Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Индивидуальное домашнее задание №2

по «Математической статистике»

Вариант 509

Выполнили:

Студенты группы P3233

Хасаншин Марат

Шикунов Максим

Номер команд: 9

Санкт-Петербург

2024

Цель работы

На основе анализа малой выборки:

1) Построить вариационный ряд и выборочную функцию распределения
2) Найти оценки параметров распределения методом моментов
3) Получить оценки функции распределения и плотности распределения

Исходные данные

-1.71 -3.97 -6.07 -1.23 -0.71 -5.46 -4.25 -4.27 -4.42 -5.58 -5.13 -3.41 -7.14 -2.55 -4.37 -3.89

Ход выполнения

Вариационный ряд:
-0.71 -1.23 -1.71 -2.55 -3.41 -3.89 -3.97 -4.25 -4.27 -4.37 -4.42 -5.13 -5.46 -5.58 -6.07 -7.14

x_i	-0.71	-1.23	-1.71	-2.55	-3.41	-3.89	-3.97	-4.25	-4.27	-4.37	-4.42	-5.13
m_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

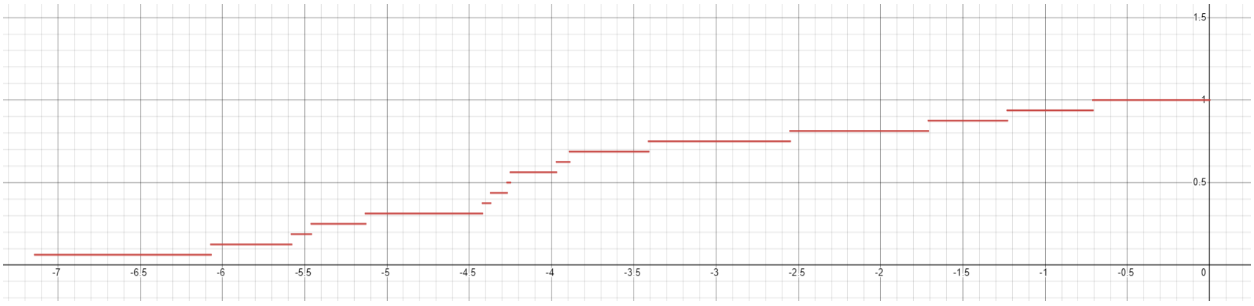
x_i	-5.46	-5.58	-6.07	-7.14
m_i	1	1	1	1
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Выборочная функция распределения:

x_i	-7.14	-6.07	-5.58	-5.46	-5.13	-4.42	-4.37	-4.27	-4.25	-3.97	-3.89	-3.41
F	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$

x_i	-2.55	-1.71	-1.23	-0.71
F	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

Выборочная функция распределения



Имеем равномерное распределение с параметрами a и b:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\,,\\ 0, & x>b\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

Выразим параметры распределения методом моментов:

$$\nu_1=M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0\cdot xdx+\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}0\cdot xdx=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}xdx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b\right)=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

$$\mu_2=M\left(\left(x-M(x)\right)^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(x)\right)^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}\left(x-M(x)\right)^2\cdot 0dx+$$

$$+\int_{a}^{b}\left(x-M(x)\right)^2\cdot\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}\left(x-M(x)\right)^2\cdot 0dx=\int_{a}^{b}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=$$

$$=\int_{a}^{b}\left(x^2-(b+a)x+\frac{(b+a)^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{b-a}dx=\int_{a}^{b}\frac{x^2}{b-a}dx-\int_{a}^{b}\frac{x(b+a)}{b-a}dx+\int_{a}^{b}\frac{(b+a)^2}{4(b-a)}dx$$

$$=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(b^2-a^2)(b+a)}{2(b-a)}+\frac{(b+a)^2(b-a)}{4(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(b+a)^2}{2}+\frac{(b+a)^2}{4}=$$

$$=\frac{4(a^2+ab+b^2)}{12}-\frac{6(a^2+2ab+b^2)}{12}+\frac{3(a^2+2ab+b^2)}{12}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

$$m=\frac{a+b}{2},\qquad \sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12},\qquad b>a$$

$$\begin{cases} 2m = b + a \\ \sigma \cdot 2\sqrt{3} = b - a \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2m + \sigma \cdot 2\sqrt{3} = 2b \\ 2m - \sigma \cdot 2\sqrt{3} = 2a \end{cases}, \qquad \begin{cases} m + \sigma \cdot \sqrt{3} = b \\ m - \sigma \cdot \sqrt{3} = a \end{cases}$$

$$a = m - \sqrt{3}\sigma, \qquad b = m + \sqrt{3}\sigma$$

Подставляем точечные оценки:

