

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
**TEHNIČKI FAKULTET**  
Preddiplomski studij računarstva

Završni rad

**Detekcija sudara**

Rijeka, rujan 2017.

Marin Jurjević  
0069068944

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
**TEHNIČKI FAKULTET**  
Preddiplomski studij računarstva

Završni rad

**Detekcija sudara**

Mentor: izv.prof.dr.sc. Jerko Škifić

Rijeka, rujan 2017.

Marin Jurjević  
0069068944

Umjesto ove stranice umetnuti zadatak  
za završni ili diplomski rad

## **Izjava o samostalnoj izradi rada**

Izjavljujem da sam samostalno izradio ovaj rad.

Rijeka, rujan 2017.

-----  
Ime Prezime

# Zahvala

Zahvaljujem xxxxxx na podršci tijekom pisanja ovoga rada i korisnim raspravama i savjetima. Zahvaljujem xxxxx na podršku tijekom studiranja.

# Sadržaj

Popis slika	viii
Popis tablica	x
Popis kodova	xi
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Ograničavajući volumeni (eng. Bounding volumes)</b>	<b>3</b>
2.1 AABB - Axis Aligned Bounding Box . . . . .	4
2.1.1 Reprezentacije AABB-a . . . . .	5
2.2 Kuglice . . . . .	8
2.2.1 Implementacija klase za kuglice . . . . .	10
<b>3 Hijerarhija ograničavajućih volumena (eng. Bounding volume hierarchy)</b>	<b>13</b>
3.1 AABB stablo . . . . .	15
3.1.1 Ograničavanje 2 AABB minimalnim volumenom . . . . .	16
3.1.2 Izgradnja AABB stabla . . . . .	17
3.1.3 Pronalaženje sudara između dva stabla . . . . .	22
3.2 Prednosti i mane BVH-a . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Sudari, fizika i vanjske sile</b>	<b>25</b>
4.1	Implementacija klase Vector 3D . . . . .	26
4.2	Kretanje kuglica . . . . .	27
4.3	Sudari kuglica . . . . .	29
4.3.1	Sudari bez gubitka energije . . . . .	29
4.3.2	Zidovi i klasa Wall . . . . .	33
4.3.3	Sudari kuglica i zida . . . . .	37
4.4	Sila teža . . . . .	39
4.5	Elastični sudari . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Partitioniranje prostora</b>	<b>46</b>
5.1	Primitivna detekcija sudara . . . . .	46
5.2	k-d stablo (K-dimensional tree) . . . . .	48
5.2.1	Izgradnja k-d stabla . . . . .	51
5.2.2	Pretraga sudara u k-d stablu . . . . .	53
5.2.3	Implementacija klase za k-d stablo . . . . .	55
5.3	Prednosti i mane korištenja algoritama za partitioniranje prostora (k-d stabla) . . . . .	56
	<b>Bibliografija</b>	<b>57</b>
	<b>Pojmovnik</b>	<b>58</b>
	<b>Saetak</b>	<b>58</b>

# Popis slika

2.1	Primjeri ograničavajućih volumena . . . . .	3
2.2	Axis Aligned Bounding Box prikazan zelenom bojom . . . . .	4
2.3	Detektirani sudar između AABB-a koji se nije dogodio između objekata . . . . .	5
2.4	AABB min-max reprezentacija u 2D geometriji . . . . .	6
2.5	AABB min-dijametar reprezentacija u 2D geometriji . . . . .	7
2.6	AABB centar-radijus reprezentacija u 2D geometriji . . . . .	8
3.1	Primjer BVH[1] . . . . .	14
3.2	Prikaz kompliciranije BVH [1] . . . . .	14
3.3	Prikaz kompliciranog AABB stabla [2] . . . . .	15
3.4	Prikaz jednostavnog AABB stabla . . . . .	16
3.5	Minimalni ograničavajući volumen označen crvenom bojom . . . . .	16
3.6	Prikaz sudara 2 kuglice i pripadajućeg AABB stabla . . . . .	18
3.7	Stablo od 4 kuglice . . . . .	19
3.8	Prikaz AABB stabla za sliku 3.7 . . . . .	20
3.9	Sudar između 2 jednostavna stabla . . . . .	22
3.10	Struktura stabla za sliku 3.9 . . . . .	22
4.1	Kretanje kuglica realizirano jednostavnim zbrajanjem vektora . . . . .	28
4.2	Primjer sudara kuglica . . . . .	29



## *Popis slika*

4.3	Smjer gibanja kuglica nakon sudara . . . . .	30
4.4	Primjer sudara kuglica u 2 dimenzije . . . . .	30
4.5	Smjer gibanja kuglica nakon sudara u 2 dimenzije . . . . .	31
4.6	Vektor normale i tangente . . . . .	31
4.7	Prikaz jednog zida i normale na zid . . . . .	34
4.8	Prikaz zidova u koordinatnom sustavu . . . . .	35
4.9	Reakcija kuglice na sudar sa zidom . . . . .	37
4.10	Djelovanje sile teže . . . . .	39
4.11	Primjer sudara kuglica različite mase i brzine . . . . .	43
4.12	Primjer sudara kuglica različite mase i brzine . . . . .	44
5.1	Primjer kuglica na sceni . . . . .	48
5.2	Prikaz k-d stabla za 3 dimenzije . . . . .	49
5.3	Podjela prostora k-d stablom . . . . .	50
5.4	Prikaz strukture k-d stabla za sliku 5.3 . . . . .	52
5.5	Prikaz strukture k-d stabla za sliku 5.3 . . . . .	52

# Popis tablica

# Popis kodova

2.1	Struktura AABB-a koji koristi min i max točke . . . . .	5
2.2	Provjeravanje sudara za min-max reprezentaciju AABB-a[3] . . . . .	6
2.3	Struktura AABB-a koji koristi min točku i dijametar . . . . .	6
2.4	Provjeravanje sudara za min-width reprezentaciju AABB-a[3] . . . . .	7
2.5	Struktura AABB-a koji koristi centar i radijus . . . . .	7
2.6	Provjeravanje sudara za centar-radijus reprezentaciju AABB-a[3] . . . . .	8
2.7	Detekcija sudara između 2 sfere[3] . . . . .	9
2.8	Implementacija klase za kuglice . . . . .	10
3.1	Implementacija klase za AABB stablo . . . . .	19
4.1	Implementacija klase Vector3D . . . . .	26
4.2	Primjer lookAt vektora iz glm knjižnice . . . . .	34
4.3	Implementacija klase Wall . . . . .	36
4.4	Implementacije update funkcija . . . . .	41
5.1	Implementacija klase za k-d stablo . . . . .	55

# Popis psuedokodova

1	Algoritam za izračunavanje minimalnog ograničavajućeg volumena za 2 AABB-a . . . . .	17
2	Algoritam za ubacivanje lista u AABB stablo . . . . .	21
3	Algoritam za detekciju sudara između 2 AABB stabla . . . . .	23
4	Algoritam za izračunavanje smjera brzina nakon sudara između 2 kuglice	33
5	Algoritam za izračunavanje smjera kretanja kuglice nakon sudara sa zidom . . . . .	38
6	Algoritam za implementaciju slobodnog pada . . . . .	40
7	Algoritam za izračunavanje smjera i iznosa brzina sudara između 2 kuglice uz promjenu količine gibanja jedne kuglice . . . . .	45
8	Algoritam za primitivnu detekciju sudara između kuglica . . . . .	47
9	Algoritam za izgradnju k-d stabla[12] . . . . .	51
10	Algoritam za pretragu sudara u k-d stablu . . . . .	54

# Poglavlje 1

## Uvod

Detekcija sudara temelji se u na preklapanju primitiva(trokut, kvadrat, poligon,...)[3], tj. točaka primitiva objekata. U praksi danas postoji cijeli niz algoritama koji omogućuju brzu detekciju sudara između objekata [3]. Oni se mogu podijeliti na 2 dijela:

- Algoritme na podjelu objekata
- Algoritme na podjelu prostora

Postoje i još neki drugi algoritmi, no u ovom radu usredotočiti ćemo se na ova 2 najčešća pristupa. Ovisno o našim potrebama, odabiremo algoritam koji nam najviše odgovara. U ovom radu bit će opisana oba pristupa i prednosti i mane svakoga.

Prilikom sudara, objekti imaju i neku fizikalnu reakciju na sudar. Ovisno o tome, događa se i gubitak energije na objektima. U ovome radu biti će posvećena posebna pažnja u gubitku energije gibanja prilikom sudara neovisno o tome događa li se sudar od zida, ili od drugog objekta. U početku je zamišljeno da objekti u ovome radu budu kuglice s obzirom na jednostavnu implementaciju i vjerni prikaz detekcije sudara. Na objekte također mora djelovati neka vanjska sila, objekti se ne mogu kretati u prostoru sami od sebe. Odlučeno je da će na cijeloj sceni djelovati gravitacijska sila koja vuče objekte prema "podlozi" od koje se zatim objekti odbijaju. Kako je i već spomenuto, objekti prilikom odbijanja gube energiju.

Smisao ovog rada bio je vjerno prikazati i usporediti efikasnost algoritma u odnosu

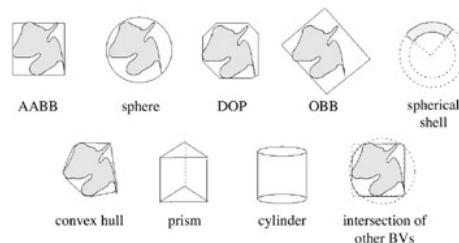
## *Poglavlje 1. Uvod*

na primitivnu detekciju sudara gdje se provjerava sudar jednog objekta u odnosu na sve ostale, itd. . U konačnosti, kada se efikasnost algoritma svede do zadovoljavajuće razine, objekti dobivaju neka svojstva da animacije dobiju smisao i dodatnu ljepotu (npr. sudari kuglica na biljarskom stolu, kapljice vode, ...).

## Poglavlje 2

# Ograničavajući volumeni (eng. Bounding volumes)

Ograničavajući volumeni su jednostavni volumeni kojima ograničavamo objekte da bi olakšali i ubrzali detekciju sudara. Ponekad, u praksi, imamo objekte i poligone između kojih je teško detektirati sudar. U tom slučaju, primitivi kojima ograničimo objekt, mogu nam znatno olakšati detektiranje sudara [3]. Umjesto da provjeravamo sudar između objekata, mi provjeravamo sudar između volumena koji ograničavaju objekt. Prednost toga je, kao što je već rečeno, znatno lakše detektiranje sudara, a mana je u tome što nikada ne možemo točno ograničiti objekt pa ćemo i ponekad detektirati sudar koji se nije dogodio.



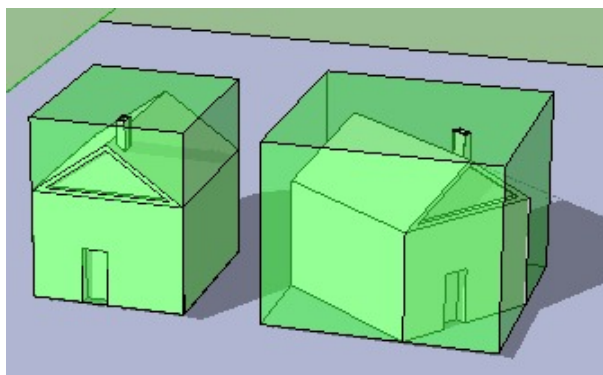
Slika 2.1 Primjeri ograničavajućih volumena

Kako je prikazano na slici 2.1 postoji puno ograničavajućih volumena[3]. U ovom radu biti će objašnjen AABB tj. Axis Aligned Bounding Box. Razlog tomu je AABB

stablo koje se koristilo kasnije kao Bouning Volume Hierarchy, no o tome će biti riječi kasnije.

## 2.1 AABB - Axis Aligned Bounding Box

Kao što i samo ime govori, AABB je ograničavajući kvadrat koji je poravnat sa koordinatnim osima. Ovo je i ujedno najjednostavniji, ali i najbrži ograničavajući volumen[3]. U 3D geometriji, kvadrat ima 6 stranica, a u 2D geometriji to je pravokutnik (sa 2 strane) [3].

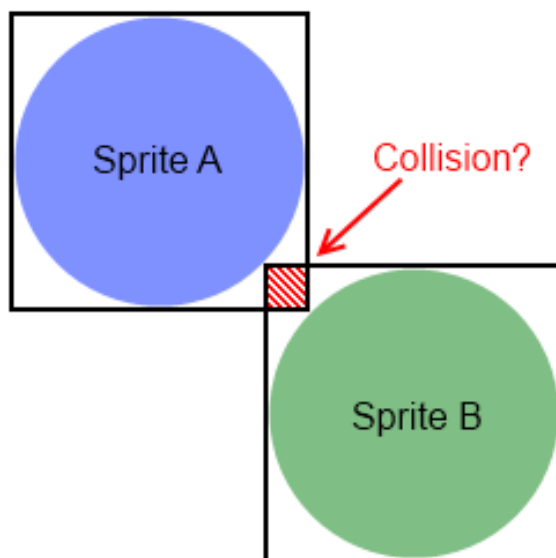


Slika 2.2 Axis Aligned Bounding Box prikazan zelenom bojom

S obzirom da je AABB najjednostavniji oblik volumena, on nije uvijek točan. Ograničeni smo na korištenje pravokutnika pa iz toga slijedi da nećemo moći ograničiti objekt na onaj način na koji bismo željeli tj. postojati će neki "offset". U tom slučaju može se dogoditi da detektiramo sudar između objekata iako se on nije dogodio kao što je prikazano na slici.

