华东师范大学
软硬件协同设计技术与应用教育部工程研究中心
URL—http://faculty.ecnu.edu.cn/chenyixiang
yxchen@sei.ecnu.edu.cn

谓词逻辑系统

陈仪香

MoE Engineering Center for Software/Hardware Co-Design Technology and Application
Software Engineering Institute
East China Normal University(ECNU)
Shanghai, China

2014级研究生软件工程理论课程，2014年10月

- 命题逻辑系统可说明下面的推理时有效的：

  若陈先生在一楼按电梯上升键则电梯会停在一楼并自动打开电梯门. 现在陈先生在一楼按了电梯上升键。结论是：电梯会停在一楼并自动打开电梯门。

  命题逻辑系统不能说明下面推理时有效的：

  每个人在一楼按电梯上升键则电梯会停在一楼并自动打开电梯门. 现在陈先生在一楼按了电梯上升键。结论是：电梯会停在一楼并自动打开电梯门。

  但上面的推理是在实际中是有用的，也是存在的。因此，需要建立一个新的推理机制，来说明上面的推理是有效的。

- 本章将介绍一些一阶谓词逻辑系统$\mathcal{K}$的最基本概念.给出$\mathcal{K}$的语法结构定义、一阶谓词的解释、可满足性以及逻辑有效性，建立一阶谓词逻辑系统的证明推理机制以及可靠性和完备性.

一阶谓词逻辑系统$\mathcal{L}$的语法结构

一阶语言$\mathcal{L}$的符号:

- 变元符号: $x_1, x_2, \cdots$
- 个体常元符号: $a_1, a_2, \cdots$
- 谓词符号:
  - $A_1^1, A_2^1, \cdots$
  - $A_1^2, A_2,^2, \cdots$
  - $\vdots$
  - $A_1^n, A_2^n, \cdots$
- 函数符号:
  - $f_1^1, f_2^1, \cdots$
  - $f_1^2, f_2,^2, \cdots$
  - $\vdots$
  - $f_1^n, f_2^n, \cdots$

- 连接词: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
- 量词符: $\forall$ (全称量词), $\exists$(存在量词)
  辅助符:), (

例子　一阶自然数语言$\mathcal{L}_N$自然数

变元符:	$x_1, x_2, \cdots,$	自然数变元
个体常元符:	a_1	自然数0
谓词符:	A_1^1	非零判断
	A_1^2	相等=
	A_2^2	小于等于$\leq$
	A_3^2	大于等于$\geq$
函数符:	f_1^1	后继函数
	f_1^2	加法函数
	f_2^2	乘法函数

一阶谓词逻辑系统$\mathcal{L}$的公式

定义：项　$\mathcal{L}$中的项—由变元、个体常元和函数符构成

- 每个变元、每个个体常元都是项
- 设f_i^n是$\mathcal{L}$的n元函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是项，则$f_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是项
- $\mathcal{L}$中的项均是由(1), (2)的方式组成
- $\mathcal{T}$表示全体项之集.

$$t ::= a \mid x \mid f_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

例子　$\mathcal{L}_N$中的项

$f_1^1(x), f_1^2(f_1^1(x), a), f_2^2(f_1^1(x_1), f_1^2(x_2, x_3)), f_2^2(f_1^1(x_1), f_1^2(x_1, x_1))$

Back
Close

一阶谓词逻辑系统$\mathcal{L}$的公式

定义　公式

$\mathcal{L}$的公式

- 原子公式

  设A_i^n是n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项，$A_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$称为原子公式.

  例子　$\mathcal{L}_N$的原子公式

  $A_1^2(f_1^1(x_1), f_2^2(x_1, x_2))$
  $A_1^2(f_1^1(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2))$

- 合式公式A

$$A ::= \text{原子公式} \mid \neg A \mid A \vee A \mid A \wedge A \mid A \to A \mid (\forall x_i)A \mid (\exists)A$$

  用$\mathcal{F}(\mathcal{L})$表示全体公式集.

