Paskalova teorema

Marija Kostić

Sažetak

Blez Paskal (Blaise Pascal, 1623-1662), veliki francuski matematičar, već je sa 16 godina napisao svoje prvo delo iz geometrije. Njegovo ime nosi više rezultata u matematici, a među njima je i *Paskalova teorema o tetivnom šestouglu* o kojoj će biti reči u ovom radu.

Teorema i dokaz

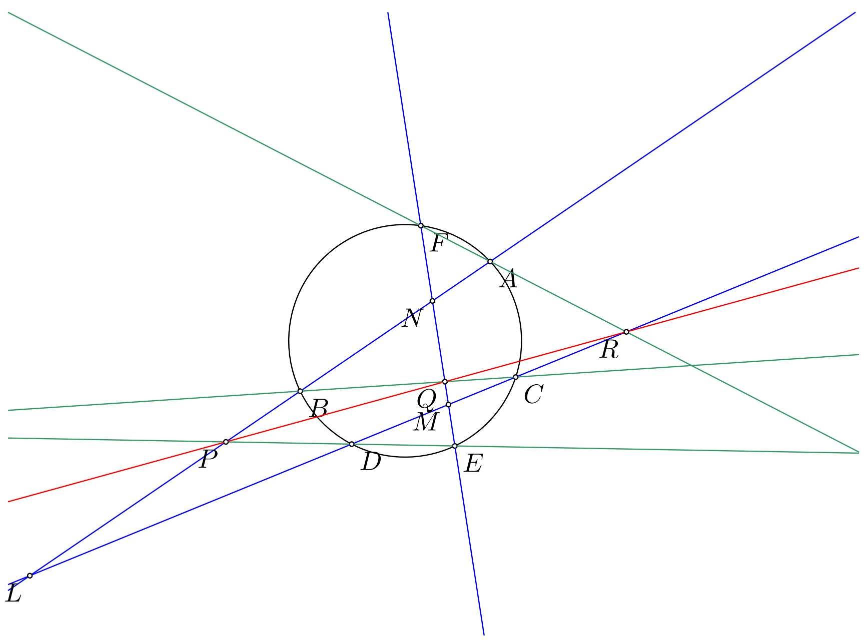
Pre nego što formulišemo Paskalovu teoremu, uvešćemo Menelajevu teoremu koju ćemo koristiti u dokazu Paskalove teoreme.

Teorema 1 (**Menelajeva teorema**). *Neka su P, Q i R tačke pravih određenih ivicama BC, CA i AB trougla ABC. Tačke P, Q i R su kolinearne ako i samo ako je:*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

Teorema 2 (**Paskalova teorema**). *Neka je $ABCDEF$ šestougao upisan u krug k. Prave AB i DE seku se u tački P, prave BC i EF seku se u tački Q i prave CD i FA seku se u tački R. Tada su tačke P, Q i R kolinearne.*

Dokaz. Neka se prave AB i DE seku u tački P, BC i EF u tački Q, a CD i FA u tački R. Neka je $\{L\} = AB \cap CD, \{M\} = CD \cap EF$ i $\{N\} = EF \cap AB$ (Slika 1).



Slika 1: Paskalova teorema

Posmatrajmo $\triangle LMN$ sa slike (1). Tri puta ćemo primeniti Teoremu 1 na posmatrani trougao. Prava ED seče prave NL, LM i MN redom u tačkama P, D i E.Iz Teoreme 1 važi da je:

$$\frac{\overrightarrow{NP}}{\overrightarrow{PL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LD}}{\overrightarrow{DM}} \cdot \frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{EN}} = -1. \tag{1}$$

Prava FA seče prave LM, MN i NL redom u tačkama R, F i A.Iz Teoreme 1 važi da je:

$$\frac{\overrightarrow{LR}}{\overrightarrow{RM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MF}}{\overrightarrow{FN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{AL}} = -1. \tag{2}$$

Prava BC seče prave MN, NL i LM redom u tačkama Q, B i C.Iz Teoreme 1 važi da je:

$$\frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{QN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{BL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{CM}} = -1. \tag{3}$$

Iz jednakosti (1) dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{NP}}{\overrightarrow{PL}} = -\frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{EN}}{\overrightarrow{LD} \cdot \overrightarrow{ME}}. \tag{4}$$

Iz jednakosti (2) dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{LR}}{\overrightarrow{RM}} = -\frac{\overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NA}}. \tag{5}$$

Iz jednakosti (3) dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{QN}} = -\frac{\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{LC}}. \tag{6}$$

Potencije tačaka L, M i N u odnosu na krug k izražavamo jednakostima:

$$NA \cdot NB = NE \cdot NF, LC \cdot LD = LA \cdot LB, ME \cdot MF = MC \cdot MD. \tag{7}$$

Množenjem jednakosti (4), (5) i (6) i korišćenjem jednakosti (7) dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{NP}}{\overrightarrow{PL}} \cdot \frac{\overrightarrow{LR}}{\overrightarrow{RM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{QN}} &= -\frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{LD} \cdot \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{LC}} = -\frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{NF} \cdot \overrightarrow{LA} \cdot \overrightarrow{LB} \cdot \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}} \\ &= -\frac{(-\cancel{\overrightarrow{MD}}) \cdot (-\cancel{\overrightarrow{NE}}) \cdot (-\cancel{\overrightarrow{NF}}) \cdot (-\cancel{\overrightarrow{LA}}) \cdot (-\cancel{\overrightarrow{LB}}) \cdot (-\cancel{\overrightarrow{MC}})}{\cancel{\overrightarrow{NE}} \cdot \cancel{\overrightarrow{NF}} \cdot \cancel{\overrightarrow{LA}} \cdot \cancel{\overrightarrow{LB}} \cdot \cancel{\overrightarrow{MC}} \cdot \cancel{\overrightarrow{MD}}} = -1.\end{aligned}$$

Iz poslednje jednakosti na osnovu obrnutog smera Teoreme 1 zaključujemo da su tačke P, Q i R kolinearne, čime je Teorema 2 dokazana.

$\blacksquare$