AABB u kodu možemo prikazati na nekoliko načina. Postoje 3 različite reprezentacije[3] te ćemo u nastavku proći kroz sve te pobliže opisati onu koja se koristila u ovome radu.





Slika 2.3 Detektirani sudar između AABB-a koji se nije dogodio između objekata

### 2.1.1 Reprezentacije AABB-a

Prva i ona najčešća reprezentacija je reprezentacija koja koristi minimalnu i maksimalnu točku objekta. Ukratko, pronađemo minimalnu i maksimalnu točku x,y i z koordinate te od tih točki napravimo kvadrat ako smo u 3D geometriji, tj. pravokutnik ako smo u 2D[3].

```
1 struct AABB{
2     float min[3];
3     float max[3];
4 }
```

Kod 2.1 Struktura AABB-a koji koristi min i max točke

## Poglavlje 2. Ograničavajući volumeni (eng. Bounding volumes)



Slika 2.4 AABB min-max reprezentacija u 2D geometriji

Detektiranje sudara za ovu reprezentaciju je trivijalna. Provjerava se je li jedna koordinata minimalne točke jednog AABB-a veća od maksimalne koordinate točke drugog AABB-a ili obrnuto. Ukoliko to nije slučaj u sve 3 dimenzije, događa se sudar[3].

```
1 bool Collision(AABB a, AABB b)
2 {
3     if (a.max[0] < b.min[0] || a.min[0] > b.max[0]) return 0;
4     if (a.max[1] < b.min[1] || a.min[1] > b.max[1]) return 0;
5     if (a.max[2] < b.min[2] || a.min[2] > b.max[2]) return 0;
6     return 1;
7 }
```

Kod 2.2 Provjeravanje sudara za min-max reprezentaciju AABB-a[3]

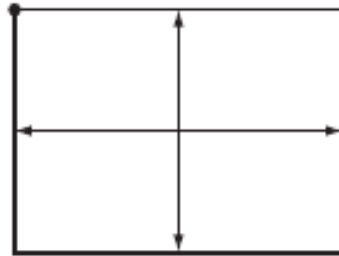
Druga reprezentacija je korištenje minimalne točke i dijametra tj. udaljenosti do ostalih vrhova. Određivanje ovakvog volumena malo je kompliciranije nego u prethodnom slučaju upravo zbog dijametra koji moramo odrediti da bi ograničili objekt.

```
1 struct AABB{
2     float min[3];
3     float dx,dy,dz; //udaljenost od minimalne tocke
4 }
```

Kod 2.3 Struktura AABB-a koji koristi min točku i dijametar

Detekcija sudara za ovu reprezentaciju je također nešto kompliciranija nego u prethodnom slučaju i najmanje je "privlačna" od sve 3 reprezentacije [3].

## Poglavlje 2. Ograničavajući volumeni (eng. Bounding volumes)



Slika 2.5 AABB min-dijametar reprezentacija u 2D geometriji

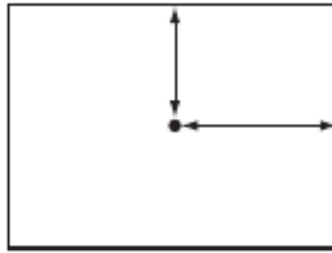
```
1 bool Collision(AABB a, AABB b)
2 {
3     float t;
4     if ((t = a.min[0] - b.min[0]) > b.d[0] || -t > a.d[0]) return 0;
5     if ((t = a.min[1] - b.min[1]) > b.d[1] || -t > a.d[1]) return 0;
6     if ((t = a.min[2] - b.min[2]) > b.d[2] || -t > a.d[2]) return 0;
7     return 1;
8 }
```

Kod 2.4 Provjeravanje sudara za min-width reprezentaciju AABB-a[3]

Posljednja reprezentacija, i ona koju smo koristili u radu, jest centar i radijus. Odredimo središnju točku našeg AABB-a i radijus u svim osima kojima izradimo AABB. Ova reprezentacija je najučinkovitija u terminima uštede memorije[3].

```
1 struct AABB{
2     float center[3];
3     float rad[3]; //radijus
4 }
```

Kod 2.5 Struktura AABB-a koji koristi centar i radijus



Slika 2.6 AABB centar-radijus reprezentacija u 2D geometriji

Detektiranje sudara za ovu reprezentaciju je trivijalno. Za svaku dimenziju provjeravamo odnose centara i radijusa u svakoj dimenziji.

```
1 bool Collision(AABB a, AABB b)
2 {
3     if (Abs(a.c[0] - b.c[0]) > (a.r[0] + b.r[0])) return 0;
4     if (Abs(a.c[1] - b.c[1]) > (a.r[1] + b.r[1])) return 0;
5     if (Abs(a.c[2] - b.c[2]) > (a.r[2] + b.r[2])) return 0;
6     return 1;
7 }
```

Kod 2.6 Provjeravanje sudara za centar-radijus reprezentaciju AABB-a[3]

Razlog biranja ove reprezentacije AABB-a leži u tome što smo odabrali kuglice kao objekte između kojih ćemo provjeravati sudar. S obzirom da je sfera, kao objekta, definirana centralnom točkom i radijusom, ova reprezentacija je odabrana kao najpogodnija.

## 2.2 Kuglice

Kao što je već ranije spomenuto, objekti koji će se koristiti za detektiranje sudara u prostoru su kuglice tj. sfere. Kuglice su odabrane iz razloga što se vrlo jednostavno može odrediti fizikalna reakcija na sudar i što se na njih mogu lijepo primijeniti vanjske sile kao gravitacija i slično. Samim korištenjem kuglica i prijašnjim odabirom AABB-a kao ograničavajućih volumena javljaju se pojedini problemi.

Prvi i najveći problem u ovome slučaju je već spomenut. Naime, kako je to i

## Poglavlje 2. Ograničavajući volumeni (eng. Bounding volumes)

prikazano na slici 2.3, AABB ograniči prostor koji sfera ne pokriva tj. prostor koji je izvan sfere. To se može objasniti vrlo jednostavnom matematikom. Ako prikažemo stranicu kvadrata kao:

$$a = 2 * r \quad (2.1)$$

gdje nam je  $r$  radijus sfere tj. kuglice. Dalje, dijagonala kvadrata iznosi:

$$diag = a * \sqrt{2} \quad (2.2)$$

može se zaključiti da je udaljenost od presjecišta dijagonala tj. centra kvadrata veća od radijusa sfere za  $\sqrt{2}$ . Što je veća sfera to je pogreška u ograničavajućem volumenu također veća. Zbog toga sigurno će se događati da ćemo otkrivati sudare i onda, kada se oni ne događaju, a pri vrlo velikim sferama to može stvarati puno nelogičnosti i čudnih fizikalnih reakcija na sudar. Kada su sfere vrlo malog radijusa, ta pogreška se u principu i ne primjeti, ali je ipak prisutna.

Na sreću ovome problemu se može uskočiti na vrlo dobar način. Naime, kako je prikazano na slici 2.1, sfera sama po sebi može biti ograničavajući volumen [3]. To proizlazi iz činjenice da se na vrlo jednostavan i elegantan način može detektirati sudar između 2 sfere.

```
1 bool SphereCollision(Sphere a, Sphere b)
2 {
3     // Calculate squared distance between centers
4     Vector d = a.c - b.c;
5     float dist2 = Dot(d, d);
6     // Spheres intersect if squared distance is less than squared sum of
       radii
7     float radiusSum = a.r + b.r;
8     return dist2 <= radiusSum * radiusSum;
9 }
```

Kod 2.7 Detekcija sudara između 2 sfere[3]

U stvarnom kodu, implementacija ove funkcije izgleda nešto drugačije nego što je opisana ovdje i u literaturi, ali u principu algoritam i pristup su jednaki.

## 2.2.1 Implementacija klase za kuglice

Implementacija klase za kuglice u principu je prilično jednostavna. Ona je prikazana sljedećim kodom:

```
1  public:
2      Vector3D vecDir;
3      AABB_box bBox;
4
5      Ball() = default;
6      Ball(const Point center, const float r, const float vecX, const
          float vecY,
7          const float vecZ, const float m, const uint i);
8      Ball(const float x, const float y, const float z, const float r
          ,
9          const float vecX, const float vecY, const float vecZ,
          const float m,
10         const uint i);
11     void drawSphere();;
12     void updatePosition(const float dt);
13     bool collision(Ball &collider);
14     template <typename T> bool collision(T &collider) {
15         return isOverlap(this->bBox, collider.bBox);
16     }
17     void resolveCollision(Ball &collider);
18     void resolveCollision(Wall &wall);
19     Point &getCenter() { return this->center; }
20     const float &x() const { return this->center.x; }
21     const float &y() const { return this->center.y; }
22     const float &z() const { return this->center.z; }
23     const float &rad() const { return this->r; }
24     const float &getMass() const { return this->mass; }
25     const uint &getI() const { return this->i; }
26 private:
27     Point center;
28     float r;
29     float mass;
30     uint i;
31 };
```

Kod 2.8 Implementacija klase za kuglice

U principu, da se primjetiti da se u samoj deklaraciji klase uglavnom nalaze

## Poglavlje 2. Ograničavajući volumeni (eng. Bounding volumes)

konstruktori i get metode za dobivanje privatnih varijabli. Get i template metode su definirane u samoj deklaraciji klase zbog svoje jednostavnosti i veće brzine pristupanja.

U privatnim varijablama klase definirali smo najvažnije informacije o kuglici, a to su:

- Center - točka centra za svaku kuglicu
- r - radijus sfere
- mass - masa sfere koja se kasnije koristi za količinu gibanja
- i - pozicija kuglice u listi kojom se osigurava da kuglica ne provjerava sudar sa samom sobom

U javnim varijablama odredili smo:

- bBox - odgovarajući AABB koji je opisan prethodno  
U ovom slučaju bBox dobiva vrijednosti radijusa i centra od sfere kroz konstruktor
- vecDir - vektor definiran u klasi Vector3D koja sadrži osnovne operacije nad vektorima (skalarni produkt, oduzimanje, normaliziranje i sl.)  
Ovaj objekt nam omogućava kretanje kuglice i olakšava izračunavanje sudara od zida i druge kuglice. Implementacija same klase biti će pokazana u kasnijim poglavljima.

Metode koje su definirane, u konačnosti govore same za sebe:

- collision - detektira sudar kuglice ovisno o tipu s kojim se sudara.  
Ukoliko se događa sudar sa drugom kuglicom, sudar se detektira na ranije opisani način. Sudar sa zidom i bilo kojim drugim objektom se detektira preko pridodanih AABB-a.
- resolveCollision - u metodama ovog imena definiramo fizikalnu reakciju kuglice na sudar. Ovisno o objektu s kojim se kuglica sudara, tako se i poziva određena resolveCollision funkcija
- drawSphere - funkcija za crtanje kuglica

## Poglavlje 2. Ograničavajući volumeni (eng. *Bounding volumes*)

Kuglice u prvom trenutku crtamo sa *glutSolidSphere* i pomoću *glTranslatef* ih pomičemo po prostoru. Kasnije, pri korištenju Opengl 3.3 kuglice će se crtati na drugačiji način.

- `updatePosition` - metoda kojom definiramo kretanje kuglica po prostoru uz pridodanu gravitaciju.

Detaljnija implementacija će biti kasnije objašnjena

U glavnom programu kuglice smo spremali u *std::vector*. Na taj način smo jednostavno iterativnim prolaženjem kroz listu iscrtavali kuglice, detektirali sudar između kuglica i zidova i u konačnosti pomicali kuglice po prostoru.