例子　$\mathcal{L}_N$的合式公式

$(\forall x_1)\neg A_1^2(f_1^1(x_1), f_2^2(x_1, x_2))$
$(\forall x_1)(\neg A_1^2(x_1, a) \to \exists x_2 A_1^2(x_1, f_1^1(x_2)))$

一阶谓词逻辑系统$\mathcal{L}$的公式：例子

描述自然数的一阶语言$\mathcal{L}_N$:

变元符：	$x_1, x_2, \cdots,$	自然数变元
个体常元符：	a_1	自然数0
谓词符:	$A_1^1, A_1^2, A_2^2, A_3^2$	相等$=$
函数符：	f_1^1	后继函数
	f_1^2	加法函数
	f_2^2	乘法函数

表达式:

1. $A_1^1(f_1^1(x_1))$
2. $A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2)) \to A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_1^2(x_1, x_2))$
3. $\forall x \exists y (A_1^2(f_1^1(x), y)$

约束变元与自由变元

定义　约束变元与自由变元

在公式$(\forall x_i)A/(\exists x_i)A$中, A叫做$\forall x_i(\exists x_i)$的辖域, 此时A中的变元x_i称为A的约束变元,不是约束变元的变元称为自由变元.

例子　$\mathcal{L}_N$

$(\forall x_1)\neg A_1^2(f_1^1(x_1), f_2^2(x_1, x_2))$ x_1是约束变元,约束出现3次，x_2是自由变元，出现1次。

$A_1^2(x_1, a) \wedge (\exists x_1 A_1^2(f_1^1(x_1), a))$ x_1出现3次，其中2次是约束，1次是自由。

注：$\forall x_1 A_1^1(x_1)$与$\forall x_1 A_1^1(x_2)$是不同的。$\forall x_1 A_1^1(x_1)$是约束了辖域中的变元x_1，而$\forall x_1 A_1^1(x_2)$没有约束辖域中的变元x_2，因而这种约束是多余的。

定义　项的自由性

项t称为对公式$A(x_i)$的自由变元x_i是自由的，若t对A中的x_i的每一个自由出现代入都不会使得t中的变元失去自由性.

注：简单说—项t对公式A中的自由变元x_i的每一次自由出现代入不会使得t中的变元失去自由。

例子　自由代入

1. 公式$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2) \to A_1^1(x_2))$中无自由变元，所有任何项$t$关于此公式中的$x_1,x_2$都是自由的（实际上，是不能代入的）。

2. $(\forall x_1)A_1^3(x_1,x_2,x_3) \to A_2^3(x_1,x_2,x_3)$

   项$t = f_1^2(x_1,x_2)$对x_2和x_3是不自由的。如：若用项t代入x_2会得到如下的公式

   $(\forall x_1)A_1^3(x_1,f_1^2(x_1,x_2),x_3) \to A_2^3(x_1,f_1^2(x_1,x_2),x_3)$

   这个公式中的原x_2位置产生了新的约束x_1。

一阶谓词逻辑系统的解释与可满足性

解释

定义　解释

设$\mathcal{L}$ 是一阶谓词逻辑系统，$\mathcal{L}$的解释I的组成如下：

- 一个非空集合D_I, —称为论域
- D_I中的一组特定元：$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots$,使得$\mathcal{L}$ 的个体常元a_i对应于$\overline{a_i}$
- $\mathcal{L}$中的谓词符号A_i^n对应于D_I上的n元关系$\overline{A_i^n} \subseteq D_I^n$
- $\mathcal{L}$中的函数符号f_i^n对应于D_I的n元运算$\overline{f_i^n} : D_I^n \longrightarrow D_I$.

例子　自然数语言$\mathcal{L}_N$

- $D_I = \{0, 1, 2, \cdots, \}$
- 个体常元$a \longrightarrow \overline{a} = 0 \in D_I$
- 谓词符$A_1^2 \longrightarrow$二元相等关系$\overline{A_1^2} = " = " \subseteq D_I^2$
- 函数符：$f_1^1 \longrightarrow \overline{f_1^1}(x) = x + 1 : D_I \to D_I$

$$f_1^2 \longrightarrow \overline{f_1^2}(x, y) = x + y : D_I^2 \to D_I$$
$$f_2^2 \longrightarrow \overline{f_2^2}(x, y) = x \times y : D_I^2 \to D_I$$

Back
Close

注：任何一阶语言都有解释。如：

- 取$D_I = \{a\}$,
- 谓词符A_i^n的解释$\overline{A_1^n}$是D_I上的空关系,
- 函数符f_i^n的解释$\overline{f_i^n}$为长值函数a
- 个体常元a的解释$\overline{a} = a$.

