Математички факултет

Методика наставе математике и рачунарства

Непрекидност функција

Припрема за школски час

Марија Костић

286/14

mv14286@alas.matf.bg.ac.rs

Уводни део часа

Пре саме обраде наставне јединице навешћемо неке примере непрекидности који нису из математике.На пример :

„Снег је непрекидно падао целу ноћ.“ (то значи да није престајао да пада)

„Непрекидно сам размишљао о филму који сам јуче одгледао.“ итд.

Затим питати ученике да дају неке своје примере које такође треба прихватити ако су одговарајући и указати им на чињеницу да се непрекидне појаве везују за одређени временски период на коме се посматрају(цео дан, целу ноћ итд.).

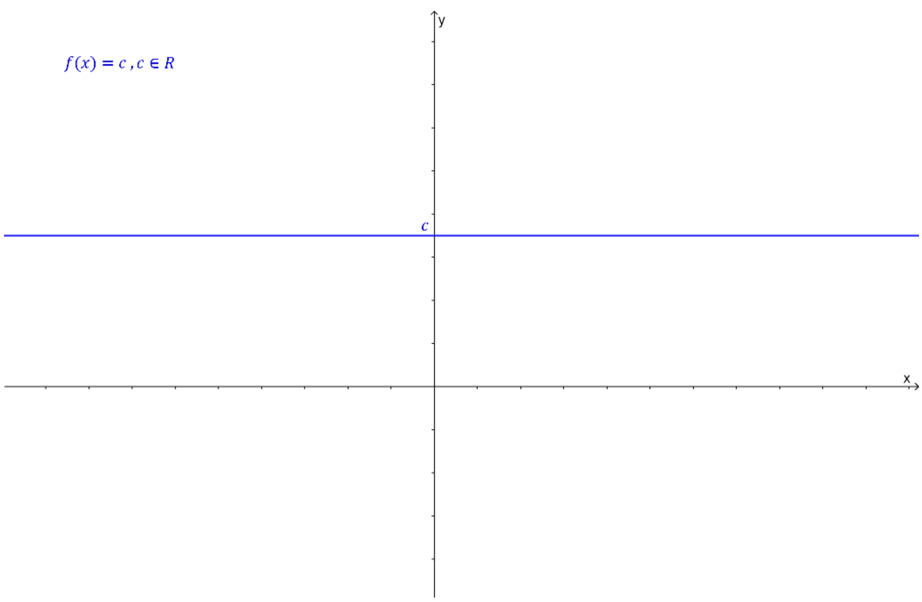
Интуитивна представа непрекидне функције

Сада је потребно повезати овако уведену непрекидност са непрекидности неких функција код којих довољно „мале“ промене вредности аргумената узоркују произвољно „мале“ промене вредности функције.За почетак опет наводимо примере који немају везе са математиком.

Навешћемо пример дужину косе у току неког временског периода. Заједно са ученицима прокоментарисати у којим ситуацијама би дошло до прекида ове функције тј. када би дошло до нагле промене вредности функције за малу промену аргумената. Закључујемо да када се неко ошиша долази до нагле промене дужине косе. Дакле, имали смо функцију дужину косе, та функција је била непрекидна све до тренутка шишања. При шишању долази до промене дужине косе тј.зависне променљиве или до прекида функције, а после шишања функција наставља да буде непрекидна.

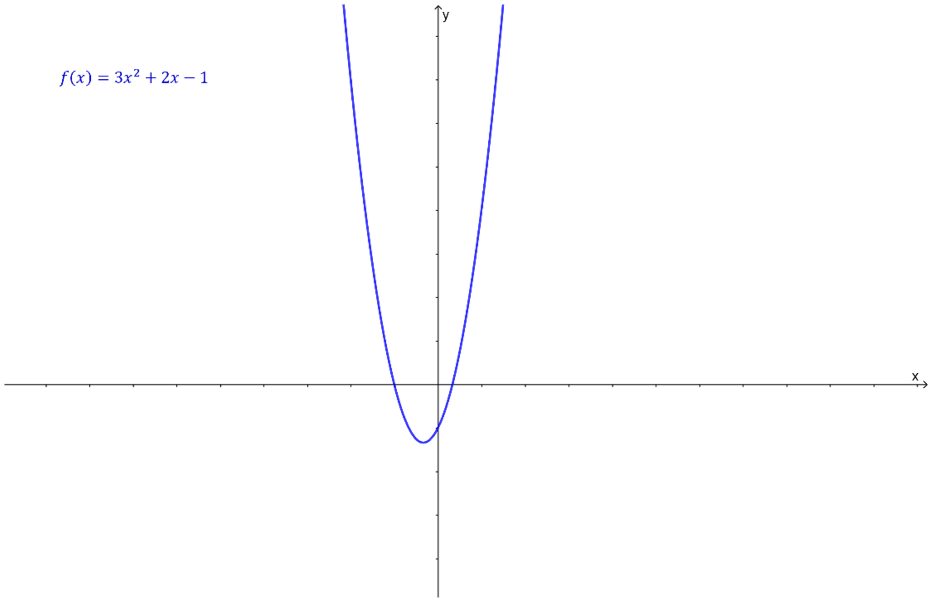
Навешћемо још један пример. Посматрајмо количину новца на текућем рачуну. Функција се скоковито мења сваки пут када се уплати или исплати извесна сума, а непрекидна је једино када је вредност новца константна.

Ово је добар пример да се објасни да је константна функција непрекидна на свом домену.Посматраћемо график константне функције $f(x) = c$ за $c \in \mathbb{R}$.

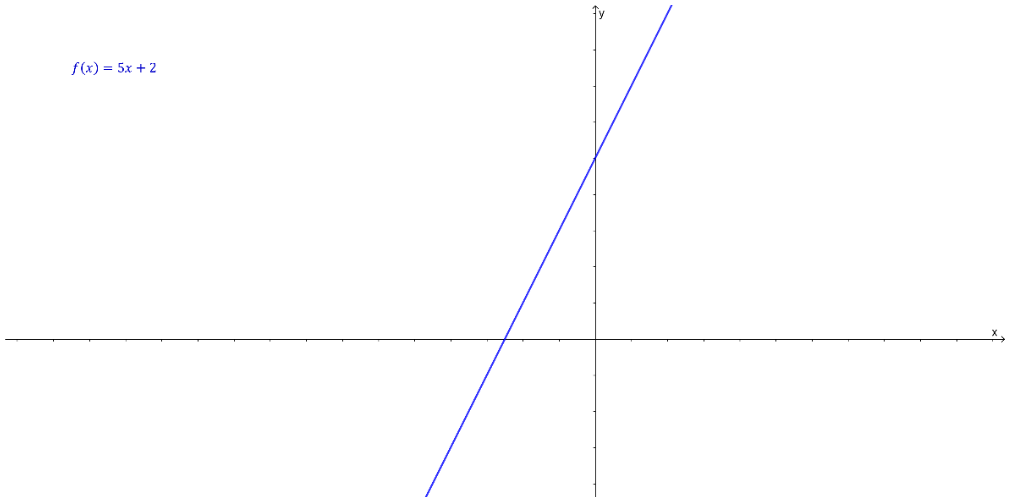


Наводимо још неколико примера функција које су непрекидне свуда где су дефинисане:

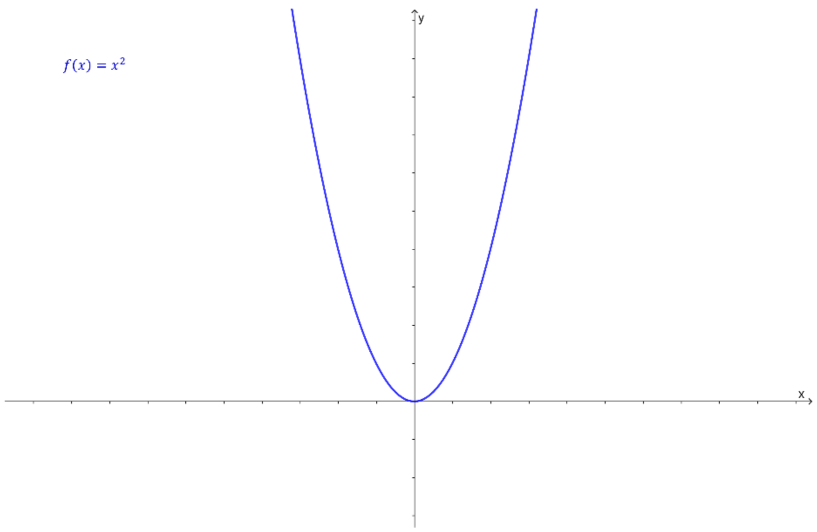
- полиномијална функција (нпр. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$)

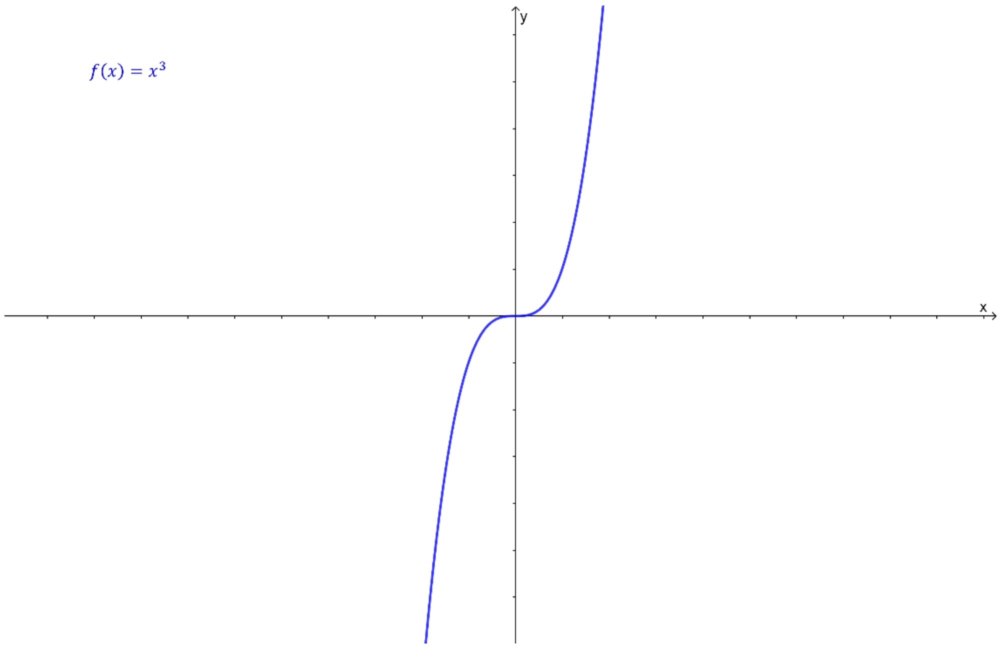


- линеарна функција $f(x) = kx + n$ за $k, n \in \mathbb{R}$ (нпр.$f(x) = 5x + 2$)

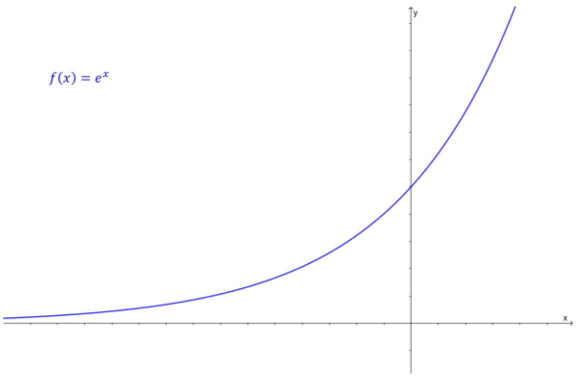


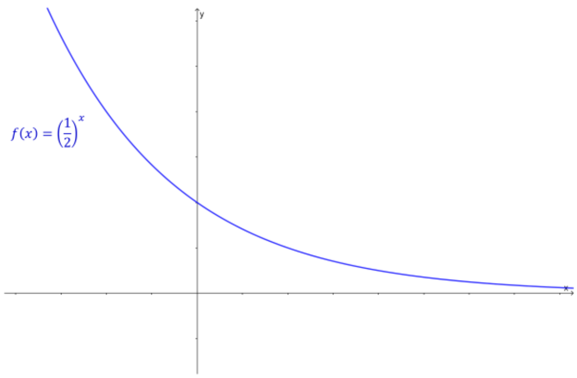
- степене функције $f(x) = x^n$ за $n \in N$(нпр. $f(x) = x^2$ или $f(x) = x^3$)



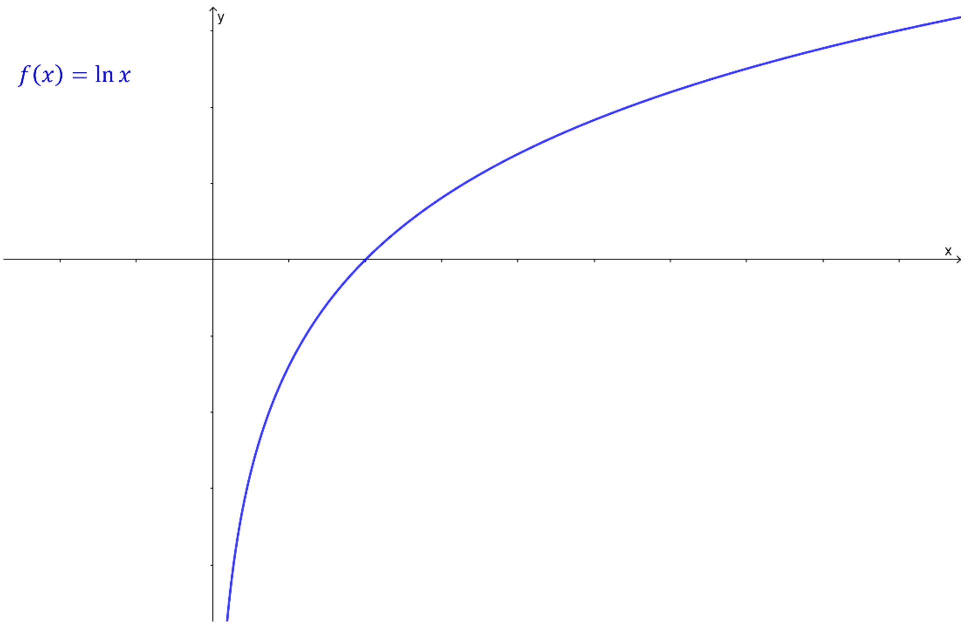


- експоненцијалне функције $f(x) = a^x$ за $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$(нпр. $f(x) = e^x$ или $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$)

