М. Ф. Прохорова, Факторизация уравнения реакции-диффузии, волнового уравнения и других, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2013, том 19, номер 4, 203–213

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 4 2013

УДК 517.958, 515.168

ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ, ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ДРУГИХ[1]

М. Ф. Прохорова

В статье исследуются уравнения вида $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ для неизвестной функции $u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$, где $D_t u = a_0(u,t) + \sum_{k=1}^r a_k(t,u)\partial_t^k u$; Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии X; ξ — гладкое векторное поле на X. А именно исследуются морфизмы из этого уравнения в рамках определенной ранее автором категории $\mathcal{PDE}$ дифференциальных уравнений в частных производных. Мы ограничиваемся морфизмами специального вида, так называемыми геометрическими морфизмами, задаваемыми отображениями X в другие гладкие многообразия (той же или меньшей размерности).

Показано, что отображение $f\colon X \to Y$ задает морфизм из уравнения $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ тогда и только тогда, когда для некоторых векторного поля Ξ и метрики на Y равенство $(\Delta + \xi\nabla)f^*v = f^*(\Delta + \Xi\nabla)v$ выполняется для любой гладкой функции $v\colon Y \to \mathbb{R}$. При этом фактор-уравнением будет $D_t v = \Delta v + \Xi\nabla v$ для неизвестной функции $v(t,y)$, $y \in Y$.

Также показано, что если отображение $f\colon X \to Y$ является локально тривиальным расслоением, то f задает морфизм из уравнения $D_t u = \Delta u$ тогда и только тогда, когда слои f параллельны и для любой кривой γ на Y коэффициент расширения слоя при переносе вдоль горизонтального поднятия γ на X зависит только от γ.

Ключевые слова: категория дифференциальных уравнений в частных производных; уравнение реакции-диффузии; уравнение теплопроводности; волновое уравнение.

M. F. Prokhorova. Factorization of the reaction–diffusion equation, the wave equation, and other equations.

We investigate equations of the form $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ for an unknown function $u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$, where $D_t u = a_0(u,t) + \sum_{k=1}^r a_k(t,u)\partial_t^k u$, Δ is the Laplace–Beltrami operator on a Riemannian manifold X, and ξ is a smooth vector field on X. More exactly, we study morphisms from this equation within the category $\mathcal{PDE}$ of partial differential equations, which was introduced by the author earlier. We restrict ourselves to morphisms of a special form — the so-called *geometric morphisms*, which are given by mappings of X to other smooth manifolds (of the same or smaller dimension).

It is shown that a mapping $f\colon X \to Y$ defines a morphism from the equation $D_t u = \Delta u + \xi\nabla u$ if and only if, for some vector field Ξ and a metric on Y, the equality $(\Delta + \xi\nabla)f^*v = f^*(\Delta + \Xi\nabla)v$ holds for any smooth function $v\colon Y \to \mathbb{R}$. In this case, the quotient equation is $D_t v = \Delta v + \Xi\nabla v$ for the unknown function $v(t,y)$, $y \in Y$.

It is also shown that, if a mapping $f\colon X \to Y$ is a locally trivial fiber bundle, then f defines a morphism from the equation $D_t u = \Delta u$ if and only if fibers of f are parallel and, for any path γ on Y, the expansion factor of a fiber transferred along the horizontal lift γ on X depends on γ only.

Keywords: category of partial differential equations, reaction–diffusion equation, heat equation, wave equation.

Введение

В статье [1] автором была определена категория $\mathcal{PDE}$ дифференциальных уравнений в частных производных. В разд. 1 будет дано строгое определение этой категории; наивно говоря, ее объектами являются дифференциальные уравнения в частных производных, а морфизмами из уравнения E в уравнение E' — такие отображения из пространства N зависимых и независимых переменных E в пространство N' зависимых и независимых переменных E', что подмногообразие $\Gamma \subset N'$ является графиком решения E' тогда и только тогда, когда его прообраз $F^{-1}(\Gamma)$ является графиком решения E. Такое уравнение E' мы будем называть *фактор-уравнением* для E.

[1]Работа выполнена при поддержке программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003).

Частным случаем морфизма из E является факторизация по группе симметрий уравнения E. А именно если G — группа преобразований N, оставляющая инвариантным уравнение E, и фактор-отображение $N \to N/G$ является локально тривиальным расслоением, то это отображение задает морфизм из E в уравнение E/G, которое описывает решения E, инвариантные относительно G. Группы симметрий дифференциальных уравнений широко используются для построения частных решений, известных как инвариантные и частично инвариантные решения. Однако запас морфизмов в категории $\mathcal{PDE}$ в общем случае существенно богаче запаса факторизаций по группам симметрий [1;2], что позволяет использовать эти морфизмы для нахождения либо качественного исследования новых классов решений дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, при исследовании внутренней структуры конкретных подкатегорий $\mathcal{PDE}$ возникает естественная классификация уравнений данной подкатегории (см., например, классификацию параболических уравнений второго порядка в [1]).

В данной статье исследуются морфизмы категории $\mathcal{PDE}$ из уравнений вида

$$D_t u = \Delta u + L_\xi u, \tag{0.1}$$

а также более узкого класса уравнений вида

$$D_t u = \Delta u, \tag{0.2}$$

где D_t — дифференциальный оператор

$$D_t u = a_0(t,u) + \sum_{k=1}^{r} a_k(t,u)\partial_t^k u;$$

$r \geq 0$ (при $r = 0$ мы полагаем $D_t u = a_0(t,u)$); $a_k(t,u)$ — непрерывные вещественнозначные функции такие, что для любой пары (t,u) по крайней мере один из коэффициентов $a_k(t,u)$ не обращается в ноль. Здесь Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии X: $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, ξ — гладкое векторное поле на X, $L_\xi u$ — производная функции u вдоль ξ.

Частными случаями уравнения (0.1) являются уравнение реакции-диффузии $u_t = a(u)(\Delta u + L_\xi u) + b(u)$, нелинейное уравнение теплопроводности $u_t = a(u)\Delta u$, волновое уравнение $u_{tt} = a(u)\Delta u$, эллиптическое уравнение $\Delta u = b(u)$ и мн. др.