这个解释是无用的。

例子　整数语言$\mathcal{L}_Z$

个体常元　a

谓词符　A_1^2, A_2^2, A_3^2

函数符　$f_1^1, f_1^2, f_2^2, f_3^2$

解释：

$D_I = \{0, \pm 1, , \pm 2, \pm 3, \cdots\}$

$\overline{a} = 0$

$\overline{A_1^2} = " = ", \overline{A_2^2} = " < ", \overline{A_3^2} >$

$\overline{f_1^1}(x) = x + 1, \overline{f_1^2}(x, y) = x + y$

$\overline{f_2^2}(x, y) = x \times y, \overline{f_3^2}(x, y) = x - y$

例子　公式解释

公式$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(f_1^2(x_1,x_3),x_2)$解释为：

在自然数集：对于任何自然数x与y总有自然数z使得$x+z=y$。但不成立。

在整数集：对于任何整数x与y总有整数z使得$x+z=y$。成立。

注：同一公式在不同解释下，正确性可以不同的。

赋值

定义　赋值

设$\mathcal{L}$是一阶语言，I是$\mathcal{L}$的一个解释，$\mathcal{L}$在I中的赋值v 是从$\mathcal{L}$的项集$\mathcal{T}$到D_I的一个映射, 即

$$v : \mathcal{T} \longrightarrow D_I$$

满足下面两条：

- $v(a_i) = \overline{a_i}$,
- $v(f_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = \overline{f_i^n}(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$.

例子　自然数语言$\mathcal{L}_N$

$N = \{0, 1, 2, \cdots\}$

赋值$v : \mathcal{T} \to N$满足：

$v(a) = 0$

$v(f_1^1(x)) = \overline{f_1^1}(v(x)) = v(x) + 1$

$v(f_1^2(x, y)) = \overline{f_1^2}(v(x), v(y)) = v(x) + v(y)$

$v(f_2^2(x, y)) = \overline{f_2^2}(v(x), v(y)) = v(x) \times v(y)$

具体地：若$v(x_1)=1, v(x_2)=2, \ddots, v(x_n)=n$ 则$v(f_1^2(x_1,x_2)) = \overline{f_1^2}(v(x_1),v(x_2)) = v(x_1)+v(x_2)=1+2=3.$

Back
Close

满足

定义　i—等价

赋值v的i-等价赋值v'是一赋值，且满足$v'(x_j) = v(x_j), j \neq i, \forall j$,其中$x_i$，$x_j$都是一阶语言$\mathcal{L}$的变量。

满足

定义　赋值v满足一阶谓词公式A)

设v是一阶语言$\mathcal{L}$的一个赋值，A是一个$\mathcal{L}$中的公式，v满足A (记作$v \models A$)归纳定义为

- A是原子公式$A_i^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$

  $v \models A$ 当且仅当$(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n)) \in \overline{A_i^n}$,

  即$\overline{A_i^n}(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$是真的.

  例子　赋值满足原子公式: $\mathcal{L}_N$

  设公式$A = A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2))$，取赋值$v$定义为: $v(a) = 0, v(x_i) = i$,则v不满足公式A。

  取赋值$v'(a) = 0, v'(x_1) = v'(x_2) = 2$,则$v'$满足公式$A$。

满足

- $v \models \neg A$ 当且仅当v不满足A,
- $v \models A \wedge B$ 当且仅当$v \models A$ 及$v \models B$都成立
- $v \models A \vee B$ 当且仅当$v \models A$ 或$v \models B$成立
- $v \models A \to B$ 当且仅当若$v \models A$ 则$v \models B$
- $v \models (\forall x_i)A$ 当且仅当对于每一个与v-i等价的赋值v'都有$v' \models A$,
- $v \models (\exists x_i)A$ 当且仅当存在一个与v-i等价的赋值v'使得$v' \models A$.

例子 满足$\mathcal{L}_N$

$A = A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_3, x_4))$

定义赋值$v(x_1) = 2, v(x_2) = 6, v(x_3) = 3, v(x_4) = 4$则$v$满足公式$A$.

