Игра ним

Марија Мијаиловић

Ментор: проф.др Миодраг Живковић

Математички факултет
Универзитет у Београду

Септембар, 2020

Садржај

Игра ним

- Два играча
- Број жетона и гомила на столу одређују сами играчи
- Жетони се узимају само са једне гомиле, и мора се узети бар један жетон
- Нормални и мизерни ним

Пример тока игре нормалног нима

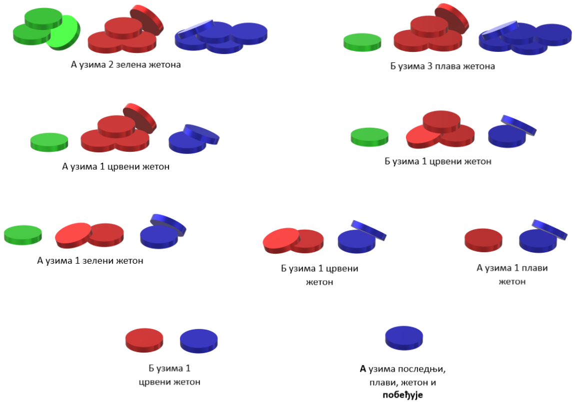


Figure 2: Ток ним игре

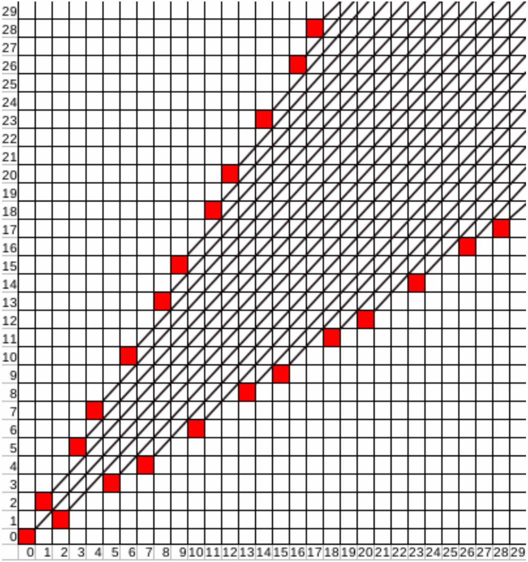
- Две гомиле жетона - позиција се може представити паром бројева (x, y), где је $x \leq y$
- Жетони се узимају са једне или обе гомиле - приликом узимања жетона са обе гомиле, рецимо $k(> 0)$ са једне и $l(> 0)$ са друге, мора да буде испуњен услов $|k - l| < a$, где је a задати позитиван број који се одређује пре почетка партије и не мења се у току саме партије
- Све позиције се могу разврстати у добитне и изгубљене

Да би се Витхофова игра играла на најбољи могући начин, потребно је знати две ствари:

- Препознати природу тренутне позиције, да ли је добитна или изгубљена.
- Уколико је тренутна позиција добитна, треба одредити следећи потез тако да се противник нађе у изгубљеној позицији.

Изгубљене позиције за $a = 1$

n	A	B
0	0	0
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26
11	17	28



Рекурзивна стратегија

Дефиниција оператора mex

mex(A) означава најмањи природни број који није у скупу A, тј. mex($\emptyset$) $= 0$ и mex(A) $= \min\{i | i \notin A\}$.

Рекурзивна карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу се изразити на следећи начин:

$$A_n = \operatorname{mex}\{A_i, B_i : i < n\} \quad (1)$$

$$B_n = A_n + an \quad (2)$$

Алгебарска карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу експлицитно изразити на следећи начин $A_n = \lfloor \alpha \cdot n \rfloor, B_n = \lfloor \beta \cdot n \rfloor$, где је:

$$\alpha = \frac{2 - a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad (3)$$

$$\beta = \alpha + a, \quad (4)$$

овде су α и β ирационални за свако $a > 0$

Достизање изгубљених позиција рекурзивном и алгебарском стратегијом

- Из изгубљене позиције, једним потезом може се прећи само у добитну позицију
- Из добитне позиције једним потезом може се прећи у изгубљену позицију.
  - Ако је $x = B_n$ онда се из позиције $(x = B_n, y)$ може једним потезом (скидањем жетона са гомиле на којој је y жетона) прећи у изгубљену позицију (A_n, B_n)
  - Ако је $x = A_n$ и $y > B_n$, онда се смањивањем y може доћи у позицију (A_n, B_n). У противном, ако је $A_n \leq y < B_n$ онда се смањивањем x и y може прећи у позицију (A_m, B_m), где је $m = \lfloor \frac{d}{a} \rfloor$ и $d = y - x$

