 150 Mo, les 100 premiers coûtent 3 € ; et les 50 suivants coûtent  $50 \times 0,04 = 2$  €. On paye donc au total  $3 + 2 = 5$  €.

2. On complète le tableau de valeurs :

Nombre de Mo	0	50	100	150	200
Prix à payer	3	3	3	5	7

**Remarque :** jusqu'à 100 Mo, on paye 3 €. Ensuite, chaque nouvelle tranche de 50 Mo est facturée 2 €.

3. On construit la courbe qui donne le prix payé en fonction du nombre de Mo téléchargés. Elle est constante sur l'intervalle  $[0; 100]$ , puis affine sur l'intervalle  $[100; 200]$ . Il faut donc utiliser une règle pour effectuer le tracé <sup>5</sup>.



4. Il y a deux méthodes :

- **Graphiquement.** On voit qu'on a téléchargé 140 Mo (pointillés rouges).
- **Par le calcul.** J'ai payé 4,60 €, donc  $3 + 1,60$  €. J'ai donc téléchargé  $1,60 \div 0,04 = 40$  Mo au-delà du 100<sup>e</sup>. Autrement dit, j'ai téléchargé 140 Mo.

3. La méthode graphique est simple, mais la réponse pourrait être imprécise.

4. On peut aussi résoudre l'équation  $0,5x + 30 = 75$ .

5. On parle de fonction « affine par morceaux ».

**Exercice 51** Les gares de Calais et de Boulogne-sur-Mer sont distantes de 30 km. Un train part à 12 h de Boulogne-sur-Mer en direction de Calais et roule à la vitesse de 40 km/h. Un train part de Calais à 12 h 15 et fait route en sens inverse à la vitesse de 60 km/h.

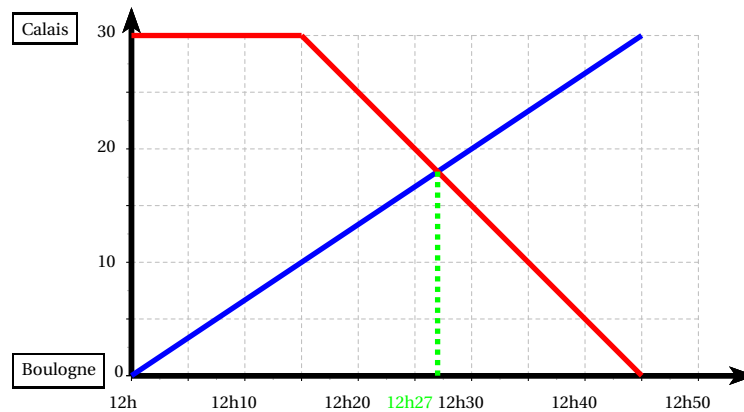
1. Le train qui part à 12 h de Boulogne-sur-Mer roule à la vitesse de 40 km/h, donc il parcourt 40 km en 60 min. Pour savoir quand il arrive à Calais, on complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	40	30

Le train mettra  $\frac{60 \times 30}{40} = \frac{1800}{40} = 45$  min pour arriver à Calais, donc il y sera à 12 h 45.

Pour le train qui part de Calais, le calcul est plus facile : il roule à 60 km/h, donc parcourt 60 km en 60 min ; et ainsi 30 km en 30 min. Comme il part à 12 h 15, il arrive à 12 h 45 lui aussi.

On peut ainsi représenter la marche des deux trains :



2. Nous allons déterminer l'heure de croisement des trains par le calcul. Graphiquement, cela correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes.

