

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Индивидуальное домашнее задание №8

по «Математической статистике»

Вариант 9

Выполнили:

Студенты группы Р3233

Хасаншин Марат

Шикунов Максим

Номер команд: 9

Санкт-Петербург

2024

Цель работы

Используя метод наименьших квадратов, сгладить предложенную табличную зависимость. Вычислить невязки с точностью до сотых и отобразить на графике табличные данные и сглаживающую кривую. Линеаризовать зависимость.

Исходные данные

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
z	4.63	4.17	3.31	2.76	2.44	1.96	1.66

Ход выполнения

1. Сгладим наши измерения при помощи формулы $z = ae^{bt}$ и вычислим невязки с точностью до тысячных

x=t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y=ln(z)	1.533	1.428	1.197	1.015	0.892	0.673	0.507

Найдем коэффициенты a_0 и a_1 для линейного уравнения $a_0 + a_1x$ наилучшим образом приближающего y

Для этого вычислим \bar{y} , \bar{x} , \overline{xy} , $\overline{x^2}$ по формулам:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i & \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i & \overline{x^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ a_0 &= \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} & a_1 &= \frac{\overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\end{aligned}$$

$$\bar{y} = 1.035 \quad \bar{x} = 2 \quad \overline{xy} = 1.7205 \quad \overline{x^2} = 5$$

$$a_0 = 1.734$$

$$a_1 = -0.3495$$

Найдем a , z и b :