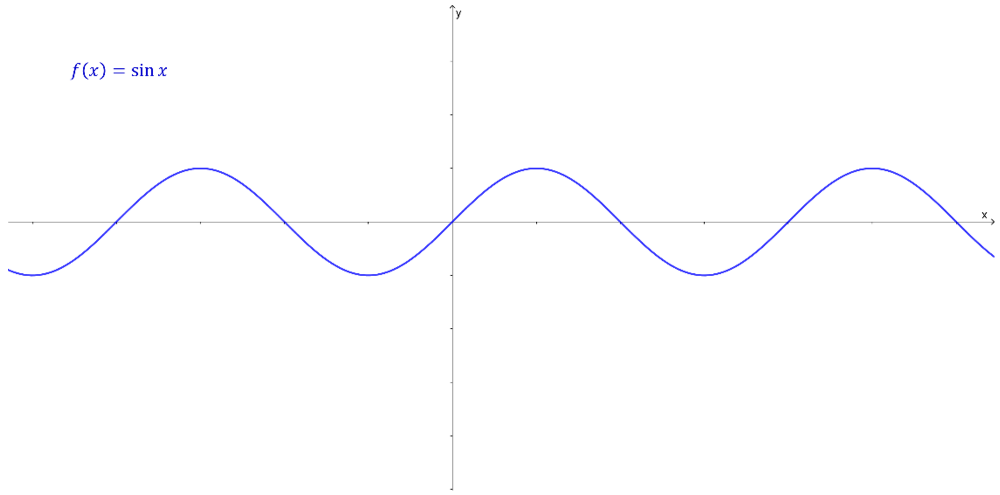


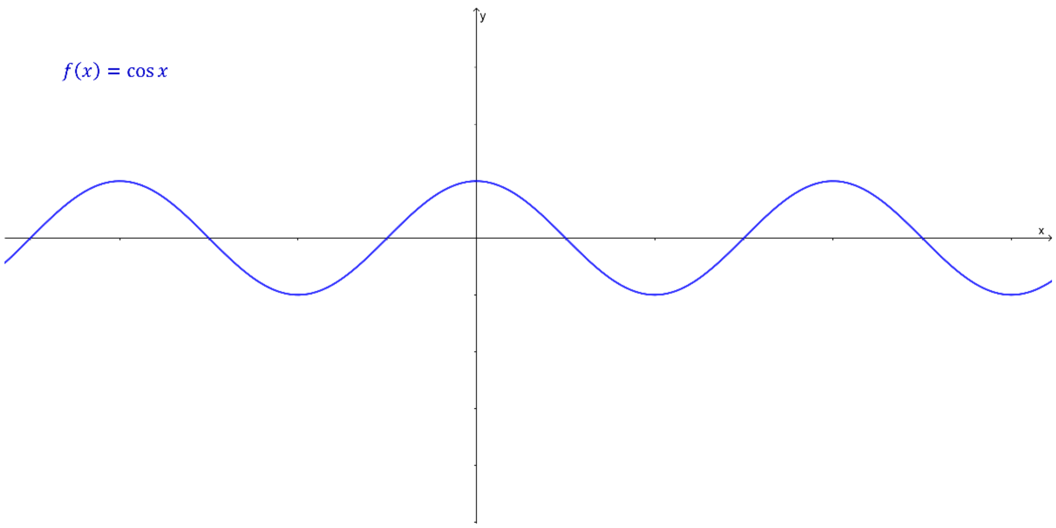


- логаритамска функција $f(x) = \log_a x$ за $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ (нрп.$f(x) = \ln x$)



- тригонометријске функције нпр. $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$





После анализе графика изводимо закључак да су ***непрекидне функције*** оне које се могу нацртати једним потезом, без подизања оловке са папира тј.непрекидним кретањем оловке по папиру.

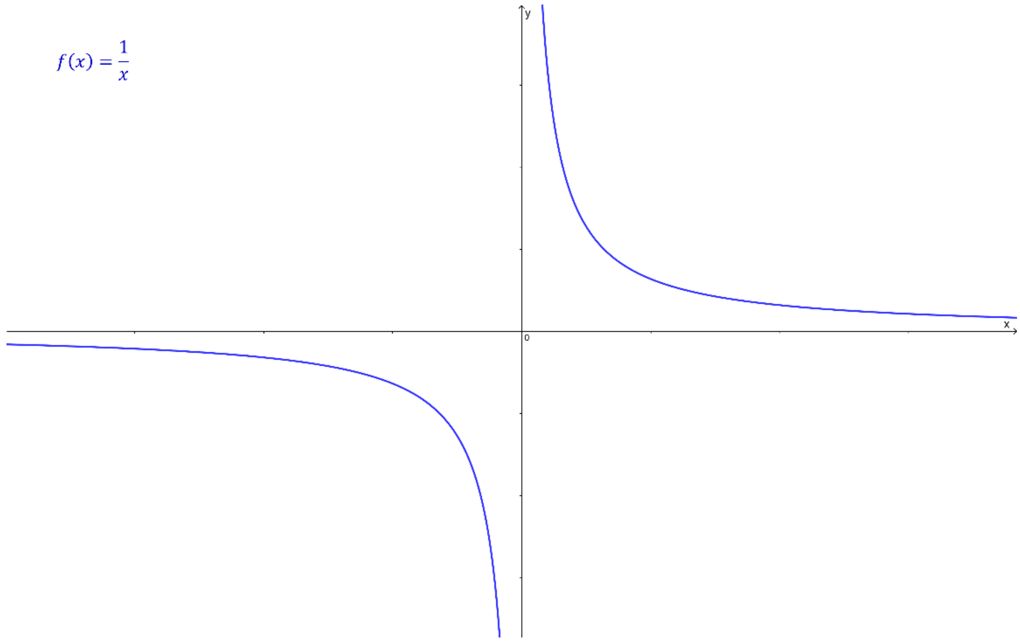
Поставити ученицима питање да ли графике претходно наведених функција можемо нацртати не одвајајући оловку од папира.Одговор је да могу.
Видимо да је претходно наведене функције могуће нацртати једним потезом, па ћемо рећи да су оне непрекидне на домену или да су непрекидне у свакој тачки у којој су дефинисане.