## Poglavlje 3

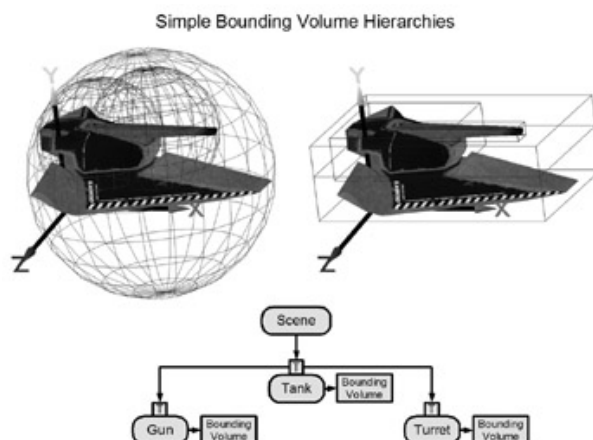
# Hijerarhija ograničavajućih volumena (eng. Bounding volume hierarchy)

Prije nego što krenemo sa stvarnom animacijom i detekcijom sudara, trebali bi znati kako u stvarnome životu komplicirane objekte smjestiti u ograničavajući volumen. S obzirom da su objekti inače vrlo komplicirani te sastavljeni od puno različitih primitiva, potrebna nam je struktura podataka koja će na vjeran način ograničiti naš objekt. Ukoliko naš objekt ograničimo manjim volumenima i na pametan način te volumene posložimo u stablo, dobili smo određenu hijerarhiju volumena ili BVH. Možemo to prikazati na ovakav način:

- Root element stabla ograniči cijeli objekt
- Njegova djeca ograniče lijevu i desnu polovicu objekta
- Djeca od ta 2 elementa podijele taj volumen na 2 dijela itd.
- Listovi sadrže ograničavajući volumen najmanjeg primitiva ili sami primitiv

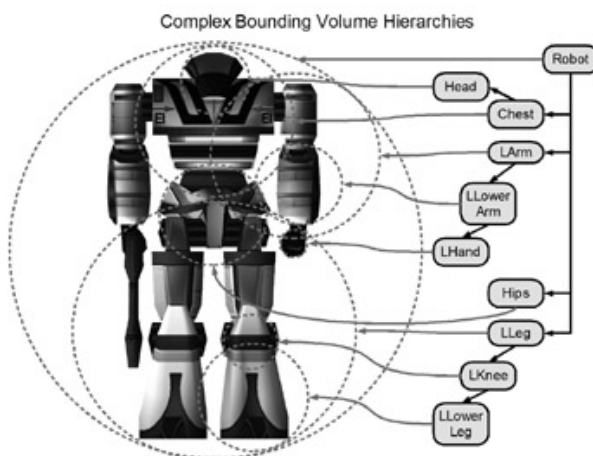
Tako nešto možemo prikazati slikom.

Poglavlje 3. Hijerarhija ograničavajućih volumena (eng. *Bounding volume hierarchy*)



Slika 3.1 Primjer BVH[1]

Konceptualno naš objekt bi prikazali na takav način. Ograničavajući volumen koji je roditelj u stablu, ograničuje druga 2 volumena i tako sve do listova koji su primitivi. Nešto kompleksnija struktura bila bi prikazana ovako: BVH možemo



Slika 3.2 Prikaz kompliciranije BVH [1]

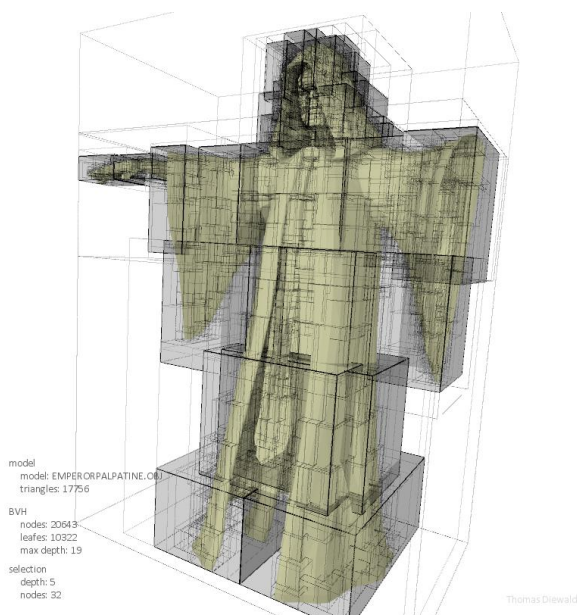
izgraditi od bilo kojih ograničavajućih volumena. U konačnici izgradnja samog stabla je uvijek proporcionalna broju elemenata od kojih je objekt sastavljen (složenost  $O(n)$ )[3]. Ono što je u ovom slučaju najbitnije je to da stablo ne moramo graditi u

svakom frameu što nam prilično ubrzava posao. Također, važno je da stablo bude balansirano. Ukoliko je stablo dobro balansirano, objekt koji ograničavamo će biti točnije ograničen, nego što bi to bilo u nekom drugom slučaju. Za detektiranje sudara moramo samo provjeriti sudaraju li se u početku root elementi stabala. Ukoliko ne, odmah možemo izaći i prekinuti daljnju pretragu sudara, no sam algoritam i implementacija biti će prikazana kasnije.

Za potrebe ovog objekta odabrali smo AABB stablo zbog njegove efikasnosti i jednostavnosti prilikom implementacije. Kako je već i spomenuto, sudar između 2 AABB-a vrlo je jednostavno detektirati i to je glavna prednost ovoga stabla.

### 3.1 AABB stablo

S obzirom da smo rekli sve važno vezano za BVH, najbolje da uvod u AABB stablo napravimo s jednom slikom. Ovakvo stablo izgleda prilično komplicirano. Ali, već i

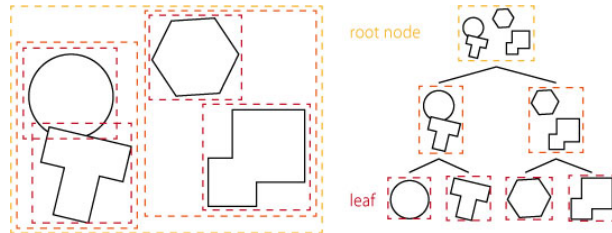


Slika 3.3 Prikaz kompliciranog AABB stabla [2]

iz ovakvog kompliciranog objekta možemo vidjeti da se događaju nekakve pogreške.

### Poglavlje 3. Hijerarhija ograničavajućih volumena (eng. Bounding volume hierarchy)

Te pogreške s jedno strane ipak nisu toliko bitne jer kada dođemo do djeteta toga elementa, primjetiti ćemo da se sudar ipak ne događa. Nešto jednostavniji primjer AABB stabla izgledao bi ovako:

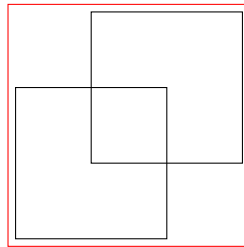


Slika 3.4 Prikaz jednostavnog AABB stabla

Ovdje smo cijelu scenu podijelili AABB stablom, ali pristup je isti dijelimo li cijelu scenu ili jedan objekt. Scenu ćemo podijeliti ukoliko želimo provjeriti sudar zrake sa određenim objektom, a objekte ćemo podijeliti ukoliko želimo provjeriti sudar između samih objekata [3].

#### 3.1.1 Ograničavanje 2 AABB minimalnim volumenom

Prije nego što se upustimo u izgradnju samog AABB stabla, potrebno je pronaći način kako 2 AABB ograničiti jednim većim volumenom. Uvjet je da je taj ograničavajući volumen minimalan za 2 AABB čiji ograničavajući volumen tražimo.



Slika 3.5 Minimalni ograničavajući volumen označen crvenom bojom

Kako je to spomenuto ranije u poglavlju 2.1.1, koristili smo reprezentaciju AABB-a sa točkom centra i radijusom. Pronalaženje ograničavajućeg volumena za ovakvu

reprezentaciju AABB-a malo je zahtjevnije nego u slučaju sa min-max reprezentacijom.

---

**Pseudokod 1** Algoritam za izračunavanje minimalnog ograničavajućeg volumena za 2 AABB-a

---

```
function GETFATTENAABB(AABB a, AABB b)
    AABBFattenAABB
    FattenAABB.r =  $\frac{\text{distance}(a.\text{center}, b.\text{center})}{2}$  + Max(a.r, b.r)
    FattenAABB.center = median(a.center, b.center)
    return FattenAABB
end function
```

---

Jednostavnom matematikom izračunamo udaljenost između 2 centra i pribrojimo joj veći od 2 radijusa (u našem slučaju radijusi su jednaki, ali zbog svih slučajeva stavljen je odabir maksimuma) da dobijemo radijus za naš AABB. Centar je jednostavno određen srednjom točkom između 2 centra od ulaznih AABB-a. Veći radijus odabran je iz razloga da s manjim nećemo moći ograničiti oba AABB-a i to zapravo neće biti ograničavajući volumen za 2 željena AABB-a.

### 3.1.2 Izgradnja AABB stabla

Za izgradnju AABB stabla postoje 3 načina[4]:

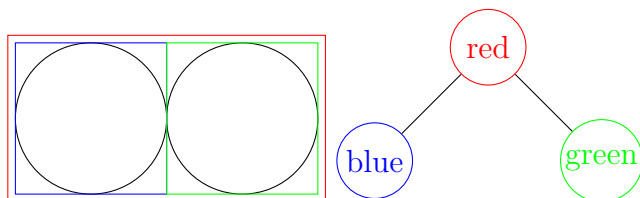
- Top down konstrukcija
- Bottom up konstrukcija
- Ubacivanje elemenata u stablo

Za sva 3 načina, potrebno je odabrati strategiju koja će napraviti što manje stablo. Ukoliko nam je stablo veliko pretraga elemenata u kojima se događa sudar će duže trajati. Zbog toga, potrebno je odabrati strategiju koja će stvoriti dobro balansirano ili približno dobro balansirano stablo[3]. Ukoliko i ne stvorimo dobru strategiju za izgradnju stabla, uvijek možemo balansirati stablo "ručno" tj. putem funkcije. Ovo nikako nije poželjan slučaj. Time se gubi dodatno vrijeme na procesoru i funkcija za balansiranje je sama po sebi komplicirana i zahtjeva  $O(n)$  operacija. Za Top down i

### Poglavlje 3. Hijerarhija ograničavajućih volumena (eng. Bounding volume hierarchy)

Bottom up konstrukciju potrebno je odabrati ravninu presijecanja (eng. Partitioning plane). Izgradnja ovoga stabla je u principu kao izgradnja svakog drugog stabla, samo je odabir ravnine presijecanja posao koji zahtjeva veliku količinu znanja i testiranja da u konačnici naše stablo bude minimalno. Ravnina presijecanja, kao što joj i samo ime govori, presjeći će listu naših objekata i pripadajućih AABB-a na onaj način kojim ćemo dobiti što manje stablo. Najjednostavniji model ravnine presijecanja je taj da se u listi elemenata odabere median element i da s obzirom na njegov AABB, izrađuje lijeva i desna grana stabla. Kao što je već rečeno, root element stabla će biti cijeli objekt te je potrebno samo odabrati pripadajuću točku centra i radijus (na ranije spomenuti način opisan u poglavlju 3.1.1 samo sa listom elemenata).

U ovom radu, odabrali smo treću strategiju za izgradnju stabla. Ubacivanje elemenata u prvom trenutku činilo se kao najlogičniji izbor jer je glavna ideja bila da se stablo elemenata izgradi prilikom sudara kuglica.



Slika 3.6 Prikaz sudara 2 kuglice i pripadajućeg AABB stabla

Prema slici 3.6 stablo bi izgradili vrlo jednostavno. Nakon detekcije sudara, stvorili bi novi element, koji bi bio root element stabla (na slici 3.6 crvenom bojom). Njegov lijevi element pokazivao bi na lijevi AABB (plavom bojom), a desno dijete bi pokazivalo na desni AABB (zelenom bojom).

Iako je primjer dosta trivijalan, još uvijek ne znamo kako nam klasa za AABB stablo izgleda, stoga još uvijek je sve prilično apstraktno. Klasa, kao i bilo koja druga klasa za stablo će sadržavati na lijevi i desni element stabla. To smo riješili pomoću "pametnih" pokazivača tj. u C++-u, `unique_ptr`. Ovakav tip pokazivača nas rasterećuje brige o memoriji i njezinom brisanju. Osim toga, sadržimo "običan" pokazivač na element roditelja. Važan podatak koji nam također treba je i dubina stabla. Osim svega navedenog, ovakav tip stabla gradili smo u konstruktoru. Nema

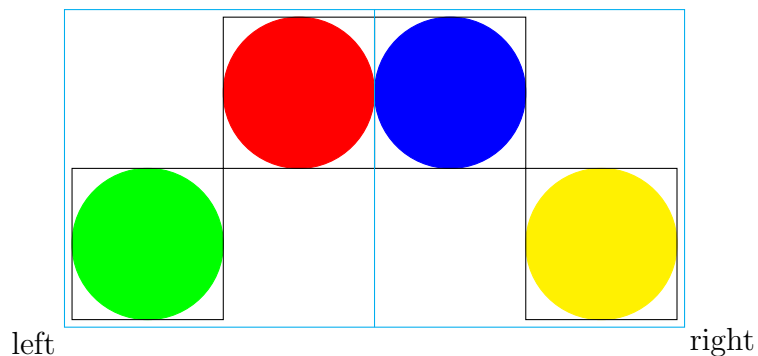
### Poglavlje 3. Hijerarhija ograničavajućih volumena (eng. *Bounding volume hierarchy*)

smisla stvarati AABB stablo od jedne kuglice, stoga je ovo bio zgodan način da se olakša sama implementacija algoritma za dodavanje dodatnih elemenata. Jednom kada bi izgradili stablo od 2 elementa, mogli smo dodati u njega bilo koji drugi element ubacivanjem na najbolju poziciju, tj. na poziciju gdje ćemo imati minimalno stablo.

```
1  class Node {
2      typedef std::unique_ptr<Node> ptr;
3      public:
4          Node() = default;
5          Node(const AABB_box bbox);
6          Node(ptr &left, ptr &right);
7      private:
8          AABB_box box;
9          ptr left;
10         ptr right;
11         Node *parent;
12         int height;
13 };
```