$$a = e^{a_0}$$

$$b = a_1$$

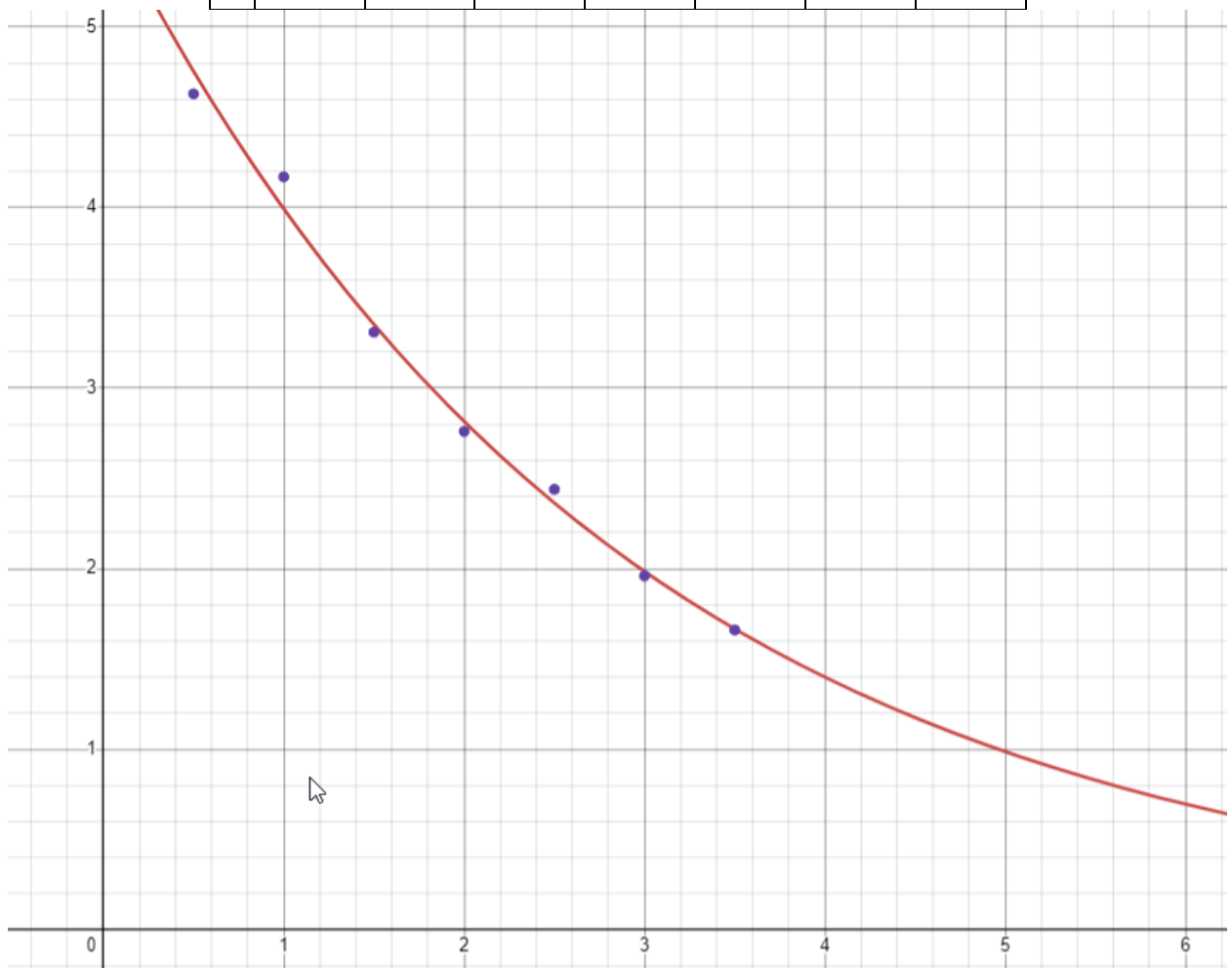
$$a = 5.663262$$

$$b = -0.3495$$

$$z = 5.663262 \cdot e^{-0.3495 \cdot t}$$

Вычисленные значения:

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
z	4.755	3.993	3.353	2.815	2.364	1.985	1.667



Разности между табличными и сглаженными значениями сведены в таблицу:

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
ε	-0.125	0.177	-0.043	-0.055	0.076	-0.025	-0.007

Сумма невязок: 0,058

2. Сгладим наши измерения при помощи формулы $z = \frac{1}{at+b}$ и вычислим невязки с точностью до тысячных

x=t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$y = \frac{1}{z}$	0.216	0.24	0.302	0.362	0.41	0.51	0.602

Найдем коэффициенты a_0 и a_1 для линейного уравнения $a_0 + a_1 x$ наилучшим образом приближающего y

Для этого вычислим \bar{y} , \bar{x} , \overline{xy} , $\overline{x^2}$ по формулам:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\bar{y}=0.378 \quad \bar{x}=2$$

$$\overline{xy}=0.884 \quad \overline{x^2}=5$$

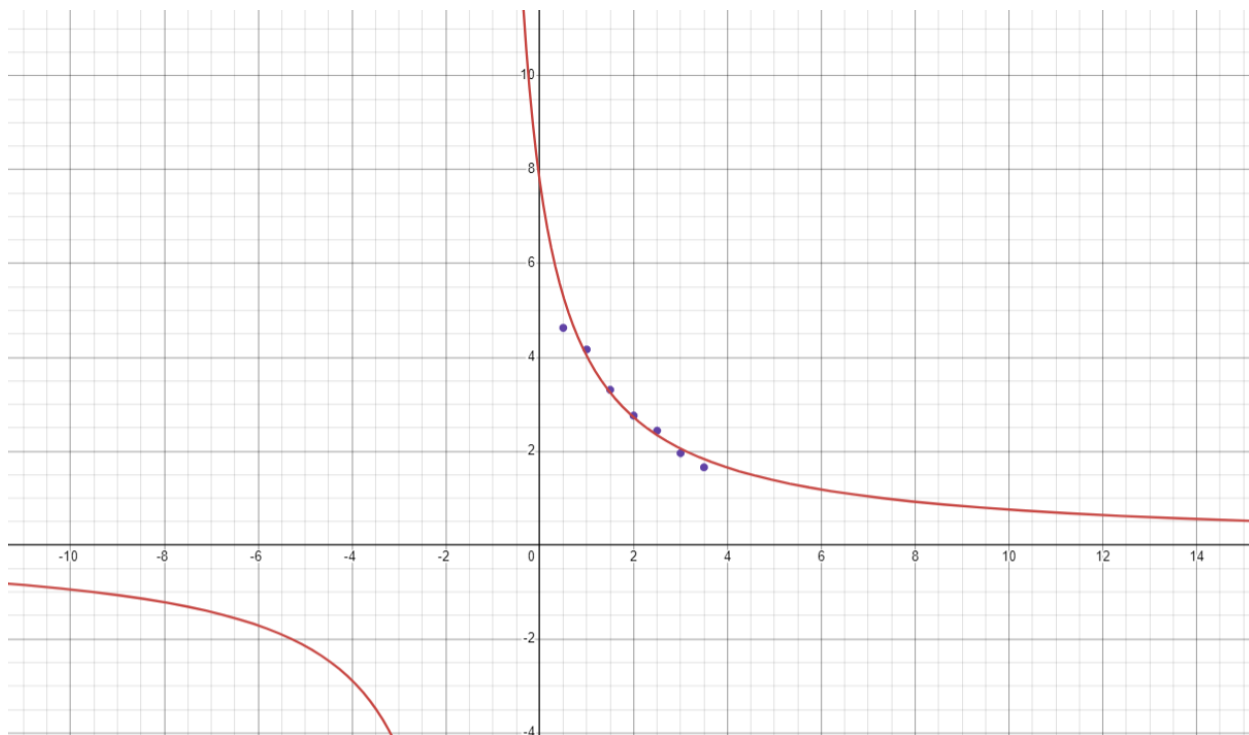
$$a_0 = \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 0.119$$

