Победничка стратегија Витхоф игре

Марија Мијаиловић
mijailovicmarija@hotmail.com

28. април 2020.

Садржај

1 Увод

Витхоф-ова игра (енг. *Wythoff's game*) је математичка стратешка игра за два играча. На талону су нам дате две гомиле жетона, играчи наизменично узимају жетоне са једне или обе гомиле. Приликом узимања жетона са обе гомиле, рецимо $k(>0)$ са једне и $l(>0)$ са друге број узетих жетона мора задовољити услов $|k-l|<a$, где је a било који позитиван број. Игра се завршава када број жетона на талону буде нула, а онај играч који је уклонио последњи жетон или жетоне је победник. Прослеђивање није могуће - сваки играч када је на потезу мора да уклони бар један жетон.

У класичној Витхоф игри $a=1$, што значи да ако играч узима жетоне са обе гомиле, број узетих жетона мора бити једнак.

Еквивалентни опис игре би био: Имамо једну шаховску краљицу постављну било где на табли, сваки играч може да помера краљицу произвољан број корака у правцу југа, запада, или југозапада. Победник је играч који први помери краљицу у доњи леви ћошак табле.

Потоје тврдње да се ова игра играла у Кини под именом "捡石子 jiǎn shízǐ"(енг. *picking stones*).

Холандски математичар В. А. Витхоф (енг. *W. A. Wythoff*) је 1907. године објавио математичку анализу ове игре.

2 Оптимална стратегија

Било која позиција се може представити паром бројева (a,b), где је $a \leq b$, док a и b представљају број жетона на талону или координате позиције краљице. Имамо два типа позиција око којих се врти игра, П-позиције и Н- позиције. На П-позицији, играч који је на потезу ће изгубити и са најбоље одиграним потезом, тачније претходни играч може да победи шта год одиграо противник. Док на Н-позицији, следећи играч може да победи шта год противник одиграо.

Класуфикација позиција на П и Н се дефинише рекурзивно на следећи начин:

1. $(0,0)$ је П-позиција јер играч који је на потезу не може да одигра ниједан валидан потез, па је његов противник победник.
2. Било која позиција са које је П-позиција достижна је Н-позиција.
3. Ако сваки потез води ка Н-позицији, онда је то П-позиција.

На пример, све позиције облика $(0,b)$ и (b,b), где је $b>0$ су Н-позиције, на основу другог правила. За $a=1$ позиција $(1,2)$ је П-позиција, зато што су са ње достижне само позиције $(0,1),(0,2),(1,0)$ и $(1,1)$, које су Н-позиције. Још неке П-позиција су $(0,0),(1,2),(3,5),(4,7),(6,10)$ и $(8,13)$.

Да би се Витхоф игра ирала на најбољи могући начин, потребно је знати две ствари:

- Препознати припроду тренутне позиције, да ли је П или Н
- Израчунати следећи потез, уколико је тренутна позиција Н

Разлог битности лежи у чињеници да уколико је тренутна позиција Н, знамо да постоји потез који нас води на П-позицију, а тај потез можемо израчунати и победити. Са друге ако је тренутна позиција П не можемо урадити ништа, само одиграти произвољан валидан потез и надати се најбољем, с обзиром на то да у једном потезу са П-позиције стиже на Н-позицију, са које противник може да победи ако зна да израчуна П-позицију. У овом траду биће приказано како се може израчунати победничка позиција, користећи рекурзивну, алгебарску или аритметичку стратегију.

3 Формула за П-позиције

Витхоф је открио да П-позиције прате образац одређен златним пресеком. Тачније, ако је:

$$a_k = \lfloor k\phi \rfloor = \lfloor b_k\phi \rfloor - b_k$$

$$b_k = \lfloor k\phi^2 \rfloor = \lceil a_k\phi \rceil = a_k + k$$

где је k било који приодни број, ϕ је златни пресек и користимо функције заокруживања. Овако дефинисана позиција (a_k, b_k) је k-та П-позиција.

Ова два низа a_k и b_k представљају Бејтијев низ (енг. *Beatty sequences*), такође ова два низа су комплементарна - сваки позитиван број се јавља тачно једном у било којем низу.

4 Рекурзивна стратегија

Рекурзивном стратегијом П-позиције добијају се рачунајући $B_n - A_n = an$. За A_n важи $A_n = mex\{A_i, B_i : i < n\}$, где mex дефинижемо као најмању вредност у целог сортираног скупа, који не припада подскупу, тачније то је најмања вредност комплементарног скупа. Треба напоменути да је $mex\emptyset = 0$

Стратегија на основу овако креиране П-табеле је ....

5 Алгебарска стратегија

Алгебарском стратегијом П-позиције добијају се рачунајући $A_n = \lfloor n\alpha \rfloor$, и $B_n = \lfloor n\beta \rfloor$
$\alpha = \frac{2-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$, $\beta = \alpha + a$
Стратегија на основу овако креиране П-табеле је ....

6 Аритметичка стратегија

Стратегија на основу овако креиране П-табеле је ....

Литература