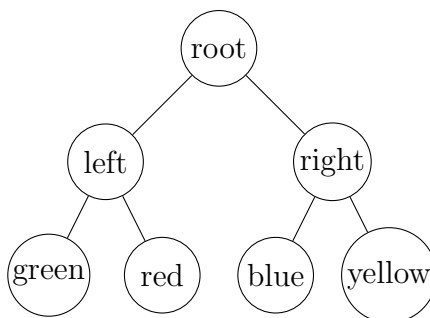
Kod 3.1 Implementacija klase za AABB stablo

Recimo da je bilo potrebno stvoriti iduću situaciju:



Slika 3.7 Stablo od 4 kuglice

Prvo se sudare plava i crvena kuglica te se na taj način preko konstruktora izradi stablo sa 2 elementa. Nakon toga prvo udara žuta, a nakon toga zelena kuglica. Stablo koje ćemo dobiti izgledati će:



Slika 3.8 Prikaz AABB stabla za sliku 3.7

Nakon udara svake kuglice, ubacujemo novi AABB u naše stablo. Za to je korišten vrlo jednostavan algoritam. Primjećujemo da svaki element koji ubacujemo u stablo će biti list, stoga možemo slobodno reći da ova funkcija realizira ubacivanje lista u stablo[5]. Prije samog algoritma, treba naglasiti da napisani algoritam možda nije najtočniji i možda ne radi za sve slučajeve. Algoritam je u svakom slučaju nedovoljno testiran, ali za ovako mali primjer poslužio nam je da vrlo dobro prikažemo strukturu AABB stabla. Algoritam radi na jednostavan način. Iteriramo po kreiranom stablu i izračunavamo površinu AABB-a od elementa koji želimo ubaciti i lijevog i desnog djeteta. Ukoliko je površina AABB-a od lijevog djeteta i elementa manja od površine AABB-a i desnog djeteta, iteriramo u lijevu stranu stabla. Ako je obrnuto, iteriramo na desnu stranu i tako sve dok ne dođemo do posljednjeg elementa stabla[5]. S obzirom jesmo li išli lijevo ili desno, tu ubacujemo naš novokreirani element u stablo. U zadnjem koraku, vraćamo se od lista prema root elementu i radimo "update" AABB-a nad svakim elementom stabla.



---

**Pseudokod 2** Algoritam za ubacivanje lista u AABB stablo

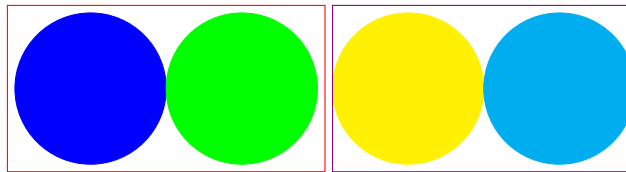
---

```
function INSERTLEAF(AABBtree node, AABB box)  
  while node is not leaf do  
    if Surface(node → left → box, box) > Surface(node → right →  
    box, box) then  
      isLeft = false  
      node = node → right  
    else  
      isLeft = true  
      node = node → left  
    end if  
  end while  
  if isLeft true then  
    NewNode(box)  
    FatAABB(node → parent → left, box)  
    NewNode → parent = node → parent  
    node → parent → left = NewNode  
  else  
    NewNode(box)  
    FatAABB(node → parent → right, box)  
    NewNode → parent = node → parent  
    node → parent → right = NewNode  
  end if  
  Update tree until root with new leaf  
end function
```

---

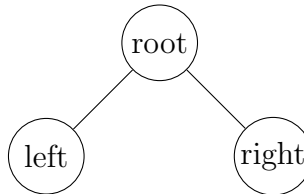
### 3.1.3 Pronalaženje sudara između dva stabla

Nakon što smo izgradili naša stabla detektirati sudar između više njih nije nikakav problem. S obzirom da su stabla sagrađena od AABB-a potrebno je provjeriti samo root elemente, i ako se oni sudaraju idemo u daljnju elemenata stabala. Ukoliko sudara između root elemenata nije detektiran, sudar se nije ni dogodio. Ovakav način zahtjeva  $O(\log N)$  operacija [3]. Za jednostavan primjer možemo promotriti situaciju sa 2 jednostavna stabla koja imaju po 2 elementa.



Slika 3.9 Sudar između 2 jednostavna stabla

Za jedno i drugo stablo vrijedi struktura: U nekom trenutku, mi želimo točno



Slika 3.10 Struktura stabla za sliku 3.9

znati da se dogodio sudar između zelene i žute kuglice (kuglice su prikazane drugom bojom samo radi razumjevanja). Na već opisani način detektiramo na kojem mjestu će se dogoditi sudar. Kada otkrijemo u kojem se listu dogodio sudar, taj sudar ćemo na neki određeni način riješiti i napraviti update na cijelom stablu. U našem slučaju kuglice su se odbile bez gubitka energije.

---

**Pseudokod 3** Algoritam za detekciju sudara između 2 AABB stabla

---

```
function SEARCHCOLLISION(AABBtree a, AABBtree b)
  if isCollision(a, b) is false then return
  end if
  while a is not leaf do
    if isCollision(a → left, b) then
      a = a → left
    else
      a = a → right
    end if
  end while
  while b is not leaf do
    if isCollision(b → left, a) then
      b = b → left
    else
      b = b → right
    end if
  end while
  ResolveCollision(a, b)
end function
```

---

Kao i u algoritmu 2, ovaj algoritam također nije istestiran do kraja i vjerovatno u sebi ima neke pogreške, no za ovako jednostavne primjere će raditi. Ovime smo zapravo pokazali da nakon potpunog razumijevanja AABB stabla i strukture možemo vrlo jednostavno napisati kod za izgradnju stabla i detektiranje sudara između 2 ili više stabala.

## 3.2 Prednosti i mane BVH-a

Glavna prednost BVH-a je brzina izgradnje stabala. Ovakvim jednostavnim algoritmima možemo izgraditi stablo i u njemu vrlo brzo provjeriti sudare. Ukoliko imamo puno manjih objekata koji se kreću po sceni, pretraga sudara je vrlo brza. Stablo ne moramo raditi u svakoj sekundi, nego ga je dovoljno izgraditi na početku i zatim samo tokom vremena raditi "update". Nažalost, u prvoj fazi izrade projekta, nije se smislila adekvatna strategija za detektiranje sudara pa je i samo korištenja BVH-a palo u vodu.

Mana BVH-a je što se vrlo dobro mora razumjeti struktura s kojom se barata. Za razliku od algoritama koji particioniraju prostor i koji su intuitivniji za shvatiti, BVH zahtjeva od nas da dobro razumijemo algoritam i da na pametan način odaberemo os po kojoj ćemo podijeliti objekt ili scenu.

Zaključno, BVH je struktura podataka kojom ćemo na vrlo jednostavan i jeftin način detektirati sudare na sceni ili među objektima. Uz malo više uloženog vremena, možemo napisati vrlo dobar algoritam koji će vrlo brzo detektirati sve sudare na sceni. Kako je i rečeno, od ovoga se odustalo. S vremenom nakon što je i sama struktura postala jasnija, donijele su se neke druge odluke vezane za sam rad i više nije imalo smisla koristiti i dalje implementirati BVH.

## Poglavlje 4

# Sudari, fizika i vanjske sile

U ovom poglavlju, prije implementacije algoritma za podjelu prostora, prvo je potrebno opisati kakve će se uopće reakcije događati među kuglicama prilikom sudara. Potrebno je također i ograničiti našu scenu svojevrsnim zidovima. Vanjska sila je također važan dio ovoga projekta. Bilo je potrebno dodati gravitaciju na cijeloj sceni da se dobije dojam padanja kuglica i odbijanja od podloge.

Prije početka samog rješavanja sudara među kuglicama potrebno je definirati i njihova kretanja. Kretanja su definirana u pomoćnoj klasi *Vector3D*. Pomoću ove klase također su definirane normale zidova. Ovakav pristup znatno je olakšao samo rješavanje sudara jer se izjelo korištenje kompliciranih trigonometrijskih jednadžbi i funkcija.

## 4.1 Implementacija klase Vector 3D

```
1  class Vector3D {
2  public:
3      Vector3D() = default;
4      Vector3D(float x, float y, float z) {
5          this->vec.emplace_back(x);
6          this->vec.emplace_back(y);
7          this->vec.emplace_back(z);
8      }
9      Vector3D(Point point) {
10         this->vec.emplace_back(point.x);
11         this->vec.emplace_back(point.y);
12         this->vec.emplace_back(point.z);
13     }
14     Vector3D operator*(float const &scalar) {
15         return Vector3D(this->x() * scalar, this->y() * scalar,
16             this->z() * scalar);
17     }
18     Vector3D operator-(Vector3D &rhs) {
19         return Vector3D(this->x() - rhs.x(), this->y() - rhs.y(),
20             this->z() - rhs.z());
21     }
22     Vector3D normal() {
23         float mag = std::sqrt(std::pow(this->x(), 2) + std::pow(
24             this->y(), 2) +
25             std::pow(this->z(), 2));
26         if (mag == 0) {
27             return Vector3D(1, 0, 0);
28         }
29         return Vector3D(this->x() / mag, this->y() / mag, this
30             ->z() / mag);
31     }
32     const float &x() const { return vec[0]; }
33     const float &y() const { return vec[1]; }
34     const float &z() const { return vec[2]; }
35     void setX(const float &x) { vec[0] = x; }
36     void setY(const float &y) { vec[1] = y; }
37     void setZ(const float &z) { vec[2] = z; }
38 private:
39     std::vector<float> vec;
```

```
38  };
39
40  inline float operator*(const Vector3D &lhs, const Vector3D &rhs) {
41      return lhs.x() * rhs.x() + lhs.y() * rhs.y() + lhs.z() * rhs.z
42          ();
43  }
```

Kod 4.1 Implementacija klase Vector3D

Ova klasa kako joj i samo ime govori, sadrži implementaciju najvažnijih vektorskih operacija:

- Operator `*` će nam izračunati skalarni produkt između 2 vektora
- Funkcija `normalize` će normalizirati vektor

Naravno, za same vektore postoji još niz operacija, no ovdje su nam za sada bile potrebne samo ove dvije. Postavljene su i *Set* metode za postavljanje vrijednosti u koordinate vektora. Ova klasa je header only i napisana je prema literaturi [6].

## 4.2 Kretanje kuglica

U ovom kratkom paragrafu objasniti ćemo kako se realiziralo kretanje kuglica po sceni. Kako je to objašnjeno u poglavlju 2.2, za kretanje smo koristili funkciju pod imenom *updatePosition* koja je za argument primala broj *dt* što u prijevodu znači delta time ili razlika u vremenu između 2 framea. Brzinu kretanja kuglice definirali smo kao:

- Brzina u X smjeru
- Brzina u Y smjeru
- Brzina u Z smjeru

Informacije o brzinama bile su spremljene u strukturi podataka *Vector3D*, koju smo opisali u prethodnom paragrafu 4.1. Kretanje kuglica definira se prema klasičnoj formuli iz mehanike:

$$v = \frac{s}{t} \quad (4.1)$$

#### Poglavlje 4. Sudari, fizika i vanjske sile

gdje je:

- $v$  - brzina
- $s$  - prijeđeni put
- $t$  - vrijeme

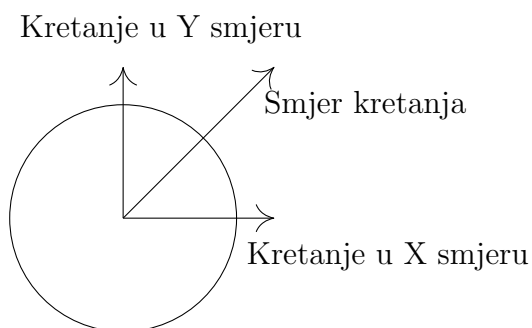
S obzirom da nama ne treba izračun brzine, nego nam je potreban put koji će kuglica prijeći u svakom trenutku, malom izmjenom i prilagodbom jednadžbe dobijemo:

$$\begin{aligned}s_x &= vector.x \, dt \\ s_y &= vector.y \, dt \\ s_z &= vector.z \, dt\end{aligned}\tag{4.2}$$

gdje nam je:

- $vector.(x, y, z)$  - brzina u danoj koordinati
- $s(x, y, z)$  - prijeđeni put u danoj koordinati
- $dt$  - razlika vremena između 2 framea

Na ovakav jednostavan način dobili smo kretanje kuglice u bilo kojem smjeru, za sad bez nikakve vanjske sile tj. gravitacije.



Slika 4.1 Kretanje kuglica realizirano jednostavnim zbrajanjem vektora

Sada kada nam je jasno definirano kretanje kuglica, potrebno je definirati kako će se kuglice ponašati prilikom sudara. S obzirom da su nam sve informacije spremljene



u vektoru, to ne bi smjelo predstavljati nikakav problem. Korištenjem jednostavnih formula iz mehanike može se vrlo jednostavno dobiti reakcija kuglice na sudar sa drugom kuglicom ili zidom.