Домен за посматране функције је скуп $\mathbb{R}$, тако да ученици прихватају чињеницу да су дате функције непрекидне на свом домену.

Познато је да је ову дефиницију увео велики швајцарски математичар Леонард Ојлер, средином осамнаестог века.

Ученицима је потребно нагласити да се могу јавити проблеми ако се појам непрекидности веже само за визуелну представу „папир-оловка“.

Нацртаћемо функцију $f(x) = \frac{1}{x}$.



<u>Питање :</u> „Да ли је ова функција непрекидна? “
Ученици одговарају да није непрекидна зато што оловка мора да се подигне са папира приликом цртања графика.

<u>Питање :</u> „Где ова функција није непрекидна по вашем мишљењу?“
Одговор је да функција није непрекидна у нули.

<u>Питање :</u> „Постоје ли неки интервали где је ова функција непрекидна?“
Ученици примећују да је функција непрекидна за $x > 0$ и $x < 0$.

Вратимо се на пример са почетка часа „Снег је непрекидно падао целу ноћ.“ У овом примеру смо падање снега посматрали само одређени временски период (целу ноћ) . Тако се и непрекидност функције посматрамо само на домену. То значи да су у праву када кажу да је функција непрекидна за $x > 0$ и $x < 0$.

<u>Питање :</u> „Одредите домен функције $f(x) = \frac{1}{x}$ “
Одговор је да је домен $\forall x \epsilon \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Дакле, сада можемо да закључимо да је функција непрекидна на свом домену.

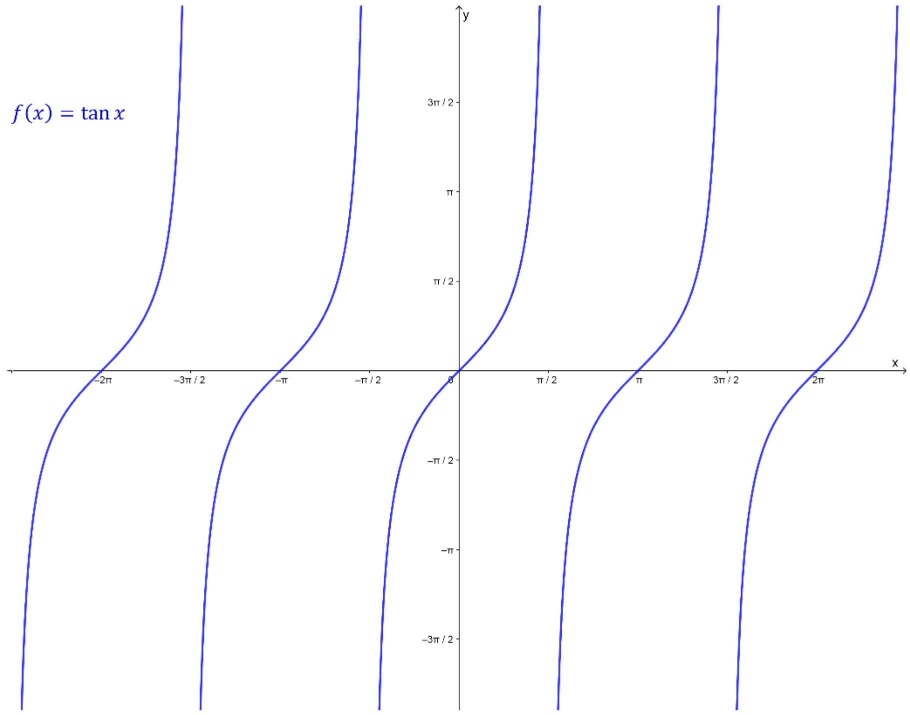
Даље би се могло рећи да је функција непрекидна на свом домену ако је она непрекидна у свакој тачки свог домена и да у тачкама које нису у домену функција није дефинисана, па не може бити ни непрекидна ни прекидна.Код функција као што је $f(x) = \frac{1}{x}$ можемо да кажемо да се јавља прекид на графику у некој тачки зато што функција није дефинисана у тој тачки.

Ово је једно од места које би могло изазвати неслагање са интуитивно прихваћеним појмом непрекидности.Треба нагласити , да се ово не слаже са претходно наведеном тврдњом да се непрекидне функције могу нацртати без подизања оловке са папира.

Закључујемо да је функција $f(x) = \frac{1}{x}$ непрекидна у свакој тачки свог домена, тј. за $\forall x \epsilon \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Пример: $f(x) = \tan x$

Графички ћемо представити ову функцију.



Функција $f(x) = \tan x$ није дефинисана за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$ па је непрекидна у свакој тачки домена.

Дефиниција непрекидности

<table>
<tr><td>

Дефиниција:
Функција $f: D_f \to \mathbb{R}$ је ***непрекидна у тачки*** $a \in D_f \subset \mathbb{R}$ ако је функција f дефинисана у тачки a тј. постоји $f(a)$ и има граничну вредност $\lim_{x\to a} f(x)$, при чему је гранична вредност функције једнака вредности функције тј. важи $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

</td></tr>
<tr><td>

Дефиниција:
За функцију $f: D_f \to \mathbb{R}$ која је непрекидна за свако $a \in D_f$ кажемо да је непрекидна на D_f тј. ***непрекидна на домену***.

</td></tr>
<tr><td>

Дефиниција:
Ако је функција f непрекидна у свакој тачки интервала (a, b) онда кажемо да је функција ***непрекидна на*** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
Уколико је функција f непрекидна на интервалу $(-\infty, \infty)$ онда кажемо да је функција ***свуда непрекидна.***

</td></tr>
</table>

Услов $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ интуитивно значи да кад се оригинал x „приближава“ броју a одговарајуће вредности слике $f(x)$ се приближавају броју $f(a)$. Ако то важи за сваку тачку $a \in D_f$ онда ће график функције f бити непрекидан на домену.

Дефиниција:

Функција f је ***непрекидна здесна*** у тачки $x = a$ ако важи $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Функција f је ***непрекидна слева*** у тачки $x = a$ ако важи $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

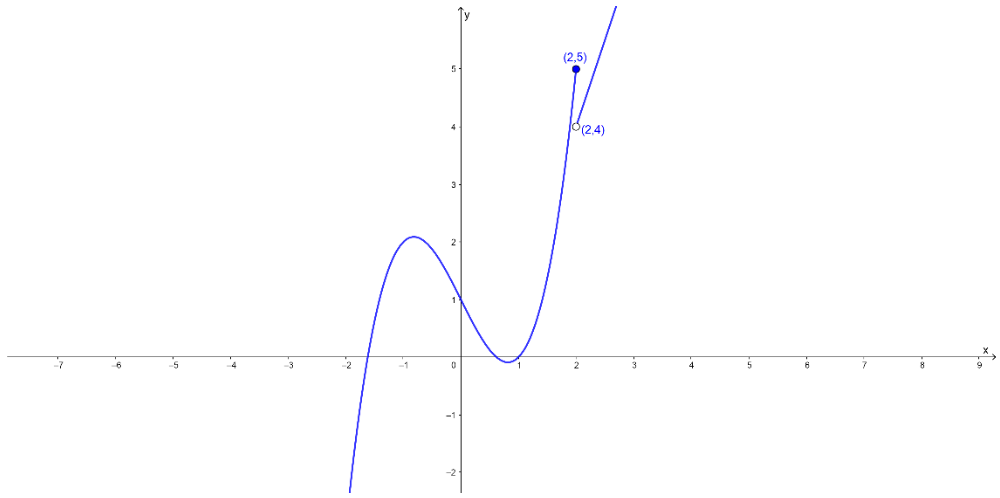
Функција f је ***непрекидна*** у тачки $x = a$ ако је непрекидна слева и здесна тј. важи $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Пример: Испитати да ли је функција $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1\,, & x \leq 2 \\ 3x - 2 & , x > 2 \end{cases}$ непрекидна у тачки $x = 2$.

