

Игра ним

Аутор:
Марија Мијаиловић

Ментор:
проф.др Миодраг Живковић



Математички факултет
Универзитет у Београду

Септембар, 2020

Игра ним

Витхофова игра

Евалуација решења

- ▶ Два играча
- ▶ Број жетона и гомила на столу одређују сами играчи
- ▶ Жетони се узимају само са једне гомиле, и мора се узети бар један жетон
- ▶ Нормални и мизерни ним

Пример партије нормалног нима



А узима 2 зелена жетона



Б узима 3 плава жетона



А узима 1 црвени жетон



Б узима 1 црвени жетон



А узима 1 зелени жетон



Б узима 1 црвени
жетон



А узима 1 плави
жетон



Б узима 1
црвени жетон



А узима последњи,
плави, жетон и
побеђује

Шта је Витхофова игра?

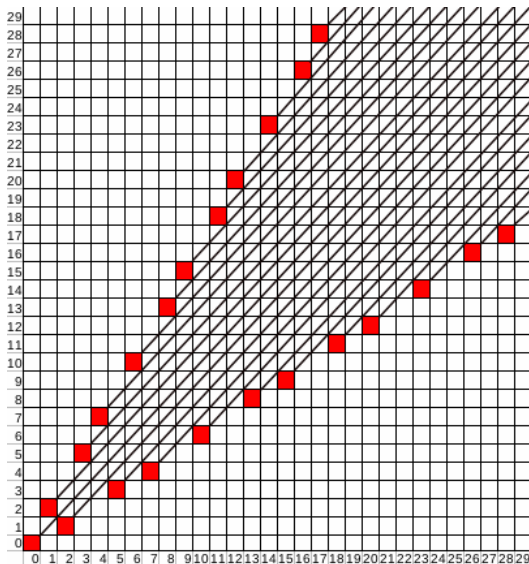


- ▶ Две гомиле жетона
- ▶ Жетони се узимају са једне или обе гомиле
- ▶ Све позиције се могу разврстати у добитне и изгубљене

Изгубљене позиције за $a = 1$



n	A	B
0	0	0
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26
11	17	28



Дефиниција оператора mex

$\text{mex}(A)$ означава најмањи природни број који није у скупу A , тј. $\text{mex}(\emptyset) = 0$ и $\text{mex}(A) = \min\{i \mid i \notin A\}$.

Рекурзивна карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу се изразити на следећи начин:

$$A_n = \text{mex}\{A_i, B_i : i < n\}$$

$$B_n = A_n + an$$

За $a = 1$ неке изгубљене позиције су:

n	A	B
0	0	0
1	1	$1 + 1 \cdot 1 = 2$
2	3	$3 + 1 \cdot 2 = 5$
3	4	$4 + 1 \cdot 3 = 7$

За $a = 2$ неке изгубљене позиције су:

n	A	B
0	0	0
1	1	$1 + 2 \cdot 1 = 3$
2	2	$2 + 2 \cdot 2 = 6$
3	4	$4 + 2 \cdot 3 = 10$

Алгебарска карактеризација изгубљених позиција

Све изгубљене позиције (A_n, B_n) могу се изразити на следећи начин $A_n = \lfloor \alpha \cdot n \rfloor$, $B_n = \lfloor \beta \cdot n \rfloor$, где је:

$$\alpha = \frac{2 - a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

$$\beta = \alpha + a,$$

овде су α и β ирационални за свако $a > 0$

За $a = 2$ онда је $\alpha = \sqrt{3}$ и $\beta = \sqrt{3} + 2$ и неке изгубљене позиције су:

n	A	B
0	0	0
1	$\lfloor \sqrt{3} \cdot 1 \rfloor = 1$	$\lfloor (\sqrt{3} + 2) \cdot 1 \rfloor = 3$
2	$\lfloor \sqrt{3} \cdot 2 \rfloor = 2$	$\lfloor (\sqrt{3} + 2) \cdot 2 \rfloor = 6$
3	$\lfloor \sqrt{3} \cdot 3 \rfloor = 4$	$\lfloor (\sqrt{3} + 2) \cdot 3 \rfloor = 10$
4	$\lfloor \sqrt{3} \cdot 4 \rfloor = 5$	$\lfloor (\sqrt{3} + 2) \cdot 4 \rfloor = 13$
5	$\lfloor \sqrt{3} \cdot 5 \rfloor = 7$	$\lfloor (\sqrt{3} + 2) \cdot 5 \rfloor = 17$



Нека је $a = 2$ и тренутна позиција (x, y) је:

- ▶ $(17, 29)$, како је $B_5 = 17$, то се из позиције $(17, 29)$ уклањајући 22 жетона прелази у позицију $(A_5, B_5) = (7, 17)$.
- ▶ $(11, 29)$, како је $A_8 = 11$ и $29 > B_8 = 27$, то се из позиције $(11, 29)$ уклањајући 2 жетона прелази у позицију $(A_8, B_8) = (11, 27)$.
- ▶ $(11, 25)$, како је $A_8 = 11$ и $25 < B_8 = 27$, то се из позиције $(11, 25)$ уклањајући по 2 жетона са обе гомиле прелази у позицију $(A_7, B_7) = (9, 23)$.