考虑公式$A = \forall x_1 A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1))$ 可证任一赋值v都满足公式B.

例子 $\mathcal{L}_N$

考虑公式$(\forall x_1)(A_2^3(x_1, x_2)$

- 赋值$v(x_1) = 3, v(x_2) = 0$，则v满足公式$(\forall x_1)(A_2^3(x_1, x_2)$。
- 赋值$w(v_1) = 3, w(x_2) = 3$,则w不满足公式$(\forall x_1)(A_2^3(x_1, x_2)$。

满足:项代入定理

定理　项代入性定理

设$\mathcal{L}$是一阶语言，I是$\mathcal{L}$的一个解释，$A(x_i) \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$的公式，$x_i$是$A(x_i)$的自由变元。设$t$是关于$A(x_i)$中的$x_i$自由项，$v$是$\mathcal{L}$在$I$中的赋值,$v'$是与$v$-$i$ 等价的赋值，且$v'(x_i) = v(t)$, 则

$$v \models A(t) \text{ 当且仅当} v' \models A(x_i).$$

$$\begin{array}{ccc} \text{简单：} A(x_i) & \xrightarrow{[x_i/t]} & A(t)\text{: 复杂} \\ v'\text{满足公式}A(x_i) & \text{当且仅当} & v\text{满足}A(t) \end{array}$$

推论 设$\mathcal{L}$是一阶语言，I是$\mathcal{L}$的解释，$A(x_i)$是含有自由变元x_i的公式，v是$\mathcal{L}$在I中的一个赋值，则v满足$(\exists x_i)A(x_i)$ 当且仅当有个体常元c使v满足$A(c)$.

满足:自由变元重要性定理

定理 自由变元重要性定理

设$\mathcal{L}$是一阶语言，I是$\mathcal{L}$的一个解释，$A \in \mathcal{F}(\mathcal{L}).v, w \in \Omega(\mathcal{L})$. 若对于$A$中的每个自由变元$x_i$都有$v(x_i) = w(x_i)$, 则

$$v \models A \text{ 当且仅当} w \models A.$$

证明: 对连接词与量词的总个数进行归纳证明. $\square$

可满足性

定义　可满足性

设$\mathcal{L}$是一阶语言，I是$\mathcal{L}$的一个解释，$A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$．若$\forall v \in \Omega(\mathcal{L})$都有$v \models A$则称解释$I$满足$A$，记作$I \models A$．此时也称$A$是关于$I$ 的真公式。

对于给定的公式A,若有一个解释I使得I满足A，则称A是可满足的,此时称I是A的一个模型。

没有模型的公式称为不可满足的。

可满足性

定理　满足性定理

对于给定的一阶语言$\mathcal{L}$以及解释I，都有下列各条成立：

- 若$I \models A \rightarrow B$且$I \models A$, 则$I \models B$;
- $I \models A \rightarrow B$且$I \models B \rightarrow C$, 则$I \models C$;
- $I \models A \wedge B$ 当且仅当$I \models A$且$I \models B$;
- $I \models A$或$I \models B$ 可以推出$I \models A \vee B$;
- 若$I \models A$则$I \models (\exists x_i)A$;
- $I \models A$ 当且仅当$I \models (\forall x_i)A$;
- $I \models A$ 当且仅当$I \models (\forall y_1)(\forall y_2)\cdots(\forall y_n)A$.

作业

1. 设$\mathcal{L}$是一阶语言，它有1个个体常元a_1,1个函数符f_1^2和1个谓词符A_1^2,设公式A为

$$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, a_1) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), a_1)).$$

   (a) 设$\mathcal{L}$的解释I为D_I是正数集合Z, $\overline{a_1} = 0$, $\overline{f_1^2}(x, y) = x \times y$, $\overline{A_1^2}(x, y)$为"$x < y$",问公式A在此解释下的意义是什么？是真是假？
   (b) 把解释I稍作改变，记为I'，设$\overline{f_1^2}(x, y) = x + y$,其余不变，问公式$A$在此解释$I'$下的意义是什么？是真是假？
   (c) 把解释I稍作改变，记为I''，设$\overline{A_1^2}(x, y)$表示$x = y$,其余不变，问公式A在此解释I''下的意义是什么？是真是假？

2. 设一阶语言$\mathcal{L}$中的公式A为

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

公式B为

$$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1)),$$

试分别作出不同的解释，使A与B有时为真，有时为假。

3. 证明：在任何一阶语言$\mathcal{L}$，公式$(\forall x_i)A(x_i) \to A(x_i)$在$\mathcal{L}$的任何解释下都真的。

一阶谓词逻辑系统的逻辑有效性与逻辑等价

逻辑有效性

定义　逻辑有效性

一阶语言$\mathcal{L}$中的公式A称为逻辑有效，记作$\models_{\mathcal{L}} A$,若对于$\mathcal{L}$的每个解释I都有$I \models A$.

