Перечень теоретических вопросов и задач для подготовки к экзамену по дисциплине «МАТЕМАТИКА» (I семестр, специальности ПОИТ, ДЭВИ, ИСиТ, ПОИБМС)

ПРОГРАММА КУРСА

1. Комплексные числа, действия над ними.
2. Различные формы представления комплексных чисел. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи.
3. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры.
4. Матрицы и действия над ними.
5. Определители, их основные свойства.
6. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Алгоритм вычисления.
7. Ранг матрицы.
8. Теорема Кронекера-Капелли.
9. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
10. Векторы. Линейные операции над векторами.
11. Проекция вектора на ось, проекция вектора на вектор. Свойства проекций.
12. Векторный базис. Разложение произвольного вектора по базису. Координаты вектора.
13. Направляющие косинусы вектора. Единичный вектор.
14. Скалярное произведение векторов, его свойства и приложения.
15. Векторное произведение, его свойства и приложения.
16. Смешанное произведение векторов, его свойства. Условие компланарности трех векторов.
17. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
18. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
19. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
20. Эллипс, его каноническое уравнение.
21. Гипербола, ее каноническое уравнение.
22. Парабола, ее каноническое уравнение.
23. Плоскость. Различные виды уравнения плоскости.
24. Общее уравнение плоскости, его исследование.
25. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
26. Различные виды уравнений прямой в пространстве.
27. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
28. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

29. Поверхности 2-го порядка. Метод сечений.

30. Цилиндрические поверхности.

31. Линейные пространства, примеры.

32. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства. Базис и размерность линейного пространства, примеры.

33. Координаты элемента линейного пространства в заданном базисе. Преобразование координат при изменении базиса.

34. Подпространства линейного пространства. Операции над подпространствами.

35. Линейные операторы и их матрицы.

36. Действия над линейными операторами. Обратный оператор.

37. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

38. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

39. Приведение матрицы линейного оператора к диагональной форме.

40. Евклидово пространство. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника.

41. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

42. Самосопряженные (симметрические) операторы в евклидовом пространстве.

43. Квадратичные формы и их приведение кканоническому виду.

44. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

45. Элементарные функции, их алгебраическая классификация.

46. Определение предела функции.

47. Односторонние пределы, их связь с пределом функции.

48. Основные свойства пределов.

49. Бесконечно малые функции и их свойства.

50. Сравнение бесконечно малых функций.

51. Эквивалентные бесконечно малые.

52. Бесконечно большие функции и их свойства.

53. Методы раскрытия неопределенностей.

54. Первый и второй замечательные пределы.

55. Непрерывность функции в точке. Основные свойства функций, непрерывных в точке.

56. Классификация точек разрыва.

57. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса.

58. Понятия производной и дифференциала, связь между ними.

59. Определение производной. Основные правила дифференцирования.

60. Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной.

61. Понятие дифференцируемости, связь с производной и непрерывностью.

62. Производная сложной функции. Производные степенной, показательной и логарифмической функций.

63. Производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

64. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций.

65. Свойство инвариантности формы дифференциала 1-го порядка.

66. Теорема Ферма, ее геометрический смысл.

67. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.

68. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл.

69. Теорема Коши.

70. Правило Лопиталя.

71. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций.

72. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

73. Разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ по формуле Маклорена.

74. Возрастание и убывание функции. Условия монотонности дифференцируемой функции на интервале.

75. Экстремумы функции. Необходимое и достаточные условия существования экстремума.

76. Алгоритм нахождения точек локального экстремума.

77. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

78. Достаточное условие выпуклости графика функции.

79. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты кривых.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Уровень А

МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вопросы.

1. Единичные матрицы 2-го и 3-го порядков: ...

2. Нулевая матрица размера 2×3: ...

3. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если ...

4. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы: A^{-1} существует $\Leftrightarrow$ ...

5. Обратная матрица находится по формуле ...

6. Система линейных алгебраических уравнений может иметь:
а) одно решение;
б) ...
в) ...

7. Система линейных алгебраических уравнений называется совместной, если ...

8. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений:
а) ...
б) ...
в) ...

9. Формулы Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений.

10. Алгебраическая форма записи комплексного числа: ...

11. Тригонометрическая форма записи комплексного числа: ...

12. Связь между тригонометрической и алгебраической формами записи комплексного числа задается формулами: ...

Задачи.

Задача 1. Вычислить: а) $\dfrac{5-3i}{1-i}$;
б) $z_1 + z_2 \cdot \overline{z_3}$, если $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 - i,\ z_3 = 3 + 2i$;
в) $\dfrac{(3z_1 - 2z_2)z_3}{z_2}$, если $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 2 - 2i,\ z_3 = 1 - 4i$;
г) $\dfrac{z_1^2 + z_2 + z_3}{z_2}$, если $z_1 = 2 + i,\ z_2 = -1 - 2i,\ z_3 = 8 + 7i$.

Задача 2. Найти все корни уравнения:
а) $x^3 - 27 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$;
в) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$; г) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

Задача 3. Сократить дробь:
а) $\dfrac{2x^3 + x^2 + 5x - 3}{6x^2 + x - 2}$; б) $\dfrac{x^4 + 13x - 42}{x^4 - 13x^2 + 36}$.

Задача 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2-i \\ 2i & 0 & 3 \\ 2 & 1-2i & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 5. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA, если они существуют.

Задача 6. Найти $(2A - B)A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Решить систему по формулам Крамера: $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$

Задача 8. Решить систему:
1) $\begin{cases} 3x + y + z = 1, \\ x - 2y + z = 2, \\ x + 4y - z = -2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 7, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 7x + 10y - 5z = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+2x_2=12, \\ x_1-x_2=5, \\ x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1+3x_3=7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1-x_2-x_4+2x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 6x_1-x_3-2x_5=3, \\ 4x_1-x_3-2x_4+2x_5=3. \end{cases}$

Ответы.

1. а) $4+i$; б) $5-5i$; в) $11,5+5i$; г) $-5,6+2,2i$. **2.** а) $\{3; \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}\}$; б) $\{-2; 2\pm\sqrt{2}\}$; в) $\{-1;3;4\}$; г) $\{1; \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\}$. **3.** а) $\dfrac{x^2+x+3}{3x+2}$; б) $\dfrac{x^2-x+7}{x^2-x-6}$. **4.** $7+16i$. **5.** $BA = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -20 & -25 & -30 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 21 & 45 & 8 \\ 65 & 158 & 47 \\ 8 & 23 & 13 \end{pmatrix}$. **7.** $x=1$, $y=-1$. **8.** 1) $(1;-1;-1)$; 2) несовместна; 3) $\{\left(\dfrac{6-3c}{5}; \dfrac{3+c}{5}; c\right), c \in \mathbb{R}\}$; 4) несовместна; 5) $\{(-c_1+2c_2; -1-2c_1+4c_2; -3-6c_1+10c_2; c_1; c_2), c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

ВЕКТОРЫ

Вопросы.

