Игра ним

Аутор:
Марија Мијаиловић

Ментор:
проф.др Миодраг Живковић

Математички факултет
Универзитет у Београду

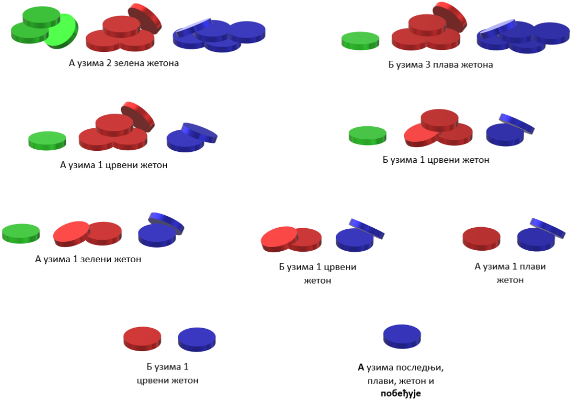
Септембар, 2020

Садржај

Игра ним

- Два играча
- Број жетона и гомила на столу одређују сами играчи
- Жетони се узимају само са једне гомиле, и мора се узети бар један жетон
- Нормални и мизерни ним

Пример партије нормалног нима

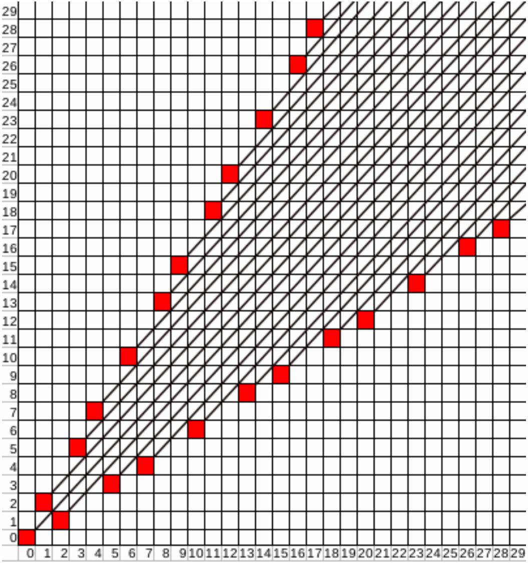


Шта је Витхофова игра?

- Две гомиле жетона
- Жетони се узимају са једне или обе гомиле
- Све позиције се могу разврстати у добитне и изгубљене

Изгубљене позиције за $a = 1$

n	A	B
0	0	0
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26
11	17	28



Рекурзивна стратегија

Дефиниција оператора mex

$\mathrm{mex}(A)$ означава најмањи природни број који није у скупу A, тј. $\mathrm{mex}(\emptyset) = 0$ и $\mathrm{mex}(A) = \min\{i | i \notin A\}$.

Рекурзивна карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу се изразити на следећи начин:

$$\begin{aligned} A_n = &\quad \mathrm{mex}\{A_i, B_i : i < n\} \\ B_n = &\quad A_n + an \end{aligned}$$

Рекурзивна стратегија

За $a = 1$ неке изгубљене позиције су:

n	A	B
0	0	0
1	1	$1 + 1 \cdot 1 = 2$
2	3	$3 + 1 \cdot 2 = 5$
3	4	$4 + 1 \cdot 3 = 7$

За $a = 2$ неке изгубљене позиције су:

n	A	B
0	0	0
1	1	$1 + 2 \cdot 1 = 3$
2	2	$2 + 2 \cdot 2 = 6$
3	4	$4 + 2 \cdot 3 = 10$

Алгебарска стратегија

Алгебарска карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу се изразити на следећи начин $A_n = \lfloor \alpha \cdot n \rfloor, B_n = \lfloor \beta \cdot n \rfloor$, где je:

$$\alpha = \frac{2 - a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$
$$\beta = \alpha + a,$$

овде су α и β ирационални за свако $a > 0$

Алгебарска стратегија

За $a=2$ онда је $\alpha=\sqrt{3}$ и $\beta=\sqrt{3}+2$ и неке изгубљене позиције су:

n	**A**	**B**
0	0	0
1	$\lfloor\sqrt{3}\cdot 1\rfloor = 1$	$\lfloor(\sqrt{3}+2)\cdot 1 = 3\rfloor$
2	$\lfloor\sqrt{3}\cdot 2\rfloor = 2$	$\lfloor(\sqrt{3}+2)\cdot 2 = 6\rfloor$
3	$\lfloor\sqrt{3}\cdot 3\rfloor = 4$	$\lfloor(\sqrt{3}+2)\cdot 3 = 10\rfloor$
4	$\lfloor\sqrt{3}\cdot 4\rfloor = 5$	$\lfloor(\sqrt{3}+2)\cdot 4 = 13\rfloor$
5	$\lfloor\sqrt{3}\cdot 5\rfloor = 7$	$\lfloor(\sqrt{3}+2)\cdot 5 = 17\rfloor$

Рекурзивна и алгебарска карактеризација изгубљених позиција

Нека је $a = 2$ и тренутна позиција (x, y) је:

- $(17, 29)$, како је $B_5 = 17$, то се из позиције $(17, 29)$ уклањајући 22 жетона прелази у позицију $(A_5, B_5) = (7, 17)$.
- $(11, 29)$, како је $A_8 = 11$ и $29 > B_8 = 27$, то се из позиције $(11, 29)$ уклањајући 2 жетона прелази у позицију $(A_8, B_8) = (11, 27)$.
- $(11, 25)$, како је $A_8 = 11$ и $25 < B_8 = 27$, то се из позиције $(11, 25)$ уклањајући по 2 жетона са обе гомиле прелази у позицију $(A_7, B_7) = (9, 23)$.