若公式$\neg A$是逻辑有效的，则称A是矛盾式.

例子：$\models (\forall x_i)A \rightarrow A$.

注：$A \rightarrow (\forall x_i)A$ 一般不是逻辑有效的.

定理　逻辑有效传递性

设A, B, C是一阶语言$\mathcal{L}$的公式,下列两条成立：

- MP 规则: $\models A \rightarrow B$且$\models A$ 可以推出$\models B$
- HS 规则: $\models A \rightarrow B$ 且$\models B \rightarrow C$可以推出$\models A \rightarrow C$.

Back
Close

逻辑有效性

定义　闭包与闭公式

设公式A中的所有自由变元为$x_1, x_2, \cdots, x_n$，则公式

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)A$$

称为A的闭包。

若公式A没有自由变元，则称公式A是闭公式.

定理　逻辑有效性的等价刻画

设A是一阶语言$\mathcal{L}$中的公式，则下列各条等价:

1. $\models A$
2. $\models (\forall x_i)A$
3. $\models cl(A)$.

重言式

定义　代换实例

设$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是n元命题逻辑系统L中的公式，其中$P_1,P_2,\ldots,P_n$是命题变元.把$P_1,P_2,\ldots,P_n$分别用一阶语言$\mathcal{L}$中的公式$B_1,B_2,\ldots,B_n$去代换，可以得到$\mathcal{L}$ 的公式

$$A(B_1,B_2,\ldots,B_n)$$

称为为$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$的一个代换实例。

例子　代换实例

$\neg(\forall x_1)A_1^1(x_1)\rightarrow(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$是命题逻辑公式$\neg P_1\rightarrow P_2$的代换实例。

$\neg(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,f_2^2(x_1,x_2))\rightarrow(\exists x_3)A_2^2(x_1,x_3)$也是命题逻辑公式$\neg P_1\rightarrow P_2$的的代换实例.

重言式

定义　重言式

命题逻辑系统L的重言式在一阶语言$\mathcal{L}$的代换实例称为$\mathcal{L}$的重言式.

例子：$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1(x_1))$

$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow ((\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1)A_1^1A_1^1(x_1))$ 都是重言式.

定理　重言式的逻辑有效性

一阶语言$\mathcal{L}$中的重言式都是逻辑有效的.但反之不真.

证明 设$A_0(p_1, p_2, \ldots, p_n)$是命题逻辑系统$L$的重言式,再设$A$是一阶语言$\mathcal{L}$的重言式，它是经过$A_0$的代换实例而得到的公式. 从而可设$A$就是公式$A_0(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

再设I是$\mathcal{L}$的一个解释，而v是$\mathcal{L}$在I中的一个赋值,(下证$v \models A_0(A_1, A_2, \ldots, A_n$
定义映射$v' : S \rightarrow \{0, 1\}$使得

$$v'(p_i) = \begin{cases} 1 & 若 v \models A_i \\ 0 & 若 v \not\models A_i \\ 0 & 若 i > n \end{cases}$$

则v'是$F(S)$的一个赋值。由于$A_0(p_1, p_2, \ldots, p_n)$是重言式, 则$v'(A_0(p_1, p_2, \ldots, p_n)$
1.

下证v满足A当且仅当$v'(A_0(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = 1$。对$A_0$使用结构归纳法证明.

逻辑等价

定义　逻辑等价

设A, B是一阶语言$\mathcal{L}$中的两个公式, 若$A \to B$及$B \to A$都是$\mathcal{L}$ 的逻辑有效的，则称A与B是逻辑等价的,记作$A \simeq B$.