1. Вектор называется единичным, если ...

2. Примеры единичных векторов — орты $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, имеющие координаты: $\overrightarrow{i} = \{1;0;0\}$, ...

3. Если известны координаты вектора $\overrightarrow{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, то его длина вычисляется по формуле ...

4. Вектор называется нулевым, если ...
Нулевой вектор имеет координаты $\overrightarrow{0} = \{0;0;0\}$.

5. Два вектора называются коллинеарными, если ...

6. Условие коллинеарности двух векторов: ...

7. Два вектора называются ортогональными, если ...

8. Условие ортогональности двух векторов: ...

9. Три вектора называются компланарными, если ...

10. Условие компланарности трех векторов: ...

11. Скалярным произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется ...

12. Основные свойства скалярного произведения:
$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$;
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$;
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, если ...

13. Если известны координаты двух векеоров, то их скалярное произведение вычисляется по формуле ...

14. Геометрические приложения скалярного произведения:
а) вычисление угла между векторами;
б) вычисление длины вектора;
в) вычисление проекции вектора на вектор.

15. Косинус угла между векторами вычисляется по формуле ...

16. Физические приложения скалярного произведения.

17. Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ образуют правую тройку, если ...

18. Векторным произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется ...

19. Основные свойства векторного произведения:
$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = ...$;
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = ...$;
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$, если ...

20. Если известны координаты двух векторов, то их векторное произведение вычисляется по формуле ...

21. Геометрические приложения векторного произведения.

22. Смешанным произведением векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ называется ...

23. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$, если ...

24. Если известны координаты векторов, то их смешанное произведение вычисляются по формуле ...

25. Геометрические приложения смешанного произведения.

Задачи.

Задача 1. Даны векторы: $\overrightarrow{a} = \{1; 2; 5\}$, $\overrightarrow{b} = \{3; 0; 4\}$. Найти:
а) $|\overrightarrow{a}|$;
б) координаты единичного вектора $\overrightarrow{e}$, сонаправленного с вектором $\overrightarrow{a}$;
в) координаты вектора $\overrightarrow{c}$, направленного противоположно вектору $\overrightarrow{b}$ и имеющего длину 15;
г) координаты вектора $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$.

Задача 2. Даны векторы: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Найти: а) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$; б) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$; в) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$; г) $(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$; д) $(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$.

Задача 3. Даны точки: $A(1; 2; 4)$, $B(3; 1; 5)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 4; 5)$. Найти: а) угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) площадь треугольника ABC; в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 4. Даны вершины четырехугольника: $A(1; 4; 0)$, $B(-4; 1; 1)$, $C(-5; -5; 3)$, $D(1; -2; 2)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Задача 5. Найти работу силы $\overrightarrow{F} = -4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из точки $A(1; 4; 0)$ в точку $B(4; -1; 1)$.

Задача 6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = \{4; -5; 3\}$ и $\overrightarrow{b} = \{-4; 0; 2\}$.

Задача 7. Проверить компланарность векторов $\overrightarrow{a} = \{3; -4; 7\}$, $\overrightarrow{b} = \{1; 2; -3\}$, $\overrightarrow{c} = \{2; -1; 2\}$.

Задача 8. Доказать, что точки $A(1; 2; 0)$, $B(4; 3; 4)$, $C(2; -3; -2)$, $D(3; 0; 1)$ лежат в одной плоскости.

Ответы.

1. а) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{30}$; б) $\overrightarrow{e} = \{1/\sqrt{30}; 2/\sqrt{30}; 5/\sqrt{30}\}$; в) $\overrightarrow{c} = \{-9; 0; -12\}$; г) $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} = \{-3; 6; 7\}$.

2. а) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=23$; б) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=8\overrightarrow{i}+11\overrightarrow{j}-6\overrightarrow{k}$; в) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=17$; г) $(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=12$; д) $(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=-24\overrightarrow{i}-33\overrightarrow{j}+18\overrightarrow{k}$. **3.** а) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}}{9}\right)$; б) $2,5\sqrt{2}$; в) $7/6$. **5.** -18. **6.** 30.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Вопросы.

1. Общее уравнение прямой на плоскости.

2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

3. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $(x_0; y_0)$.

4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости: прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$:
а) параллельны, если ...
б) перпендикулярны, если ...

5. Какие линии относятся к кривым 2-го порядка на плоскости?

6. Определение эллипса.

7. Записать каноническое уравнение эллипса. Сделать рисунок.

8. Определение гиперболы.

9. Записать каноническое уравнение гиперболы. Сделать рисунок.

10. Определение параболы.

11. Записать каноническое уравнение параболы. Сделать рисунок.

Задачи.

Задача 1. Написать уравнение прямой AB, если $A(1;2)$, $B(5;3)$.

Задача 2. Построить прямые:

а) $y=3x-2$; б) $y=3x$; в) $y=3$; г) $y=0$; д) $x=5$; е) $x=0$.

Задача 3. Построить прямую $3x-2y=6$, определив точки ее пересечения с осями координат.

Задача 4. Построить прямую $2x-y+5=0$. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M(2;5)$:
а) параллельно этой прямой;
б) перпендикулярно этой прямой.
Сделать рисунок.

Задача 5. Даны точки $A(1;3)$, $B(-1;2)$, $C(2;-2)$. Записать уравнения:
а) сторон треугольника ABC;
б) медианы CM;
в) высоты CH треугольника ABC.

Задача 6. Найти точку пересечения прямых $3x-y=6$ и $x+2y=9$.

Задача 7. Построить параболы:

а) $y=x^2$; б) $y=2x-x^2$; в) $y=x^2-6x+10$; г) $x=4-y^2$; д) $3x+1=y^2$.

Задача 8. Построить окружности:

а) $x^2+y^2=4$; б) $x^2+y^2=4x$; в) $x^2+y^2=4y$.

Задача 9. Построить линии:

а) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $x^2+2y^2=8$; в) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$; г) $x^2-y^2=4$; д) $x^2=2y$.

Задача 10. Найти точки пересечения линий $y=6x-x^2$ и $2x+3y=12$.

Ответы.

1. $x-4y+7=0$. **4.** а) $2x-y+1=0$; б) $x+2y-12=0$. **5.** а) $x-2y+5=0\,(AB)$; $5x+y-8=0\,(AC)$; $4x+3y-2=0\,(BC)$; б) $9x+4y-10=0$; в) $2x+y-2=0$. **6.** $(3;3)$. **10.** $(6;0)$; $(2/3;32/9)$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вопросы.