## 4.3 Sudari kuglica

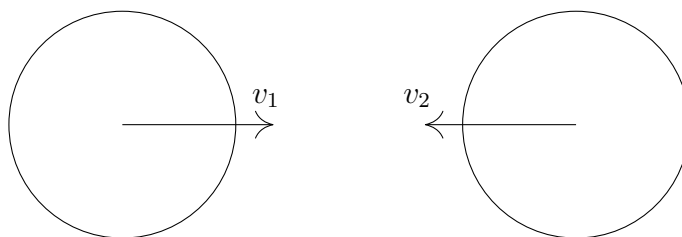
Sudari su općenito mogu podijeliti u 2 skupine:

- Neelastične sudare
- Elastične sudare

Neelastični sudari su oni sudari kod kojih se energija sustava gubi zbog različitih razloga (deformacija tijela u sudaru, toplina i sl.). Budući da u realnom sudaru najčešće dolazi djelomičnog gubitka energije, ima smisla ukazati i na tu problematiku[7]. Analiza takvog sudara i dalje se temelji na zakonima očuvanja. Kod elastičnih sudara u zatvorenom sustavu nalaze se sva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  koja se gibaju brzinama  $v_1$  i  $v_2$  prije sudara, odnosno brzinama  $v'_1$  i  $v'_2$  poslije sudara[7].

### 4.3.1 Sudari bez gubitka energije

U prvom i najosnovnijem slučaju, razmotrili smo situaciju gdje nema nikakvog gubitka energije i gdje izlazne brzine nakon sudara ostaju jednake. Prva situacija je bila sljedeća.



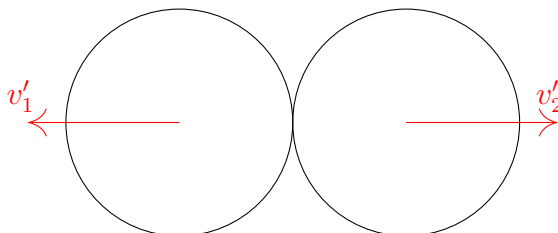
Slika 4.2 Primjer sudara kuglica

Kuglice se kreću jedna prema drugoj, jedan se kreće brzinom  $v_1$ , a druga brzinom

#### Poglavlje 4. Sudari, fizika i vanjske sile

$v_2$ . U trenutku sudara, kuglice će se odbiti jedna od druge i nastaviti se kretati brzinom  $v'_1$  tj.  $v'_2$ .

Nakon sudara vrijediti će sljedeće:

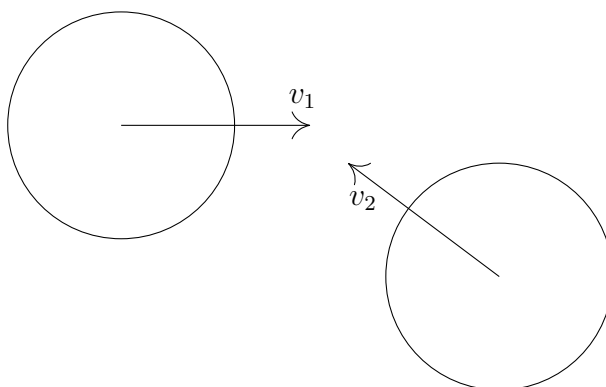


Slika 4.3 Smjer gibanja kuglica nakon sudara

- $v'_1 = -v_1$
- $v'_2 = -v_2$

Ovakav slučaj je trivijalan i nije problem odrediti smjer kretanja kuglica nakon sudara. Kretanje kuglica je samo u jednoj dimenziji te ukoliko pomnožimo brzinu kretanja kuglice sa  $(-1)$  dobiti ćemo rezultatnu brzinu nakon sudara.

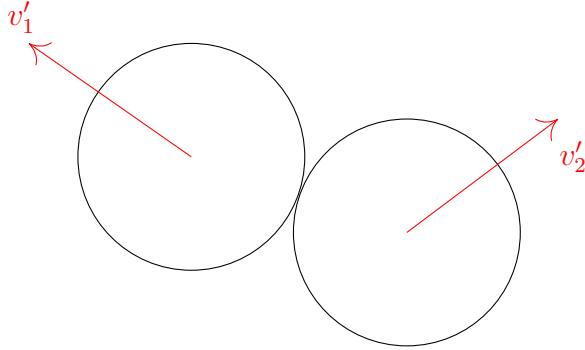
Sljedeća situacija je kompliciranija. Kretanje jedne kuglice se događa u 2 dimenzije i to sada dodatno komplicira stvari. Situacija izgleda ovako: Primjetimo kako se



Slika 4.4 Primjer sudara kuglica u 2 dimenzije

druga kuglica, koja se giba brzinom  $v_2$ , giba u 2 dimenzije (ima komponentu brzine u

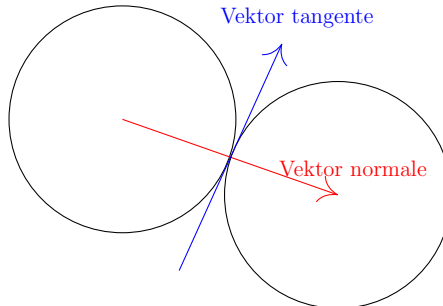
X smjeru i komponentu brzine u Y smjeru). Pretpostavimo da su mase kuglica jednake i da se pri njihovom sudare neće izgubiti nikakva energija. Rezultirajući vektori brzina više neće biti samo invertirani. Kuglica koja se giba samo po X osi (brzinom  $v_1$ ) nakon sudara dobiti će i neku svoju Y komponentu brzine. Pretpostavimo da su i



Slika 4.5 Smjer gibanja kuglica nakon sudara u 2 dimenzije

brzine kuglica u X smjeru jednake, pa će rezultat sudara približno jednak kao na slici 4.2. Ovakav rezultat sudara možemo prikazati u nekoliko matematičkih koraka[6].

Prvo pronađemo vektor normale. To je vektor čije su komponente razlika između koordinata centara kuglica. Sukladno tome odmah pronađemo vektor tangente te oba vektora pomoću klase *Vector3D* normaliziramo (kako je već i spomenuto pomoću ove klase puno nam je lakše pronaći vektor normale i tangente)[6].



Slika 4.6 Vektor normale i tangente

Nakon toga, inicijalne brzine  $v_1$  i  $v_2$  pomnožimo sa jediničnim vektorima normale

#### Poglavlje 4. Sudari, fizika i vanjske sile

i tangente[6]. Pomnožiti u ovome slučaju znači izračunati skalarni produkt između 2 vektora.

$$\begin{aligned}v'_{1,2}n &= un \ v_{1,2} \\ v'_{1,2}t &= ut \ v_{1,2}\end{aligned}\tag{4.3}$$

gdje nam je:

- $un$  - jedinični vektor vektora normale
- $ut$  - jedinični vektor vektora tangente
- $v_{1,2}$  - vektori brzine kuglica
- $v'n$  - rezultirajuća brzina u smjeru normale
- $v't$  - rezultirajuća brzina u smjeru tangente

Tangencijalne brzine nakon sudara ostaju jednake što znači da smo u smjeru tangente izračunali brzinu[6]. Nakon što smo odradili sve ove korake, pomoću jednostavne formule izračunamo rezultatne brzine za obje kuglice prema formuli:

$$\begin{aligned}v'_1 &= v'_2n \ un + v'_1t \ ut \\ v'_2 &= v'_1n \ un + v'_2t \ ut\end{aligned}\tag{4.4}$$

S ovim jednostavnim matematičkim koracima dobiti ćemo točno odbijanje kuglica nakon sudara kako je i prikazano na slici 4.5. Ovo se može opisati i jednostavnim algoritmom koji je prikazan na idućoj strani.

---

**Pseudokod 4** Algoritam za izračunavanje smjera brzina nakon sudara između 2 kuglice

---

```
function RESOLVECOLLISON(Ball a, Ball b)
    if Collision(a, b) is false then return
    end if
    normal = (a.center - b.center)
    un = unitVector(normal)
    ut(-un.y, un.x)
    v1n = a.v un
    v1t = a.v ut
    v2n = b.v un
    v2t = b.v ut
    a.v = v1n un + v1t ut
    b.v = v2n un + v2t ut
end function
```

---

Nakon pokretanja animacije primjećuje se jedan problem. Kuglice se slobodno gibaju po sceni i te u vrlo kratkom periodu izađu iz našeg viewporta. Našu scenu sada moramo ograničiti i to sa 4 strane s obzirom da još nismo implementirali gravitaciju. Za to će nam poslužiti klasa *Wall* koju ćemo opisati u sljedećem poglavlju.

### 4.3.2 Zidovi i klasa *Wall*

Kako nam i samo ime govori, ova klasa služi za implementaciju granica tj. koji će ograničiti kretanje kuglica. Ove zidove nećemo vidjeti. Oni su nevidljivi i nalaze se na samim rubovima našeg prozora i ovise o *lookAt* vektoru. Prvo bi bilo zgodno objasniti što i je taj *lookAt* vektor. Laičkim rječnikom možemo reći ovako: *lookAt* vektor je vektor koji nam služi za pozicioniranje kamere na našoj sceni. Na primjer:

```

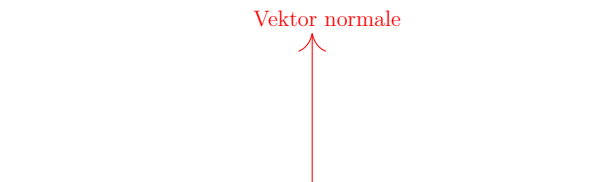
1 glm::mat4 View = glm::lookAt(
2     glm::vec3(0, 0, 50), // Camera is at (0,0,50), in World Space
3     glm::vec3(0, 0, -1), // and looks at the origin
4     glm::vec3(0, 1, 0)   // Head is up (set to 0,-1,0 to look
                           // upside-down)
5 );
6 }

```

Kod 4.2 Primjer lookAt vektora iz glm knjižnice

Prva linija govori nam gdje smo na našoj sceni postavili kameru. Prva linija dakle znači da se kameri nalazi na koordinatama (0,0,50) (udaljeni smo samo u Z smjeru). To znači da je naša X koordinata u rasponu od [-25, 25], a Y u rasponu od [-20,20] (razlog ovome je Aspect ratio koji je 4:3, no u ovome poglavlju to nije jako bitno).

Sada kada znamo konkretne koordinate našeg prozora, možemo proći kroz implementaciju same klase. Ona je u principu vrlo jednostavna, zidovi su zamišljeni kao obični AABB-i s kojima kuglice provjeravaju sudar. Kako je već spomenuto u poglavlju 2.2 kuglice imaju pridodjeljen odgovarajući AABB, pa te objekte možemo iskoristiti za detekciju sudara između zida i kuglice. Naravno i ovdje će se događati neke pogreške prilikom detekcije no to nam u principu nije jako bitno. Ovdje pogreška neće toliko utjecati na kretanje kuglice koliko bi u slučaju sudara između 2 kuglice. Zidovi također imaju pridodjeljen objekt klase *Vector3D*, a u njemu nam je zapisana normala zida. Normala zida nam je vrlo bitna za izračun sudara kuglice i zida. Važno je naglasiti da je normala jedinični vektor.

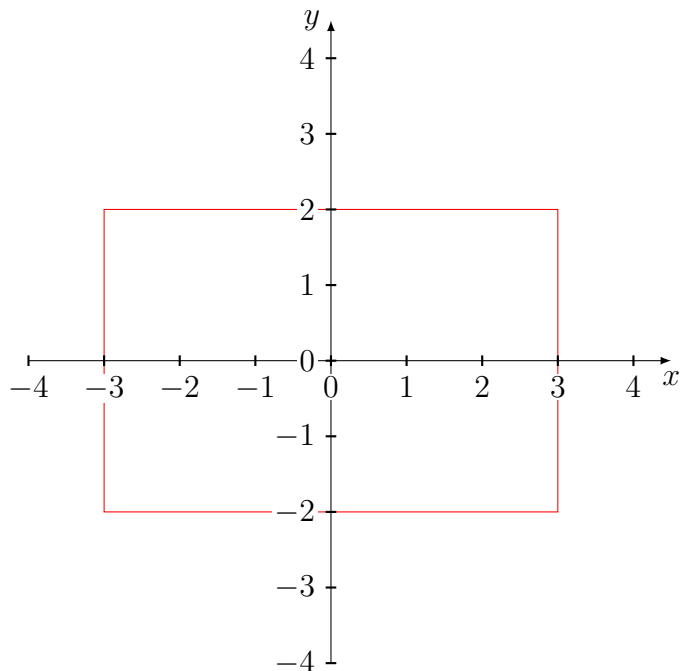


Slika 4.7 Prikaz jednog zida i normale na zid

Zid ima AABB iste reprezentacije kao što imaju i kuglice, dakle radijus i centar. S obzirom na takvu reprezentaciju morali smo pažljivo izabrati koordinate centra i sam radijus. Vertikalni zidovi imali su Y koordinatu centra 0, a horizontalni zidovi

#### *Poglavlje 4. Sudari, fizika i vanjske sile*

su imali X koordinatu 0. Dalje, trebalo je odrediti radijus. Zidovi koji su vertikalni, imali su samo Y komponentu radijusa, dok su horizontalni imali samo X koordinatu radijusa. Primjer je u 2D, no logika i analogija je ista u sve 3 dimenzije. Samo bi dodali još 2 zida koji nam ograničavaju Z os i to je sve.



