DERIVADA PONTUAL

DEF.: Considere $y = f(x)$ uma função e $a \in D(f)$.
Define-se por "derivada de $f(x)$ no ponto de abscissa $x = a$ $[P(a, f(a))]$" como o valor do seguinte limite, caso exista:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Notação: $\frac{dy}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a) = D_x f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Ex.: Determine a derivada da função $f(x) = x^3$ no ponto de abscissa:

a) $x = 2$
b) $x = 10$
c) $x = -1$
d) $x = -\sqrt{7}$.

Sol.: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto y = f(x)$

onde $f(x) = x^3$.

a) $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} =$

$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} . (x^2 + x.2 + 2^2)}{\cancel{x-2}} =$

$= \lim_{x \to 2} x^2 + x.2 + 2^2$

$= 2^2 + 2^2 + 2^2 = 3.2^2 = 3.4 = 12.$

De modo geral, temos:

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} =$

$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)} . (x^2 + x.a + a^2)}{\cancel{x-a}} =$

$= \lim_{x \to a} x^2 + x.a + a^2 =$

$= a^2 + a^2 + a^2 = 3.a^2.$

b) $f'(10) = 3.10^2 = 300.$
c) $f'(-1) = 3.(-1)^2 = 3$
d) $f'(-\sqrt{7}) = 3.(-\sqrt{7})^2 = 3.7 = 21.$

Dada a função $f(x) = x^3$, podemos criar uma outra função

$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto y = f'(x)$

onde $f'(x) = 3.x^2$

chamada de "Função Derivada de $f(x)$".

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

FUNÇÃO DERIVADA

DEF.: Considere $y = f(x)$ uma função.

Define-se por "Função derivada de $f(x)$" como a função dada pela expressão

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

onde x_0 é uma variável auxiliar.

Obs: Tome $\Delta x = \boxed{h = x - x_0}$

Logo, $x = x_0 + h$.

Se $x \to x_0 \Rightarrow h \to 0$.

$$\therefore f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\therefore \boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Ex: Ache a função derivada de $f(x) = x^3$.

Sol: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3.x^2.h + 3.x.h^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}.(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} =$

$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3x.h + h^2 =$

$= 3x^2 + \cancel{3x.0} + \cancel{0^2} =$

$= 3x^2$.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

1) Se $f(x) = \operatorname{Sen} x$, então $f'(x) = \operatorname{Cos} x$.

2) Se $f(x) = \operatorname{Cos} x$, então $f'(x) = -\operatorname{Sen} x$.

3) Se $f(x) = C$, então $f'(x) = 0$, onde $C \in \mathbb{R}$ fixo.

4) Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$, onde $n \in \mathbb{R}$.

Sol. 1) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Sen}(x+h) - \operatorname{Sen} x}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} 2.\frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h}.\operatorname{Cos}\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}}.\operatorname{Cos} x =$

$= \operatorname{Cos} x$.

Obs: $\operatorname{Sen} p - \operatorname{Sen} q = 2.\operatorname{Sen}\left(\frac{p-q}{2}\right).\operatorname{Cos}\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Ex: Se $f(x) = x^7$, então $f'(x) = 7.x^6$

Ex: Se $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$, então

$f'(x) = -3.x^{-3-1} = -3.x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$.

Ex, Se $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, então

$f'(x) = \frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2.x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$x \geq 0$

$D(f) = [0, +\infty)$

$D(f') = (0, +\infty)$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Ceará

5) Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^x . \ln a$

onde $0 < a \neq 1$.

Ex: Se $f(x) = 3^x$, então $f'(x) = 3^x . \ln 3$.

Ex.: Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x . \ln e = e^x$

6) Se $f(x) = \log_a x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x . \ln a}$

onde $0 < a \neq 1$.

Ex: Se $f(x) = \log_2 x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x . \ln 2}$.

Ex: Se $f(x) = \ln x = \log_e x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x . \ln e} = \dfrac{1}{x}$.

7) Se $f(x) = g(x) + l(x)$,

então $f'(x) = g'(x) + l'(x)$.

8) Se $f(x) = g(x) - l(x)$,

então $f'(x) = g'(x) - l'(x)$.

9) Se $f(x) = c . l(x)$,

então $f'(x) = c . l'(x)$

10) Se $f(x) = g(x) . l(x)$,

então $f'(x) = g'(x) . l(x) +$

$+ g(x) . l'(x)$.

Ex.: Se $f(x) = 7.x^4 + 5.x^3 - 4.x^2 + 9x - 11$,

então $f'(x) = 7.4x^3 + 5.3x^2 - 4.2x^1 + 9.1 - 0 =$

$= 28.x^3 + 15.x^2 - 8x + 9$.

Ex: Se $f(x) = x^6 . \operatorname{Sen} x$, então

$f'(x) = 6.x^5 . \operatorname{Sen} x + x^6 . \operatorname{Cos} x =$

$= x^5 . (6.\operatorname{Sen} x + x . \operatorname{Cos} x)$.

So

obs