Вообще говоря, морфизмы из уравнения (0.1) задаются отображениями $F\colon N \to N'$ (где $N = \mathbb{R}\times X\times\mathbb{R}$, а N' — произвольное гладкое многообразие), удовлетворяющими дополнительным условиям (определению морфизма). Но в данной статье мы ограничимся рассмотрением более узкого класса отображений, а именно морфизмов вида

$$F = (\mathrm{id}, f, \mathrm{id})\colon (t,x,u) \mapsto (t, f(x), u), \tag{0.3}$$

задаваемых гладким отображением $f\colon X \to Y$, где Y — произвольное гладкое многообразие, а $N' = \mathbb{R}\times Y\times\mathbb{R}$. Для краткости морфизмы категории $\mathcal{PDE}$ из уравнений (0.1) и (0.2), удовлетворяющие условию (0.3), мы будем в данной статье называть *геометрическими морфизмами*. Заметим, что по определению морфизма в категории $\mathcal{PDE}$ f должно быть сюръективной субмерсией.

Далее будет показано, в частности, что для каждого геометрического морфизма из уравнения (0.1) соответствующее фактор-уравнение (для неизвестной функции $v\colon \mathbb{R}\times Y \to \mathbb{R}$) имеет вид

$$D_t v = \Delta_Y v + L_\Xi v \tag{0.4}$$

с тем же самым оператором D_t, где Δ_Y — оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии Y, Ξ — гладкое векторное поле на Y. По определению морфизма в категории $\mathcal{PDE}$ каждому решению $v(t,y)$ уравнения (0.4) соответствует решение $u(t,x) = v(t, f(x))$ уравнения (0.1), и наоборот, если решение уравнения (0.1) может быть представлено в виде $u(t,x) = v(t, f(x))$ для некоторой функции $v(t,y)$, то $v(t,y)$ является решением уравнения (0.4).

Полученное в данной статье общее описание геометрических морфизмов из уравнения (0.1) позволяет проводить их дальнейшее, более детальное, исследование, что будет сделано в следующей статье.

В оправдание ограничения (0.3) можно сказать следующее. С одной стороны, этот класс морфизмов — достаточно большой, и для многих целей достаточно ограничиться его рассмотрением. В частности, на его примере можно хорошо увидеть взаимоотношения между морфизмами в $\mathcal{PDE}$ и факторизациями исходного уравнения по группам симметрий. С другой стороны, в [3] показано, что для коэффициента $a(u)$ достаточно общего вида любой морфизм из уравнения $u_t = a(u)(\Delta u + L_\xi u) + b(u)$ в рамках определенной там категории $\mathcal{PE}$ параболических уравнений может быть приведен к виду (0.3) биективной заменой переменных в фактор-уравнении.

1. Категория $\mathcal{PDE}$

Напомним вначале некоторые определения. Пусть N — гладкое многообразие, d, s — натуральные числа, $s < \dim N$. *Расслоением d-струй* (подмногообразий коразмерности s) $\pi^d\colon J^d_s(N) \to N$ называется расслоение со слоем $J^d_s(N)\big|_x$ над точкой $x \in N$, где $J^d_s(N)\big|_x$ — множество классов эквивалентности гладких подмногообразий L коразмерности s в N, проходящих через x, с отношением эквивалентности — касанием d-го порядка в точке x. По определению *d-струя* гладкого подмногообразия $L \subset N$ в точке $x \in L$ — это класс эквивалентности из $J^d_s(N)\big|_x$, представленный L. Отображение *продолжения* $j^d_L\colon L \to J^d_s(N)$ переводит точку $x \in L$ в d-струю L в x. Под *дифференциальным уравнением d-го порядка* мы будем понимать произвольное подмножество E пространства струй $J^d_s(N)$. Гладкое подмногообразие L коразмерности s в N называется *решением* E, если образ $j^d_L(L)$ его d-го продолжения содержится в E.

Данное здесь определение дифференциального уравнения является очень общим; в большинстве приложений возникают уравнения “классического” вида, когда E является замкнутым подмножеством (или даже подмногообразием) пространства $J^d(M;S)$ d-струй гладких отображений из M в S. Если $E \subset J^d(M;S)$ — такое классическое дифференциальное уравнение, то его *расширенной версией* называется замыкание E в $J^d_s(M\times S)$, $s = \dim S$ [4]. Здесь $J^d(M;S)$ отождествлено с открытым подмножеством в $J^d_s(M\times S)$, состоящим из d-струй графиков всевозможных гладких отображений из M в S. Очевидно, гладкое отображение $u\colon M \to S$ является решением классического уравнения E тогда и только тогда, когда его график является решением расширенной версии E. Однако расширенная версия E допускает также и многозначные решения, и решения с бесконечными производными (подробности см. в [4]). Далее, когда мы будем говорить о морфизмах из конкретного уравнения классического вида (например, уравнения (0.1) или (0.2)), это всегда будет подразумевать морфизмы из его расширенной версии, т. е. замыкания соответствующего множества $E \subset J^d(M;S)$ в $J^d_s(M\times S)$.

Теперь мы можем сформулировать определение категории $\mathcal{PDE}$, данное в [1].

Для произвольного отображения $F\colon N \to N'$ подмножество $L \subset N$ назовем *F-проектируемым*, если $L = F^{-1}(F(L))$.

Пусть N, N' — гладкие подмногообразия, $F\colon N \to N'$ — сюръективная субмерсия. *Расслоением F-проектируемых струй* $J^d_{s,F}(N)$ называется подмногообразие $J^d_s(N)$, состоящее из d-струй всевозможных F-проектируемых подмногообразий N коразмерности s, с индуцированной структурой расслоения над N.