Slika 4.8 Prikaz zidova u koordinatnom sustavu

Kada znamo sve ove informacije, implementacija same klase je prilično trivijalna. Ona je prikazana na idućoj strani.

```
1  class Wall {
2  public:
3      AABB_box bBox;
4      Vector3D vecDir;
5
6      Wall() = default;
7      Wall(const Point center, const float rX, const float rY, const
          float rZ,
8          const float vecX, const float vecY, const float vecZ,
          const float m);
9      Wall(const float x, const float y, const float z, const float
          rX,
10         const float rY, const float rZ, const float vecX, const
          float vecY,
11         const float vecZ, const float m);
12     const float &x() const { return this->center.x; }
13     const float &y() const { return this->center.y; }
14
15     const float &z() const { return this->center.z; }
16     const float &getMass() const { return this->mass; }
17     Point &getCenter() { return this->center; }
18
19 private:
20     Point center;
21     float r[3];
22     float mass;
23     unsigned int i;
24 };
```

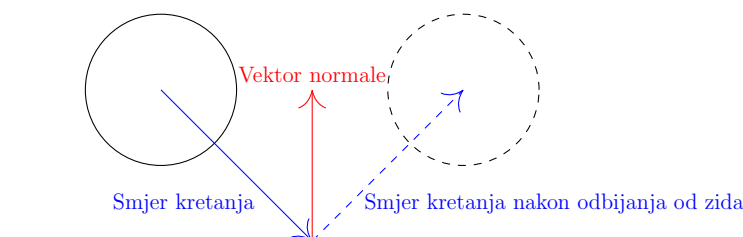
Kod 4.3 Implementacija klase Wall

Primjećujemo da je implementacije klase u principu vrlo trivijalna. Nemamo nikakvih metoda, osim *Get*, koje nam služe za dohvaćanje pojedinih privatnih varijabli. Među varijablama nalazi se i *mass* što definira masu zida. Ovoj varijabli pridodali smo neku vrlo veliku vrijednost, i nju ćemo kasnije koristiti za elastične sudare između zida i kuglica.



### 4.3.3 Sudari kuglica i zida

Nakon implementacije klase koje nam definiraju zidove, same sudare nije bio problem izračunati. U prvom trenutku ponovno nismo htjeli da se gubi energija kuglica. Sada će posebno do izražaja doći važnost normale zida. Htjeli smo da se kuglice odbije od zida pod istim kutom pod kojim se i sudarila. Ovakvim definiranjem normala, izbjegli smo korištenje trigonometrije i izračune upadnih i izlaznih kuteva. Ovakav



Slika 4.9 Reakcija kuglice na sudar sa zidom

tip sudara možemo prikazati jednostavnom formulom:

$$vector = vector - 2Dot(vector, normal)normal; \quad (4.5)$$

gdje su:

- *vector* - brzina i smjer kretanja kuglice
- *normal* - normala zida
- *Dot* - skalarni produkt

Ovo se također može prikazati jednostavni algoritmom koji je prikazan na sljedećoj stranici.

---

**Pseudokod 5** Algoritam za izračunavanje smjera kretanja kuglice nakon sudara sa zidom

---

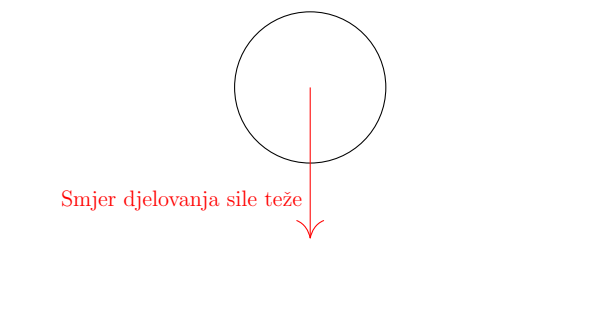
```
function RESOLVECOLLISON(Ball ball, Wall wall)  
    if AABBCollision(ball, wall) is false then return  
    end if  
    DoubleDot = 2(ball.vector * wall.normal)  
    collisionNormal = DoubleDot * wall.normal  
    ball.vector = ball.vector − collisionNormal  
end function
```

---

Sada naša animacija izgleda konačno kao nešto smisleno. Možemo dodati puno kuglica i testirati sudari između njih i sudare između kuglica i zidova. Prostor je ograničen i fizika odbijanja je smislena. Idući korak je dodavanje vanjske sile i gravitacije. Želimo da naše kuglice padaju, kao što je to situacija u stvarnome svijetu. Padanje i odbijanje od podloge. U sljedećem poglavlju razmotrit ćemo dodavanje gravitacije na kretanje kuglica i njihovo odbijanje od podloge. U konačnici, odbijanje od podloge će biti isto. No, nakon odbijanja s kuglicama se nešto treba dogoditi. Kuglice se u stvarnom svijetu ne mogu vječno odbijati od podloge. Mora se dogoditi gubitak kinematičke energije što će u nekom trenutku rezultirati da se kuglice prestanu gibati. Sve ove slučajeve razmotriti ćemo u narednim poglavljima.

## 4.4 Sila teža

Sila teže je sila kojom Zemlja privlači neko tijelo mase  $m$ , označavamo ju najčešće slovom  $G$ . Ta sila privlači sva tijela prema središtu Zemlje pa je stoga tu i usmjerena. Sila teže razlog je zbog kojeg sva bića i predmeti ne odlete u Svemir, već stoje na površini Zemlje. Kada pustimo tijelo da slobodno pada s određene visine, ono se giba ubrzanjem  $g$  koje iznosi  $9.81 \frac{m}{s^2}$  neovisno o njegovoj težini što znači da će istovremeno pasti i iznimno teško i iznimno lagano tijelo ukoliko ih bacimo s iste visine. No, na Mjesecu npr. ubrzanje kojim tijelo pada kada ga slobodno pustimo 6 je puta manje nego na Zemlji, tako da bi tamo ljudi lebdjeli iznad površine. Nadalje, težina je posljedica djelovanja sile teže. To je sila kojom predmet djeluje na vodoravnu podlogu na koju je položen, npr. knjiga na stol, ili uteg na nit na koju je obješen. Sila teža i težina jednake su po iznosu i smjeru djelovanja, ali nisu identični pojmovi.



Slika 4.10 Djelovanje sile teže

Programski, ovo je vrlo jednostavno realizirati. S obzirom da je sila teža vertikalna sila, ona će djelovati samo na Y komponentu brzine kuglice. Opća formula sile teže glasi:

$$G = m g \quad (4.6)$$

gdje je:

- $m$  - masa objekta
- $g$  - akceleracija sile teže koja iznosi  $9.81 \frac{m}{s^2}$

Ovo je samo formula sile i ona nam u ovom slučaju nije jako korisna. S obzirom

da baratamo samo sa silama moramo iskoristiti drugu fizikalnu veličinu kojom ćemo regulirati brzinu da simuliramo silu težu.

Fizikalna veličina koja nama zapravo treba je slobodni pad. Brzina slobodnog pada iznosi:

$$v = g \, t \tag{4.7}$$

Slobodni pad je gibanje tijela isključivo pod utjecajem sile teže. Zakonitosti slobodnoga pada prvi je proučavao Galileo Galilei, te ustanovio da je prijeđeni put s proporcionalan kvadratu protekloga vremena  $t$ , a brzina  $v$  jednoliko raste s proteklim vremenom, te da gibanje ne ovisi o masi tijela koje pada [8]. Uobičajeno je da se slobodni pad uzima kao primjer jednolikog ubrzanog gibanja (gibanja sa stalnim ubrzanjem). Pritom se pretpostavlja da nema otpora zraka ili trenja [8].

Sama implementacija slobodnog pada je trivijalna:

---

**Pseudokod 6** Algoritam za implementaciju slobodnog pada

---

```
function UPDATEBALLPOSITION(Ball ball, time dt)  
    ball.x+ = ball.vector.x * dt  
    ball.y+ = ball.vector.y * dt - 9.81 * dt  
    ball.z+ = ball.vector.z * dt  
end function
```

---

U algoritmu 6  $dt$  nam označava vrijeme koje je dobiveno između 2 framea. Na primjer, ukoliko imamo 60 sličica po sekundi,  $dt$  nam iznosi 16.6667 ms. Dobivanje razlike vremena između 2 framea je vrlo jednostavno. U nastavku ćemo prikazati implementaciju funkcije koja nam omogućuje izračunavanje proteklog vremena i kretanje kuglica po prostoru.

```
1
2 void Ball::updatePosition(float dt) {
3     double acc = -9.81;
4     this->vecDir.setY(this->vecDir.y() + acc * dt);
5     this->center.x += this->vecDir.x() * dt;
6     this->center.y += this->vecDir.y() * dt;
7     this->center.z += this->vecDir.z() * dt;
8 }
9
10 void update(int) {
11     nt = glutGet(GLUT_ELAPSED_TIME) / 1000.0f; //new time
12     dt = nt - ot; //delta time = new time - old time
13     ot = nt; //old time = new time
14
15     for (uint i = 0; i < balls.size(); i++) {
16         balls[i].updatePosition(dt);
17     }
18
19     glutPostRedisplay();
20     glutTimerFunc(16, update, 0);
21 }
```

Kod 4.4 Implementacije update funkcija

Funkcija *glutGet(GLUT\_ELAPSED\_TIME)* će nam vratiti broj milisekundi koje su prošle od *glutInit* poziva (koji se stalno poziva na početku main petlje). Funkcija *glutTimerFunc* će nam odrediti najmanji broj milisekundi koji će proći do idućeg poziva Update funkcije.

Stvari s gravitacijom gledane na ovakav način su zapravo dosta jasne. Na ovakav način možemo dodati bilo koju vanjsku silu koja će djelovati na kuglice. Iduće što želimo je da kuglice prilikom sudara izgube energiju. To će biti dodatno objašnjeno u idućem poglavlju.

## 4.5 Elastični sudari

U svim poglavljima do sada stalno se spominjala nekakva fizikalna reakcija kuglice na sudar. Svaka kuglica prilikom svog kretanja ima nekakvu kinetičku energiju. Opća formula kinetičke energije glasi:

$$E_k = \frac{m v^2}{2} \quad (4.8)$$

gdje je:

- $m$  - masa kuglice
- $v$  - brzina kuglice

Prilikom sudara između 2 kuglice, dio kinetičke energije će se izgubiti, tj. prijeći će u iz jedne kuglice na drugu i obrnuto. S obzirom da vrijedi ZAKON OČUVANJA ENERGIJE, zbroj energije 2 kuglice se neće promijeniti. Zakon očuvanja energije nam govori da u zatvorenom sustavu zbroj svih oblika energije (mehaničke, toplinske, električne, magnetske,...) konstantan. Drugim riječima, u zatvorenom sustavu jedan oblik energije može prelaziti u druge oblike, a da se pri tom energija niti stvara niti poništava[9].

Iduća fizikalna pojava koju ćemo analizirati je količina gibanja. Količina gibanja ili zalet (oznaka  $p$ ) je vektorska fizikalna veličina u klasičnoj mehanici koja opisuje gibanje čestice ili sustava čestica[10]:

$$p = m v \quad (4.9)$$

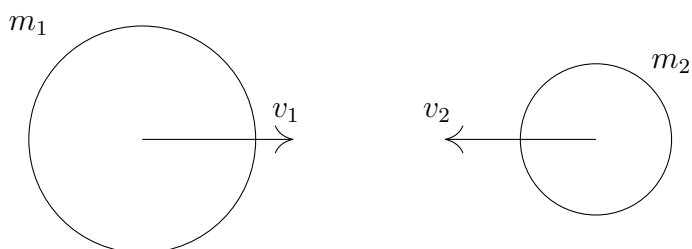
gdje je:

- $m$  - masa čestice
- $v$  - brzina čestice

Svaka kuglica koja se na sceni kreće, imati će količinu gibanja. Prilikom sudara količina gibanja jedne kuglice prenijeti će se na drugu kuglicu i obrnuto. Slično, kao i kod zakona o očuvanju energije, zakon očuvanja količine gibanja nam govori da količina gibanja izoliranog sustava je konstantna, odnosno, ukupna promjena količine gibanja u vremenu unutar izoliranog sustava jednaka je nuli[10].

#### Poglavlje 4. Sudari, fizika i vanjske sile

Sada kada smo objasnili 2 važna fizikalna zakona, možemo definirati što je to elastični sudar zapravo. Kako smo i ranije rekli, elastični sudar je sudar tijela ulaze nekom brzinom  $v_1$  i  $v_2$ , a izlazna brzina iz sudara im je  $v'_1$  i  $v'_2$ . Kombinirajući zakon o očuvanju energije i zakon o očuvanju količine gibanja možemo reći slijedeće. Ukupna energija i ukupna količina gibanja prilikom sudara se ne mijenjaju, ali energija i količina gibanja određene kuglice se mijenja[11]. Pokažimo to na jednom jednostavnom primjeru.



Slika 4.11 Primjer sudara kuglica različite mase i brzine

gdje je:

- $m_1 > m_2$
- $v_1 > v_2$

S obzirom na mase i brzine možemo reći slijedeće. Kuglice će se nastaviti gibati u suprotnim smjerovima. Brzina  $v_1$  će se smanjiti s obzirom da je masa te kuglice veća. Brzina  $v_2$  će se povećati i kuglica će se kretati u suprotnom smjeru s većom brzinom.