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{1.7205 - 1.035 \cdot 2}{5 - 2 \cdot 2} = 0.129$$

Найдем a , z и b

$$a = a_0 = 0.119 \quad b = a_1 = 0.129 \quad z = \frac{1}{0.119t + 0.129}$$

x=t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	5,298	4,026	3,246	2,720	2,340	2,054	1,830



x=t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
разница	-0,668	0,144	0,064	0,040	0,100	-0,094	-0,170

3. Сгладим наши измерения при помощи формулы $z = at^b$ и вычислим невязки с точностью до тысячных

x=ln t	-0,693	0	0,405	0,693	0,916	1,099	1,253
y = ln z	1.533	1.428	1.197	1.015	0.892	0.673	0.507

Найдем коэффициенты a_0 и a_1 для линейного уравнения $a_0 + a_1 x$ наилучшим образом приближающего y

Для этого вычислим \bar{y} , \bar{x} , \overline{xy} , $\overline{x^2}$ по формулам:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\bar{y}=1.035 \quad \bar{x}=0.525$$

$$\overline{xy}=0.331 \quad \overline{x^2}=0.677$$

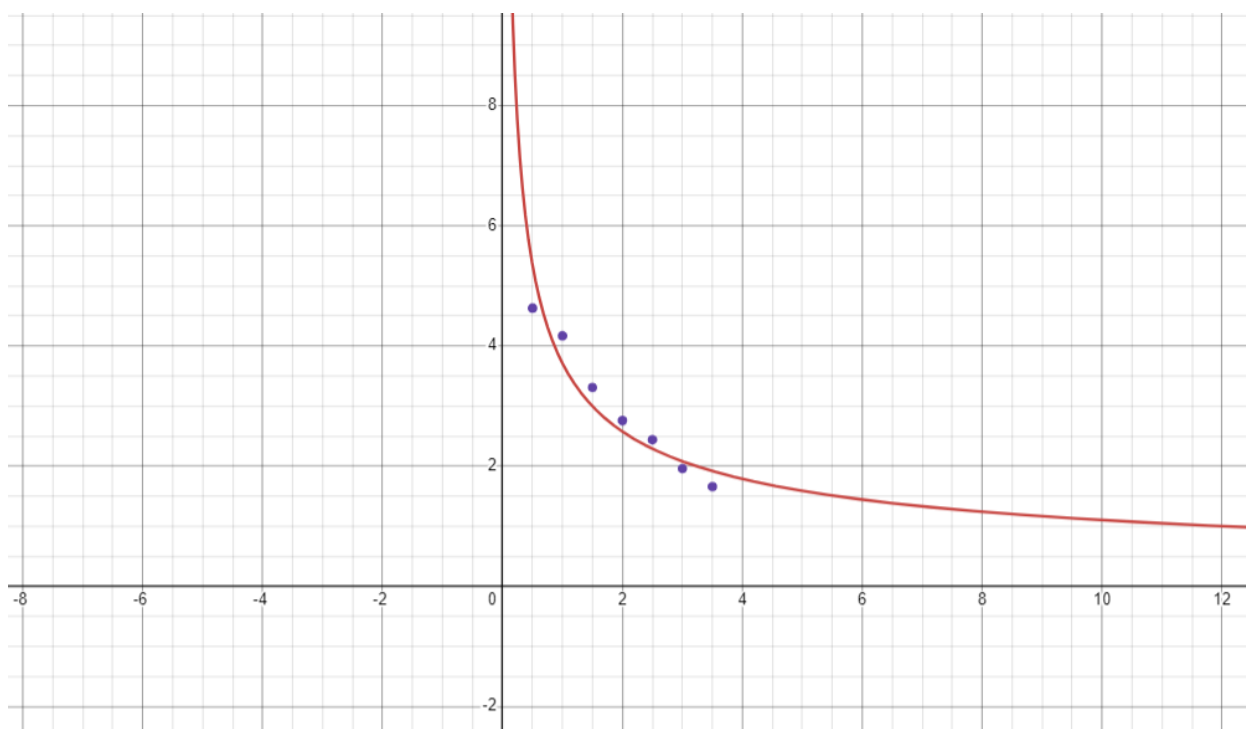
$$a_0 = \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 1.311$$

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -0.527$$

Найдем a , z и b

$$a = e^{1.311} = 3.712 \quad b = a_1 = -0.527 \quad z = 3.712t^{-0.527}$$

x=t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	5,349	3,712	2,997	2,576	2,290	2,080	1,918



x=t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
разница	-0,719	0,458	0,313	0,184	0,150	-0,120	-0,258