Решење: Приметићемо да је $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 5$.Морамо наћи десну граничну вредност у тачки $x = 2$. За $x > 2$ функција је дата изразом $f(x) = 3x - 2$ па је:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - 2) = 4$$

У овом случају десна гранична вредност у тачки $x = 2$ није једнака вредности функције у тој тачки, тј. $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq f(2)$ па функција није непрекидна у $x = 2$.



Особине непрекидних функција

Питање : „Шта можемо рећи о збиру, разлици, производу и количнику непрекидних функција?“

Пример: Где је функција $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$ непрекидна?

Решење: Функција $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$ је количник два полинома. Дакле, ова функција је непрекидна свуда, осим у тачкама $x = 4$ и $x = -4$, где није дефинисана.

Теорема :

Нека су f и g непрекидне у тачки a, тада су у тој тачки непрекидне и следеће функције:

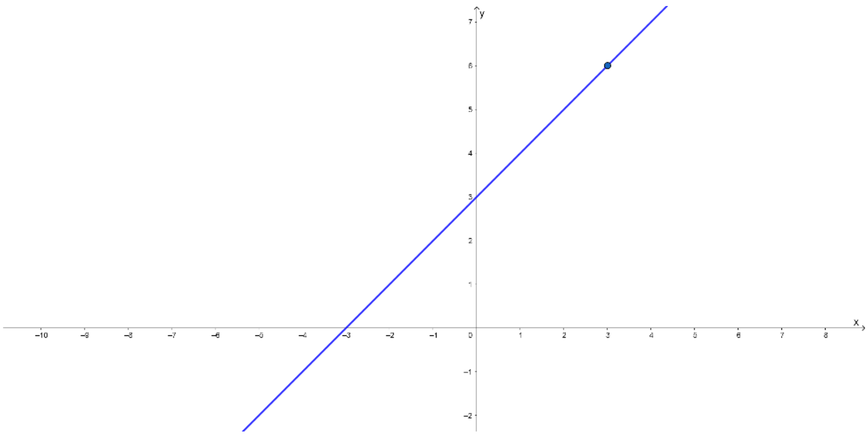
- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$, $g(a) \neq 0$

Интуитивна представа прекида функције

Приметимо да је визуелна представа непрекидности функције везана за непрекидност на домену. Постојање прекида функције указује на чињеницу да постоје тачке у којима функција није непрекидна.

Питање : „Које су по вашем мишљењу прекидне функције?“
Ученици углавном немају одговор или наводе непрекидне функције чији графици имају прекид.

Посматрајмо график функције $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$.

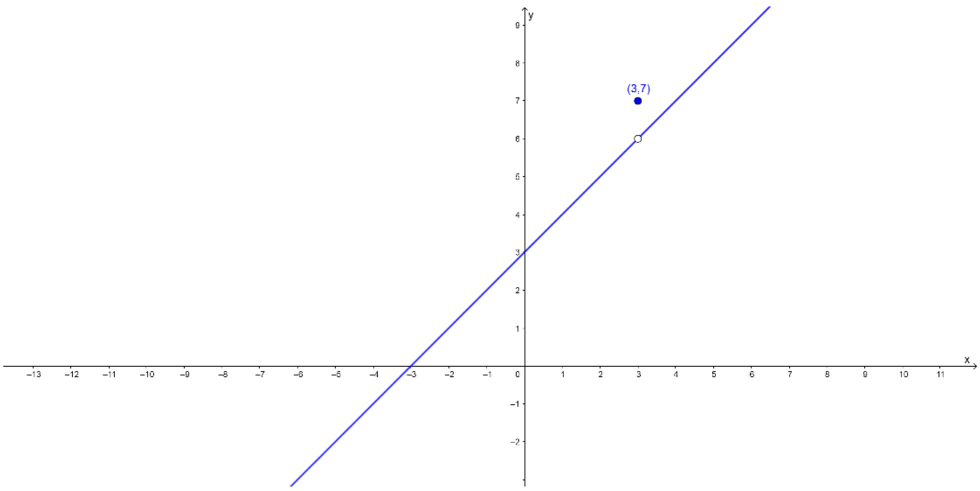


Ова функција је непрекидна у свим тачкама домена, осим можда у $x = 3$. Гледамо да ли је функција непрекидна или прекидна у тачки $x = 3$ посматрајући лимес кад x тежи 3.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

Како је 6 такође вредност функције у тачки $x = 3$, закључујемо да је функција непрекидна.

Посматрајмо сада график функције $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$.

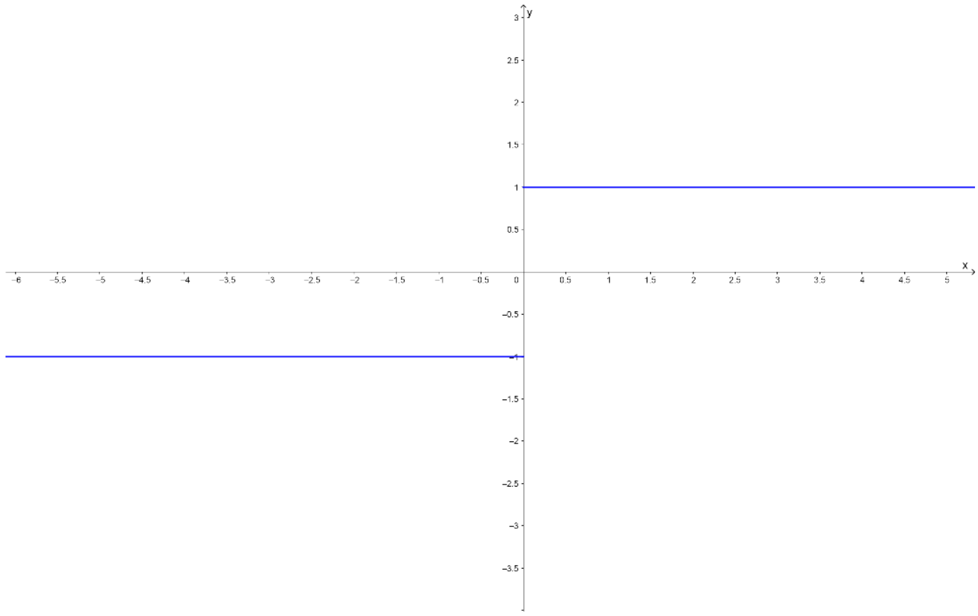


Вредност функције у тачки $x = 3$ се разликује од граничне вредности функције када се приближавамо 3, па ова функција није непрекидна у тачки $x = 3$. Дакле, ова функција је непрекидна у свим тачкама домена, осим у $x = 3$, где има прекид. Приметимо такође да тачка $x = 3$ припада домену функције.