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^{15} x_i \cdot p_i = -4.01$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{16-1}\sum_{i=1}^{15} m_i \cdot (x_i - \hat{m})^2 = 2.9188$$

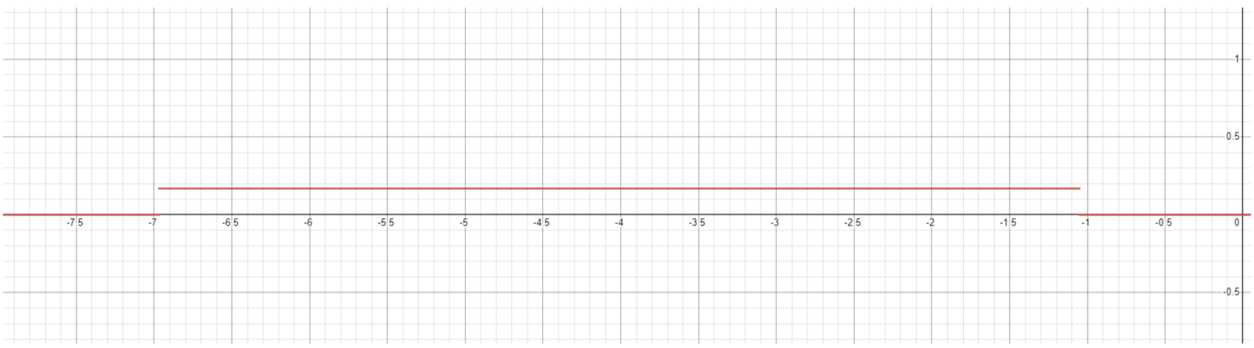
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{2.9188} = 1.7085$$

$$a = -4.01 - \sqrt{3} \cdot 1.7085 = -6.9691$$

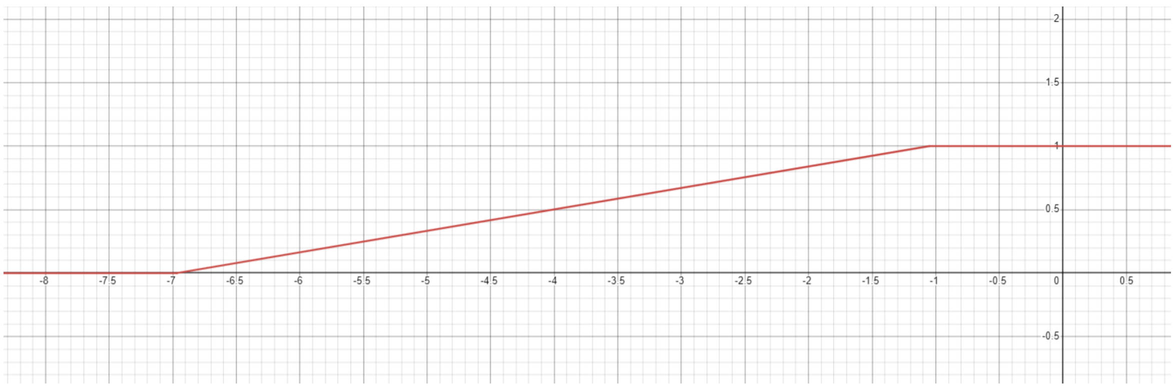
$$b = -4.01 + \sqrt{3} \cdot 1.7085 = -1.0509$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{5.9183}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x + 6.9691}{5.9183}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$f(x)$$



$$F(x)$$



Вывод

Получили оценки функции распределения и плотности распределения нашей выборки случайных величин