1. Общее уравнение плоскости.

2. Вектор нормали к плоскости — это ...
Если известно общее уравнение плоскости, то координаты вектора нормали $\overrightarrow{n}=$ ...

3. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и имеющей вектор нормали $\overrightarrow{n}=\{A;B;C\}$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

5. Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид ...
где $(x_0;y_0;z_0)$ — координаты ...
а $\{m;n;p\}$ — координаты ...

6. Уравнение прямой, проходящей в пространстве через две заданные точки.

Задачи.

Задача 1. Даны точки: $A(1;2;4)$, $B(3;1;5)$, $C(2;0;2)$. Написать:
а) уравнение плоскости ABC;
б) уравнение прямой AB.

Задача 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;2;4)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-4}{0}$.

Задача 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;2;-1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=5, \\ z=6-t. \end{cases}$

Задача 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2;4)$ перпендикулярно плоскости $2x-y-5=0$.

Задача 5. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-4}{0}$ и плоскости $2x-y+3z-16=0$.

Ответы.

1. а) $4x+5y-3z-2=0$; б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$. **2.** $2x-5y+8=0$. **3.** $2x-z-7=0$. **4.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{0}$. **5.** $(3;2;4)$.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вопросы.

1. Определение линейного пространства.

2. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства.

3. Базис линейного пространства.

4. Координаты элемента линейного пространства в заданном базисе.

5. Как составляется матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому?

6. Понятие линейного оператора.

7. Как составляется матрица линейного оператора?

8. Что называется собственным вектором и собственным значением линейного оператора?

9. Что называется собственным вектором и собственным значением матрицы?

10. Что называется характеристическим уравнением матрицы?

11. Как найти собственные значения матрицы?

12. Понятие евклидова пространства.

13. Норма вектора евклидова пространства, ее свойства.

14. Ортонормированный базис.

15. Квадратичная форма.

16. Канонический вид квадратичной формы.

17. Матрица квадратичной формы.

Задачи.

Задача 1. Даны векторы $\overline{x_1} = (1;1;2;-1)$, $\overline{x_2} = (3;5;0;5)$, $\overline{x_3} = (0;0;1;-1)$, $\overline{x_4} = (0;5;6;-1)$ в $\mathbb{R}^4$. Проверить, являются ли они линейно зависимыми.

Задача 2. В линейном пространстве квадратных матриц 2-го порядка найти координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе $\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\overline{A_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\overline{A_4} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Найти координаты элемента $\overline{x} = x^2 + 4x + 16$ в базисе $\overline{e_1} = x^2 + x + 1$, $\overline{e_2} = x^2 + 2x + 4$, $\overline{e_3} = x^2 + 3x + 9$.

Задача 4. Можно ли представить многочлен $\overline{y} = x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ в виде линейной комбинации многочленов $\overline{y_1} = x^3 + x^2 + x + 1$, $\overline{y_2} = x^3 + x^2 + x$, $\overline{y_3} = x^2 + x + 1$?

Задача 5. Можно ли представить матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации матриц $\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Задача 6. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (2x_1; x_2 + 5x_3; -x_1)$, $g(\overline{x}) = (x_1 - x_2; x_3 + x_2; 0)$. Найти явный вид операторов $2f + 3g$, fg, gf.

Задача 7. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (2x_1; x_2 + 5x_3; x_2 - x_1), g(\overline{x}) = (x_1 - x_2; x_3 + x_2; x_1)$. Найти явный вид операторов gf, $2f - g^2$.

Задача 8. Какие из векторов

$\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{x_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\overline{x_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ являются собственными векторами линейного оператора f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$?

Задача 9. Какие из векторов

$\overline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{x_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{x_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ являются собственными векторами линейного оператора f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$?

Задача 10. Найти собственные значения матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы.

1. Линейно зависимы. **2.** $(-9; 0; -16; 9)$. **3.** $(1; -3; 3)$. **4.** $\overline{y} = -\overline{y_1} + 2\overline{y_2} + 5\overline{y_3}$. **5.** Невозможно. **6.** $(2f + 3g)(\overline{x}) = (7x_1 - 3x_2; 5x_2 + 13x_3; -2x_1)$, $fg(\overline{x}) = (2x_1 - 2x_2; x_3 + x_2; -x_1 + x_2)$ $gf(\overline{x}) = (2x_1 - x_2 - 5x_3; x_1 + x_2 + 5x_3; 0)$. **7.** $gf(\overline{x}) = (2x_1 - x_2 - 3x_3; -x_1 + 2x_2 + 3x_3; 2x_1)$, $(2f - g^2)(\overline{x}) = (3x_1 + 2x_2 + x_3; -x_1 + x_2 + 5x_3; -3x_1 + 3x_2)$. **8.** $\overline{x_1}$; $\overline{x_4}$. **9.** $\overline{x_2}$; $\overline{x_4}$. **10.** а) $-2; 1$; б) $-3; 1; 3$.

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Вопросы.

1. Определение предела функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ ...

2. ε-окрестность точки A — это ...

3. Проколотая δ-окрестность точки x_0 — это ...

4. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если ...

5. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если ...

6. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями:
если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ — ...;
если $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ — ...

7. Определение эквивалентных бесконечно малых, примеры.

8. 1-й замечательный предел: ...

9. 2-й замечательный предел: ...

10. 7 видов неопределенностей: ...

11. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если ...

12. Основные элементарные функции: ...

13. Элементарная функция — это...

14. Примеры элементарных функций: ...

15. Свойство непрерывности элементарных функций внутри их области определения.

16. Три условия непрерывности функции в точке.

17. Классификация точек разрыва.

18. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если ... Изобразить графически.

19. Точка x_0 называется точкой неустранимого разрыва функции $f(x)$, если ... Изобразить графически.

20. Точка x_0 называется точкой разрыва 2-го рода функции $f(x)$, если ... Изобразить графически.

21. Теорема Вейерштрасса.

Задачи.

Задача 1. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1\pm 0}\frac{3-x}{x-1}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^2-5x}{(x-2)^2}; \qquad \text{в) } \lim_{x\to 3\pm 0}\frac{x^2-5x}{x^2-5x+6}.$$

Задача 2. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}; \qquad \text{в) } \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-6x+9}.$$

Задача 3. Вычислить пределы: $\quad$ а) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3-5x)$;

$$\text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3-5x}; \quad \text{в) } \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x+2}{3x^3-5x}; \quad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x+2}{x^2+2x+1}; \quad \text{д) } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{3x^3-5x}.$$

Задача 4. Вычислить пределы: $\quad$ а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^2}{x-1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)$;

$$\text{б) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2}{x+6}-\frac{4x^4}{x^3-2x+6}\right); \qquad \text{в) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^4-2x}{5x^2-3x+7}-x^2\right);$$

$$\text{г) } \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-4x}-x}{x-1}; \qquad \text{д) } \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2};.$$

Задача 5. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}; \quad \text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x};$$

$$\text{д) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\operatorname{tg} 3x}{3x^2}; \qquad \text{е) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 2x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{ж) } \lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin 2x}{\sin 3x}; \qquad \text{з) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x\sin 2x}.$$

Задача 6. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg} x}{x}; \quad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}; \quad \text{д) } \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}.$$

Задача 7. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x/3}$.