У овом примеру код функције се јавља „прекид на графику“ у тачки $x = 3$, али функција заиста и има прекид у тој тачки.

Питање : „Да ли би се могао отклонити прекид код претходно наведене функције? “
Ученици уоче да се променом вредности функције у тачки $x = 3$ добија непрекидна функција.

Следећи пример може бити функција $f(x) = \operatorname{sgn}\ x = \begin{cases} 1 \ , & x > 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ -1 \ , & x < 0 \end{cases}$.

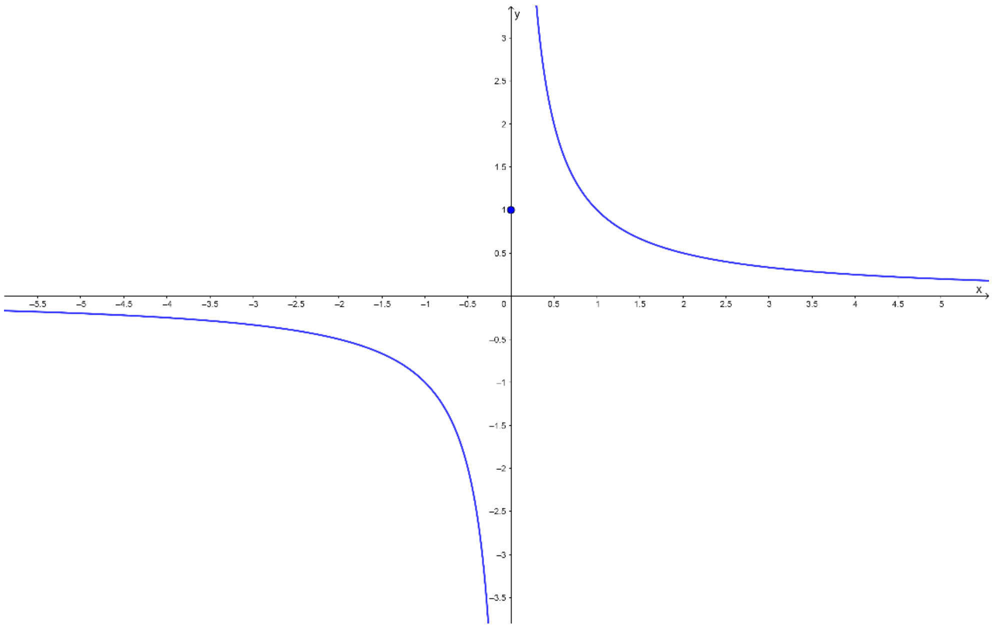


Функција $f(x) = \operatorname{sgn}\ x$ је дефинисана за свако x, али је непрекидна у свим тачкама домена осим у тачки $x = 0$, а у тој тачки има прекид. За такву тачку кажемо да је ***тачка прекида функције***. Такође треба приметити да се и код ове функције јавља прекид на графику у тачки $x = 0$ и да функција заиста има прекид у тој тачки.

Питање : „Да ли би се прекид код ове функције могао некако отклонити?“
Ученици примећују да променом вредности у тачки $x = 0$,прекид не може отклонити.

Сада ћемо посматрати функцију $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ , & x \neq 0 \\ 1 \ , & x = 0 \end{cases}$.

График ове функције је :



Тачка $x = 0$ припада домену функције F и овако дефинисана функција има прекид који се не може отклонити у нули за разлику од функције $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ која је непрекидна на свом домену.

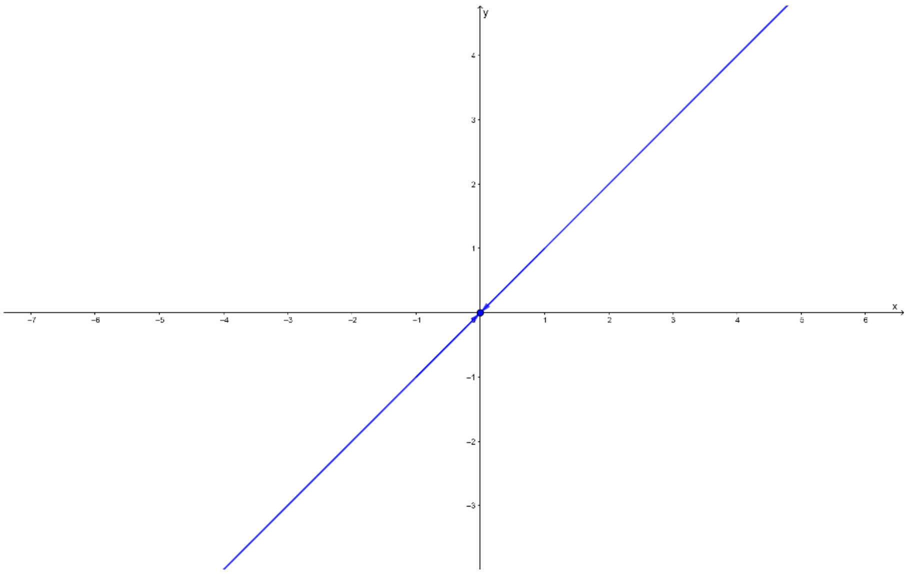
Прекид функције и врсте прекида

<u>**Дефиниција:**</u>
Ако је функција дефинисана, а није непрекидна у тачки a (не важи неки од услова из дефиниције непрекидности), кажемо да функција f има прекид у тачки a тј. да је тачка a ***тачка прекида функције.***

Разликујемо три врсте прекида:

1) Ако постоји $\lim_{x \to a} f(x)$ =*коначан број* али $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ онда је то отклоњив прекид.