Аритметичка стратегија

Нека је $[a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots]$ верижни развој броја α и за низове p_n и q_n (бројилаца и имениилаца конвергената) важи следећа рекурентна релација:

$$p_{-1} = 1,\ \ p_0 = a_0,\ \ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ \ (n \geq 1)$$
$$q_{-1} = 0,\ \ q_0 = 1,\ \ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ \ (n \geq 1)$$

Нека је верижни развој броја $\alpha = [1\,, 2\,, 2\ldots] = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}$ чији су конвергенти:

$$C_0 = 1 = \frac{p_0}{q_0},$$
$$C_1 = [1, 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{p_1}{q_1},$$
$$C_3 = [1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = \frac{p_3}{q_3},$$
$$\ldots$$

Аритметичка стратегија

Репрезентација R је:

$$R = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0),\ \ 0 \leq d_i \leq a_{i+1}$$

p-репрезентација R_p броја k је:

$$R_p(k) = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0)$$

q-репрезентација R_q броја k је:

$$R_q(k) = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0)$$

Приказ првих 15 бројева записаних у p и q систему, за $a_i = 2,\ i > 1$

q3 12	**q2** 5	**q1** 2	**q0** 1		**p3** 17	**p2** 7	**p1** 3	**p0** 1	**n**
			1					1	**1**
		1	0					2	**2**
		1	1				1	0	**3**
		2	0				1	1	**4**
	1	0	0				1	2	**5**
	1	0	1				2	0	**6**
	1	1	0			1	0	0	**7**
	1	1	1			1	0	1	**8**
	1	2	0			1	0	2	**9**
	2	0	0			1	1	0	**10**
	2	0	1			1	1	1	**11**
1	0	0	0			1	1	2	**12**
1	0	0	1			1	2	0	**13**
1	0	1	0			2	0	0	**14**
1	0	1	1			2	0	1	**15**

Аритметичка стратегија

Леви померај репрезентације R је:

$$R^{'} = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1, d_0, 0)$$

Десни померај репрезентације R је:

$$R^{''} = (d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1)$$

Веза p-интерпретације I_p и q-репрезентације R_q је:

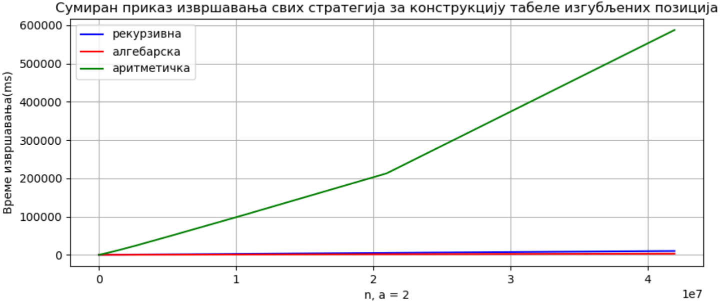
$$I_p(R_q(k)) = I_p(d_m, d_{m-1}, \ldots, d_0)$$

Аритметичка карактеризација изгубљених позиција

Нека је $a = 2$ и тренутна позиција (x, y) је:

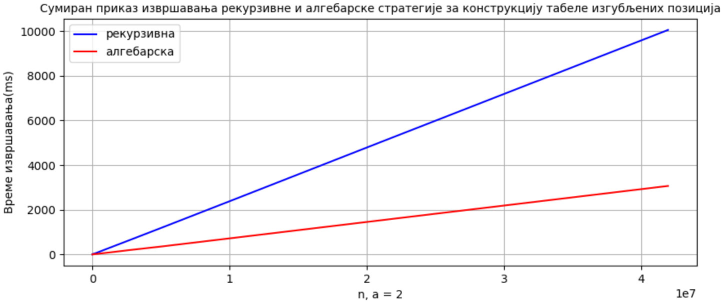
- $(17, 29)$, како се $R_p(17) = (1, 0, 0, 0)$ завршава непарним бројем нула, онда је $B_5 = 17$ и $I_p(R_p^{''}(17) = I_p(1, 0, 0) = 7$ па је победнички потез $(7, 17)$.
- $(11, 29)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p^{'}(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$ па пошто је $29 > 27$ победнички потез је $(11, 27)$.
- $(11, 25)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p^{'}(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$, па пошто је $25 < 27$ рачуна се $R_q(\lfloor \frac{y-x}{a} \rfloor) = R_q(7) = (1, 1, 0)$ и $I_p(R_q(7)) = 10$ па је победники потез $(9, 23)$.
- $(11, 23)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p^{'}(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$, па пошто је $23 < 27$ рачуна се $R_q(\lfloor \frac{y-x}{a} \rfloor) = R_q(6) = (1, 0, 1)$ и $I_p(R_q(6)) = 8$ па је победники потез $(8, 20)$.

Евалуација решења



Сумирани приказ извршавања свих стратегија за конструкцију табеле изгубљених позиција

Евалуација решења



Сумирани приказ извршавања рекурзивне и алгебарске стратегије за конструкцију табеле изгубљених позиција

Крај

Хвала на пажњи!
Питања?