Број α се може једнозначно представити бесконачним верижним разломком облика:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}, \tag{5}$$

α ирационалан број, који задовољава услов $1 < \alpha < 2$.

Нека је $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ верижни развој броја α и за низове p_n и q_n важи следећа рекурентна релација:

$$p_{-1} = 1,\ p_0 = a_0,\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ (n \geq 1) \tag{6}$$

$$q_{-1} = 0,\ q_0 = 1,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ (n \geq 1). \tag{7}$$

p-систем

$$N = \sum_{i=0}^{m} s_i p_i, 0 \leq s_i \leq a_{i+1}, \tag{8}$$

при чему, ако је $s_{i+1} = a_{i+2}$, онда је $s_i = 0$ за свако $i \geq 0$.

q-систем

$$N = \sum_{i=0}^{n} t_i q_i, 0 \leq t_0 < a_1,\ 0 \leq t_i \leq a_{i+1}, \tag{9}$$

при чему, ако је $t_i = a_{i+1}$, онда је $t_{i-1} = 0$ за свако $i \geq 1$.

Репрезентација R је $(m+1)$-торка за коју важи:

$$R = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0),\ 0 \leq d_i \leq a_{i+1}, \tag{10}$$

при чему за свако $i \geq 0$ важи: ако је $d_{i+1} = a_{i+2}$ онда је $d_i = 0$.

p-интерпретација и q-интерпретација репрезентације R

$$I_p = \sum_{i=0}^{m} d_i p_i \tag{11}$$

$$I_q = \sum_{i=0}^{m} d_i q_i \tag{12}$$

Веза између p-интерпретације I_p и q-репрезентације R_q:

$$I_p(R_q(k)) = I_p(d_m, d_{m-1}, \ldots, d_0).$$

$R^{'} = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0, 0)$ - леви померај репрезентације R
$R^{''} = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1)$ - десни померај репрезентације R

Приказ првих неколико бројева записаних у p и q систему, за $a_i = 2$, $i > 1$

q_3 12	q_2 5	q_1 2	q_0 1		p_3 17	p_2 7	p_1 3	p_0 1	**n**
			1					1	**1**
		1	0					2	**2**
		1	1				1	0	**3**
		2	0				1	1	**4**
	1	0	0				1	2	**5**
	1	0	1				2	0	**6**
	1	1	0			1	0	0	**7**
	1	1	1			1	0	1	**8**
	1	2	0			1	0	2	**9**
	2	0	0			1	1	0	**10**
	2	0	1			1	1	1	**11**
1	0	0	0			1	1	2	**12**
1	0	0	1			1	2	0	**13**
1	0	1	0			2	0	0	**14**
1	0	1	1			2	0	1	**15**

Аритметичка карактеризација изгубљених позиција

Уколико је текућа позиција $(x, y), 0 < x \leq y$, прво се рачуна $R_p(x)$ и проверава се да ли се завршава парним или непарним бројем нула.

1. Уколико се $R_p(x)$ завршава непарним бројем нула, онда је $x = B_n$, тако да је победнички потез $(x, y) \to (I_p(R_p^{''}(x)), x)$.

2. Уколико се $R_p(x)$ завршава парним бројем нула, онда је $x = A_n$. Ако је $y > I_p(R_p^{'}(x))$ победнички потез је $(x, y) \to (x, I_p(R_p^{'}(x))$. У противном, ако је $y < I_p(R_p^{'}(x)$, рачунамо $d = y - x, m = \lfloor \frac{d}{a} \rfloor$. Уколико се $R_q(m)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_m = I_p(R_q(m))$; у противном је $A_m = I_p(R_q(m)) + 1$. У оба случаја победнички потез је $(x, y) \to (A_m, A_m + ma)$.