Нека је $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ верижни развој броја α и за низове p_n и q_n (бројилаца и именилаца конвергената) важи следећа рекурентна релација:

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad (n \geq 1) \\ q_{-1} &= 0, \quad q_0 = 1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Нека је верижни развој броја $\alpha = [1, 2, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$ чији су конвергенти:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 = \frac{p_0}{q_0}, \\ C_1 &= [1, 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{p_1}{q_1}, \\ C_3 &= [1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = \frac{p_3}{q_3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Репрезентација R је:

$$R = (d_m, d_{m-1}, \dots, d_1, d_0), \quad 0 \leq d_i \leq a_{i+1}$$

p -репрезентација R_p броја k је:

$$R_p(k) = (d_m, d_{m-1}, \dots, d_1, d_0)$$

q -репрезентација R_q броја k је:

$$R_q(k) = (d_m, d_{m-1}, \dots, d_1, d_0)$$

Приказ првих 15 бројева записаних у p и q систему, за $a_i = 2, i > 1$



q_3 12	q_2 5	q_1 2	q_0 1		p_3 17	p_2 7	p_1 3	p_0 1	n
			1					1	1
		1	0					2	2
		1	1				1	0	3
		2	0				1	1	4
	1	0	0				1	2	5
	1	0	1				2	0	6
	1	1	0			1	0	0	7
	1	1	1			1	0	1	8
	1	2	0			1	0	2	9
	2	0	0			1	1	0	10
	2	0	1			1	1	1	11
1	0	0	0			1	1	2	12
1	0	0	1			1	2	0	13
1	0	1	0			2	0	0	14
1	0	1	1			2	0	1	15

Леви померај репрезентације R је:

$$R' = (d_m, d_{m-1}, \dots, d_1, d_0, 0)$$

Десни померај репрезентације R је:

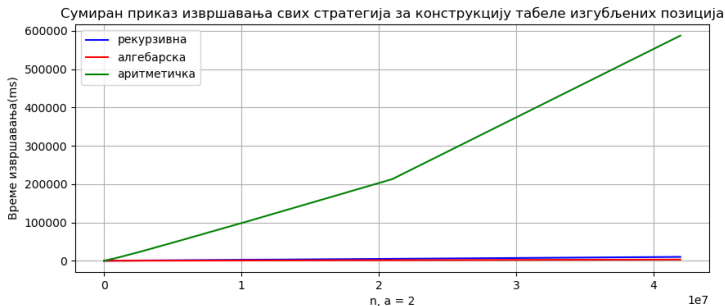
$$R'' = (d_m, d_{m-1}, \dots, d_1)$$

Веза p -интерпретације I_p и q -репрезентације R_q је:

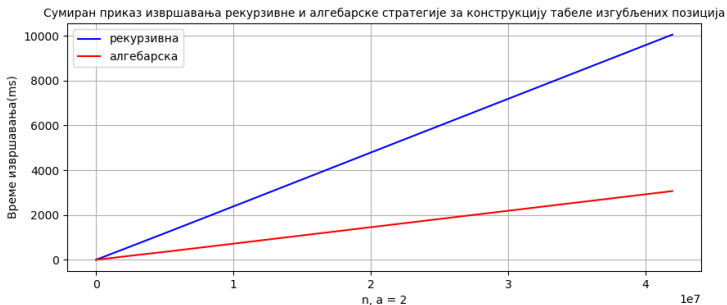
$$I_p(R_q(k)) = I_p(d_m, d_{m-1}, \dots, d_0)$$

Нека је $a = 2$ и тренутна позиција (x, y) је:

- ▶ $(17, 29)$, како се $R_p(17) = (1, 0, 0, 0)$ завршава непарним бројем нула, онда је $B_5 = 17$ и $I_p(R_p''(17)) = I_p(1, 0, 0) = 7$ па је победнички потез $(7, 17)$.
- ▶ $(11, 29)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p'(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$ па пошто је $29 > 27$ победнички потез је $(11, 27)$.
- ▶ $(11, 23)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p'(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$, па пошто је $23 < 27$ рачуна се $R_q(\lfloor \frac{y-x}{a} \rfloor) = R_q(6) = (1, 0, 1)$ и $I_p(R_q(6)) = 8$ па је победнички потез $(8, 20)$.
- ▶ $(11, 25)$, како се $R_p(11) = (1, 1, 1)$ завршава парним бројем нула, онда је $A_8 = 11$ и $I_p(R_p'(11)) = I_p(1, 1, 1, 0) = 27$, па пошто је $25 < 27$ рачуна се $R_q(\lfloor \frac{y-x}{a} \rfloor) = R_q(7) = (1, 1, 0)$ и $I_p(R_q(7)) = 10$ па је победнички потез $(9, 23)$.



Сумирани приказ извршавања свих стратегија за конструкцију табеле изгубљених позиција



Сумирани приказ извршавања рекурзивне и алгебарске стратегије за конструкцију табеле изгубљених позиција

Хвала на пажњи!
Питања?