HAHN-BANACH THEOREM

2020 年 3 月 16 日

Theorem 1 (HB theorem)**:** 设X是实数域上的线性空间，p是定义在X上的实值函数，并且设p是次线性函数，具有以下性质：

(i) 正齐次性（*Positive homogeneity*）：

$$p(ax) = ap(x) \qquad \forall a > 0. \tag{1}$$

(ii) 次可加性（*Subadditivity*）：

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{2}$$

设Y是X的子空间，l是定义在Y上的线性函数，并且被p约束：

$$l(y) \le p(y) \qquad \forall y \in Y. \tag{3}$$

那么l可以作为线性函数延展到整个X，且被p所约束：

$$l(x) \le p(x) \qquad \forall x \in X. \tag{3'}$$

proof. 设集合

$$\mathcal{S} = \{(Z, f),\text{其中}Z\text{是}X\text{的子空间且有}Y \subset Z, f : Z \to \mathbb{R}\text{是线性函数}, f(x) \le p(x), \forall x \in Z, f(y) = l(y), \forall y \in Y\}.$$

首先证明$\mathcal{S}$的存在性，即线性函数f的存在性.

f存在性证明：为了证明f的存在性，我们只需要将线性函数l延展到X的子空间Z即可，即：

$$l(y+az) = l(y) + al(z) \le p(y+az) \qquad \forall y \in Y,\ \forall a \in \mathbb{R} \tag{4}$$

其中Z是X的子空间，且$Z = < Y, z >$，即Z是由Y和z生成，具有以下形式：

$$y + az, \qquad \forall y \in Y, z \in X \ and \ z \notin Y, a \in \mathbb{R}$$

则当$a = 0$时，(4)显然成立，现在讨论$a \neq 0$时的情况，由于p存在正齐次性，所以只需要验证$a = \pm 1$即可，即：

$$l(y) + l(z) \le p(y+z), \quad l(y') - l(z) \le p(y'-z) \quad \forall y, y' \in Y, \forall z \in Z \tag{5}$$

假设$l(z)$存在且(5)成立，那么有：

$$p(y+z) - l(y) \ge l(z) \ge l(y') - p(y'-z) \tag{6}$$

即：

$$p(y+z) + p(y'-z) \ge l(y) + l(y') \tag{6'}$$

而$y + y' \in Y$，根据(3)有：

$$p(y+y') \ge l(y+y') \tag{7}$$

又由次可加性可知

$$p(y+y') = p(y+z+y'-z) \le p(y+z) + p(y'-z) \tag{8}$$

结合(7)(8)可知(6′)成立，所以可知$l(z)$存在，故f的存在性可证明.

于是集合$\mathcal{S}$存在.对于任意的$(Z_i, f_i), (Z_j, f_j) \in \mathcal{S}$，不妨令$Z_i \subseteq Z_j$，则设：

$$(Z_i, f_i) \preceq (Z_j, f_j) \iff f_j|_{Z_i} = f_i,\ Z_i \subseteq Z_j$$

成立偏序关系.

设对于任意的$(Z_i, f_i), (Z_j, f_j) \in \mathcal{S}$，令：

$$(Z_i, f_i) \preceq (Z_j, F_j), \forall i \le j \tag{9}$$

同时令$Z=\cup Z_k, \forall(Z_k,f_k)\in\mathcal{S}$，显于$(Z,f)$中的$f$满足(3)，并且对于所有的$k$满足：

$$(Z_k,f_k)\preceq(Z,f) \tag{10}$$

由(9)(10)可知满足Zorn引理，所以必然存在一个最大的延展，由之前的讨论可知，这个最大的延展必然是整个线性空间X.

$\square$