УДК 513.83

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОКОЛОСТАНДАРТНОСТИ В IST

Прохорова М.Ф.

В рамках аксиоматики IST нестандартного анализа построены предложения теории ограниченных внутренних множеств, эквивалентные гипотезе о существовании измеримого кардинала. Исследуется вопрос о существовании нестандартного натурального t такого, чтобы все точки некоторого топологического пространства X были бы t-околостандартны. Показано, что при этом все t-стандартные точки X стандартны, а t не может быть элементом никакого стандартного неизмеримого кардинала.

В статье [1] определяется предикат «стандартный относительно t»:

$$x \operatorname{st} t \Leftrightarrow \exists^{st}\varphi : (Ffin(\varphi)) \& (t \in \operatorname{dom}\varphi) \& (x \in \varphi(t))$$

(здесь $Ffin(\varphi)$ означает, что φ функция и все принимаемые ею значения — конечные множества), и вводятся естественным образом понятия t-бесконечно малого, t-бесконечно большого и t-конечного вещественного числа. Так, t-бесконечно малое определяется как число, модуль которого меньше любого положительного t-стандартного (это понятие является частным случаем понятия супербесконечно малых, или π-монад [2]).

В [1] показано, что для некоторого нестандартного натурального N не все точки отрезка $[0,1]$ N-околостандартны (то есть найдется такое $x \in [0,1]$, что не существует N-стандартного числа, N-бесконечно близкого к x). Возникает вопрос: нельзя ли подобрать такое нестандартное натуральное N, чтобы все точки отрезка $[0,1]$ имели N-стандартную часть, т.е. были бы N-околостандартны. Если бы ответ на этот вопрос был положительным, то можно было бы построить внешнюю функцию, аналогичную функции взятия стандартной части, но «более подробную». К сожалению, как показано ниже, ответ на этот вопрос отрицательный, причем он остается отрицательным и в более общем случае — при замене множества натуральных чисел на произвольное множество неизмеримой мощности, а отрезка — на произвольное хаусдорфово пространство, не являющееся разреженным компактом [3].

Приведенные ниже теоремы представляют интерес и с точки зрения построения предложений теории ограниченных внутренних множеств BIST [4], эквивалентных гипотезе о существовании измеримого кардинала [5] (недоказуемой в ZFC).

Пусть (X,τ) — топологическое пространство (τ — семейство открытых множеств). Назовем t X-подходящим, если все точки X t-околостандартны (то есть для любого $x \in X$ существует t-стандартное $y \in X$ такое, что x содержится в любой t-стандартной окрестности y). Понятно, что такое t должно быть ограниченным (то есть содержаться в некотором стандартном множестве). Назовем сложностью ограниченного t кардинал

$$\operatorname{compl} t = \min\{\operatorname{card} T : st(T)\ \&\ t \in T\}. \tag{1}$$

Все стандартные множества имеют сложность 1.

Теорема 1. Пусть (X,τ) — стандартное хаусдорфово пространство, не являющееся разреженным компактом. Если t нестандартно и X-подходяще, то сложность t — измеримый кардинал.

Предположение о неразреженности компакта в условии теоремы существенно. Возьмем, например, $X = \{0\} \cup \{k^{-1} : k \in \mathbb{N}\}$ с топологией, индуцированной естественной топологией $\mathbb{R}$. Тогда для любого натурального N (в том числе и нестандартного) точка 0 N-стандартна, а k^{-1} либо N-стандартно, либо N-бесконечно близко к 0.

К сожалению, существование t, при котором все точки отрезка $[0,1]$ t-околостандартны, достигается ценой отказа от существования t-стандартных нестандартных вещественных чисел:

Теорема 2. Пусть топологическое пространство (X,τ) такое же, как в условии Теоремы 1, $\chi = \operatorname{card} X$ неизмерим. Если t X-подходяще, то любое t-стандартное

$x \in X$ стандартно (иначе говоря, функция взятия t-стандартной части совпадает с функцией взятия стандартной части).

Теорема 3. Пусть X, T — стандартные бесконечные множества, $\operatorname{card} X$ неизмерим. В T существует нестандартное t такое, что все t-стандартные элементы X стандартны, тогда и только тогда, когда $\operatorname{card} T$ измерим.