Имеется естественный изоморфизм расслоений $J^d_{s,F}(N)$ и $F^*J^d_s(N')$, где $F^*J^d_s(N') = J^d_s(N')\times_{N'} N$ — пуллбэк $J^d_s(N')$ вдоль отображения F. Поэтому можно поднять F до отображения $F^d\colon J^d_{s,F}(N) \to J^d_s(N')$, являющегося изоморфизмом на слоях, следующим естественным образом (рис. 1). Пусть $\vartheta \in J^d_{s,F}(N)$.

1. Возьмем произвольное F-проектируемое многообразие $L \subset N$ такое, что его d-е продолжение L проходит через ϑ (иначе говоря, d-струя L в точке $\pi^d(\vartheta)$ есть ϑ).

$$\begin{tikzcd} J^d_{s,F}(N) \arrow[r, "F^d"] \arrow[d, two heads, "\pi^d"] & J^d_s(N') \arrow[d, two heads, "\pi'^d"] \\ N \arrow[r, "F"] & N' \end{tikzcd}$$

Рис. 1

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, hook] & E \cap J^d_{s,F}(N) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & E' \arrow[d, hook] \\ J^d_s(N) \arrow[d, two heads, "\pi^d"] & J^d_{s,F}(N) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "F^d"] \arrow[d, two heads] & J^d_s(N') \arrow[d, two heads, "\pi'^d"] \\ N \arrow[r, equal] & N \arrow[r, two heads, "F"] & N' \end{tikzcd}$$

Рис. 2. Допустимые отображения.

2. Сопоставим ϑ точку $\vartheta' \in J^d_s(N')$, где ϑ' — d-струя подмногообразия $L' = F(L) \subset N'$ в точке $F \circ \pi^d(\vartheta)$. (Для F-проектируемого гладкого подмногообразия $L \subset N$ его образ $F(L)$ всегда является гладким подмногообразием N'.)

О п р е д е л е н и е 1 [1, определение 1]. Пусть $F\colon N \to N'$ — гладкая сюръективная субмерсия. Подмножество $E \subset J^d_s(N)$ *допускает* F, если $E \cap J^d_{s,F}(N)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_{s,F}(N)$ (рис. 2). Эквивалентно $E \cap J^d_{s,F}(N)$ является прообразом $\left(F^d\right)^{-1}(E')$ некоторого подмножества $E' \subset J^d_s(N')$; это подмножество E' называется *F-проекцией E*.

О п р е д е л е н и е 2 [1, определение 2]. *Категорией дифференциальных уравнений в частных производных $\mathcal{PDE}$* называется категория, объектами которой являются пары (N, E), где N — гладкое многообразие, E — подмножество $J^d_s(N)$ для некоторых натуральных $d, s \geq 1$; морфизмами из (N, E) в (N', E') являются сюръективные субмерсии $F\colon N \to N'$, допускаемые E, такие, что E' является F-проекцией E. Композиция морфизмов определяется как композиция соответствующих отображений.

Заметим, что определенная здесь категория $\mathcal{PDE}$ принципиально отличается от категории нелинейных дифференциальных уравнений DE, определяемой в [5; 6], что следует иметь в виду во избежание путаницы. В упрощенном виде общее определение DE из [5; 6] может быть сформулировано следующим образом [7]: объектами DE являются бесконечномерные многообразия, снабженные вполне интегрируемым конечномерным распределением (в частности, бесконечно продолженные дифференциальные уравнения), а морфизмами — гладкие отображения, для которых образ распределения содержится в распределении на образе. Несколько упрощая, фактор-объектом в такой категории является уравнение в факторпространстве, описывающее образы (при проектировании в факторпространство) произвольных решений исходного уравнения; при этом подходе из каждого фактор-объекта мы получаем часть информации обо всех решениях исходного уравнения. В противоположность этому фактор-объект в категории $\mathcal{PDE}$ — это такое уравнение, что прообразы всех его решений являются решениями исходного; при этом из каждого фактор-объекта мы получаем полную информацию о некотором классе решений исходного уравнения.

2. Геометрические морфизмы

Теорема 1. *Пусть X — гладкое риманово многообразие, Y — гладкое многообразие, $f\colon X \to Y$ — сюръективная субмерсия, ξ — гладкое векторное поле на X, $a_k(t,u)$ — непрерывные функции такие, что для любой пары (t,u) по крайней мере один из коэффициентов $a_k(t,u)$ не обращается в ноль. Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1. *Отображение* (0.3) *является морфизмом категории $\mathcal{PDE}$ из уравнения* (0.1).

2. *Существуют такие векторное поле Ξ и риманова метрика на Y, что следующая диаграмма является коммутативной* (*рис.* 3):

$$\begin{tikzcd} C^\infty(Y) \arrow[r, "v\mapsto \Delta v + L_\Xi v"] \arrow[d, "f^*"] & C^\infty(Y) \arrow[d, "f^*"] \\ C^\infty(X) \arrow[r, "u\mapsto \Delta u + L_\xi u"] & C^\infty(X) \end{tikzcd}$$

Рис. 3

При этом фактор-уравнение (*для неизвестной функции $v\colon \mathbb{R}\times Y \to \mathbb{R}$*) *будет иметь вид* (0.4)

$$D_t v = \Delta v + L_\Xi v$$

с тем же самым оператором D_t.

Здесь той же самой буквой $\Delta = \Delta_Y$ обозначен оператор Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии Y.

З а м е ч а н и е. Если Y односвязно, то дифференциальная форма, двойственная векторному полю Ξ на римановом многообразии Y, точна, и фактор-уравнение (0.4) можно записать в виде

$$D_t v = \varphi^{-1}\operatorname{div}(\varphi\nabla v)$$

для некоторой гладкой функции $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}_+$ (см. также следствие 2).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующий общий факт. Пусть M, M', S — гладкие многообразия, $s = \dim S$, $N = M\times S$, $N' = M'\times S$, $\varphi\colon M \to M'$ — гладкая сюръективная субмерсия, $F = \varphi\times \mathrm{id}\colon N \to N'$. Напомним, что пространство $J^d(M;S)$ d-струй отображений из M в S отождествляется с открытым подмножеством в $J^d_s(N)$, состоящим из d-струй графиков всевозможных гладких отображений из M в S. Обозначим $J^d_F(M;S) = J^d(M;S)\cap J^d_{s,F}(N)$ множество d-струй F-проектируемых графиков отображений из M в S.