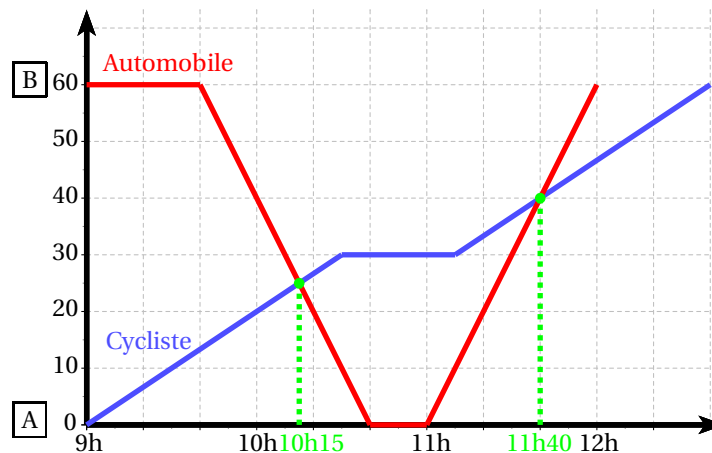
À 12h15, le train qui part de Boulogne-sur-Mer a parcouru 10 km (facile à vérifier), il est donc à 20 km de Calais. C'est l'heure à laquelle le deuxième train part. Comme l'un roule à 40 km/h et l'autre à 60 km/h, tout se passe comme si un seul train devait parcourir 20 km à la vitesse de  $40 + 60 = 100$  km/h. On complète un tableau de proportionnalité :

temps (en min)	60	?
distance (en km)	100	20

$\frac{60 \times 20}{100} = \frac{1200}{100} = 12$ , donc il faudrait 12 min à ce train pour parcourir 20 km. Ainsi, les deux trains se croiseront-ils à

12 h 15 min + 12 min = 12 h 27 min.

**Exercice 52** Je me contenterai du graphique, donc je ne ferai pas les calculs pour avoir les heures exactes des deux rencontres – elles s'obtiennent avec les mêmes techniques que dans l'exercice précédent.



**Exercice 53** Le taux d'anticorps (en g/l) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en mois), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 12 mois, est donné par la formule suivante :

$$f(x) = 0,1x^2 - 1,6x + 12.$$

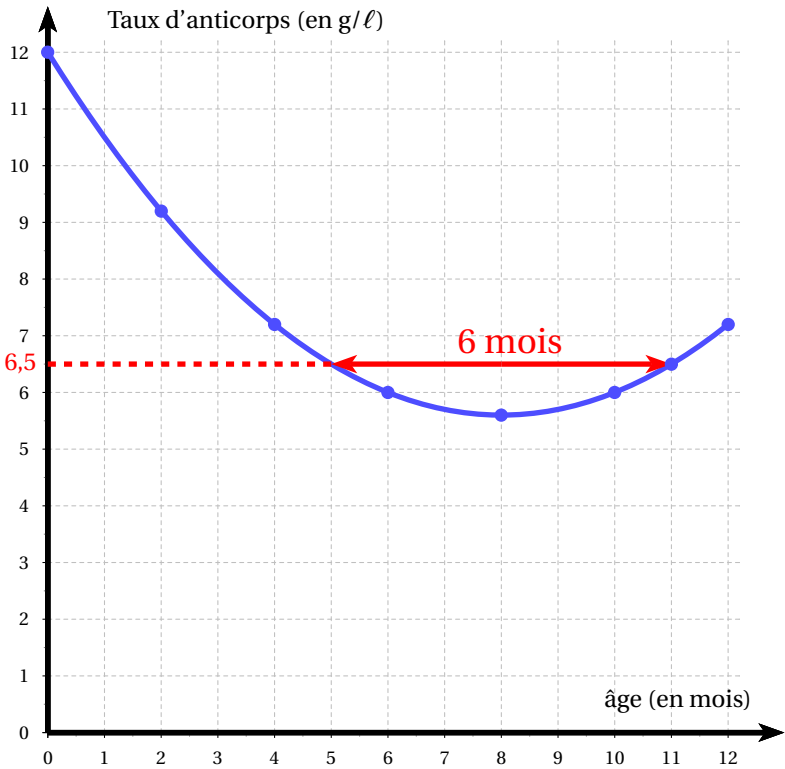
1. On fait un tableau de valeurs pour  $f$  sur  $[0; 12]$  avec un pas de 2 :

$x$	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	12	9,2	7,2	6	5,6	6	7,2

Détail de deux calculs :

- $f(0) = 0,1 \times 0^2 - 1,6 \times 0 + 12 = 12.$
- $f(12) = 0,1 \times 12^2 - 1,6 \times 12 + 12 = 7,2.$

2.



