Игра ним

Аутор:
Марија Мијаиловић

Ментор:
проф.др Миодраг Живковић

Математички факултет
Универзитет у Београду

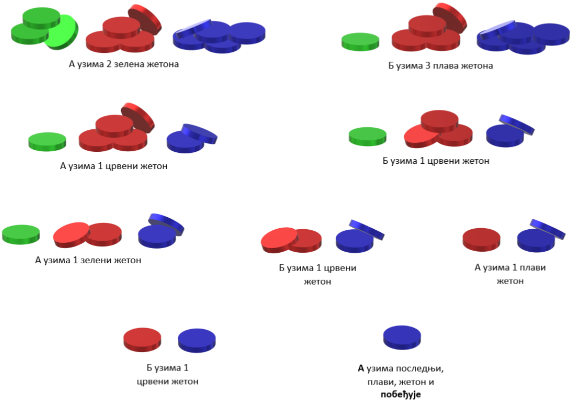
Септембар, 2020

Садржај

Игра ним

- Два играча
- Број жетона и гомила на столу одређују сами играчи
- Жетони се узимају само са једне гомиле, и мора се узети бар један жетон
- Нормални и мизерни ним

Пример тока игре нормалног нима



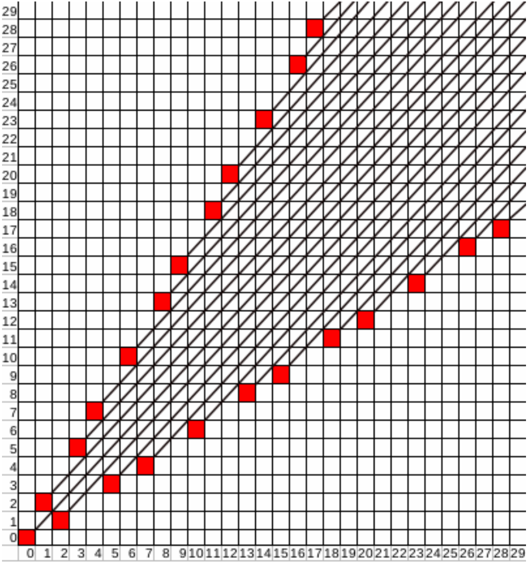
Слика 2: Ток ним игре

Шта је Витхофова игра?

- Две гомиле жетона
- Жетони се узимају са једне или обе гомиле
- Све позиције се могу разврстати у добитне и изгубљене

Изгубљене позиције за $a = 1$

n	A	B
0	0	0
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26
11	17	28



Рекурзивна стратегија

Дефиниција оператора mex

mex(A) означава најмањи природни број који није у скупу A, тј. $\text{mex}(\emptyset) = 0$ и $\text{mex}(A) = \min\{i | i \notin A\}$.

Рекурзивна карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу се изразити на следећи начин:

$$A_n = \text{mex}\{A_i, B_i : i < n\} \quad (1)$$

$$B_n = A_n + an \quad (2)$$

Алгебарска стратегија

Алгебарска карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу експлицитно изразити на следећи начин $A_n = \lfloor \alpha \cdot n \rfloor, B_n = \lfloor \beta \cdot n \rfloor$, где је:

$$\alpha = \frac{2 - a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \tag{3}$$

$$\beta = \alpha + a, \tag{4}$$

овде су α и β ирационални за свако $a > 0$

Нека је $a = 1$ и тренутна позиција (x, y) је:

- $(13, 29)$, како је $B_5 = 13$, то се из позиције $(13, 29)$ уклањајући 21 жетона прелази у позицију $(A_5, B_5) = (8, 13)$.
- $(12, 29)$, како је $A_8 = 12$ и $29 > B_8 = 20$, то се из позиције $(12, 29)$ уклањајући 9 жетона прелази у позицију $(A_8, B_8) = (12, 20)$.
- $(12, 15)$, како је $A_8 = 12$ и $15 < B_8 = 20$, то се из позиције $(12, 15)$ уклањајући по 8 жетона са обе гомиле прелази у позицију $(A_3, B_3) = (4, 7)$.