定理　逻辑等价刻画

设A, B是一阶语言$\mathcal{L}$中的两个公式, 则$A \simeq B$当且仅当对$\mathcal{L}$的每一解释I以及$\mathcal{L}$在I中的每个赋值v都有

$$v \models A \text{ 当且仅当} v \models B.$$

定理　逻辑等价实例

1. 设A是一阶语言$\mathcal{L}$的公式，则

$$(\forall x_1)(\forall x_2)A \simeq (\forall x_2)(\forall x_1)A$$

2. 设A, B, C是谓词公式, 则

   (a) $A \vee B \simeq B \vee A$

   (b) $A \wedge B \simeq B \wedge A$

   (c) $A \to B \simeq \neg A \vee B$

   (d) $(\forall x_i)A \simeq \neg(\exists x_i)\neg A$

逻辑等价

定理 逻辑等价的同余性

对于一阶语言$\mathcal{L}$, $\simeq$是公式集$\mathcal{F}(\mathcal{L})$的一个同余关系.

证明:

- $\simeq$是一个等价关系
- $\simeq$保持逻辑运算符:
  - 设$A \simeq B$则$\neg A \simeq \neg B$
  - 设$A \simeq B$且$C \simeq D$则$A \to C \simeq B \to D$
  - 设$A \simeq B$则$(\forall x_i)A \simeq (\forall x_i)B$
  - 设$A \simeq B$则$(\exists x_i)A \simeq (\exists x_i)B$

作业

1. 证明: $\simeq$是公式集$\mathcal{F}(\mathcal{L})$的一个同余关系.
2. 设A, B, C是谓词公式, 则
   (a) $A \vee B \simeq B \vee A$
   (b) $A \wedge B \simeq B \wedge A$
   (c) $A \to B \simeq \neg A \vee B$
   (d) $(\forall x_i)A \simeq \neg(\exists x_i)\neg A$

Back
Close

一阶谓词逻辑系统的证明理论

本段在一阶语言$\mathcal{L}$建立推理机制，即给出公理模式和推理机制。建立的方法是在命题逻辑系统L的基础上进行，由于谓词逻辑公式要比命题逻辑公式复杂，因而一阶语言$\mathcal{L}$的公理系统和推理规则比命题逻辑系统L中的公理系统和推理规则复杂.

一阶形式系统$K_{\mathcal{L}}$, K

定义　一阶形式系统

一阶形式系统$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$或$\mathbf{K}$ 是指由一阶语言$\mathcal{L}$及公理和推理规则组成:

- 公理集
  - $(K1): A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - $(K2): (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - $(K3): (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - $(K4): (\forall x_i)A \rightarrow A$,　(量词消去公理)
  - $(K5): (\forall x_i)A(x_i) \rightarrow A(t)$, ($x_i$是$A(x_i)$中的$x$)$i$自由,$t$是关于$A(x_i)$中的$x_i$自由)　(项代入公理)
  - $(K6): (\forall x_i)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\forall x_i)B)$, ($x_i$ 不在A中自由出现)　(量词换位公理)
- 推理机制
  - MP 规则: $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$
  - Gen 规则(量词引入规则): $\dfrac{A}{(\forall x_i)A}$

定理　推理与逻辑有效关系

1. 每个公理都是逻辑有效的.

2. 推理规则保持逻辑有效性。

证明: （1）每个公理都是逻辑有效的.

由于公理$(K1)$ 到$(K3)$是命题逻辑系统L的公理$L1, L2, L3$的代换实例，而$L1, L2, L3$都是重言式，因此，$K1, K2, K3$都是逻辑有效的.以下证明$K4$,$K5$和$K6$是逻辑有效的.

(a) $K4 : (\forall x_i)A \rightarrow A$是逻辑有效的.

设I是$\mathcal{L}$的任一解释，v是任一$\mathcal{L}$在I下的赋值，再设$v \models (\forall x_i)A$ 则对于v任一$i-$等价赋值w都有$w \models A$，而v是$i-$等价于v，因此$v \models A$。这表明$v \models ((\forall x_i)A \rightarrow A)$。故此，$(\forall x_i)A \rightarrow A$是逻辑有效的.