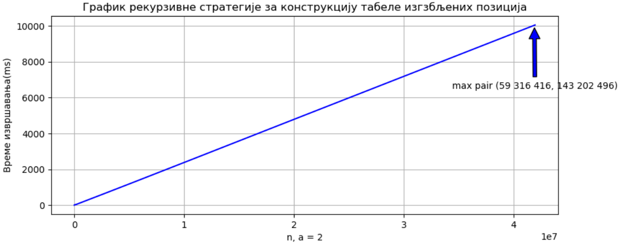


Figure 3: График рекурзивне стратегије за конструкцију табеле изгубљених позиција за n до 41943040

Имплементација и евалуација

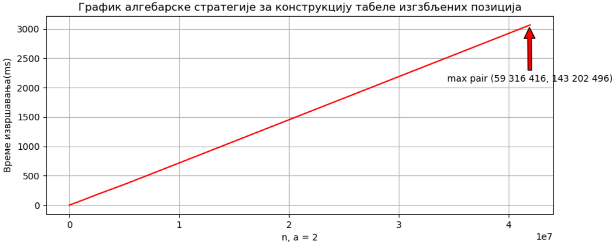


Figure 4: График алгебарске стратегије за конструкцију табеле изгубљених позиција за n до 41943040

Имплементација и евалуација

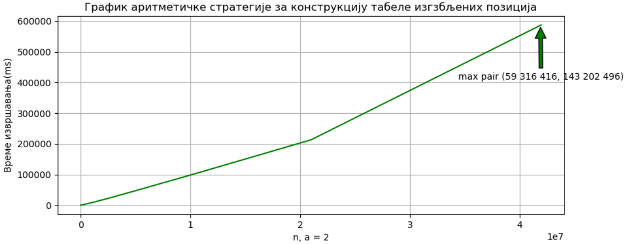


Figure 5: График аритметике стратегије за конструкцију табеле изгубљених позиција за $n = 41943040$

Имплементација и евалуација

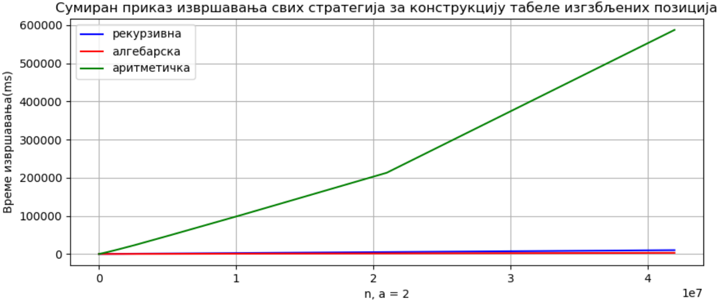


Figure 6: Сумиран приказ извршавања свих стратегија за конструкцију табеле изгубљених позиција

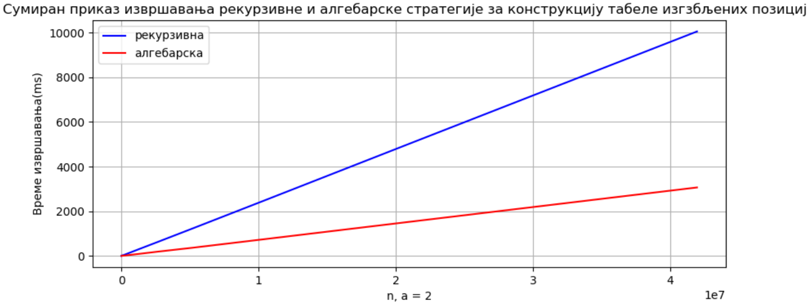


Figure 7: Сумиран приказ извршавања рекурзивне и алгебарске стратегије за конструкцију табеле изгубљених позиција

Крај

Хвала на пажњи!
Питања?