Аритметичка стратегија

Нека је $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ верижни развој броја α и за низове p_n и q_n важи следећа рекурентна релација:

$$p_{-1} = 1,\ p_0 = a_0,\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ (n \geq 1) \tag{5}$$

$$q_{-1} = 0,\ q_0 = 1,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ (n \geq 1). \tag{6}$$

Аритметичка стратегија

- Репрезентација R је $R = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0),\ 0 \leq d_i \leq a_{i+1}$
- Леви померај репрезентације R је $R^{'} = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0, 0)$
- Десни померај репрезентације R је $R^{''} = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1)$
- Веза p-интерпретације I_p и q-репрезентације R_q је
  $I_p(R_q(k)) = I_p(d_m, d_{m-1}, \ldots, d_0)$

Приказ првих 15 бројева записаних у p и q систему, за $a_i = 2, i > 1$

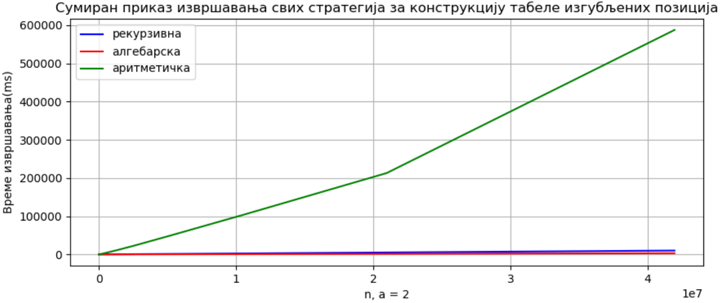
q_3 12	q_2 5	q_1 2	q_0 1		p_3 17	p_2 7	p_1 3	p_0 1	**n**
			1					1	**1**
		1	0					2	**2**
		1	1				1	0	**3**
		2	0				1	1	**4**
	1	0	0				1	2	**5**
	1	0	1				2	0	**6**
	1	1	0			1	0	0	**7**
	1	1	1			1	0	1	**8**
	1	2	0			1	0	2	**9**
	2	0	0			1	1	0	**10**
	2	0	1			1	1	1	**11**
1	0	0	0			1	1	2	**12**
1	0	0	1			1	2	0	**13**
1	0	1	0			2	0	0	**14**
1	0	1	1			2	0	1	**15**

Аритметичка карактеризација изгубљених позиција

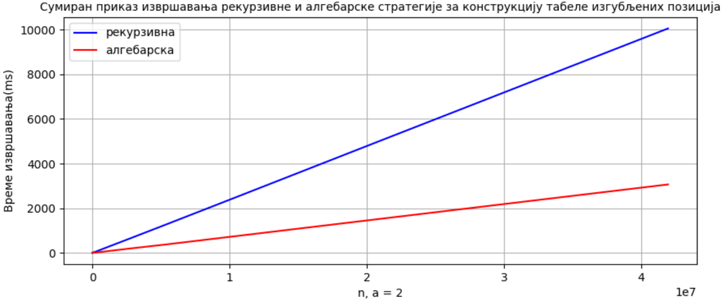
Нека је $a = 2$ и тренутна позиција (x, y) је:

- $(17, 29)$, како се $R_p(17) = (1, 0, 0, 0)$ завршава непарним бројем нула, онда је $B_5 = 17$ и $I_p(R_p^{''}(17) = I_p(1, 0, 0) = 7$ па је победнички потез $(7, 17)$.
- $(11, 29)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p^{'}(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$ па пошто је $29 > 27$ победнички потез је $(11, 27)$.
- $(11, 25)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p^{'}(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$, па пошто је $25 < 27$ рачуна се $R_q(\lfloor \frac{y-x}{a} \rfloor) = R_q(7) = (1, 1, 0)$ и $I_p(R_q(7)) = 10$ па је победники потез $(9, 23)$.
- $(11, 23)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p^{'}(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$, па пошто је $23 < 27$ рачуна се $R_q(\lfloor \frac{y-x}{a} \rfloor) = R_q(6) = (1, 0, 1)$ и $I_p(R_q(6)) = 8$ па је победники потез $(8, 20)$.

Евалуација решења



Слика 3: Сумиран приказ извршавања свих стратегија за конструкцију табеле изгубљених позиција



Слика 4: Сумиран приказ извршавања рекурзивне и алгебарске стратегије за конструкцију табеле изгубљених позиција

Крај

Хвала на пажњи!
Питања?