Задача 8. Исследовать функцию на непрерывность:

а) $y=\dfrac{1}{x-2}$; б) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; в) $y=\begin{cases} x-2 & \text{при } x\leqslant 2,\\ x^2-4 & \text{при } x>2.\end{cases}$

Задача 9. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x<0,\\ \sqrt{x} & \text{при } 0\leqslant x<2,\\ x+2 & \text{при } x>2;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{при } x<0,\\ 2 & \text{при } x=0,\\ x^2 & \text{при } x>0.\end{cases}$

Ответы.

1. а) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{3-1}{\pm 0}=\pm\infty$; б) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{x^2-5x}{(x-2)^2}=\dfrac{-6}{(\pm 0)^2}=-\infty$; в) $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x^2-5x}{x^2-5x+6}=$ $=\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x^2-5x}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{-6}{(3-2)(\pm 0)}=\mp\infty$. **2.** а) 3; б) 1/9; в) ∞. **3.** а) ∞; б) 0; в) 2; г) ∞; д) 0. **4.** а) ∞; б) -24; в) ∞; г) -3; д) 2/3. **5.** а) 2/3; б) 3/4; в) 8; г) 0; д) 2; е) 3; ж) 2; з) 3/4. **6.** а) ∞; б) 1; в) ∞; г) 0; д) 0. **7.** а) e^6; б) $e^{2/3}$. **8.** а) точка $x=2$ — точка неустранимого разрыва; б) точка $x=0$ — точка устранимого разрыва.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вопросы.

1. Приращение функции $y=f(x)$ в точке x_0, отвечающее приращению аргумента Δx: $\Delta y=\ldots$

2. Определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

3. Геометрический смысл производной.

4. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

5. Механический (физический) смысл производной.

6. Основные правила дифференцирования.

7. Таблица производных.

8. Понятие дифференцируемости функции в точке и на промежутке.

9. Связь дифференцируемости функции в точке и существования конечной производной.

10. Связь дифференцируемости и непрерывности функции в точке.

11. Верно ли, что если функция имеет производную в точке, то она дифференцируема в этой точке? Верно ли обратное утверждение?

12. Верно ли, что если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке? Верно ли обратное утверждение?

13. Связь дифференциала и производной выражается формулой: ...

14. Правило Лопиталя.

15. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на $(a;b)$, если ...
Функция $y=f(x)$ называется убывающей на $(a;b)$, если ...

16. Достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на интервале. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$. Если ..., то $f(x)$ возрастает на $(a; b)$. Если ..., то $f(x)$ убывает на $(a; b)$.

17. Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если ... Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если ...

18. Необходимое условие экстремума. Если точка x_0 является точкой локального экстремума функции $y = f(x)$, то ...

19. Достаточное условие экстремума. Пусть точка x_0 является критической точкой функции $y = f(x)$ (т. е. ...). Если ..., то x_0 — точка локального максимума. Если ..., то x_0 — точка локального минимума.

20. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Задачи.

Задача 1. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{3x} + 6x$ уравнению $y'' - 4y' + 3y = 18x - 24$.

Задача 2. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = \mathrm{e}^{-2x} \cos 3x$ уравнению $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Задача 3. Найти y', если: а) $y = \ln \sin x$; б) $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right)$.

Задача 4. Найти y'', если: а) $y = \ln \sin x$; б) $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right)$.

Задача 5. Найти y''', если $y = \sin^2 x$.

Задача 6. Найти $y'(0)$, если $y = e^{-3x^2} \sin 2x$.

Задача 7. Найти $y''(1)$, если $y = \dfrac{-3x^2}{x-2}$.

Задача 8. Найти $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, если:

а) $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x} - 3^{\operatorname{tg}^3 2x} + \ln 5$;

б) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 3} + 5\sqrt{\arcsin \dfrac{x}{5}} - \sqrt[3]{x-2}$;

в) $y = (8x - 3) \operatorname{ctg} x^2 + \operatorname{arctg} \sqrt{1 + 2^{-x^3}} + \sqrt{2}$;

г) $y = \cos^4 \dfrac{x}{2} + \sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 \dfrac{1}{x}}$;

д) $y = x \ln^2 \arccos \sqrt{x}$.

Задача 9. Найти дифференциалы:

а) $\mathrm{d}\left(3x^2\,\mathrm{e}^{5-x}\right)$; б) $\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin 2t}{t}\right)$; в) $\mathrm{d}\left(\sqrt[4]{u^3 - 2}\right)$.

Задача 10. Найти уравнения касательных к графику функции $y = x - \dfrac{1}{x}$ в точках пересечения его с осью абсцисс.

Задача 11. Написать уравнение касательной к линии $y = x^3 + 2x$ в точке $M(1; 3)$.

Задача 12. Определить точки, в которых касательная к линии $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ параллельна оси абсцисс.

Задача 13. Определить, в какой точке касательная к параболе $y = x^2 + 3x - 5$ параллельна прямой $7x - y + 3 = 0$.

Задача 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:
а) $y = x^4 - 2x^2$ на отрезке $[0; 2]$;
б) $y = (x+1)\,\mathrm{e}^{3-x}$ на отрезке $[-1; 2]$.

Задача 15. Найти точки экстремума функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

Задача 16. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^2(x + 6)$.

Задача 17. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-4x} - x}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 5}{3x^2 + 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x^2+1)}{\sin^2 3x}$.

Ответы.

1. Удовлетворяет. **2.** Удовлетворяет. **3.** а) $y\prime = \operatorname{ctg} x$; б) $y\prime = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$. **4.** а) $y\prime\prime = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; б) $y\prime\prime = -\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$. **5.** $y\prime\prime\prime = -4\sin 2x$. **6.** 2. **7.** 24. **8.** а) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} - 3^{\operatorname{tg}^3 2x} \cdot \dfrac{6\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x} \cdot \ln 3$;
б) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2} + \dfrac{5}{2\sqrt{25-x^2}\sqrt{\arcsin\frac{x}{5}}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$;
в) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = 8\operatorname{ctg} x^2 - \dfrac{2x(8x-3)}{\sin^2 x^2} - \dfrac{3x^2 2^{-x^3}}{2(2+2^{-x^3})\sqrt{1+2^{-x^3}}}$;
г) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -2\sin\dfrac{x}{2}\cos^3\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4\cos^2\frac{1}{x}\sqrt[4]{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}}$; д) $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \ln^2\arccos\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x}\ln\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}}$.