3. Le taux d'anticorps à la naissance est de 12 g/l.

4. Tableau de variations :

$x$	0	8	12
$f(x)$	12	5.6	7.2

Le taux d'anticorps est minimal à l'âge de 8 mois.

5. D'après le graphique, le taux d'anticorps est inférieur à 6,5 g/l pendant 6 mois (du 5<sup>e</sup> au 11<sup>e</sup> mois).

**Exercice 54** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 3]$  par

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

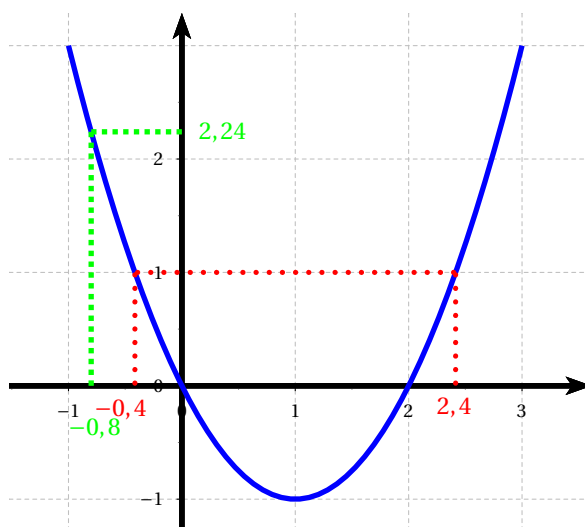
1. On fait un tableau de valeurs pour  $f$  sur  $[-1; 3]$  avec un pas de 0,5 :

$x$	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	3	1,25	0	-0,75	-1	-0,75	0	1,25	3

Détail de deux calculs :

- $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$ .
- $f(0,5) = 0,5^2 - 2 \times 0,5 = 0,25 - 1 = -0,75$ .

2. Courbe représentative de  $f$  :



3. L'image de  $-0,8$  par  $f$  est

$$f(-0,8) = (-0,8)^2 - 2 \times (-0,8) = 0,64 + 1,6 = 2,24.$$

On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat – si on a de bons yeux!

- Les antécédents de 1 par  $f$  sont  $-0,4$  et  $2,4$  environ (voir pointillés rouges).
- Les solutions l'inéquation  $f(x) < 1$  sont tous les nombres dont l'image est strictement inférieure à  $-1$ . Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle  $] -0,4; 2,4[$  environ.
- Tableau de variations de  $f$  :

$x$	-1	1	3
$f(x)$	3	-1	3

7. Tableau de signe de  $f$  :

$x$	-1	0	2	3	
$f(x)$	+	0	-	0	+

**Exercice 55** On considère la fonction  $g$  définie sur  $[1;4]$  par

$$g(x) = x - \frac{6}{x}.$$

1. On fait un tableau de valeurs pour  $f$  sur  $[1;4]$  avec un pas de 0,5 :

$x$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$g(x)$	-5	-2,5	-1	0,1	1	1,79	2,5

Détail de deux calculs :

- $g(2) = 2 - \frac{6}{2} = 2 - 3 = -1$ .
- $g(1,5) = 1,5 - \frac{6}{1,5} = 1,5 - 4 = -2,5$ .

**Remarque :** L'énoncé demande d'arrondir à  $10^{-2}$  près par excès. Cela signifie qu'il faut donner deux chiffres après la virgule et arrondir par valeur supérieure le deuxième chiffre après la virgule. Par exemple  $g(3,5) = 1,7857 \dots \approx 1,79$ .

2. Courbe représentative de  $g$  :



3. L'image de 3,2 par  $g$  est

$$g(3,2) = 3,2 - \frac{6}{3,2} = 3,2 - 1,875 = 1,325.$$

On a tracé des pointillés verts sur le graphique qui confirment ce résultat.

