

Победничка стратегија Витхоф игре

д
д

Марија Мијаиловић
mijailovicmarija@hotmail.com

28. април 2020.

Садржај

| | | |
|----------|-----------------------------------|----------|
| 1 | Увод | 2 |
| 2 | Оптимална стратегија | 2 |
| 3 | Формула за хладне позиције | 2 |
| | Литература | 2 |

1 Увод

Витхоф-ова игра (енг. *Wythoff's game*) је математичка стратешка игра за два играча. Игра се са два шпила, тако што играчи узимају карте из једног или оба шпила. Приликом узимања карата из оба шпила, број узетих карата мора бити једнак. Игра се завршава када број карата буде нула, а онај играч који је уклонио последњу карту или карте је победник.

Еквивалентни опис игре би био: Имамо једну шаховску краљицу постављену било где на табли, сваки играч може да помера краљицу произвољан број корака у правцу југа, запада, или југозапада. Победник је играч који први помери краљицу у доњи леви ћошак табле.

Мартин Гаднер (енг. *Martin Gardner*) је у мартовском издању 1977. године часописа "Научни Американац" (енг. *Scientific American*) у колумни "Математичке игре" тврдио да се ова игра играла у Кини под именом "捡石子 jiǎn shízi" (енг. *picking stones*).

Холандски математичар В. А. Витхоф (енг. *W. A. Wythoff*) је 1907. године објавио математичку анализу ове игре.

2 Оптимална стратегија

Било која позиција се може представити паром бројева (n, m) , где је $n \leq m$, док n и m представљају број карата у оба шпила или координате позије краљице. Имамо два типа позиција око којих се врти игра, хладне и вреле позиције. На хладној позицији, играч који је на потезу ће изгубити и са најбоље одиграним потезом. Док на врелој позицији, играч који је на потезу ће победити и са најбоље одиграним потезом.

Класификација позиција на хладне и вреле се дефинише рекурзивно на следећи начин:

1. $(0, 0)$ је хладна позиција.
2. Било која позиција са које је хладна позиција достижна је топла позиција.
3. Ако сваки потез води ка топлој позицији, онда је то хладна позиција.

На пример, све позиције облика $(0, m)$ и (m, m) , где је $m > 0$ су топле позиције, на основу другог правила. Међутим позиција $(1, 2)$ је хладна, зато што су са ње достижне само позиције $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$, које су топле. Неке од хладних позиција су $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$, $(6, 10)$ и $(8, 13)$.

3 Формула за хладне позиције

Витхоф је открио да хладне позиције прате образац одређен златним пресеком. Тачније, ако је:

$$n_k = \lfloor k\phi \rfloor = \lfloor m_k\phi \rfloor - m_k$$
$$m_k = \lfloor k\phi^2 \rfloor = \lceil n_k\phi \rceil = n_k + k$$

где је k било који природни број, ϕ је златни пресек и користимо функције заокруживања. Овако дефинисана позиција (n_k, m_k) је k -та хладна позиција.

Ова два низа n_k и m_k представљају Бејтијев низ (енг. *Beatty sequences*), такође ова два низа су комплементарна - сваки позитиван број се јавља тачно једном у било којем низу.

Литература