Лемма 1. *Пусть E — замкнутое подмножество $J^d(M;S)$, $\overline{E}$ — замыкание E в $J^d_s(N)$. Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1. *$E\cap J^d_F(M;S)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_F(M;S)$.*
2. *$\overline{E}\cap J^d_{s,F}(N)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_{s,F}(N)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения формул в пределах данного доказательства мы будем сокращенно записывать J вместо J^d_s и J^d, а также J_F вместо $J^d_{s,F}$ и J^d_F.

Заметим вначале, что $J_F(N) \cong F^*J(N')$, $J_F(M;S) \cong F^*J(M';S)$ как расслоения над N.

Обозначим $E_F = E\cap J_F(M;S) = E\cap J_F(N)$, $\overline{E}_F = \overline{E}\cap J_F(N)$. Подмножество $J_F(N)$ замкнуто в $J(N)$, поэтому $\overline{E}_F$ совпадает с замыканием E_F в $J_F(N)$.

Обозначим через Z_y слой $J(N')$ над точкой $y\in N'$, через U_y — слой $J(M';S)$ над y. Если на левой диаграмме рис. 4 сделать замену базу посредством включения $\{y\}\hookrightarrow N'$, мы получим правую диаграмму рис. 4, где $N_y = F^{-1}(y)$, $\overline{E}_{F,y} = \overline{E}_F\cap (F^d)^{-1}(Z_y)$, $E_{F,y} = E_F\cap (F^d)^{-1}(U_y)$.

$$
\begin{tikzcd}
E_F \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & J_F(M;S) \arrow[r] \arrow[d, hook] & J(M';S) \arrow[d, hook] \\
\overline{E}_F \arrow[r, hook] & J_F(N) \arrow[r, "F^d"] \arrow[d, "\pi^d"] & J(N') \arrow[d, "\pi'^d"] \\
& N \arrow[r, "F"] & N'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_{F,y} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & N_y \times U_y \arrow[r] \arrow[d, hook] & U_y \arrow[d, hook] \\
\overline{E}_{F,y} \arrow[r, hook] & N_y \times Z_y \arrow[r] \arrow[d] & Z_y \arrow[d] \\
& N_y \arrow[r] & \{y\}
\end{tikzcd}
$$

Рис. 4. Замена базы.

Z_y замкнут в $J(N')$, так что его прообраз $(F^d)^{-1}(Z_y)$ замкнут в $(F^d)^{-1}(J(N')) = J_F(N)$ и $\overline{E}_{F,y}$ совпадает с замыканием $E_{F,y}$ в $(F^d)^{-1}(Z_y) \cong N_y \times Z_y$. Таким образом, достаточно доказать, что для любой точки $y \in N'$ следующие два условия эквивалентны:

(1) $E_{F,y}$ имеет вид $N_y \times A$ для некоторого подмножества $A \subset U_y$;

(2) замыкание $E_{F,y}$ в $N_y \times Z_y$ имеет вид $N_y \times B$ для некоторого подмножества $B \subset Z_y$.

Предположим, что $E_{F,y} = N_y \times A$; тогда, очевидно, $\overline{E}_{F,y} = N_y \times B$, где B — замыкание A в Z_y. Пусть, наоборот, $\overline{E}_{F,y} = N_y \times B$. Тогда $E_{F,y} = (N_y \times U_y) \cap \overline{E}_{F,y} = N_y \times (B \cap U_y)$, так как $E_{F,y}$ замкнуто в $N_y \times U_y$ (поскольку E замкнуто в $J(M;S)$ по условию леммы). Таким образом, условия (1) и (2) эквивалентны, что завершает доказательство леммы. □

Доказательство теоремы 1. В нашей ситуации $M = \mathbb{R} \times X$, $M' = \mathbb{R} \times Y$, $\varphi = \mathrm{id} \times f$, $S = \mathbb{R}$, $d = \max(2, r)$, уравнение (0.1) задает замкнутое подмножество E в $J^d(M;\mathbb{R})$. По определению отображение (0.3) задает морфизм категории $\mathcal{PDE}$ из “классического” уравнения E, если $\overline{E} \cap J^d_{s,F}(N)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_{s,F}(N)$. По лемме 1 это условие эквивалентно тому, что $E \cap J^d_F(M;S)$ является F^d-проектируемым подмножеством $J^d_F(M;S)$.

Импликация $1 \Rightarrow 2$. Пусть ϑ — произвольная точка из $E \cap J^d_F(M;\mathbb{R})$, $\pi_d(\vartheta) = (t, x, u)$, $f(x) = y$. Возьмем функцию $\tilde{v}\colon M' \to \mathbb{R}$, d-струя которой в точке (t, y) совпадает с $F^d(\vartheta) \in J^d(M';\mathbb{R})$; тогда d-струя функции $\tilde{u} = \varphi^*\tilde{v}$ в точке (t, x) совпадает с ϑ. Так как ϑ лежит в E, то значение выражения

$$D_t\tilde{u} - \Delta\tilde{u} - L_\xi\tilde{u} \tag{2.1}$$

в точке (t, x) обращается в ноль.

Пусть V — карта Y, содержащая точку y, (y^i) — локальные координаты на V, отображение f в этих координатах записывается как $f(x) = \bigl(f^1(x), \dots, f^m(x)\bigr)$ для $x \in f^{-1}(V)$, $m = \dim Y$. Выражая значение (2.1) в точке (t, x) через d-струю $\tilde{v}$ в точке (t, y), получаем в координатной записи

$$a_0(t,u) + \sum_{k=1}^{r} a_k(t,u) v_{\underbrace{t..t}_{k}} - \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(x) v_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \zeta^i(x) v_i = 0, \tag{2.2}$$

где

$$v_i = \partial_i \tilde{v}(t,y), \quad v_{ij} = \partial_i\partial_j \tilde{v}(t,y), \quad v_{\underbrace{t..t}_{k}} = \partial_t^k \tilde{v}(t,y)$$

обозначают компоненты d-струи функции $\tilde{v}$ в точке (t, y), ∂_i — частная производная по y^i, а функции $g^{ij}, \zeta^i\colon f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ определены формулами $g^{ij} = \bigl\langle \mathrm{d}f^i, \mathrm{d}f^j \bigr\rangle$, $\zeta^i = \Delta f^i + L_\xi f^i$.