4. L'unique solution de l'équation  $g(x) = -1$  (donc l'unique antécédent de  $-1$  par  $g$ ) est 2 (pointillés rouges).
5. Les solutions l'inéquation  $g(x) \geq -1$  sont tous les nombres dont l'image est supérieure ou égale à  $-1$ . Ces solutions sont tous les nombres de l'intervalle  $[2; 4]$ .
6. Tableau de variations de  $g$  :

$x$	1	4
$g(x)$	-5	2.5

7. Tableau de signe de  $g$  :

$x$	1	$\approx 2.4$	4
$g(x)$	-	0	+

**Exercice 56** 1.  $x$  est une longueur, donc  $x \geq 0$ . Par ailleurs, la longueur  $x$  ne peut pas dépasser 4 (car  $AB = 4$ ).  
Conclusion : on a l'encadrement

$$0 \leq x \leq 4.$$

2. •  $AP = AD - DP = 4 - x$ .

- L'aire du rectangle  $AMNP$  est

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{AMNP} &= AM \times AP \\
 &= x \times (4 - x) && \text{(car } AP = 4 - x) \\
 &= x \times 4 + x \times (-x) && \text{(on développe)} \\
 &= 4x - x^2.
 \end{aligned}$$

3. La fonction  $f$  est définie pour  $0 \leq x \leq 4$  par

$$f(x) = 4x - x^2.$$

Autrement dit,  $f(x)$  donne l'aire du rectangle  $AMNP$  pour une valeur donnée de  $x$ .

(a) Tableau de valeurs :

$x$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	1,75	3	3,75	4	3,75	3	1,75	0

Courbe représentative :

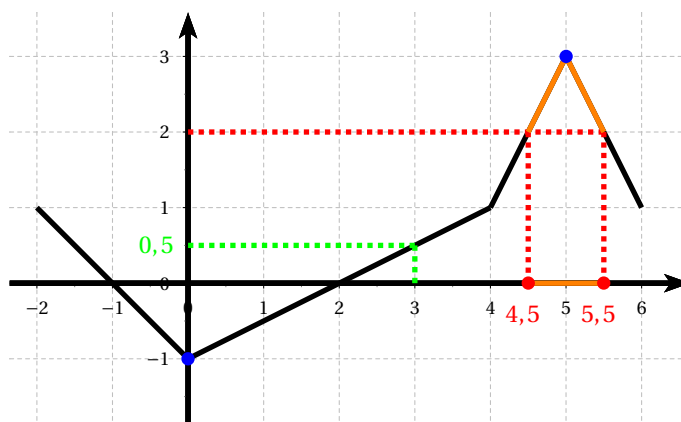


(b) Tableau de variations de  $f$  :

$x$	0	2	4
$f(x)$	0	4	0

(c) La fonction  $f$  atteint son maximum lorsque  $x = 2$ , donc l'aire du rectangle  $AMNP$  est maximale lorsque  $x = 2$ , c'est-à-dire quand  $M$  est le milieu du segment  $[AB]$ .

### Exercice 57



1. L'image de 3 par  $f$  est 0,5 (pointillés verts).
2. Les solutions de l'équation  $f(x) = 2$  sont 4,5 et 5,5 (pointillés rouges).
3. Les solutions de l'inéquation  $f(x) \geq 2$  sont tous les nombres de l'intervalle  $[4,5 ; 5,5]$  : c'est sur cet intervalle que la courbe est au dessus de 2 (parties de la courbe et de l'axe des abscisses repassées en orange).
4. Tableau de variations de  $f$  :

$x$	-2	0	5	6
$f(x)$	1	-1	3	1

5. Le maximum de  $f$  est 3, son minimum est -1 (points bleus).
6. Tableau de signe de  $f$  :

$x$	-2	-1	2	6	
$f(x)$	+	0	-	0	+

**Exercice 58** On dispose d'une clôture de 100 mètres de long pour délimiter un terrain rectangulaire le long d'une rivière (la clôture est en pointillés — on ne met pas de clôture le long de la rivière). On note  $x$  et  $x'$  les longueurs des côtés du terrain.



On voudrait délimiter le terrain le plus grand possible.