9. а) $\mathrm{d}\left(3x^2\,\mathrm{e}^{5-x}\right) = \left(6x - 3x^2\right)\mathrm{e}^{5-x}\,\mathrm{d}\,x$; б) $\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin 2t}{t}\right) = \dfrac{2t\cos 2t - \sin 2t}{t^2}\cdot\mathrm{d}\,t$; в) $\mathrm{d}\left(\sqrt[4]{u^3-2}\right) = \dfrac{3u^2\,\mathrm{d}\,u}{4\sqrt[4]{(u^3-2)^3}}$. **10.** График пересекает ось Ox в точках $x = 1$ и $x = -1$. Уравнение касательной в точке $(1; 0)$: $y = 2x - 2$; уравнение касательной в точке $(-1; 0)$: $y = 2x + 2$. **11.** $y = 5x - 2$. **12.** $(-1; 14); (2; -13)$. **13.** $(2; 5)$. **14.** а) $y_{\text{наиб}} = y(2) = 8$, $y_{\text{наим}} = y(1) = -1$; б) $y_{\text{наиб}} = y(0) = \mathrm{e}^3$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = 0$. **15.** $y_{\max} = y(0) = -2$, $y_{\min} = y(4) = 6$. **16.** График является выпуклым вверх на $(-\infty; -2)$ и выпуклым вниз на $(-2; +\infty)$. **17.** а) -2; б) ∞; в) $2/9$.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень Б

МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вопросы.

1. Показать, что $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ для всех$z \in \mathbb{C}$.

2. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Чему равно значение выражения:

1) $a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$;

2) $a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

3) $b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

4) $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$? Ответ обосновать.

3. Верно ли равенство:

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & 2a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & 2a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-2a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-2a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}-2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$?

4. Пусть даны матрицы $A_{2\times 2}$ и $B_{4\times 2}$. Как найти матрицу X, если $XA = B$? Какой размер будет иметь матрица X?

5. Как найти матрицу X, если $AXB = C$, где A и B — квадратные матрицы 2-го и 3-го порядков соответственно? Какой размер будет иметь матрица X? Ответ обосновать.

6. Пусть $O_{2\times 3}$ — нулевая матрица размера 2×3, $A_{n\times m}$— матрица размера $n \times m$. При каких значениях n и m существует и чему равно: а) $A + O$; б) $A \cdot O$? Указать размеры итоговых матриц.

Задачи.

Задача 1. Вычислить $(1+\sqrt{3}i)^{10}$, используя правила действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи.

Задача 2. Найти все корни 4-й степени из числа $-1+\sqrt{3}i$.

Задача 3. Найти все корни уравнения: а) $z^4 + 81 = 0$; б) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Задача 4. Найти $A^T(A + 2B)$, если

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2i & 7 \\ 0 & 2 & 1-i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i-1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1+3i \end{pmatrix}$.

Задача 5. Решить систему: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Задача 6. Найти A^2, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Найти $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.

Задача 8. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, если $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

Задача 9. Определить ранг матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 11. При каких значениях λ существует A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Задача 12. Решить уравнение:

1) $AX = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 19 \\ 11 & 15 & 4 & 47 \end{pmatrix}$;

2) $AXB = C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 34 & 41 \end{pmatrix}$.

Задача 13. Решить невырожденную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x + 2y = 8, \\ 3x + y + z = 2, \\ -2x - y = 1 \end{cases}$$

1) методом Крамера; 2) матричным методом.

ВЕКТОРЫ

Теоретические упражнения.

1. Чему равны скалярные произведения $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b} \cdot \left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$, если известно, что $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -3$?

2. Чему равны векторные произведения $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b} \times \left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$, если известно, что $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$?

3. Чему равно смешанное произведение $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}$?

4. Чему равно смешанное произведение $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$, если $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 4$?

5. Чему равно смешанное произведение $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$, если $\vec{b} \times \vec{a} \cdot \vec{c} = 5$?

Задачи.

Задача 1. Даны векторы своими координатами в базисе $\left(\vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$: $\vec{a} = \{3; -2; -1\}$; $\vec{b} = \{-1; 1; -2\}$; $\vec{c} = \{2; 1; -3\}$; $\vec{d} = \{11; -6; 5\}$. Найти координаты вектора $\vec{d} = \{11; -6; 5\}$ в базисе $\left(\vec{a}\,; \vec{b}\,; \vec{c}\right)$.

Задача 2. Даны точки: $A(1; 2; 4)$, $B(3; 1; 5)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 4; 5)$. Найти:

а) проекцию $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BD}\right)$;

б) направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AC}$.

Задача 3. Вершины треугольника ABC находятся в точках $A(0; 2; 6)$, $B(3; 4; 5)$, $C(-3; 2; 2)$. Найти:

а) внешний угол треугольника при вершине C;

б) длину высоты BH.

Задача 4. Найти высоту SH пирамиды с вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(3; 6; 0)$, $C(3; 0; 2)$, $S(4; 5; 1)$.

Задача 5. При каком значении α векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$: а) ортогональны; б) коллинеарны?

Задача 6. При каких значениях α треугольник ABC будет равнобедренным, если $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 12\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{i}$?

Задача 7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Пусть $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$. Найти:

1) скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

2) скалярное произведение $\vec{p} \cdot \vec{q}$;

3) угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$;

4) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$;

5) при каких значениях α векторы $\vec{m} = \vec{a} - \alpha\vec{b}$ и $\vec{n} = 2\vec{a} + \alpha\vec{b}$ ортогональны;

6) при каких значениях α векторы $\vec{u} = 8\vec{a} - \alpha\vec{b}$ и $\vec{v} = 2\alpha\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны.

Задача 8. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если векторы $\vec{p} = \vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{q} = 2\vec{m} - 7\vec{n}$ ортогональны?

Задача 9. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{x} \| \vec{a} = \{12; -16; -15\}$ и образует острый угол с осью Ox, $|\vec{x}| = 50$;

2) $\vec{x} \perp \vec{a} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{x} \perp \vec{b} = \{0; 4; 2\}$, $|\vec{x}| = \sqrt{54}$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задачи.

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника: $A(3; -2), B(3; 4), C(-6; 2)$. Найти уравнения высоты CH, медианы AM и угол между ними.

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника: $A(2; -2), B(2; 4), C(-6; 2)$. Найти координаты точки пересечения высот треугольника.

Задача 3. Найти координаты точки, симметричной точке $(4;1)$ относительно прямой $4x+3y+6=0$.