При фиксированных t, x, u уравнение (2.2) задает подмножество $Q(t, x, u)$ слоя $J^d(\mathbb{R} \times V;\mathbb{R})$ над (t, y, u). По определению F^d-проектируемость $E \cap J^d_F(\mathbb{R} \times f^{-1}(V);\mathbb{R})$ эквивалентна тому, что для всех $y \in V$, $t, u \in \mathbb{R}$ множество $Q(t, x, u) = E' \cap J^d(\mathbb{R} \times V;\mathbb{R})_{(t,y,u)}$ не зависит от выбора точки $x \in f^{-1}(y)$. Так как по условию теоремы хотя бы одно из значений $a_k(t, u)$ не обращается в ноль, последнее условие эквивалентно f-проектируемости с $f^{-1}(V)$ на V функций g^{ij} и ζ^i для всех $i, j = 1 \dots m$. Иначе говоря,

$$\begin{cases} \left\langle \mathrm{d}f^i, \mathrm{d}f^j \right\rangle_x = g^{ij}(f(x)), \\ \left(\Delta f^i + L_\xi f^i\right)_x = \zeta^i(f(x)), \end{cases} \tag{2.3}$$

для некоторых функций g^{ij}, ζ^i на V (для удобства мы оставили прежние обозначения для этих новых функций). Форма g^{ij} положительно определена, так что она задает риманову метрику на V. Отсюда и из (2.3) для произвольной функции $w\colon V \to \mathbb{R}$ получаем

$$\Delta(f^* w) + L_\xi(f^* w) = f^* \left(\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} w_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \zeta^i w_i \right) = f^* \left(\Delta w + L_\Xi w \right), \tag{2.4}$$

где оператор Лапласа — Бельтрами на V берется относительно римановой метрики $g = (g^{ij})$, а векторное поле Ξ на V определяется формулой

$$\Xi^i = \zeta^i - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_j \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \right), \quad |g| = |\det(g_{ij})| .$$

Выберем покрытие Y картами, диффеоморфными $\mathbb{R}^m$. При замене координат $\Xi^i(y)$ и $g^{ij}(y)$ ведут себя как сечения TY и симметричного квадрата TY соответственно, так что глобально при склейке карт они задают векторное поле Ξ и риманову метрику g на Y. В силу (2.4) для произвольной функции $w\colon Y \to \mathbb{R}$ тождество $\Delta(f^* w) + L_\xi(f^* w) = f^* \left(\Delta w + L_\Xi w \right)$ выполняется на каждой карте, так что оно выполняется и глобально на Y. Это доказывает импликацию $(1 \Rightarrow 2)$ в условии теоремы 1.

Для доказательства импликации $(2 \Rightarrow 1)$ достаточно повторить рассуждения в обратном направлении. $\square$

3. Факторизация с понижением размерности

Пусть X — гладкое риманово многообразие, Y — гладкое многообразие, $f\colon X \to Y$ — сюръективная субмерсия. Положим $n = \dim X$, $m = \dim Y$, $k = n - m$. Вообще говоря, $n \geq m$; мы будем рассматривать, начиная с этого места, случай, когда $n > m$. Тогда слои f (прообразы $f^{-1}(y)$, $y \in Y$) являются гладкими подмногообразиями X размерности $k > 0$ [8].

1-форму на X будем называть горизонтальной, если она имеет нулевое ограничение на любой слой. Эквивалентно 1-форма называется горизонтальной, если она лежит в подрасслоении $f^* T^* Y$ расслоения $T^* X$. Аналогично s-форму на X назовем горизонтальной, если она лежит в подрасслоении $f^* \Lambda^s T^* Y$ расслоения $\Lambda^s T^* X$. Здесь $\Lambda^s T^* X$ — расслоение дифференциальных s-форм над X.

Касательное расслоение TX расщепляется в прямую сумму $TX = T_v X + T_h X$, где вертикальное расслоение $T_v X = \{\eta \in TX \colon f_* \eta = 0\}$ состоит из векторов, касательных к слоям, а горизонтальное расслоение $T_h X$ — из векторов, ортогональных слоям. Для произвольного векторного поля η на Y обозначим $f^h \eta$ его горизонтальное поднятие на X (т. е. векторное поле на X, ортогональное слоям f и проектирующееся в η).

Рассмотрим одномерное векторное расслоение $\det T_v X = \Lambda^k T_v X$. Оно является подрасслоением расслоения $\Lambda^k TX$, так что для сечения V расслоения $\det T_v X$ определена производная Ли $L_\zeta V$ в направлении произвольного векторного поля ζ на X. Риманова структура на X индуцирует риманову структуру (скалярное произведение в слоях) на расслоениях $\Lambda^i TX$, и в частности риманову структуру на $\det T_v X$.

Лемма 2. *Существует и единственна горизонтальная 1-форма α на X такая, что*

$$L_{\eta'} V = (\alpha, \eta') V \tag{3.1}$$

для произвольного векторного поля η *на* Y, *его горизонтального поднятия* $\eta' = f^h\eta$ *и для (локального) сечения* V *расслоения* $\det T_vX$ *такого, что* $\langle V, V\rangle = 1$.

Мы будем называть форму α *коэффициентом расширения слоя при переносе в горизонтальном направлении.*

Доказательство. Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов X, порождаемая векторным полем η', переводит слои в слои. Поэтому при фиксированных сечениях η и V имеется однозначно определенная вещественнозначная функция $c\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $L_{\eta'}V = c(x)V$. Этот коэффициент пропорциональности $c(x)$ не зависит от V, так как локально поле V определено однозначно с точностью до знака, а при смене знака у V обе стороны последнего равенства меняют знак. Таким образом, функция $c(x)$ зависит как от параметра только от векторного поля η, $c = c(x;\eta)$, причем значение c в точке x зависит только от 1-струи η' в x, т. е. от 1-струи η в точке $f(x)$.