   <u>Пример :</u> $f(x) = \frac{x^2}{x}$



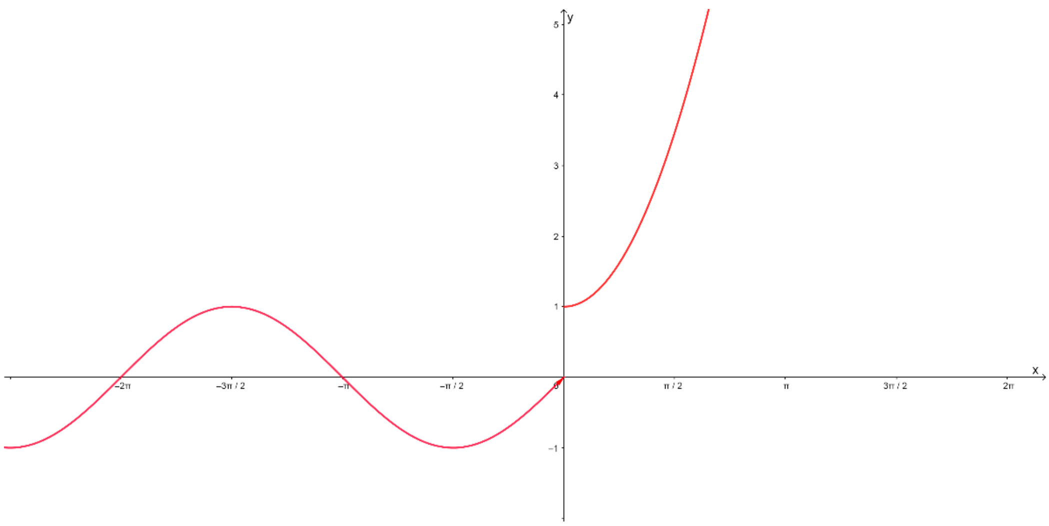
2) Ако постоје лева и десна гранична вредност функције f у тачки и нису једнаке тј. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, онда функција има скок или прекид прве врсте.
Рецимо ако је $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b_2$ тада је скок једнак $b_2 - b_1$.
Пример : $f(x) = \operatorname{sgn}\ x$

3) Ако бар једна од граничних вредности $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ не постоји, онда је то прекид друге врсте.
Пример : $f(x) = \frac{1}{x}$

Задаци и решења

1. Одредити леву и десну граничну вредност функције $f(x) = \begin{cases} \sin x\ , & x < 0 \\ x^2 + 1\ , & x \geq 0 \end{cases}$ у тачки $x_0 = 0$ за и испитати непрекидност у тачки x_0.

Решење:
Наћи ћемо десну и леву граничну вредност у тачки $x_0 = 0$. Ако важи $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ функција је непрекидна, иначе има прекид у тачки $x_0 = 0$.
За $x < 0$ функција је дата изразом $f(x) = \sin x$ па је $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin x = 0$.
За $x \geq 0$ функција је дата изразом $f(x) = x^2 + 1$ па је $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 + 1) = 1$.
Како је $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ функција има прекид у $x_0 = 0$.
Лева и десна гранична вредност постоје, али су различити бројеви,па закључујемо да се ради о прекиду прве врсте.



2. Испитати непрекидност функције $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Решење:
Домен функције је $\forall x \in \mathbb{R}/\{1\}$.
Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1+1 = 2$$

Како је $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$ ради се о отклоњивом прекиду тј. функцију можемо додефинисати на следећи начин тако да буде непрекидна:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x \neq 1 \end{cases}$$

3. Испитати непрекидност функције $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Решење:

Домен функције је $\forall x \in \mathbb{R}/\{1\}$.

Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

Обе граничне вредности „не постоје“(нису коначни бројеви) па је прекид друге врсте.

4. Испитати непрекидност функције $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ и скицирати график у околини нуле.

Решење:

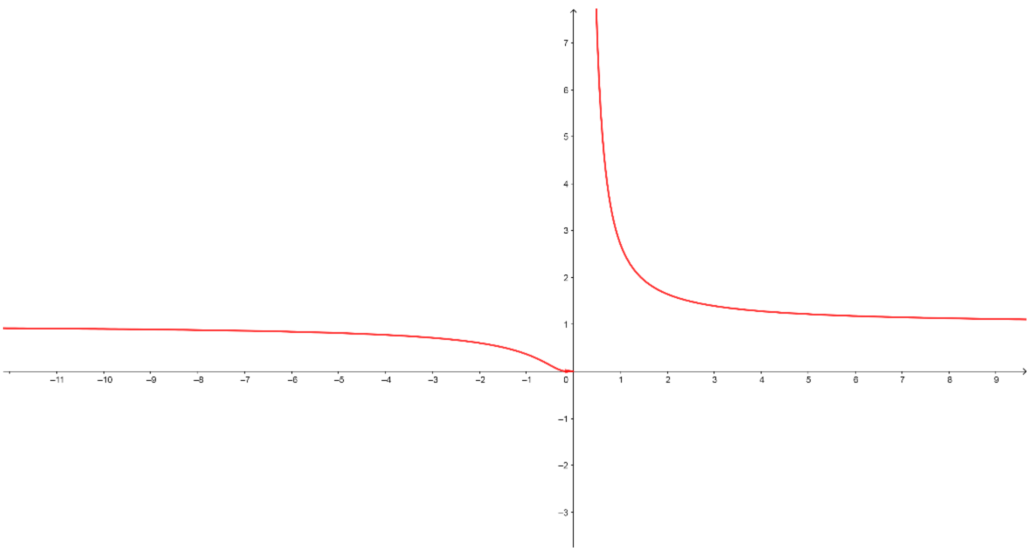
Домен функције је $\forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Како једна гранична вредност не постоји као коначан број, закључујемо да је функција има прекид друге врсте у тачки $x_0 = 0$.



5. Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} 1-x, x<0 \\ 2, x=0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$ у тачки $x_0 = 0$.

Решење:

Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(1-x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$
$$f(x_0) = f(0) = 2$$

Леви и десни лимес су једнаки али се разликују од вредности функције у нули па је функција прекидна у тачки $x_0 = 0$

Како једна гранична вредност не постоји као коначан број, закључујемо да је функција има прекид друге врсте у тачки $x_0 = 0$.

6. Дата је функција $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x<0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$.Одредити леву и десну граничну вредност функције у тачкама $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, испитати непрекидност ове функције и скицирати график у околини тих тачака.

Решење:

Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_1 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2^x = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$
$$f(x_1) = f(0) = 1$$

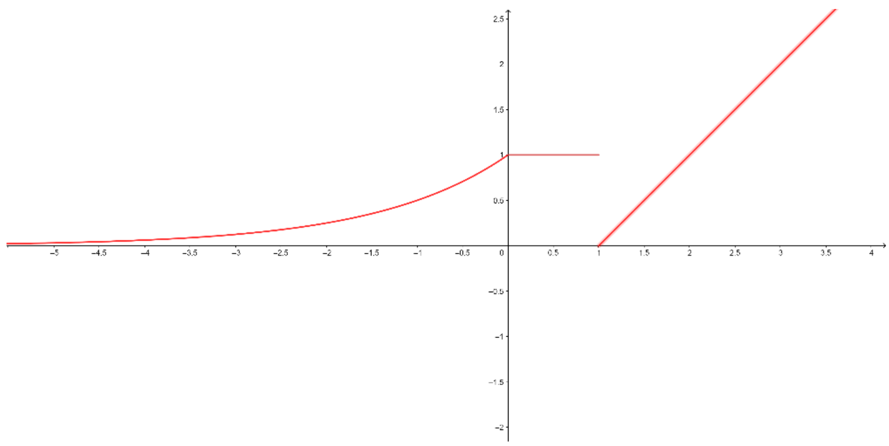
Како је $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x_1)$ закључујемо да је функција непрекидна у тачки $x_1 = 0$.