Задача 4. Даны уравнения оснований трапеции: $12x+5y-26=0$ и $12x+5y-52=0$. Найти длину ее высоты.

Задача 5. Даны уравнения одной из сторон ромба $x-3y+10=0$ и одной из его диагоналей $x+4y-4=0$. Диагонали ромба пересекаются в точке $K(0;1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба.

Задача 6. В треугольнике ABC известны уравнения стороны AB: $4x+y-12=0$ и высот AH: $5x-4y-15=0$ и BK: $2x+2y-9=0$. Найти уравнения двух других сторон и третьей высоты.

Задача 7. Известны уравнения двух сторон прямоугольника $5x-4y-15=0$, $4x+5y-9=0$ и координаты одной из его вершин $(-2;2)$. Найти уравнения двух других сторон.

Задача 8. Построить линии:
1) $x^2+2y^2=10$; 2) $4y^2-9x^2=1$; 3) $2y^2-6x-20=0$.

Задача 9. Составить каноническое уравнение и построить эллипс, центр симметрии которого совпадает с началом координат, а фокусы лежат на оси Ox, если его большая полуось $a=3$, а точка $M(-2;5/3)$ принадлежит эллипсу.

Задача 10. Составить каноническое уравнение и построить гиперболу, центр симметрии которой совпадает с началом координат, а фокусы лежат на оси Ox, если уравнения ее асимптот $y=\pm\dfrac{3x}{4}$, а один из фокусов имеет координаты $(-10;0)$.

Задача 11. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(0;2)$ и от прямой $y-4=0$.

Задача 12. Составить уравнение линии, расстояния каждой точки которой от точки $A(4;0)$ и от прямой $5x+8=0$ относятся как 3:4.

Задача 13. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок:
1) $3x^2+2y^2+12x-20y=10$; 2) $3x^2-2y^2-6x-20y=0$; 3) $2y^2-6x-20y=0$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задачи.

Задача 1. Две грани куба лежат на плоскостях $6x+10y-2z+1=0$ и $3x+5y-z-2=0$. Найти объем куба.

Задача 2. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости $3x+5y-z-2=0$ и отстоящей от нее на расстояние 2.

Задача 3. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(3;0;1)$, $B(0;2;4)$, $C(1;4/3;3)$.

Задача 4. При каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

Задача 5. Найти угол между прямыми:

1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-4}{0}$ и $\dfrac{x+3}{-12}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{4}$;

2) $\begin{cases} x=3t-2, \\ y=0, \\ z=3-t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=0, \\ z=t-4. \end{cases}$

Задача 6. Написать уравнение плоскости:

а) если точки $M_1(3;4;2)$ и $M_2(-1;6;0)$ симметричны относительно нее;

б) проходящей через точки $M_1(3;4;2)$ и $M_2(-1;6;0)$ параллельно оси Oy;

в) проходящей через точку $M(3;4;2)$ и ось Oy;

г) проходящей через точку $M(1;0;2)$ и перпендикулярной плоскостям $3x+5y-z-2=0$ и $x+z-2=0$;

д) проходящей через точку $M(3;1;2)$ и прямую $\begin{cases} x=3t-2, \\ y=0, \\ z=3-t; \end{cases}$

е) проходящей через точку $M(3;4;2)$ и параллельной прямым $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=z-1$ и $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=z+3$;

ж) проходящей через прямые $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=z-1$ и $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=z+3$.

Задача 7. Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

Задача 8. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(-3;2;2)$ параллельно плоскостям $5x+y+z=0$ и $2x+3y-2z+5=0$.

Задача 9. Найти точку, симметричную точке $A(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Задача 10. Найти проекцию точки $A(1;4;-3)$ на плоскость $x-y-2z+5=0$.

Задача 11. Назвать и построить поверхность:

1) $4x^2+y^2+z^2=4$; 2) $y=x^2+z^2$; 3) $x^2+z^2=y^2$; 4) $x^2+z^2-y^2=4$;

5) $x^2+z^2=4z$; 6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$; 8) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}=1$.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Задачи.

Задача 1. Даны векторы $\overline{x_1}=(1;2;0;6)$, $\overline{x_2}=(2;0;3;1)$, $\overline{x_3}=(3;2;3;7)$, $\overline{x_4}=(7;2;9;9)$ в $\mathbb{R}^4$. Проверить, являются ли они линейно зависимыми.

Задача 2. Даны векторы $\overline{x_1}=(1;1;1;1;1;7)$, $\overline{x_2}=(3;2;1;1;-3;-2)$, $\overline{x_3}=(0;1;2;2;6;23)$, $\overline{x_4}=(5;4;3;3;-1;12)$ в $\mathbb{R}^6$. Проверить, являются ли они линейно зависимыми.

Задача 3. Даны векторы $\overline{x_1}=(1;2;0;6)$, $\overline{x_2}=(2;0;3;1)$, $\overline{x_3}=(3;2;3;7)$, $\overline{x_4}=(7;2;9;9)$ в $\mathbb{R}^4$. Определить, является ли вектор $\overline{x_4}$ элементом линейной оболочки $<\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}>$.

Задача 4. Даны векторы $\overline{x_1} = (1;1;1;1;1;7)$, $\overline{x_2} = (3;2;1;1;-3;-2)$, $\overline{x_3} = (0;1;2;2;6;23)$, $\overline{x_4} = (5;4;3;3;-1;12)$ в $\mathbb{R}^6$. Найти размерность и базис линейной оболочки $< \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4} >$ этих векторов; определить координаты векторов $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$, $\overline{x_4}$ в указанном базисе.

Задача 5. Даны векторы $\overline{x_1} = (1;1;1)$, $\overline{x_2} = (1;2;3)$, $\overline{x_3} = (2;1;0)$, $\overline{x_4} = (3;4;5)$. Доказать равенство линейных оболочек: $< \overline{x_1}, \overline{x_2} > = < \overline{x_3}, \overline{x_4} >$.

Задача 6. Найти матрицы перехода от базиса $\{x^2; x; 1\}$ к базису $\{(x-2)^2; x-2;\ 1\}$ и от базиса $\{(x-2)^2;\ x-2;\ 1\}$ к базису $\{x^2;\ x;\ 1\}$.

Задача 7. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2}\}$ к базису $\{\overline{e'_1};\ \overline{e'_2}\}$. Найти координаты вектора $\overline{a} = 4\overline{e'_1} + \overline{e'_2}$ в базисе $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2}\}$ и координаты вектора $\overline{b} = 5\overline{e_1} + 7\overline{e_2}$ в базисе $\{\overline{e'_1};\ \overline{e'_2}\}$.