Зафиксируем теперь точку $y \in Y$ и ограничим $c(x;\eta)$ на слой $Z = f^{-1}(y) \subset X$. Мы получим $\mathbb{R}$-линейное отображение $c_y\colon T_yY \otimes_{\mathbb{R}} (O_y/\mathfrak{m}^2O_y) \to C^\infty(Z)$, сопоставляющее 1-струе поля η в точке y вещественнозначную функцию на Z. Здесь O_y — локальное кольцо ростков гладких функций на Y в точке y, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца O_y, состоящий из ростков функций, обращающихся в ноль в y.

Если $\eta(y) = 0$, то η' обращается в 0 на всем слое Z, поток вдоль η' оставляет этот слой неподвижным, так что $L_{\eta'}V\big|_x = 0$, и $c(x;\eta) = 0$ для всех $x \in Z$. Значит, ограничение c_y на $T_yY \otimes_{\mathbb{R}} (\mathfrak{m}O_y/\mathfrak{m}^2O_y)$ обращается в ноль. Это означает, что c_y пропускается через $T_yY \otimes_{\mathbb{R}} (O_y/\mathfrak{m}O_y) = T_yY \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = T_yY$, так что $c_y = h(x)(\beta, \eta(y))$ для некоторой гладкой функции $h\colon Z \to \mathbb{R}$ и $\beta \in T_y^*Y$. Иначе это равенство можно записать как $c_y = (\alpha_y(x), \eta'(x))$, где $\alpha_y = h \cdot f^*\beta$ — однозначно определенная горизонтальная форма над Z, т. е. сечение расслоения $T_h^*X\big|_Z$. Принимая во внимание, что точка y выбрана произвольно, мы получаем, что существует и единственно сечение α расслоения T_h^*X такое, что $c(x,\eta) = (\alpha(x), \eta'(x))$; что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Для сюръективной субмерсии* $f : X \to Y$ *отображение* (0.3) *является морфизом из уравнения* (0.1) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия* (*для векторного поля* Ξ *и метрики на* Y, *определенных как в теореме* 1):

(*а*) $\langle f^*\omega, f^*\omega'\rangle = f^*\langle\omega, \omega'\rangle$ *для любых* $\omega, \omega' \in T^*Y$;

(*б*) $L_{\eta'}V = (-1)^k(\langle\xi, \eta'\rangle - \langle\Xi, \eta\rangle)V$ *для произвольного векторного поля* η *на* Y, *его горизонтального поднятия* $\eta' = f^h\eta$ *и для (локального) сечения* V *расслоения* $\det T_vX$ *такого, что* $\langle V, V\rangle = 1$.

Доказательство. Напомним, что евклидово скалярное произведение на конечномерном векторном пространстве U индуцирует скалярное произведение на внешних степенях Λ^iU, а также на U^* и Λ^iU^*, что, в свою очередь, определяет канонический изоморфизм между Λ^iU и Λ^iU^*. Мы будем обозначать этот изоморфизм волной над буквой, обозначающей поливектор/поликовектор, так что для любых $u \in \Lambda^iU$, $v \in \Lambda^iU^*$ выполняется $v(u) = \langle\widetilde{u}, v\rangle = \langle u, \widetilde{v}\rangle$, $\widetilde{v} \in \Lambda^iU$, $\widetilde{u} \in \Lambda^iU^*$. Если на U есть еще и ориентация, то определен оператор Ходжа $*\colon \Lambda^iU \to \Lambda^{\dim U - i}U$, причем для всех $u, v \in \Lambda^iU$ выполняется $\langle u, v\rangle = *(u \wedge *v)$.

Импликация $1 \Rightarrow 2$. Пусть $f : X \to Y$ задает морфизм из (0.1) в (0.4). По теореме 1 для любой функции $v\colon Y \to \mathbb{R}$ и $u = f^*v$ выполняется равенство

$$\Delta u + L_\xi u = f^*(\Delta v + L_\Xi v). \tag{3.2}$$

(*а*) Для $x \in X$, $y = f(x)$ и произвольной формы $\omega \in T^*Y$ рассмотрим функцию $q\colon Y \to \mathbb{R}$ такую, что $q|_y = 0$, $\mathrm{d}q|_y = \omega|_y$, и положим $v = q^2/2$. Тогда

$$\Delta v + L_\Xi v|_y = \langle\omega, \omega\rangle_y, \quad \Delta f^*v + L_\xi f^*v|_x = \langle f^*\omega, f^*\omega\rangle_x.$$

Так как точка x выбрана произвольно, из (3.2) получаем

$$\forall \omega \in T^*Y \quad f^* \langle \omega, \omega \rangle \equiv \langle f^*\omega, f^*\omega \rangle . \tag{3.3}$$

Переходя от квадратичных форм к их поляризациям, получаем условие (a) теоремы.

Замечание. В общем случае для дифференциальных операторов D на X и D' на Y тождество $Df^* = f^*D'$ влечет тождество $\sigma' = f_*\sigma$ для главных символов σ, σ' операторов D, D' соответственно (здесь $f_*\sigma$ определяется формулой $(f_*\sigma)(\omega) = \sigma(f^*\omega)$ для $\omega \in T^*Y$). В нашей ситуации $\sigma'(\omega) = \|\omega\|^2$, $\sigma(\omega') = \|\omega'\|^2$, и мы получаем равенство (3.3).

($б$) Рассмотрим вначале случай, когда оба многообразия X, Y ориентированы. Тогда оператор Лапласа — Бельтрами на функциях задается формулой $\Delta = *\mathrm{d} * \mathrm{d}$ [9].