Пусть X — стандартное бесконечное множество неизмеримой мощности. Как показывает Теорема 3, существование нестандартного t такого, что все t-стандартные элементы X стандартны, эквивалентно гипотезе о существовании измеримого кардинала. Полагая $X = [0,1]$, получаем также, что существование измеримого кардинала эквивалентно существованию $[0,1]$-подходящего нестандартного t (если все t-стандартные элементы $[0,1]$ стандартны, то монада t-бесконечно малых совпадает с монадой бесконечно малых вещественных чисел, и t $[0,1]$-подходяще).

Доказательство Теоремы 1. Запишем условие теоремы в эквивалентном виде: если для стандартного T

$$\exists t \in T \ \forall^{st} \vartheta \in T \ \forall x \in X \ \exists^{st} \varphi \in \mathcal{F} \ \forall^{st} u \in \mathcal{U} \ (t \neq \vartheta) \,\&\, (x \in u(\varphi, t)),$$

то $\operatorname{card} T$ измерим. Здесь

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}^T,\ \mathcal{P} = \mathcal{P}^{fin}(X) \text{ — множество конечных подмножеств } X,$$

$$\mathcal{U} = \{u \in \tau^{\mathcal{F} \times T} : \forall \varphi \in \mathcal{F} \ \forall t \in T \ \varphi(t) \in u(\varphi, t)\}$$

(формулировка специально записана в виде, удобном для дальнейшего преобразования). Применим к этой формуле алгоритм Нельсона [6]:

$$\exists \Phi \subseteq \left(\mathcal{P}^{fin}(\mathcal{F})\right)^{T \times \mathcal{U}} \ \forall^{fin} M \subseteq T, U \subseteq \mathcal{U} \ \exists t \in T$$
$$\forall \vartheta \in M, u \in U \ \ \forall x \in X \ \exists \varphi \in \Phi(\vartheta, u) \quad (t \neq \vartheta) \,\&\, (x \in u(\varphi, t))$$

Заметим, что зависимостью Φ от ϑ здесь можно пренебречь, и приведем эту формулу к более простому виду:

$$\exists\Phi \subseteq \left(\mathcal{P}^{fin}(\wp)\right)^{\mathcal{U}} \ \forall^{fin} U \subseteq \mathcal{U} \ \{t \in T : X = \cup\{u(\varphi, t) : \varphi \in \Phi(u)\}\} \text{ бесконечно.}$$

Обозначим

$$Q(u, \Phi) = \{t \in T : X = \cup\{u(\varphi, t) : \varphi \in \Phi\}\},$$

и запишем последнюю формулу в виде

$$\exists\Phi \subseteq \left(\mathcal{P}^{fin}(\wp)\right)^{\mathcal{U}} \ \forall^{fin} U \subseteq \mathcal{U} \quad \bigcap_{u \in U} Q(u, \Phi(u)) \text{ бесконечно.} \tag{2}$$

Пусть χ — произвольный бесконечный кардинал. Назовем фильтр $\mathcal{F}$ в T χ-замкнутым, если любое покрытие $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(T)$ мощности χ, замкнутое относительно конечного объединения, пересекается с $\mathcal{F}$.

Очевидно, что χ-замкнутость наследуется (то есть любое расширение χ-замкнутого фильтра χ-замкнуто). Кроме того, любой χ-замкнутый фильтр является также и χ-мультипликативным. Докажем это. Пусть $\{F_i\}_{i \in \chi}$ — подмножество $\mathcal{F}$ мощности χ. Обозначим $F = \bigcap_{i \in \chi} F_i$, $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \chi} \{T - F_i\} \cup \{F\}$ — покрытие T мощности $\chi + 1 = \chi$. По определению χ-замкнутости, существует элемент $\mathcal{F}$, являющийся объединением конечного числа множеств из $\mathcal{A}$, то есть $\exists^{fin} I \in \chi : G = \bigcup_{i \in \chi} (T - F_i) \cup F \in \mathcal{F}$. Но тогда и $F = \bigcap_{i \in \chi} F_i \cap G \in \mathcal{F}$, что и требовалось доказать.

Поэтому если существует σ-замкнутый свободный фильтр $\mathcal{F}$ в T, то мы можем расширить $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}^{cofin}(T)$ до σ-замкнутого ультрафильтра в T и получить таким образом измеримость $\operatorname{card} T$.