1. (a)  $x$  est une longueur, donc  $x \geq 0$ . Par ailleurs, la longueur  $x$  apparaît deux fois sur la figure, donc  $x$  ne peut pas dépasser 50 (car  $2 \times 50 = 100$ ).

Conclusion : on a l'encadrement

$$0 \leq x \leq 50.$$

- (b) Le périmètre, 100 m, s'obtient en faisant le calcul

$$x + x + x',$$

donc

$$2x + x' = 100 ;$$

et donc

$$x' = 100 - 2x.$$

- (c) L'aire du terrain est

$$x \times x' = x \times (100 - 2x)$$

$$= x \times 100 + x \times (-2x)$$

$$= 100x - 2x^2.$$

$$(car \ x' = 100 - 2x)$$

(on développe)



2. On définit à présent la fonction  $f$  sur  $[0;50]$  par

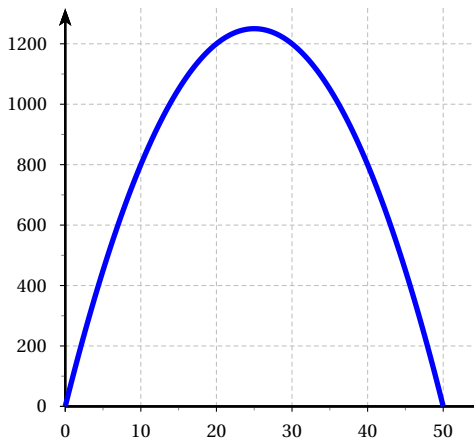
$$f(x) = 100x - 2x^2.$$

Autrement dit,  $f(x)$  donne l'aire du terrain pour une valeur donnée de  $x$ .

(a) Tableau de valeurs :

$x$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	0	450	800	1050	1200	1250	1200	1050	800	450	0

(b) Courbe représentative :



(c)  $f$  atteint son maximum lorsque  $x = 25$ , donc la surface du terrain est maximale lorsque  $x = 25$ . Dans ce cas,  $x' = 100 - 2 \times 25 = 50$ . Autrement dit, le terrain de surface maximale mesure 50 m sur 25 m.

**Exercice 59** On construit la courbe représentative d'une fonction  $f$ , définie sur  $[-2;3]$  et vérifiant les conditions suivantes :

- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-2;1]$  ;
- $f$  est affine sur l'intervalle  $[1;3]$  ;
- $f(-2) = -4$  et  $f(3) = 1$  ;
- les solutions de l'équation  $f(x) = 2$  sont  $-1$  et  $2$ .

Il y a plusieurs étapes :

1. Pour commencer, on utilise l'ensemble de définition : on sait qu'il faut tracer la courbe sur l'intervalle  $[-2;3]$  (zones vertes exclues).
2. Ensuite, on sait que  $f(-2) = -4$  et  $f(3) = 1$ , donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées  $(-2; -4)$  et  $(3; 1)$  (placés en bleu).
3. Les solutions de l'équation  $f(x) = 2$  sont  $-1$  et  $2$ , donc la courbe représentative passe par les points de coordonnées  $(-1; 2)$  et  $(2; 2)$  (placés en rouge). De plus, la courbe représentative ne coupe nulle part ailleurs la droite horizontale qui passe par l'ordonnée 2 (tracée également en rouge, en pointillés).
4. La fonction  $f$  est affine sur  $[1;3]$ , donc sa courbe représentative sur cet intervalle est un segment. On trace l'unique segment passant par les points déjà placés (en orange).
5. Enfin  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-2;1]$ , donc on trace une courbe « qui monte » sur cet intervalle (en noir). Il faut aussi bien sûr qu'elle passe par les points déjà placés.

**Remarque :** Pour cette dernière étape, il y a plusieurs dessins possibles. Sur le graphique j'ai choisi de tracer deux segments par facilité (technique), mais vous pouvez faire une courbe à main levée qui ne soit pas droite.

La courbe finale est tracée en noir et en orange.