Обозначим через $\rho = *1 \in \Lambda^n (T^*X)$, $\sigma = *1 \in \Lambda^m (T^*Y)$ формы объема на X, Y соответственно. Положим $\sigma' = f^*\sigma$, $\chi = *\sigma'$. В силу (3.3) $\langle \chi, \chi \rangle = \langle \sigma', \sigma' \rangle = 1$, ограничение χ на каждый слой $f^{-1}(y)$ является формой объема на слое, и $\sigma' \wedge \chi = \rho$.

Применим к обеим сторонам тождества (3.2) оператор Ходжа и распишем подробно левую и правую стороны полученного равенства, учитывая, что для любой дифференциальной формы ω на Y выполняется равенство $*(f^*\omega) = f^*(*\omega) \wedge \chi$:

$$*\mathrm{d}u = *(f^*\mathrm{d}v) = f^*(*\mathrm{d}v) \wedge \chi,$$

$$*\left(\Delta u + L_\xi u\right) = \mathrm{d} * \mathrm{d}u + \tilde{\xi} \wedge *\mathrm{d}u = f^*(\mathrm{d} * \mathrm{d}v) \wedge \chi + (-1)^{m-1} f^*(*\mathrm{d}v) \wedge \mathrm{d}\chi + \tilde{\xi} \wedge f^*(*\mathrm{d}v) \wedge \chi,$$

$$*f^*\left(\Delta v + L_\Xi v\right) = f^*\left(*\Delta v + *(L_\Xi v)\right) \wedge \chi = f^*\left(\mathrm{d} * \mathrm{d}v + \tilde{\Xi} \wedge *\mathrm{d}v\right) \wedge \chi.$$

Приравнивая последние два выражения, находим, что форма

$$\omega = \mathrm{d}\chi + \left(\tilde{\xi} - f^*\tilde{\Xi}\right) \wedge \chi$$

удовлетворяет условию

$$\forall v \in C^\infty(Y) \quad f^*(*\mathrm{d}v) \wedge \omega = 0.$$

Так как значение в фиксированной точке $x \in X$ произвольной горизонтальной $(m-1)$-формы может быть записано как значение в той же точке формы $f^*(*\mathrm{d}v)$ для подходящей функции $v\colon Y \to \mathbb{R}$, то внешнее произведение ω на любую горизонтальную $(m-1)$-форму на X равно нулю. Последнее условие можно также записать в следующем виде:

$$i_{\tilde{\chi}}\omega = 0$$

для вертикального поливекторного поля $\tilde{\chi} \in \Lambda^k(T_vX)$, двойственного к χ.

Пусть теперь η — произвольное векторное поле на Y, η' — его поднятие до горизонтального векторного поля на X. В силу (3.1) единичный элемент объема слоя $V = \tilde{\chi}$ в точке $x \in X$ при сдвиге в направлении поля η' расширяется со скоростью (α, η'), т. е. $L_{\eta'}\tilde{\chi} = (\alpha, \eta')\tilde{\chi}$. Учитывая, что $(\chi, \tilde{\chi}) = 1$, получаем $(\alpha, \eta') = \left(\chi, L_{\eta'}\tilde{\chi}\right) = -\left(L_{\eta'}\chi, \tilde{\chi}\right) = -\left(\mathrm{d}\left(i_{\eta'}\chi\right) + i_{\eta'}\mathrm{d}\chi, \tilde{\chi}\right)$. Но η' — горизонтальное векторное поле, а χ — вертикальная форма, так что $i_{\eta'}\chi = 0$. Таким образом,

$$(\alpha, \eta') = -i_{\tilde{\chi}} i_{\eta'} \mathrm{d}\chi = (-1)^{k+1} i_{\eta'} i_{\tilde{\chi}} \mathrm{d}\chi = (-1)^k i_{\eta'}\left(\tilde{\xi} - f^*\tilde{\Xi}\right) = (-1)^k \left(\langle \xi, \eta' \rangle - \langle \Xi, \eta \rangle\right),$$

что завершает доказательство п. ($б$) в ориентируемом случае.

Вернемся теперь к общему случаю, когда X, Y не обязательно ориентируемы. Заметим, что как тождество (3.2), так и условие ($б$) теоремы локальны и не зависят от локального выбора ориентации. Отсюда следует, что условие ($б$) теоремы выполняется независимо от наличия ориентации на X, Y.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что выполняются условия (a), ($б$) теоремы. Повторяя выкладки первой части доказательства теоремы в обратном направлении, мы получаем (3.2). По теореме 1 отсюда следует, что f задает морфизм из уравнения (0.1) в уравнение (0.4). $\square$

В случае, когда $\xi = 0$, предыдущая теорема принимает следующий вид.

Теорема 3. *Для сюръективной субмерсии $f : X \to Y$ отображение* (0.3) *является морфизмом из уравнения* (0.2) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(*а*) $\langle f^*\omega, f^*\omega'\rangle = f^*\langle \omega, \omega'\rangle$ *для любых* $\omega, \omega' \in T^*Y$;

(*б*) $\alpha = f^*\beta$ *для некоторой* 1*-формы* β *на* Y, *т. е. коэффициент расширения слоя в направлении векторного поля* η' *не зависит от точки слоя.*

В этом случае фактор-уравнение будет иметь вид (0.4), *причем* $\tilde{\Xi} = (-1)^{k+1}\beta$.

4. Локально тривиальные расслоения

Далее мы дополнительно ограничим класс рассматриваемых морфизмов следующим условием:

проекция $f\colon X \to Y$ является локально тривиальным расслоением.

Тогда каждый кусочно-гладкий путь $\gamma\colon [0,1] \to Y$ задает диффеоморфизм Φ_γ слоя над началом пути $\gamma(0)$ в слой над концом пути $\gamma(1)$: точке $x \in f^{-1}(\gamma(0))$ ставится в соответствие конец горизонтальной кривой, проектирующейся в γ и начинающейся в x. Будем называть этот диффеоморфизм *переносом слоя вдоль* γ.

Пусть A, B — два замкнутых подмножества X. Будем говорить, что A и B параллельны, если $d(x, B)$ не зависит от выбора точки $x \in A$ и $d(y, A)$ не зависит от выбора точки $y \in B$. Здесь $d(x, B)$ определяется как точная нижняя грань расстояний $d(x, y)$ от x до $y \in B$. Если A, B параллельны, то хаусдорфово расстояние $d(A, B) = d(x, B) = d(y, A)$ для любых $x \in A$, $y \in B$.