(b) $K5 : (\forall x_i)A(x_i) \rightarrow A(t)$是逻辑有效的。

设I是$\mathcal{L}$的任一解释，v是任一$\mathcal{L}$在I下的赋值，再设$v \models (\forall x_i)A(x_i)$. 从而对于$v$的任一$i-$等价赋值$v'$都有

$$v' \models A(x_i).$$

设项t是关于$A(x_i)$中的x_i是自由的，定义赋值

$$w(x_j) = \begin{cases} v(t) & j = i \\ v(x_j) & j \neq i \end{cases}$$

则w是v的$i-$等价赋值，因此，$w \models A(x_i)$. 再由项代入定理得到$v \models A(t)$. 所以$v \models (\forall x_i)A(x_i) \to A(t)$.

(c) $K6 : (\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_i)B)$是逻辑有效的.

设v是一赋值，且$v \models (\forall x_i)(A \to B)$, 再设$v \models A$以及$w$是$v$的$i-$等价赋值.

因$v \models (\forall x_i)(A \to B)$,所以$w \models (A \to B)$. 由于$x_i$不在$A$中自由出现，即$x_i$不是$A$的自由变元，故$w$与$v$在$A$的所有自由变元处取值相等。由自由变元重要性定理得，$w \models A$，进而$w \models B$. 所以$v \models (\forall x_i)B$. 这样有$v \models A \to (\forall x_i)B$.

(2) 推理规则保持逻辑有效性.

(a) MP规则保持逻辑有效性.

设$\models A$以及$\models A \to B$都成立，再设I是任一解释，则有$I \models A$且$I \models A \to B$. 因此$I \models B$。所以, $\models B$.

(b) Gen规则保持逻辑有效性.

设$\models A$, 则证明$\models (\forall x_i)A$成立.

Back Close

定义　证明与定理

K中的证明是指一个有限公式序列$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 使得$\forall i \leq n$, A_i或是公理，或是通过前面两个公式使用MP规则或对前面某个公式使用Gen规则而得到的公式.

这个证明叫A_n的证明，A_n称为K的定理,记作$\vdash_K A_n$,或$\vdash A_n$, n称为证明的长度.

注1：每个公理都是定理.

注2: 命题逻辑系统L的定理的代换实例都是K中的定理.

注3: 若$\vdash_K A$则$\vdash_K (\forall x_i)A$.

例子　$\mathcal{L}$的定理

(1) $\vdash (\forall x_i)(A \to A)$.

(2) $\vdash (\forall x_i)(\neg B(x_i) \to (B(x_i) \to A(x_i)))$.

(3) $\vdash (A \to (\exists x_i)A)$.

回顾：在命题逻辑系统L中，演绎定理：

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash B \text{ 当且仅当} \Gamma \vdash (A \to B)$$

定义　推演与推论

设$\Gamma \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{L})$, $A \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$. 从$\Gamma$到$A$的一个推演是一个有限公式序列$A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$ 使得$\forall i \leq n$, A_i 或是公理，或是Γ中的成员，或是通过前面两个公式使用MP规则或对前面某个公式使用Gen规则而得到的公式. 此时A叫做Γ-推论，记作$\Gamma \vdash_K A$,或$\Gamma \vdash A$,而n叫做推演的长度.

注：$A \vdash (\forall x_i)A$,
$\vdash (A \to (\exists x)A)$

1. $(\forall x)\neg A \to (\neg A)$ (K_4)
2. $((\forall x)\neg A \to (\neg A)) \to (\neg\neg A \to \neg(\forall x)\neg A)$ (K_3)
3. $\neg\neg A \to \neg(\forall x)\neg A$ $MP(1,2)$
4. $A \to \neg\neg A$ (L中的代换实例)
5. $A \to \neg(\forall x)\neg A$

但$\vdash A \to (\forall x_i)A$一般不成立.
如: $(x \geq y) \to (\forall x)(x \geq y)$.

定理　K的演绎定理)

设$\Gamma \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{L})$, $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$.

(1). 若$\Gamma \vdash (A \to B)$,则$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

(2) 若$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$且对每个在$A$中的自由变元$x$，从$\Gamma \cup \{A\}$到$B$的推演中没有使用过关于$(\forall x)$的推广规则,则$\Gamma \vdash (A \to B)$.

对推演的长度n使用数学归纳法.