4. Сгладим наши измерения при помощи формулы $z = \frac{t}{at+b}$ и вычислим невязки с точностью до тысячных

$x = \frac{1}{t}$	2	1	0.66667	0.5	0.4	0.33333	0.28571
$y = \frac{1}{z}$	0.216	0.24	0.302	0.362	0.41	0.51	0.602

Найдем коэффициенты a_0 и a_1 для линейного уравнения $a_0 + a_1 x$ наилучшим образом приближающего y

Для этого вычислим \bar{y} , \bar{x} , \overline{xy} , $\overline{x^2}$ по формулам:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\bar{y}=0.378 \quad \bar{x}=0.741$$

$$\overline{xy}=0.223 \quad \overline{x^2}=0.864$$

$$a_0 = \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 0.511$$

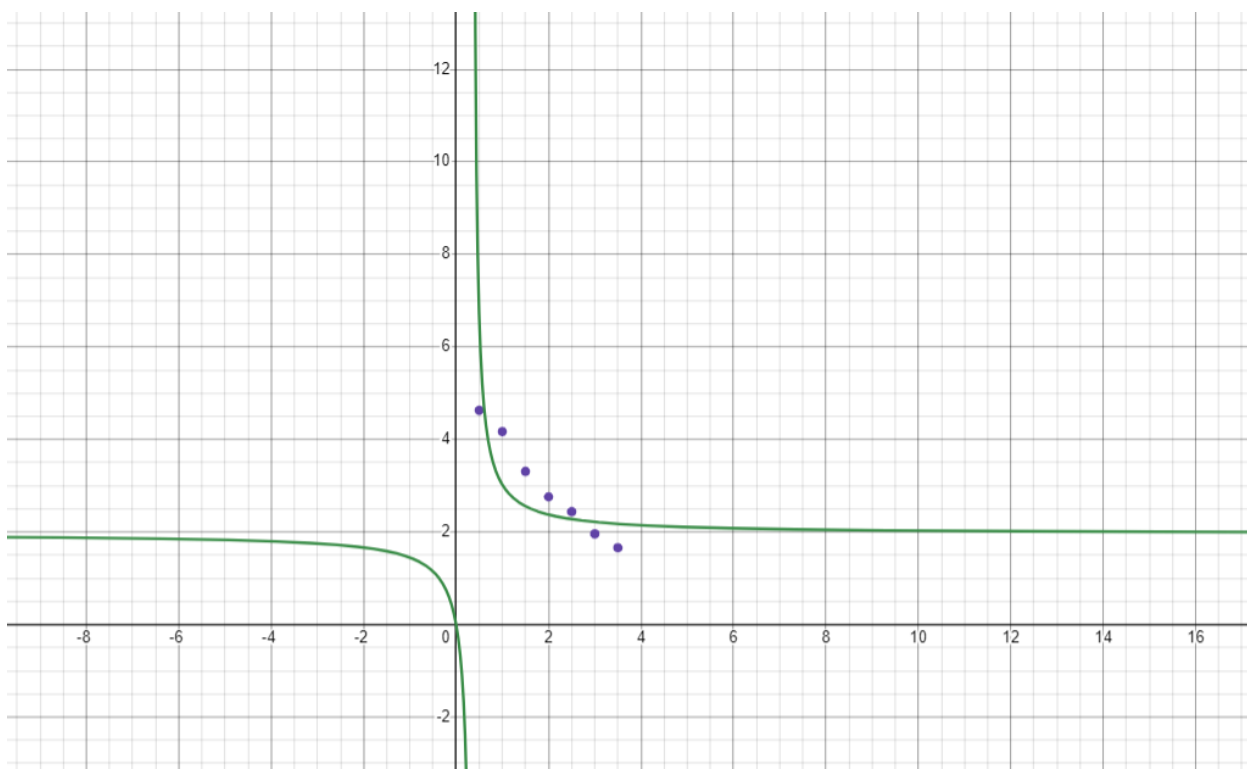
$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -0.18$$

Найдем a , z и b

$$a = a_0 = 0.511 \quad b = a_1 = -0.18 \quad z = \frac{t}{0.511t - 0.18}$$

x=t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
-----	-----	---	-----	---	-----	---	-----

y	6.635	3.023	2.558	2.376	2.278	2.218	2.176
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------



$x=t$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
разница	-2.005	1.147	0.752	0.384	0.162	-0.258	-0.516

Вывод

Сгладили предложенную зависимость данных по функции вида $z = ae^{bt}$.