Нам потребуется следующая

Лемма. Существует система окрестностей $v_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}$ в X такая, что p содержится в $v_n(p)$ при любом n, и для любых $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ множество окрестностей $\{v_n(p_i) : i \leq n\}$ не покрывает X.

Для доказательства Леммы рассмотрим отдельно два случая:

1. Если X не компактно, то пусть $\mathcal{V}$ — открытое покрытие, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. В качестве $v_n(p)$ тогда можно взять (не зависящее от n) объединение конечного числа окрестностей из $\mathcal{V}$, содержащее p.

2. Если X — компакт, но не разреженный, то существует непрерывное отображение $f : X \xrightarrow{\text{на}} [0,1]$ [7]. Положим

$$v_n(p) = \{x \in X : 4n \cdot \rho(f(x), f(p)) \cdot \operatorname{card} p < 1\}$$

(здесь ρ — расстояние в метрике Хаусдорфа), тогда

$$[\operatorname{mes} f(v_n(p)) \leq 1/2n] \Rightarrow \left[\operatorname{mes} f\left(\bigcup_{i \leq n} v_n(p_i)\right) \leq 1/2\right],$$

то есть $\bigcup_{i \leq n} v_n(p_i) \neq X$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что существует функция $\Phi(u)$, удовлетворяющая условию (2). Тогда фильтр $\mathcal{F}$ на T, порожденный семейством $\mathcal{Q} = \{Q(u, \Phi(u)) : u \in \mathcal{U}\}$, содержит лишь бесконечные множества, то есть свободен. Покажем, что $\mathcal{F}$ σ-замкнут. Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}$ — счетное покрытие T. Положим

$$k(t) = \min\{i \in \mathbb{N} : t \in A_i\},\ u(\varphi, t) = v_{k(t)}(\varphi(t)),\ n = \operatorname{card} \Phi(u).$$

Семейство окрестностей $\{u(\varphi, t) : \varphi \in \Phi(u)\}$ при таком u может покрыть X лишь при условии $k(t) < \operatorname{card} \Phi(u)$. Следовательно,

$$\bigcup_{i<n} A_i = \{t \in T : k(t) < \operatorname{card} \Phi(u)\} \supseteq Q(u, \Phi(u)), \text{ и } \bigcup_{i<n} A_i \in \mathcal{F},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство Теоремы 2. Применяя алгоритм Нельсона к утверждению теоремы, получаем эквивалентную формулировку: надо доказать, что $\forall T\ \forall g \in \mathcal{P}^T\ \forall \Phi \in \left(\mathcal{P}^{fin}(\mathcal{G}_0)\right)^{\mathcal{U}}$ фильтр $\mathcal{F}$, порожденный семейством $\mathcal{Q} \cup \left\{T - g^{-1}(p) : p \in \mathcal{P}\right\}$, совпадает с $\mathcal{P}(T)$. Здесь $\mathcal{P}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Q}$ определяются как в Теореме 1.

Зафиксируем произвольные T, g, Φ. Из доказательства Теоремы 1 следует, что $\mathcal{F}$ σ-замкнут.

Предположим, что $\mathcal{F}$ несобственный. Расширим его до ультрафильтра $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}(T)$. Так как $\mathcal{F}'$ σ-мультипликативен, а χ неизмерим, то $\mathcal{F}'$ является и χ-мультипликативным [5]. Но $\operatorname{card}\mathcal{P} = \chi$, а $\bigcap\left\{T - g^{-1}(p) : p \in \mathcal{P}\right\} = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{F}$ собственный, то есть содержит некоторое конечное множество $M \subset T$. Для $p = \bigcup\{g(t) : t \in M\}$ $g^{-1}(p) \supset M$. Поэтому $\varnothing = M \cap \left(T - g^{-1}(p)\right) \in \mathcal{F}$, и $\mathcal{F} = \mathcal{P}(T)$, что и требовалось доказать.

