Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Победничка стратегија Витхоф игре

Аутор:

Марија Мијаиловић

Ментор:

Др Миодраг Живковић

Катедра за рачунарство и информатику

Београд, мај 2020

Садржај

1 Увод

Витхоф-ова игра (енг. *Wythoff's game*)[2] је математичка стратешка игра за два играча. На талону су нам дате две гомиле жетона, играчи наизменично узимају жетоне са једне или обе гомиле. Приликом узимања жетона са обе гомиле, рецимо $k(>0)$ са једне и $l(>0)$ са друге број узетих жетона мора задовољити услов $|k-l|<a$, где је a било који позитиван број. Игра се завршава када број жетона на талону буде нула, а онај играч који је уклонио последњи жетон или жетоне је победник. Прослеђивање није могуће - сваки играч када је на потезу мора да уклони бар један жетон.

У класичној Витхоф игри $a=1$, што значи да ако играч узима жетоне са обе гомиле, број узетих жетона мора бити једнак.

Еквивалентни опис игре би био: Имамо једну шаховску краљицу постављну било где на табли, сваки играч може да помера краљицу произвољан број корака у правцу југа, запада, или југозапада. Победник је играч који први помери краљицу у доњи леви ћошак табле.[1] [3]

Постоје тврдње да се ова игра играла у Кини под именом "捡石子 jiǎn shízǐ"(енг. *picking stones*). [5]

Холандски математичар В. А. Витхоф (енг. *W. A. Wythoff*) је 1907. године објавио математичку анализу ове игре. [4]

2 Оптимална стратегија

Било која позиција се може представити паром бројева (a,b), где је $a \leq b$, док a и b представљају број жетона на талону или координате позиције краљице. Имамо два типа позиција око којих се врти игра, П-позиције и Н-позиције. На П-позицији, играч који је на потезу ће изгубити и са најбоље одиграним потезом, тачније претходни играч може да победи шта год одиграо противник. Док на Н-позицији, следећи играч може да победи шта год противник одиграо.

Класификација позиција на П и Н се дефинише рекурзивно на следећи начин:

1. $(0,0)$ је П-позиција јер играч који је на потезу не може да одигра ниједан валидан потез, па је његов противник победник.

2. Било која позиција са које је П-позиција достижна је Н-позиција.

3. Ако сваки потез води ка Н-позицији, онда је то П-позиција.

На пример, све позиције облика $(0,b)$ и (b,b), где је $b>0$ су Н-позиције, на основу другог правила. За $a=1$ позиција $(1,2)$ је П-позиција, зато што су са ње достижне само позиције $(0,1),(0,2),(1,0)$ и $(1,1)$, које су Н-позиције. Још неке П-позиција су $(0,0),(1,2),(3,5),(4,7),(6,10)$ и $(8,13)$.

Да би се Витхоф игра ирала на најбољи могући начин, потребно је знати две ствари:

- Препознати припроду тренутне позиције, да ли је П или Н

- Израчунати следећи потез, уколико је тренутна позиција Н

Разлог битности лежи у чињеници да уколико је тренутна позиција Н, знамо да постоји потез који нас води на П-позицију, а тај потез можемо израчунати и победити. Са друге ако је тренутна позиција П не можемо урадити ништа, само одиграти произвољан валидан потез и надати се најбољем, с обзиром на то да се у једном потезу са П-позиције стиже на Н-позицију, са које противник може да победи ако зна да израчуна П-позицију. У овом раду биће приказано како се може израчунати победничка позиција, користећи рекурзивну, алгебарску или аритметичку стратегију.

3 Рекурзивна стратегија

Рекурзивном стратегијом П-позиције добијају се рачунајући $B_n - A_n = an$. За A_n важи $A_n = mex\{A_i, B_i : i < n\}$, где mex дефинишемо као најмању вредност целог сортираног скупа, који не припада подскупу, тачније то је најмања вредност комплементарног скупа. Треба напоменути да је $mex\emptyset = 0$.

У случају да се играч помера са (A_n, B_n) позиције, и узима само жетоне са једне гомиле, тим потезом производи позицију која није облика (A_i, B_i). Уколико узима жетоне са обе гомиле такође производи потез који није облика (A_i, B_i), у супротном уколико би произведена позиција била (A_i, B_i), морало би да важи $|(B_n - B_i) - (A_n - A_i)| < a$, ако искористимо да је $B_n - A_n = an$ добијамо да треба да буде задовољено $|(n-i)a| < a$, што је тачно само ако је $i = n$, што је контрадикција.

У случају да се играч помера са позиције $(x, y), x \leq y$, позиција која није облика $(A_i, B_i), i \geq 0$. Како су A и B комплементарни скупови, може се сматрати да је $x = B_n$, или је $x = A_n$, за $n \geq 0$.