Задача 8. Найти матрицу перехода от базиса $\{\overline{a_1};\ \overline{a_2}\}$ к базису $\{\overline{b_1};\ \overline{b_2}\}$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2}\}$: $\overline{a_1} = \overline{e_1} + 4\overline{e_2}$; $\overline{a_2} = 3\overline{e_1} + 5\overline{e_2}$; $\overline{b_1} = 7\overline{e_1} + \overline{e_2}$; $\overline{b_2} = \overline{e_2}$.

Задача 9. Найти матрицу перехода от базиса $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2};\ \overline{e_3}\}$ к базису $\{\overline{a};\ \overline{b};\ \overline{c}\}$ и от базиса $\{\overline{a};\ \overline{b};\ \overline{c}\}$ к базису $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2};\ \overline{e_3}\}$, если $\overline{a} = 2\overline{e_1} + 2\overline{e_3}$; $\overline{b} = 3\overline{e_3} - \overline{e_2}$; $\overline{c} = 3\overline{e_1} + \overline{e_3}$.

Задача 10. Записать матрицы линейных операторов $f(\overline{x}) = \overline{x} \times \overrightarrow{a}$ и $g(\overline{x}) = \overrightarrow{a} \times \overline{x}$, где $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$.

Задача 11. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (7x_1 + 4x_3; 4x_2 - 9x_3; 3x_1 + x_2)$. Найти матрицы операторов f и f^2 и явный вид оператора f^2.

Задача 12. Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)^T$, $f(\overline{x}) = (x_2 - 6x_3; 3x_1 + 7x_3; x_1 + x_2 - x_3)$, $g(\overline{x}) = (x_1 - x_2 + x_3; 3x_2 - 7x_3; -x_3)$. Найти матрицы операторов f и g, а также матрицы и явный вид операторов $2f + g$, $(2f + g)^2$, $fg - gf$.

Задача 13. Даны два базиса $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e'_1};\ \overline{e'_2}\}$ линейного пространства и матрица $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2}\}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\{\overline{e'_1};\ \overline{e'_2}\}$, если $\overline{e'_1} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$; $\overline{e'_2} = \overline{e_1} - \overline{e_2}$.

Задача 14. Даны два базиса $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2};\ \overline{e_3}\}$ и $\{\overline{e'_1};\ \overline{e'_2};\ \overline{e'_3}\}$ линейного пространства и матрица $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2};\ \overline{e_3}\}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\{\overline{e'_1};\ \overline{e'_2};\ \overline{e'_3}\}$, если $\overline{e'_1} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$; $\overline{e'_2} = -2\overline{e_1} + \overline{e_2} - \overline{e_3}$; $\overline{e'_3} = -5\overline{e_1} + 3\overline{e_2} + \overline{e_3}$.

Задача 15. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, имеющего в некотором базисе матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 16. Проверить, что данную матрицу нельзя привести к диагональному виду:

а) $A=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

Задача 17. В базисе $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2}\}$ линейный оператор f задается матрицей $A_f=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$. Найти базис, в котором матрица оператора f примет диагональный вид.

Задача 18. Записать канонический вид квадратичной формы:
а) $q(x;y)=x^2+y^2+4xy$;
б) $q(x;y)=9x^2+6y^2-4xy$;
в) $q(x;y)=14x^2+21y^2+24xy$;
г) $q(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$;
д) $q(x;y;z)=x^2+y^2+5z^2-6xy+6xz+6yz$;
е) $q(x;y;z)=7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz$.

Задача 19. Установить с помощью критерия Сильвестра, является ли данная квадратичная форма знакоопределенной:
а) $q(x;y)=4x^2+3y^2+2xy$;
б) $q(x;y)=9x^2+6y^2-4xy$;
в) $q(x;y)=14x^2+21y^2+24xy$;
г) $q(x;y;z)=x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$;
д) $q(x;y;z)=x^2+y^2+5z^2-6xy+6xz+6yz$;
е) $q(x;y;z)=xy-4yz+6xz$.

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Теоретические упражнения.

1. Доказать по определению, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3}$.

2. Какие значения может принимать предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)^nP(x)}{(x-a)^mQ(x)}$, где $P(a)\neq 0$, $Q(a)\neq 0$?

3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=4$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Чему равен $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$?

4. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=4$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Чему равен $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$?

5. Изобразить графически функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую условиям:
1) $f(2)=3$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$;
2) $f(1)=3$, $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=2$.

6. Пусть x_0 — точка разрыва функции $y=f(x)$. а) Следует ли отсюда, что точка x_0 не входит в область определения этой функции? б) Следует ли отсюда, что не существует $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$? в) Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x_0-0}f(x)\neq\lim\limits_{x_0+0}f(x)$? Ответ обосновать.

7. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, причем $f(a)\cdot f(b)<0$. Следует ли отсюда, что уравнение $f(x)=0$: а) имеет корень на $[a;b]$; б) имеет единственный корень на $[a;b]$? Ответ обосновать.

8. Используя свойства непрерывных функций, показать, что уравнение $x^5 - 3x = 1$ имеет по крайней мере один корень, заключенный между 1 и 2.

Задачи.

Задача 1. Найти односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\pm 0} \dfrac{3^x + 5}{x(x-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} 2^{\frac{1}{x-2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\pm 0} (x+2)e^{1/x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \dfrac{\ln x - 2}{1-x}$.

Задача 2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1)2^{x/2}$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(3 + \dfrac{1}{x}\right)^x$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-2x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to 6} \left(\dfrac{1}{x}\operatorname{ctg} 2x - \dfrac{1}{x\sin 2x}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+6} - x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-2x^2\right)^{(x+1)/x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3-2x}{4-2x}\right)^{x-5}$; и) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3-2x}{3+4x}\right)^{1/x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{2x^2+3x^3}}$; л) $\lim\limits_{x\to -2} \left(3+5x+2x^2\right)^{1/(x+2)}$; м) $\lim\limits_{x\to -1} \left(5+3x-x^2\right)^{3/(1-x^2)}$;

н) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln x - \ln 3}{x-3}$; о) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$; п) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2\sin^2 x)}{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}$.

Задача 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right)$ в зависимости от a и b.

Задача 4. При каких значениях a и b предел $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - ax^4}{bx^4 + 6x^2 + 1}$ равен: а) $A = 0$; б) $A = 3$; в) $A = \infty$?

Задача 5. При каких значениях a и b предел $A = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^4 + bx^2 + 2x + 3}{4x^2 + 5x + 6}$ равен: а) $A = 0$; б) $A = 3$; в) $A = \infty$?

Задача 6. При каких значениях a и b предел $A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-a)}{x-b}$ равен: а) $A = 0$; б) $A = 3$; в) $A = \infty$?

Задача 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Задача 8. Вычислить пределы $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если $f(x) = \dfrac{2x + 3\cos x - 3}{3x - 2\sin x}$.