Доказательство Теоремы 3. Предположим, что $t \in T$ удовлетворяет требованию: любое t-стандартное $x \in X$ стандартно. Это означает, что для любой функции $\varphi : T \to \mathcal{P}$ все элементы конечного множества $\varphi(t)$ стандартны. Тогда и само $\varphi(t)$ стандартно. И обратно, если $\varphi(t)$ конечно и стандартно, то и все элементы $\varphi(t)$ стандартны. Таким образом, Теорема записывается следующим образом:

Пусть X, T — стандартные бесконечные множества, $\operatorname{card} X$ неизмерим. Тогда условие

$$\exists t \in T\ \forall^{st} \vartheta \in T\ \forall^{st} \varphi \in \mathcal{G}_0\ \exists^{st} p \in \mathcal{P}\ (\varphi(t) = p) \,\&\, (t \neq \vartheta) \tag{3}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{card} T$ измерим.

Применяя алгоритм Нельсона к формуле (3), приведем ее к эквивалентному виду:

$$\exists q \in \mathcal{P}^{\mathcal{G}_0}\ \forall^{fin} \Phi \subset \mathcal{G}_0 \bigcap \{Q(\varphi, q(\varphi)) : \varphi \in \Phi\} \text{ бесконечно,} \tag{4}$$

где $Q(\varphi, p) = \{t \in T : \varphi(t) = p\}$.

Предположим, что существует функция $q(\varphi)$, удовлетворяющая условию (4). Тогда фильтр $\mathcal{F}$ на T, порожденный семейством $\mathcal{Q} = \{Q(\varphi, q(\varphi)) : \varphi \in \mathcal{G}\}$, свободен. Пусть $\mathcal{A} = \{A_i\}$ — счетное покрытие T. Определим функцию $k(t)$, как в доказательстве Теоремы 1, и рассмотрим $\varphi(t)$, удовлетворяющее требованию $\operatorname{card} \varphi(t) = k(t)$. Пусть число точек в $q(\varphi)$ равно n. Тогда $Q(\varphi, q(\varphi)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то есть $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ содержится в $\mathcal{F}$. Значит, $\mathcal{F}$ σ-замкнут, и $\operatorname{card} T$ измерим.

Пусть теперь $\operatorname{card} T$ измерим. Так как $\chi = \operatorname{card} \mathcal{P}$ неизмерим, то на T существует χ-мультипликативный ультрафильтр $\mathcal{F}$. Зафиксируем произвольное φ. Так как $\bigcup \{Q(\varphi, p) : p \in \mathcal{P}\} = T$, то найдется такое p, при котором $Q(\varphi, p)$ содержится в $\mathcal{F}$. По аксиоме выбора существует функция $q(\varphi)$ такая, что $\forall \varphi \in \mathcal{G}$ $Q(\varphi, q(\varphi)) \in \mathcal{F}$. Пересечение любого конечного набора множеств $Q(\varphi, q(\varphi))$ будет тогда также содержаться в $\mathcal{F}$, то есть будет бесконечным, что и требовалось доказать.

Заметим, что требование измеримости $\operatorname{card} X$ понадобилось лишь при доказательстве второй части Теоремы 3.

Автор благодарит Е.Г.Пыткеева за полезные советы.

Прохорова Марина Файвушевна, канд. физ.-мат.наук, младший научный сотрудник отдела прикладных задач Института математики и механики УрО РАН.

Служебные координаты:

✉ 620219 Екатеринбург ГСП-384, ул.С.Ковалевской 16, ИММ УрО РАН

☎ (3432) 49-32-22

💻 pmf@dap.imm.intec.ru

Домашние координаты:

✉ 620146 Екатеринбург Л-146, ул.Амундсена 61, кв.258

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордон Е.И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона//Сиб. мат. ж.–1989.–Т.30, №1.–С.89–95.
2. Benninghofen B., Richter M.M. A general theory of superinfinitesimals//Fund. Math. 1987. Vol.128, № 3. P. 199-215.
3. Прохорова М.Ф. Внешняя равномощность конечных множеств в нестандартном анализе//Проблемы теоретической и прикладной математики. Информационные материалы.— Свердловск: УрО РАН, 1993.—С. 91.
4. Кановей В.Г. Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Эдварда Нельсона//УМН.–1991.–Т.46, вып.6.–С.3-50.
5. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.–М.: Мир, 1970.–416с.
6. Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis//Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol.83, № 6. P. 1165-1198.
7. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. –М.: Изд-во МГУ, 1989.