Slika 4.12 Primjer sudara kuglica različite mase i brzine

Iako su se brzine promijenile, ukupna količina gibanja ostala je jednaka. Sukladno tome vrijedi:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (4.10)$$

Naravno, rekli smo da i ukupna količina energije ostaje jednaka, pa vrijedi:

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2) \quad (4.11)$$

gdje su u obje jednadžbe:

- $m_1, m_2$  - mase kuglica
- $v_1, v_2$  - brzine kuglica prije sudara
- $v_1', v_2'$  - brzine kuglica nakon sudara

Nakon niza matematičkih operacija i skraćivanja izraza možemo donijeti konačne izraze koji će nam izračunati brzine kuglica nakon sudara. Oni glase[11]:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ovi sudari vrijede samo za 1 dimenziju, ali to je u redu[11]. Prema onome što smo ranije naveli u poglavlju 4.3.1 nama i trebaju samo 1D sudari. Objasnimo zašto. Ranije u poglavlju 4.3.1 smo opisali jednadžbe kojima ćemo dobiti smjer kretanja kuglica nakon sudara bez gubitka količine energije i količine gibanja. U ovome poglavlju, objasnili smo kako će se ponašati samo vrijednosti brzina nakon sudara. Sve što mi trebamo sada napraviti je, ove 2 jednadžbe iz jednadžbe 4.12 dodati u kod za



#### Poglavlje 4. Sudari, fizika i vanjske sile

rješavanje sudara kuglica. Prema algoritmu 4 možemo iznijeti slijedeći algoritam za to:

---

**Pseudokod 7** Algoritam za izračunavanje smjera i iznosa brzina sudara između 2 kuglice uz promjenu količine gibanja jedne kuglice

---

```
function RESOLVECOLLISON(Ball a, Ball b)
  if Collision(a, b) is false then return
  end if
  normal = (a.center − b.center)
  un = unitVector(normal)
  ut(−un.y, un.x)
  v1n = a.v un
  v1t = a.v ut
  v2n = b.v un
  v2t = b.v ut
  
$$v_1(x, y, z) = \frac{v_1n(m_1 - m_2) + 2m_2v_2n}{m_1 + m_2}$$

  
$$v_2(x, y, z) = \frac{v_2n(m_2 - m_1) + 2m_1v_1n}{m_1 + m_2}$$

  a.v = v1 un + v1t ut
  b.v = v2 un + v2t ut
end function
```

---

Ovime smo zaokružili cjelinu o kretanjima i sudaranjima kuglica. Ipak, problem je to što nam je sama detekcija sudara između svih kuglica prespora. Kako smo opisali ranije u poglavlju 2, postoje algoritmi za ubrzavanja same detekcije sudara. U narednim poglavljima cilj je opisati algoritam s kojim smo na zadovoljavajući način detektirali sve sudare na sceni i prema gore navedenim jednažbama, iste sudare izračunali.

## Poglavlje 5

# Partitioniranje prostora

Kako smo to spomenuli u uvodu, postoje razni algoritmi za detekciju sudara. Najvažniji od njih su oni kojima dijelimo objekte (BVH), i one kojima dijelimo prostor. Algoritam s kojim dijelimo objekt smo već prošli u poglavlju 3. Kako smo u nekom trenutku odustali od BVH-a bilo je potrebno pronaći dobar i brz način za detektiranje sudara na cijeloj sceni. Detekcija sudara sama po sebi, komplicirana je operacija i potrebno je da bude manje složena od  $O(n^2)$  operacija. Kako smo to opisali u poglavlju 3, BVH-u je potrebno  $O(\log N)$  operacija sa detekciju sudara na sceni, iako je nekada prije potrebno napraviti dodatne kalkulacije i ažuriranja strukture da bi ona bila funkcionalna. To dodatno komplicira stvari, ali je vrlo efikasno. U ovom poglavlju, pokazati ćemo da je partitioniranje prostora također jedna efikasna i lako razumljiva strategija za detekciju sudara.

### 5.1 Primitivna detekcija sudara

U prošlom poglavlju objasnili smo kako sudare, nakon što ih detektiramo, kalkilirati. Nigdje nismo spomenuli kako smo i te sudare detektirali. Koristili smo za to vrlo primitivan i jednostavan algoritam. Za svaki objekt na sceni, iterativno bi tražili s kojim se objektom sudara. Ovo u principu nije problem kada je situacija sa zidovima jer u konačnici imamo 4 zida pa je sama složenost te operacije  $O(4 * N)$ . Problem se javlja kada imamo kuglica. Do 50 kuglica ovaj algoritam će raditi, no nakon

## Poglavlje 5. Partitioniranje prostora

prelaska na veći broj kuglica javlja se problem. Za 500 kuglica potrebno je napraviti isto toliko provjera. To nas dovodi do brojke od 250 000 tisuća provjera i složenosti  $O(n^2)$ . Kako smo ranije opisali ovo smo željeli izbjeći. Takav algoritam bi glasio ovako: gdje je:

---

**Pseudokod 8** Algoritam za primitivnu detekciju sudara između kuglica

---

```
function SEARCHCOLLISIONS(Ball list[N])  
    i = 1  
    for ball in list do  
        while i < N do  
            if ifCollision(ball, list[i]) then  
                resolveCollision(ball, list[i])  
            end if  
            i ++  
        end while  
    end for  
end function
```

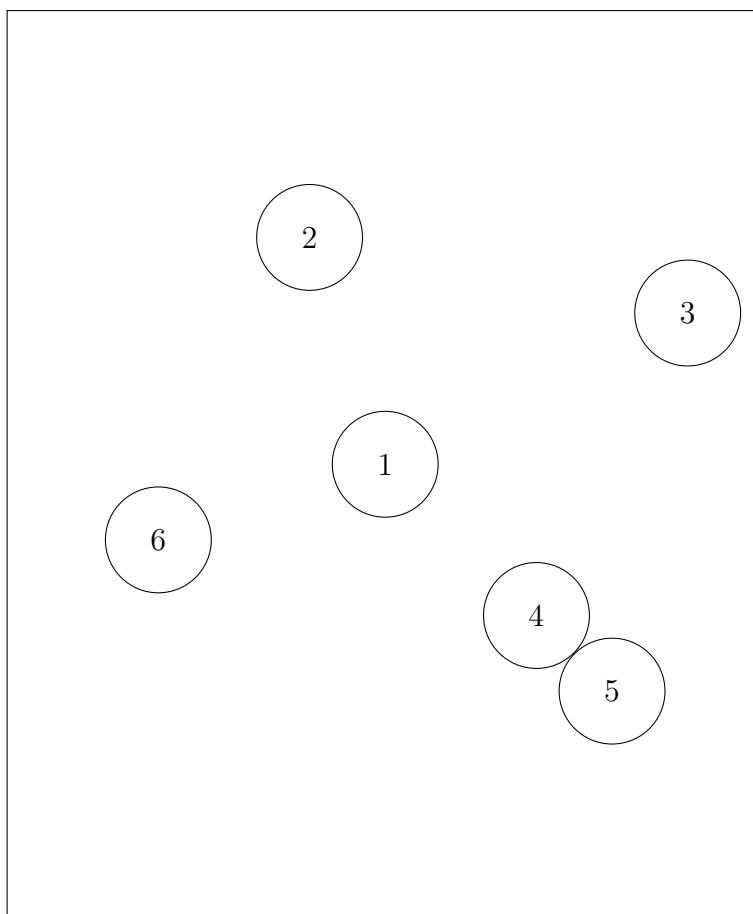
---

- *list* - lista kuglica
- *N* - broj kuglica

Kako smo ranije već spomenuli, za listu smo koristili *std::vector* u C++. Ovakav pristup smo koristili samo pri početku projekta. Za mali broj kuglica i za provjeru ispravnosti proračuna, ovakav pristup je bio dovoljan.

## 5.2 k-d stablo (K-dimensional tree)

Spomenuli smo da je složenost koju želimo postići pri detektiranju sudara najmanje  $O(N \log N)$  (za  $N$  objekata na sceni). Da bi to postigli moramo naš prostor podijeliti u smislene regije u kojima ćemo provjeravati sudar. Promotrimo to na jednom primjeru:



Slika 5.1 Primjer kuglica na sceni

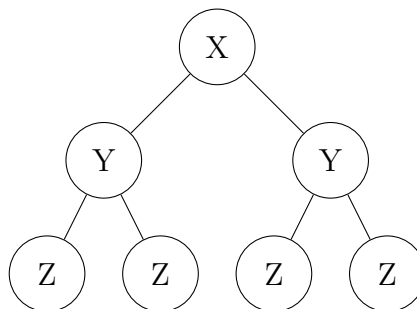
gdje su koordinate centara:

## Poglavlje 5. Partitioniranje prostora

- 1 - (5,4)
- 2 - (4,7)
- 3 - (9,6)
- 4 - (7,2)
- 5 - (8,1)
- 6 - (2,3)

Na slici 5.2 vidimo da ne treba u svim situacijama provjeravati sudar. Na primjer za kuglicu 2 i 6 znamo da se sudar neće dogoditi te tu provjeri ne moramo uzimati u obzir dok između kuglica 5 i 4 te 1 i 2 znamo da bi se mogao dogoditi sudar u skorom vremenu, te, te sudare moramo provjeriti.

Postoje mnoge tehnike za podijeliti prostor, no ona koju smo mi koristili je k-d stablo. k-d stablo je binarno stablo gdje je svaki čvor k-dimenzionalna točka[12]. Svaki čvor koji nije list, može se shvatiti kao ravnina koja dijeli prostor. Točke koje se nalaze lijevo od ravnine predstavlja lijeva strana stabla, dok desne točke predstavlja desna strana stabla[12]. Konkretno, ukoliko odaberemo X os za os podijele, točke manje od vrijednosti X bit će nam u lijevoj grani stabla, dok točke veće od X vrijednosti će biti na desnoj strani stabla[12]. U 3D prostoru intuitivno je da ćemo imati 3 dimenzije. Dakle, root čvor stabla će podijeliti prostor prema X koordinati, zatim njegova djeca prema Y koordinati, djeca djece po Z koordinati itd. .

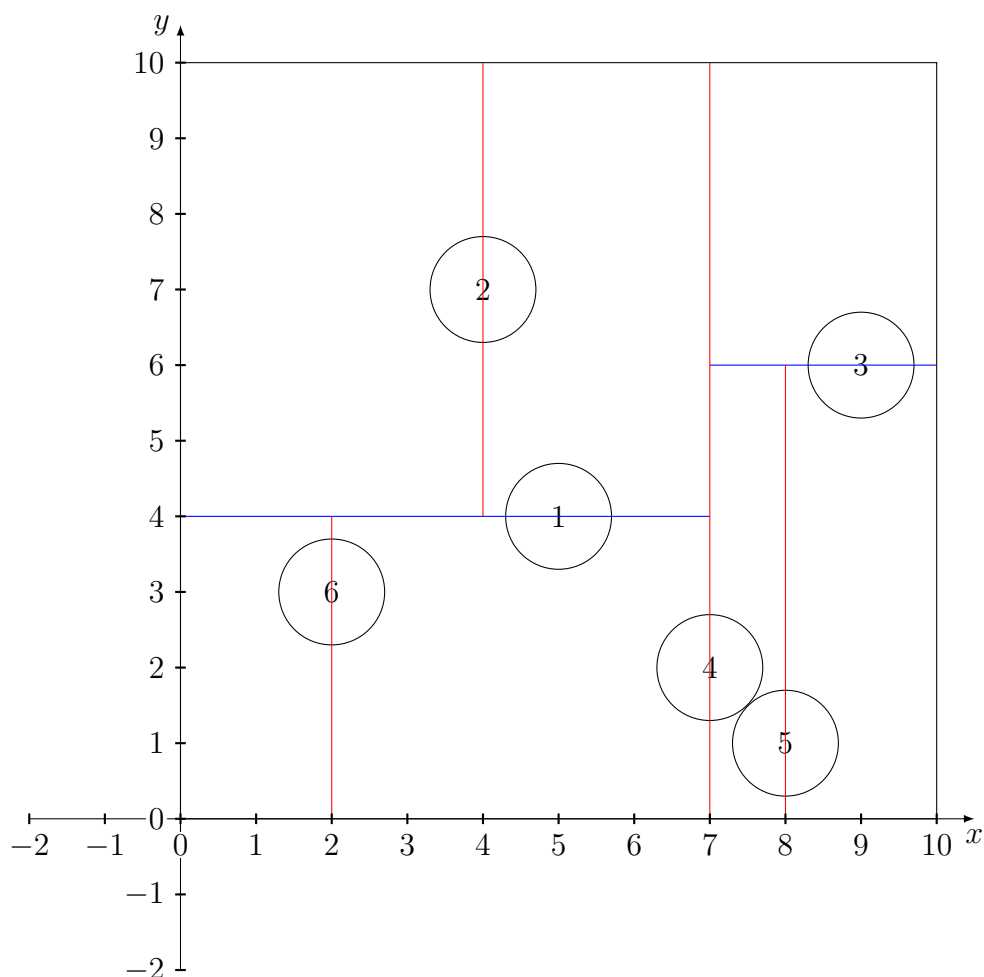


Slika 5.2 Prikaz k-d stabla za 3 dimenzije

Nakon što smo došli do Z dimenzije, ponovno dijelimo prostor po "x" koordinati, i

## Poglavlje 5. Partitioniranje prostora

tako se vrtimo dok ne podijelimo cijeli prostor. Sada se možemo vratiti na situaciju iz slike 5.1. k-d stablo će nam onakav prostor podijeliti na sljedeći način[12]:



Slika 5.3 Podjela prostora k-d stablom

Primjetimo da smo prostor podijelili po koordinatama centra svake kuglice. Crvene linije prikazuju podjelu prostora po X koordinati, dok plave ukazuju na podjelu prostora po Y koordinati. Da smo imali još Z koordinatu, analogija je ista, imali bi dodatnu dimenziju, no zbog jednostavnosti dovoljno je ovo prikazati u 2D prostoru.