- Случај 1: $x = B_n$ онда $y = A_n$
- Случај 2: $x = A_n$, ако је $y > B_n$ онда $y = B_n$. Док у случају када је $A_n \leq y < B_n$ онда рачунамо $d = y - x, m = \lfloor \frac{d}{a} \rfloor$ и померамо се на позицију (A_m, B_m). Ово је легалан потез јер:

  1. $d = y - A_n < B_n - A_n = an$, стога $m = \lfloor \frac{d}{a} \rfloor \leq \frac{d}{a} < n$
  2. $y = A_n + d \geq A_m + am = B_m$
  3. $|(y - B_m) - (x - A_m)| = |d - am| < a$

4 Алгебарска стратегија

Алгебарском стратегијом П-позиције добијају се рачунајући $A'_n = \lfloor n\alpha \rfloor$, и $B'_n = \lfloor n\beta \rfloor$, где α и β рачунамо:

$$\alpha = \frac{2-a+\sqrt{a^2+4}}{2} \ , \beta = \alpha + a$$

Где је α позитиван корен квадратне једначине $\xi^{-1} + (\xi + a)^{-1} = 1$, тако су α и β ирационални за сваки позитиван број a, и задовољавају $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$

Уочимо да је $A'_0 = 0, B'_0 = 0$ и $B'_n - A'_n = an$. Такође како су A'_n и B'_n растући низови и комплементарни, то важи још и да је $A'_n = mex\{A'_i, B'_i : i < n\}$. Што показује да је $A'_n = A_n$ и $B'_n = B_n$ за $n \geq 0$.

Тако да се надаље за игру може спроводити иста стратегија описана у 3.

5 Аритметичка стратегија

Дефинишемо p и q низове рекурзивно на следећи начин :

$$p_{-1} = 1, p_0 = 1, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Потребно је увести p-систем и q-системе нумерације. У p-систему можемо записати сваки позитиван број, за који важи

$$N = \sum_{i=0}^{m} s_i p_i, 0 \leq s_i \leq a_{i+1}, s_{i+1} = a_{i+2} => s_i = 0, i \geq 0$$

Слично важи и за q-систем

$$N = \sum_{i=0}^{n} t_i q_i, 0 \leq t_0 \leq a_1, 0 \leq t_i \leq a_{i+1}, t_i = a_{i+1} => t_{i-1} = 0, i \geq 1$$

Где су p_i и q_i i-ти елементи горе дефинисаних низова p и q, приказ првих неколико бројева записаних у p и q систему, за $a_i = 2, i \geq 1$ дат је у табели 1.

Дефинисаћемо још *репрезентацију* R као $(m+1)$-торка

$$R = (d_m, d_{m-1}, ..., d_1, d_0), 0 \leq d_i \leq a_{i+1}, d_{i+1} = a_{i+2} => d_i = 0, i \geq 0.$$

Уколико у R померимо сваку цифру d_i у лево за једно место добијамо $R' = (d_m, d_{m-1}, ..., d_1, d_0, 0)$, а уколико је R репрезентација са $d_0 = 0$ онда када сваку цифру d_i померимо за једно место у десно добијамо $R'' = (d_m, d_{m-1}, ..., d_1)$

$I_p = \sum_{i=0}^{m} d_i p_i$ је p-*интерпретација* репрезентације R.

$I_q = \sum_{i=0}^{m} d_i q_i$ је q-*интерпретација* репрезентације R.

Може се приказати и веза између рецимо p-интерпретације и q-репрезентације за позитиван број k

$$I_p(R_q(k)) = I_p(d_m, d_{m-1}, ..., d_1) = n$$

Табела 1: Приказ првих неколико бројева записаних у p и q систему, за $a_i = 2, i \geq 1$

q₃	**q₂**	**q₁**	**q₀**		**p₃**	**p₂**	**p₁**	**p₀**	
12	5	2	1		17	7	3	1	**n**
			1					1	**1**
		1	0					2	**2**
		1	1				1	0	**3**
		2	0				1	1	**4**
	1	0	0				1	2	**5**
	1	0	1				2	0	**6**
	1	1	0			1	0	0	**7**
	1	1	1			1	0	1	**8**
	1	2	0			1	0	2	**9**
	2	0	0			1	1	0	**10**
	2	0	1			1	1	1	**11**
1	0	0	0			1	1	2	**12**
1	0	0	1			1	2	0	**13**
1	0	1	0			2	0	0	**14**
1	0	1	1			2	0	1	**15**
1	0	2	0			2	0	2	**16**
1	1	0	0		1	0	0	0	**17**

На пример број $R_q(12) = 1000$, а $I_p(1000) = 17$, ово је приказано у табели 1.

У случају када смо на позицији $(x, y), 0 < x \leq y$, прво је потребно ирачунати $R_p(x)$ и проверити да ли се завршава са парним или непарним бројем нула.

Уколико се завршава са непарним бројем нула онда је $x = B_n$, тако да је победнички потез $(x, y) \to (I_p(R''_p(x)), x)$

Уколико се завршава са парним бројем нула онда је $x = A_n$, ако је $y > I_p(R'_p(x)$ победнички потез је $(x, y) \to (x, I_p(R'_p(x))$, иначе уколико је $y < I_p(R'_p(x)$ рачунамо $d = y - x, m = \lfloor \frac{d}{a} \rfloor$. Тако да уколико се сад $R_q(m)$ завршава са парним бројем нула онда је $A_m = I_p(R_q(m))$, иначе уколико се завршава непарним бројем нула $A_m = I_p(R_q(m)) - 1$. У оба случаја победнички потез је $(x, y) \to (A_m, A_m + ma)$

Литература

[1] Alexander Bogomolny. Wythoff's nim. https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/withoff.shtml.

[2] Aviezri S. Fraenkel. How to beat your wythoff games' opponent on three fronts. *The American Mathematical Monthly*, 89(6):353–361, 1982.

[3] James Grime. Wythoff's game (get home). https://www.youtube.com/watch?v=AYOB-6wyK_I.

[4] Willem A Wythoff. A modification of the game of nim. *Nieuw Arch. Wisk*, 7(2):199–202, 1907.

[5] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom. *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*. Holden-Day, USA, 1967.