Тражимо сада леву и десну граничну вредност у тачки $x_2 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$$
$$f(x_2) = f(1) = 1$$

Леви и десни лимес нису једнаки па је функција прекидна у тачки $x_2 = 1$.

Дакле, дата функција је непрекидна у свим тачкама, осим у тачки $x_2 = 1$.



7. Функција $f(x)$ задата је на следећи начин $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ x\,, & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2\,, & 1 \le x < 3 \\ 4 - x, & x \ge 3 \end{cases}$.

Да ли је ова функција непрекидна?
Одредити леву и десну граничну вредност функције у тачкама $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ и испитати непрекидност ове функције.

Решење:
Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_1 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$f(x_1) = f(0) = 0$$

Како је $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(x_1)$ закључујемо да је функција непрекидна у тачки $x_1 = 0$.
Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_2 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2 + 4x - 2) = 1$$
$$f(x_2) = f(1) = 1$$

Како је $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(x_2)$ закључујемо да је функција непрекидна у тачки $x_2 = 1$.
Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_3 = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x^2 + 4x - 2) = 1$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (4 - x) = 1$$
$$f(x_3) = f(3) = 1$$

Како је $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(x_3)$ закључујемо да је функција непрекидна у тачки $x_3 = 3$.

8. Функције $f(x)$ и $g(x)$ задате су са: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & , x \ne 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x}\,, & x \ne 0 \\ -\frac{\pi}{2}\,, & x = 0 \end{cases}$

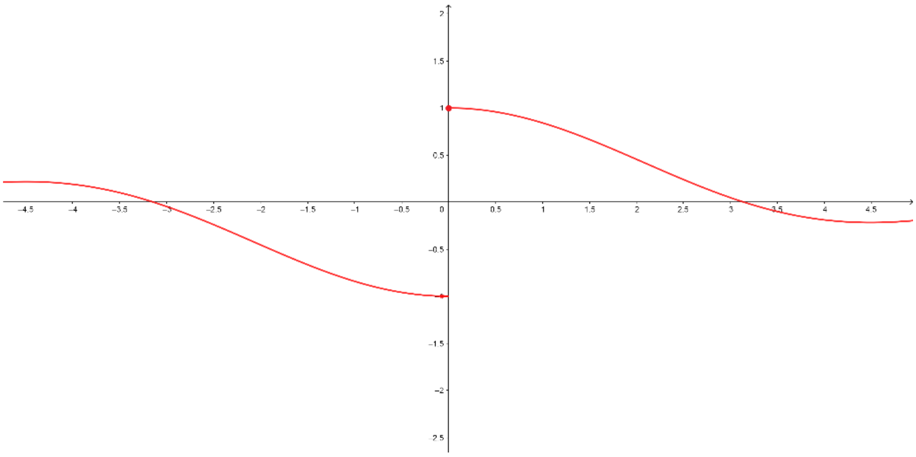
Испитати непрекидност функција $f(x)$ и $g(x)$ у нули и скицирати њихове графике у околини нуле.

Решење:
Тражимо леву и десну граничну вредност функије $f(x)$ у тачки $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = 1$$
$$f(x_0) = f(0) = 1$$

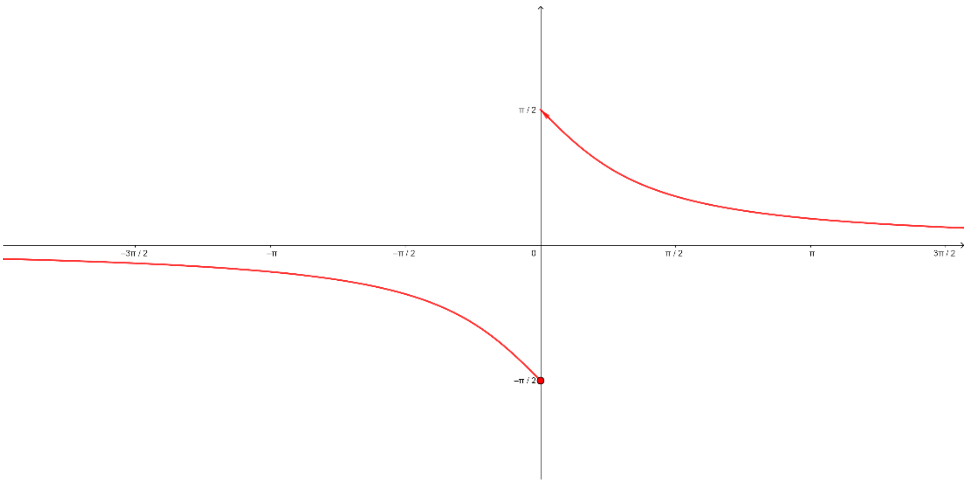
Како је $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x_0) = 1$ и $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ закључујемо да је функција непрекидна здесна али је прекидна у нули.



Тражимо леву и десну граничну вредност функције $g(x)$ у тачки $x_1 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$
$$g(x_1) = g(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Како је $\lim_{x\to 0^-} g(x) = g(x_1) = -\frac{\pi}{2}$ и $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$ закључујемо да је функција непрекидна слева али је прекидна у нули.



9. Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & x \neq -1 \\ \frac{1}{3}, & x = -1 \end{cases}$ у тачки $x_0 = -1$.

Решење:
Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_0 = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{3}$$
$$f(x_0) = f(-1) = \frac{1}{3}$$

Како је $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = \frac{1}{3}$ закључујемо да је функција непрекидна у тачки $x_0 = -1$.

10. Одредити вредност параметра a тако да функција $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење:

Функција је непрекидна на $\mathbb{R}/\{0\}$ као композиција непрекидних.

Тражимо леву и десну граничну вредност у тачки $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{x^2} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right) + 1}{\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right) + 1}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1+2x^2-1}{x^2 \cdot \left(\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right) + 1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2}{x^2 \cdot \left(\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right) + 1\right)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{x^2} = \frac{2}{3}$$

$$f(x_0) = f(0) = a$$

Да би била непрекидна и у тачки $x_0 = 0$ мора да важи $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x_0)$.

Дакле, за $a = \frac{2}{3}$ функција је непрекидна на $\mathbb{R}$.

Литература

[1] http://www.amsi.org.au/ESA_Senior_Years/PDF/Limits3a.pdf

[2] https://faculty.math.illinois.edu/~aydin/math220/lecturenotes/m220_Sec1_4.pdf

[3] http://matematiranje.in.rs/Visa%20matematika/2.Matrice%20i%20determinante/Neprekidnost%20funkcije.pdf

[4] http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/nm/225/nm493402.pdf
(Др Ђурђица Такачи, Душка Пешић,Непрекидност функције у настави матемтике-метода визуелизације, Настава математике 2004,XLIX,3-4, стр.30-40)

[5] Живорад Ивановић, Срђан Огњановић, Математика 4, Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа (десето прерађено издање), Круг, Београд, 2010.

Графици функција су цртани : https://www.geogebra.org