### 5.2.1 Izgradnja k-d stabla

U prijašnjem poglavlju podijelili smo prostor bez da znamo zapravo kako je to napravljeno niti da znamo kako će struktura stabla izgledati za takvu situaciju. Općenito, znamo kako struktura stabla izgleda. Svaka razina stabla particionirala je prostor po nekoj koordinati. Jedino pitanje koje se postavlja je, kako izabrati točke na način da dobijemo kvalitetno podijeljen prostor i balansirano stablo. S obzirom da postoji puno načina na koji možemo odabrati osi presijecanja koje su poravnate s koordinatnim osima, postoji i puno načina da izgradimo k-d stablo. Kanonski način izgradnje je onaj koji smo već opisali[12]:

- Kako se krećemo po stablu, kružno biramo osi presijecanja
- Točke odabiremo tako da odaberemo median element s obzirom na os presijecanja

Ovakva metoda će nas dovesti do balansiranog stabla, iako za sve aplikacije to nije nužan uvjet [12].

S obzirom na sve ovo možemo napisati jednostavan algoritam za izgradnju samog k-d stabla.

---

**Pseudokod 9** Algoritam za izgradnju k-d stabla[12]

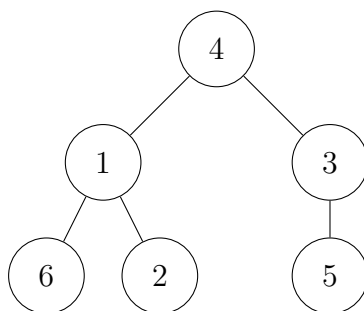
---

```
function K-D TREE(Point pointList[N], depth)
    axis = depth mod k
    Sort(list)
    Select median by axis from pointList
    Node.point = median
    Node.left(pointList[0...Median - 1], depth + 1)
    Node.right(pointList[Median + 1...pointList.size], depth + 1)
end function
```

---

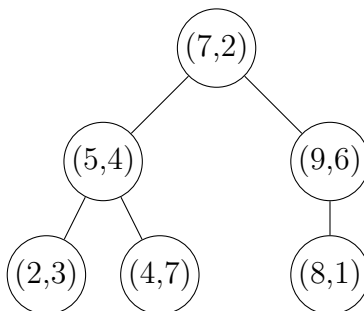
## Poglavlje 5. Partitioniranje prostora

Sada kada znamo izgraditi stablo možemo prikazati kako bi stablo konkretno izgledalo za situaciju na slici 5.3 iz prošlog poglavlja: Prikažimo ovo isto stablo sa



Slika 5.4 Prikaz strukture k-d stabla za sliku 5.3

koordinatama centara[12]:



Slika 5.5 Prikaz strukture k-d stabla za sliku 5.3

Složenost ovog algoritma ovisi o složenosti operacije sortiranja i pretrage za median elementom. Pozicija median elementa se pronalazi kao:

$$Median = \frac{N}{2} \quad (5.1)$$

gdje je:

- N - broj elemenata

Algoritmi koji se uglavnom koriste za sortiranje su *Mergesort* (implementiran u C++ STL-u) i *Heapsort*. Složenost ovih algoritama u općem slučaju je  $O(N \log N)$ . Sukladno



tome to je i najbolja složenost koja se može postići s ovim algoritmima sortiranja. Složenost izgradnje stabla u najgorem slučaju može biti  $O(kN \log N)$  operacija što ćemo mi i imati s obzirom da u svakoj od  $k$  dimenzija moramo sortirati točke i odabrati median element. S obzirom da se kuglice na sceni kreću, stablo moramo graditi u svakom frameu pa je i ovakav način detekcije sudara sam po sebi dosta složen, no još uvijek je brži od onog opisanog u algoritmu 8.

Sada kada smo naš prostor podijelili prema točkama kuglica, potrebno je samo pretražiti sve potencijalne sudare na sceni. Dobra osobina  $k$ -d stabla je ta što će nam podijeliti prostor po gustoći točaka. Tako možemo vrlo jednostavno detektirati sudare na sceni i izračunati ih ukoliko se sudar dogodio.

### 5.2.2 Pretraga sudara u $k$ -d stablu

Pretraga sudara u  $k$ -d stablu nakon izgradnje je trivijalna stvar. Sve se svodi na jednostavno šetanje po stablu. Da dodatno ne povećavamo složenost, šetanje će uključiti samo onu granu stabla koja je bliže u prostoru i/ili onu s kojom se kuglica sudara. Da se izbjegne korištenje funkcije korijena (*sqr*t) koristiti će se kvadrirana udaljenost (eng. *squared distance*). Ukoliko detektiramo sudar, u istom trenutku ga i računamo. Algoritam je rekurzivan i glasi:

---

**Pseudokod 10** Algoritam za pretragu sudara u k-d stablu

---

```
function SEARCHCOLLISIONS(Ballball,  $K - dTreeNodeNode$ )
    if Node is leaf then
        if isCollision(ball, node) then
            resolveCollision(ball, node)
        end if return
    end if
    if isCollision(ball, node) then resolveCollision(ball, node)
    end if
    if distance(Node.left, ball) > distance(Node.right, ball) or
        isCollision(ball, node.right) then
        searchCollisions(ball, node.right)
    else if distance(Node.right, ball) > distance(Node.left, ball) or
        isCollision(ball, node.left) then
        searchCollisions(ball, node.left)
    end if
end function

function CHECKALLBALLS(BalllistBall[N],  $K - dTreeNodeNode$ )
    for ball in listBall do
        searchCollisions(ball, Node)
    end for
end function
```

---

Na ovakav ćemo način vrlo jednostavno na cijeloj sceni detektirati sudare i izračunati. S obzirom da je kuglica uvijek u sudaru sama sa sobom, potrebno je izbjeći računanje takvog sudara. Prilikom implementacije klase za kuglice, u kodu 2.8, spomenuli smo atribut *i* tipa integer. Ovaj atribut označava poziciju kuglice u listi i na taj način ćemo vrlo jednostavno izbjeći računanje sudara kuglice same sa sobom. Testiranjem je utvrđeno da se prilikom takvog računanja mogu pojaviti anomalije i ponašanje kuglica koje ne želimo.

### 5.2.3 Implementacija klase za k-d stablo

U ovome poglavlju nećemo prikazivati implementaciju svih funkcija. Opisati ćemo samo odluke i strukturu same klase.

```
1
2  template <class T> class KDTreeNode {
3      static bool sortByX(T lhs, T rhs)
4      static bool sortByY(T lhs, T rhs)
5      static bool sortByZ(T lhs, T rhs)
6
7  public:
8      KDTreeNode *left()
9      KDTreeNode *right()
10     unsigned long childSize()
11     unsigned int getPlane()
12     void build_tree(std::vector<T> &v, int depth)
13     void treeTraverse()
14     template <class T1> void searchCollisions(T1 &ball)
15 private:
16     std::vector<KDTreeNode> child;
17     T object;
18     unsigned int plane;
19 };
```

Kod 5.1 Implementacija klase za k-d stablo

U početku bila je dilema koristiti li normalnu klasu koja bi radila samo an temelju kuglica, ili *template* klasu koja bi onda radila za sve tipove objekata koje bi stavili scenu. Odabrana je *template* klasa upravo iz tog razloga, da prilikom dodavanja nekih drugih objekata koji nisu kuglice, ne moramo raditi novu strukturu za samo taj specifični objekt. Točnost ove tvrdnje pokazana je kada se ista klasa za k-d stablo koristila i za partitioniranje zidova. Jednom strukturom smo odradili posao za sve moguće objekte na sceni. Postoji i bolji pristup da se koriste samo točke objekata, ali za nas je ovakav bio dovoljan. Klase *sortBy(x,y,z)* poslužile su za sortiranje cijele liste prema određenoj osi. Ostale funkcije koje smo koristili su ili već opisane (*build\_tree*, *searchCollisions*) ili su samo *Get* funkcije za dohvat privatnih varijabli.

### 5.3 Prednosti i mane korištenja algoritama za partitioniranje prostora (k-d stabla)

K-d stablo svakako pronalazi svoju uporabu u stvarnome svijetu. Vrlo jednostavna implementacija i razumijevanje same strukture omogućuje široku primjenu u svijetu igara. Skladno tome, jasno je da je k-d stablo dobar način kojim ćemo pretraživati sudare na sceni. Vrlo je efikasno iako ima svoje mane.

Prva od njih je ta da u svakom koraku izgradnje stabla moramo sortirati cijelu listu točaka i to nam uvijek zahtjeva najmanje  $O(N \log N)$  operacija. Na taj način smo ograničeni i tu ne možemo napraviti dodatne optimizacije iako one postoje. Postoji bolji način odabira ravnine presjecanja i točke koja će biti čvor (npr. metoda fiksne točke ili odabir slučajne točke)[12]. Ove metode nam ipak neće dati balansirano stablo, ali to s druge strane ovisi o našim potrebama. Balansirano stablo u praksi nije uvijek prijeko potrebno pa se možemo spasiti od silnog sortiranja u svakom koraku izgradnje stabla.

S druge strane, ukoliko nam treba balansirano stablo, sortiranje ne možemo izbjeći. Zato se k-d stablo u praksi često koristi za statične objekte koji se ne gibaju[12]. Tako možemo izvršiti izgradnju stabla prije pokretanja animacije. Dobar primjer iskorišten je i kod nas gdje smo izgradili stablo od zidova. Iako zida postoje samo 4 na sceni, zgodno je bilo pokazati da je k-d stablo zapravo puno efikasnije kod statičnih objekata.

Kod kuglica se događao problem s velikim brojem kuglica (500+), jer unutar 30-60 FPS-a nismo uspjeli izvršiti sve provjere sudara i izračunati iste. Ovdje se može uvesti jedna optimizacija da se u svakoj pretrazi sudara računa i vrijeme do idućeg sudara, no mi je nismo koristili.

# Bibliografija

- [1] D. Clingman, *Practical Java Game Programming (Charles River Media Game Development)*. Jenifer Niles, 2004.
- [2] T. Diewald. Thomas diewald blog. , s Interneta, <http://thomasdiewald.com/blog/?p=1488> 19.8.2017.
- [3] C. Ericson, *Real-Time Collision Detection*, T. Cox, Ed. CRC Press, 2004.
- [4] G. V. D. Bergen, “Efficient collision detection of complex deformable models using aabb trees,” 1998.
- [5] (2017, Jan.) Introductory guide to aabb tree collision detection. , s Interneta, <http://www.azurefromthetrenches.com/introductory-guide-to-aabb-tree-collision-detection/> January 15, 2017.
- [6] C. Berchek, “2-dimensional elastic collisions without trigonometry,” 2009.
- [7] M. Martinčić. (2017, Aug.) Elastični i neelastični sudari. , s Interneta, <http://dominis.phy.hr/~mmarko/SAMP/Seminar2/Seminar2.html>
- [8] (2017, Aug.) Slobodni pad, wikipedia. , s Interneta, [https://hr.wikipedia.org/wiki/Slobodni\\_pad](https://hr.wikipedia.org/wiki/Slobodni_pad)
- [9] (2017, Aug.) Zakon očuvanja energije, wikipedia. , s Interneta, [https://hr.wikipedia.org/wiki/Zakon\\_o%C4%8Duvanja\\_energije](https://hr.wikipedia.org/wiki/Zakon_o%C4%8Duvanja_energije)
- [10] (2017, Aug.) Količina gibanja, wikipedia. , s Interneta, [https://hr.wikipedia.org/wiki/Koli%C4%8Dina\\_gibanja](https://hr.wikipedia.org/wiki/Koli%C4%8Dina_gibanja)
- [11] (2017, Aug.) Elastični sudari, wikipedia. , s Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Elastic\\_collision](https://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_collision)
- [12] (2017, Aug.) Kd tree, wikipedia. , s Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/K-d\\_tree](https://en.wikipedia.org/wiki/K-d_tree)

# Sažetak

Ovo je tekst u kojem se opiše sažetak vašeg rada. Tekst treba imati duh rekapitulacije što je prikazano u radu, nakon čega slijedi 3-5 ključnih riječi (zamijenite dolje postavljene općenite predloške riječi nekim suvislim vlastitim ključnim riječima).

***Ključne riječi*** — Ključna riječ 1, Ključna riječ 2, Ključna riječ 3

## Abstract

This is a text where a brief summary of your work is outlined. The text should have a sense of recap of what was presented in the thesis, followed by 3-5 keywords (replace the general keyword templates below with some meaningful keywords of your own) .

***Keywords*** — keyword 1, keyword 2, keyword 3