Задача 9. Выяснить, существует ли предел:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < 1, \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{при } x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{\sqrt{2+x} - x} & \text{при } x > 2, \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{при } x \leqslant 2. \end{cases}$

Задача 10. Выяснить, существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, если:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x} & \text{при } x>0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} & \text{при } x<0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\sin 2x} & \text{при } x\neq 0,\\ 2 & \text{при } x=0.\end{cases}$

Задача 11. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

1) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{при } x<-1,\\ 2x^2 & \text{при } -1<x<1,\\ 2/x & \text{при } x\geqslant 1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & \text{при } x<1,\\ x & \text{при } 1\leqslant x<2,\\ 2 & \text{при } x\geqslant 2;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x-3 & \text{при } 0<x\leqslant 4,\\ 4/x & \text{при } x>4;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x<-1,\\ 1/x & \text{при } x\geqslant -1.\end{cases}$

Задача 12. Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их характер; выяснить поведение функции при $x\to\infty$ и построить схематически график:

1) $f(x) = 3^{1/(x-2)^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{2^x-1}$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$;

4) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

Задача 13. (Б+) Исследовать на непрерывность функцию; указать характер графика этой функции в окрестности точки разрыва:

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$; 3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$; 4) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$;

5) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{2x} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0.\end{cases}$

Задача 14. Будет ли функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0;\end{cases}$ непрерывна в точке $x=0$?

Задача 15. При каком значении a функция $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{при } x<0,\\ a+x & \text{при } x\geqslant 0;\end{cases}$ непрерывна? Построить график этой функции.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Теоретические упражнения.

1. (Б+) Показать, что если $f(x)$ имеет производную при $x=a$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)+af'(a)$.

2. Показать, что функция $y=\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x_0=0$.

3. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. Доказать формулу: $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

4. Построить график какой-либо функции $y = f(x)$, у которой в окрестности точки x_0 : а) $dy = \Delta y$; б) $dy > \Delta y$; в) $dy = 0$.

5. Привести пример графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0, если x_0 не является точкой экстремума, $f'(x_0) = \infty$, $f''(x_0 - 0) > 0$, $f''(x_0 + 0) < 0$.

6. Привести пример графика функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$, если $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ при $x \in (a; b)$.

7. Что можно сказать о существовании наклонных и горизонтальных асимптот графика функции $y = f(x)$, если:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$; $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$; $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + x) = \infty$?

8. Точка x_0 является точкой разрыва функции $y = f(x)$. Обязательно ли прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$? Ответ обосновать.

9. Привести пример графика функции $y = f(x)$, если прямая $y = x$ является асимптотой графика при $x \to +\infty$ и график является выпуклым вверх на интервале $(0; +\infty)$.

10. Привести пример графика непрерывной функции $y = f(x)$, для которой $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $x_0 = 5$ является точкой локального максимума и прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$.

11. Является ли точка x_0 точкой экстремума функции $y = f(x)$, $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$?

12. Является ли точка x_0 точкой экстремума функции $y = f(x)$, $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$?

13. Будет ли справедлива теорема Ферма для отрезка $[a; b]$?

14. Показать, что все условия теоремы Ролля существенны.

Задачи.

Задача 1. Найти производную по определению:

1) $y = 2x^2 - 3x$; $\qquad$ 2) $y = \sqrt{2x + 1}$; $\qquad$ 3) $y = \dfrac{3}{x - 1}$; $\qquad$ 4) $y = \cos 2x$.

Задача 2. (Б+) Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ является непрерывной при всех x, но не является дифференцируемой при $x = 0$.

Задача 3. Найти y', y'' функции $y = \ln\left(\dfrac{2x - 1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1)}\right) + \ln 2$.

Задача 4. Найти y', если функции задана уравнением:

1) $x^3 + y^3 = \mathrm{e}^{xy}$; $\qquad$ 2) $y^3 - y^2 + 2y = \cos \dfrac{x}{y}$; $\qquad$ 3) $\ln(x - 2y) = \dfrac{x}{x - 2y}$.

Задача 5. Найти y', y'', если функции задана уравнением $x^3y^2 + 5xy + 4 = 0$.

Задача 6. Найти y', если: 1) $y=(x^2-3x)^{\ln 2x}$; 2) $y=x^{\frac{x}{x-1}}$.

Задача 7. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если: 1) $\begin{cases} x=1-t+t^2, \\ y=1+t^3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=t^2/2; \end{cases}$

Задача 8. Определить, под каким углом кривая $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ пересекает ось абсцисс.

Задача 9. Доказать, что касательные к линии $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, проведенные в точках, для которых $y=1$, пересекаются в начале координат.

Задача 10. Провести касательную к гиперболе $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ так, чтобы она прошла через начало координат.

Задача 11. (Б+) Найти углы, под которыми пересекаются линии $x^2-9x+y^2=0$ и $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

Задача 12. (Б+) При каком значении a функция $f(x)$ будет непрерывна? Найти $f'(x)$, если:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & \text{при } x>0, \\ a & \text{при } x\le 0; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{4+e^{1/x}} & \text{при } x\neq 0, \\ a & \text{при } x=0; \end{cases}$

Задача 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y=x^2\ln x$ на отрезке $[1;\mathrm{e}]$;

б) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ на отрезке $[0;1]$;

в) $y=4-x-\dfrac{1}{x^2}$ на отрезке $[1;4]$.

Задача 14. Найти точки экстремума функции : а) $y=\sqrt{2x-x^2}$;
б) $y=\sqrt[3]{x^2}-x$; в) $y=x\ln^2 x$; г) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$; д) $y=x-\operatorname{arctg} x$.

Задача 15. Найти интервалы монотонности функции: а) $y=\dfrac{x^2-6x-1}{x-4}$;

б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$; в) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$; г) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$; д) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

Задача 16. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

а) $y=x^5-10x^2+3x$; б) $y=\dfrac{x^3}{12+x^2}$; в) $y=\mathrm{e}^{x(1-x)}$; г) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Задача 17. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\dfrac{1}{x^2+3x-4}$; б) $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; в) $y=\dfrac{\ln(2x+1)}{x+1}$; г) $y=\mathrm{e}^{1/x}-1$.

Задача 18. Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y=(x-2)(x+1)^2$; б) $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+2}$; в) $y=\dfrac{x+3}{(x+2)^2}$;

г) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$; д) $y=x^2\ln x$; е) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$; ж) $y=\dfrac{x}{2}+2\operatorname{arctg} x$.

Задача 19. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+2x)^{1/x}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\mathrm{e}^x+2x)^{1/x}$;
3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-x-6\right)^{\sqrt{x+1}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3+0}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x^2-9}$.

Задача 20. (Б+) Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ и показать, что он не может быть вычислен по правилу Лопиталя.