**Exercice 60** Les courbes en forme de O, de T et de M ne sont pas les courbes représentatives de fonctions, puisqu'un nombre aurait plusieurs images (pointillés rouges).

En revanche, la lettre V n'a pas ce problème et représente bien la courbe d'une fonction (exemple : la courbe de la fonction définie par  $f(x) = 2|x|$  pour  $x \in [-1; 1]$  est en forme de V).



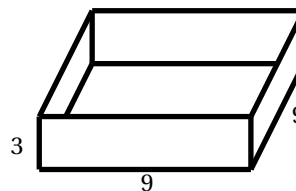
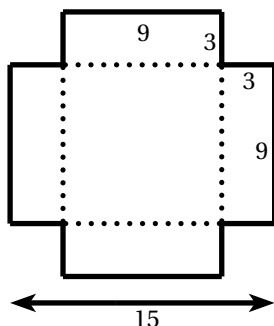
D'une manière générale, on reconnaît une fonction (et la courbe représentative d'une fonction) au fait que tout nombre réel a **au plus une** image (donc 0 ou 1 image).

**Exercice 61** Dans tout l'exercice, les longueurs sont exprimées en cm, les aires en  $\text{cm}^2$  et les volumes en  $\text{cm}^3$ .

1. (a)  $x$  est une longueur, donc  $x \geq 0$ . D'autre part, la longueur  $x$  apparaît deux fois, donc comme la plaque de métal a pour côté 15,  $x$  ne peut dépasser 7,5. Autrement dit :

$x$  est compris entre 0 et 7,5.

- (b) Dans cette question, on prend  $x = 3$ . Il reste alors  $15 - 2 \times 3 = 9$  cm pour le côté du carré central.

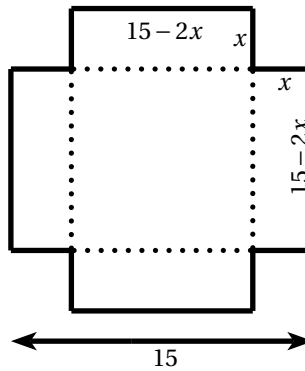


Le volume de la boîte est égal à

$$L \times \ell \times h = 9 \times 9 \times 3 = 243.$$

2. À partir de là, je regroupe la correction des sous-questions.

Le carré du fond a pour côté  $15 - x - x = 15 - 2x$ , et la hauteur de la boîte est  $x$ .



Donc le volume de la boîte est

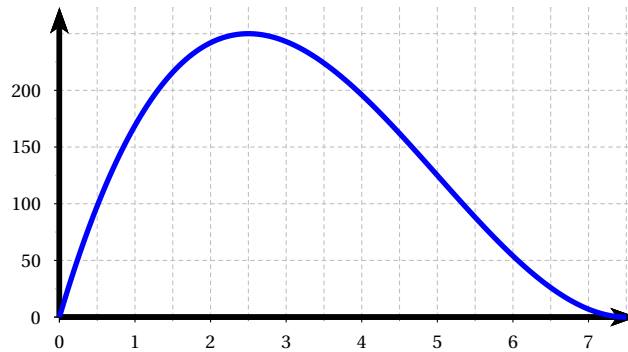
$$L \times \ell \times h = (15 - 2x) \times (15 - 2x) \times x.$$

On développe cette expression :

$$\begin{aligned} V(x) &= (15 - 2x) \times (15 - 2x) \times x \\ &= (15 \times 15 + 15 \times (-2x) + (-2x) \times 15 + (-2x) \times (-2x)) \times x \\ &= (225 - 30x - 30x + 4x^2) \times x \\ &= 225x - 30x^2 - 30x^2 + 4x^3 \\ &= 4x^3 - 60x^2 + 225x. \end{aligned}$$

On fait un tableau de valeurs pour  $V$  sur  $[0; 7,5]$  avec un pas de 0,5, puis on construit sa courbe représentative.

$x$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
$V(x)$	0	98	169	216	242	250	243	224	196	162	125	88	54	26	7	0



Conclusion : d'après le graphique, le volume est maximal lorsque  $x = 2,5$ .