Теорема 4. *Локально тривиальное расслоение $f : X \to Y$ задает морфизм из уравнения* (0.2) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

(*а*) *любые два слоя расслоения f параллельны*;

(*б*) *переносы вдоль кусочно-гладких путей на Y пропорционально изменяют объем на слое* (*т. е. коэффициент расширения зависит лишь от пути и не зависит от выбора точки слоя*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что для локально тривиального расслоения f условия (*а*), (*б*) данной теоремы эквивалентны условиям (*а*), (*б*) теоремы 3.

Предположим, что f удовлетворяет условиям (*а*), (*б*) теоремы 3. Зафиксируем произвольные $y_0, y_1 \in Y$ и обозначим $Z_i = f^{-1}(y_i)$. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to Y$ — кусочно гладкая кривая в Y, соединяющая точки y_0 и y_1. Ее можно поднять до кусочно гладкой горизонтальной кривой $\gamma'\colon [0,1] \to X$ с началом в произвольной точке $x_0 \in Z_0$ и концом в Z_1. Из условия (*а*) теоремы 3 получаем

$$d(x_0, Z_1) \le l(\gamma') = \int\limits_0^1 \left|\gamma'_s\right| \mathrm{d}s = \int_0^1 |\gamma_s|\, \mathrm{d}s = l(\gamma).$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким кривым γ, получаем $d(x_0, Z_1) \le d(y_0, y_1)$. С другой стороны, для любой точки $x_1 \in Z_1$ и кусочно гладкой кривой $\beta\colon [0,1] \to X$, соединяющей x_0 с x_1, выполняется

$$l(\beta) = \int_0^1 |\beta_s|\, \mathrm{d}s \ge \int\limits_0^1 |f_*\beta_s|\, \mathrm{d}s = l(f\beta) \ge d(y_0, y_1).$$

Переходя к точной нижней грани по всем таким кривым β, получаем $d(x_0, x_1) \ge d(y_0, y_1)$. Таким образом, $d(x_0, Z_1) = d(y_0, y_1)$. Аналогично $d(x_1, Z_0) = d(y_1, y_0)$ для любой точки $x_1 \in Z_1$. Это доказывает параллельность слоев $Z_0 = f^{-1}(y_0)$ и $Z_1 = f^{-1}(y_1)$ для любых $y_0, y_1 \in Y$.

Интегрируя условие (*б*) теоремы 3, получаем, что перенос $\Phi_\gamma\colon Z_0 \to Z_1$ вдоль произвольной кусочно-гладкой кривой $\gamma\colon [0,1] \to Y$, $Z_i = f^{-1}(\gamma(i))$ изменяет все объемы в одно и то же количество раз:

$$\operatorname{volume}(\Phi_\gamma U) = \exp\left((-1)^{k+1}\int\limits_\gamma \tilde{\Xi}\right)\operatorname{volume}(U) \tag{4.1}$$

для любого измеримого $U \subset Z_0$.

Обратная импликация (от условий данной теоремы к условиям (*а*), (*б*) теоремы 3) достаточно очевидна. □

Следствие 1. *Пусть локальное расслоение $f : X \to Y$ задает геометрический морфизм из уравнения* (0.2) *в уравнение* (0.4). *Группа голономий расслоения f (для связности на X, задаваемой плоскостями, ортогональными слоям) сохраняет объем на слое тогда и только тогда, когда форма $\tilde{\Xi}$ точна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из тождества (4.1) следует, что группа голономий f сохраняет объем на слое тогда и только тогда, когда интеграл формы $\tilde{\Xi}$ по любой замкнутой кривой обращается в ноль. Последнее условие эквивалентно точности $\tilde{\Xi}$. □

Следствие 2. *Пусть локальное расслоение $f : X \to Y$ задает геометрический морфизм из уравнения* (0.2). *Если слой f имеет конечный объем (в частности, если слой компактен), то фактор-уравнение имеет вид $D_t v = \varphi^{-1}\operatorname{div}(\varphi\nabla v)$ для некоторой гладкой функции $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}_+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если слой f имеет конечный объем, то переносы вдоль замкнутых путей на Y должны сохранять этот объем. По следствию 1 это означает, что $\tilde{\Xi} = \mathrm{d}\psi$ для некоторой гладкой функции $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$. Положим $\varphi = \exp(\psi)$; тогда $\Delta v + L_\Xi v = \varphi^{-1}\left(\varphi\Delta v + (\mathrm{d}\varphi, \nabla v)\right) = \varphi^{-1}\operatorname{div}(\varphi\nabla v)$ и уравнение (0.4) принимает нужный вид. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прохорова М.Ф.** Факторизация дифференциальных уравнений в частных производных: структура категории параболических уравнений [Препринт 10/2005]. СПб: ПОМИ, 2005. 24 с.
2. **Прохорова М.Ф.** Моделирование уравнения теплопроводности и задачи Стефана / ИММ УрО РАН. Деп. ВИНИТИ 11.02.00, № 347-В00. 66 с.
3. **Prokhorova M.F.** The structure of the category of parabolic equations. 2009. arXiv:math/0512094v5 [math.AP]. 33 p. URL: http://arxiv.org/pdf/math/0512094v5.pdf.
4. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Л.: Мир, 1989. 637 с.
5. **Виноградов А.М.** Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1980. Vol. 11. С. 89–134.
6. **Vinogradov A.M.** Category of nonlinear differential equations // Global Analysis — Studies and Applications I / eds. Yurii G. Borisovich, Yurii E. Gliklikh, A. M. Vershik. Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 77–102 (Lecture Notes in Math.; vol. 1108).
7. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов [и др.]. М.: Факториал, 1997. 464 с.
8. **Хирш М.** Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
9. **Уорнер Ф.** Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987. 302 с.

Прохорова Марина Файвушевна Поступила 26.05.2013
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: pmf@imm.uran.ru