例子　演绎定理

1. 设x_i不在A中自由出现,则

$$\vdash (A \to (\forall x_i)B) \to (\forall x_i)(A \to B).$$

2. 设x_i不在A中自由出现,则

$$(A \to (\forall x_i)B) \simeq (\forall x_i)(A \to B).$$

3. $\vdash (A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)$.

定义　可证等价关系

设A, B是一阶语言$\mathcal{L}$中的两个公式, 若$A \rightarrow B$及$B \rightarrow A$都是$K_{\mathcal{L}}$的定理, 则称A与B是可证等价的,记作$A \sim B$.

例子　可证等价

(1) 设x_i不在A中自由出现, 则

1. $(A \rightarrow (\forall x_i)B) \sim (\forall x_i)(A \rightarrow B)$,
2. $(A \rightarrow (\exists x_i)B) \sim (\exists x_i)(A \rightarrow B)$,

(2) 设x_i不在B中自由出现, 则

1. $((\exists x_i)A \rightarrow B) \sim (\forall x_i)(A \rightarrow B)$,
2. $((\forall x_i)A \rightarrow B) \sim (\exists x_i)(A \rightarrow B)$,

前束范式

定义　前束范式

形如$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots Q_nx_n)A$称为前束范式，其中$Q_i$或是全称量词$\forall$或是存在量词$\exists$，$A$是原子公式.

定理　前束范式

任何一个谓词逻辑公式都可证等价于一个前束范式.

例子　求前束范式

$(\exists x_i)A_1^1(x_i) \to (\forall x_2)A_1^2(x_2, x_3)$. $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3))$.

定理　可证等价与逻辑等价的等价性

设A, B是一阶语言$\mathcal{L}$中的两个公式.则

$$A \sim B \text{ 当且仅当} A \simeq B$$

证明 使用K的完备性定理证明.

作业

1. 证明：设x_i不在A中自由出现，则$\vdash (\exists x_i)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x_i)B)$.

2. 化下列各式为和它们可证等价的前束范式：

   (a) $(\exists x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$

   (b) $(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$

   (c) $(\exists x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$

定理　K的可靠性

K中的每个定理都是逻辑有效的.

证明： 设$\vdash_K A$成立，其证明序列是$A_1, A_2, \ldots, A_n$. 对证明长度n使用数学归纳法.

一阶形式系统K的完备性

定义　扩张

设S是一阶系统，若S是由添加或改变$K_{\mathcal{L}}$的公理而得，且$K_{\mathcal{L}}$中的定理都是S中的定理，则称S为$K_{\mathcal{L}}$的扩张.

例子　扩张

$K_{\mathcal{L}}$是$K_{\mathcal{L}}$的一个扩张.

定义　相容

设S是$K_{\mathcal{L}}$的一个扩张，若不存在公式A使得A与$\neg A$都是S的定理，则称S是相容的.

定理　K的相容性

一阶逻辑系统$K_{\mathcal{L}}$是相容的.

对证明长度使用数学归纳法.

定义　完全

设S是$K_{\mathcal{L}}$的一个扩张，若对于每个闭公式A都有或$\vdash_S A$或$\vdash_S \neg A$成立，则称S是完全的.

定理　K的完全性

一阶逻辑系统$K_{\mathcal{L}}$是不完全的.

定理　相容扩张性

设S是相容的一阶系统，A是一个闭公式，若A不是S中的定理，把$\neg A$作为一条新公理添加到S的公理集中，而得的S的一个扩张S^*，则S^*是相容的一阶系统.

完全性定理

定理　完全性

设S是相容的一阶系统，则存在S的相容的完全扩张.

定理　完备性定理

K的每个逻辑有效公式都是K的定理, 即

$$\vdash_K A \text{ 当且仅当} \models A.$$

证明 类似于命题逻辑系统L的完备性证明:

- 系统$K_{\mathcal{L}}$的扩张
- 系统$K_{\mathcal{L}}$的相容扩张
- 统$K_{\mathcal{L}}$的完全相容扩张
- 设S是一阶系统$\mathcal{L}$的相容扩张,则一阶语言$\mathcal{L}$有解释I使得对$\mathcal{F}(\mathcal{L})$的任何公式A都有,

$$\text{若} \models_S A, \text{则} I \models A.$$

分四步完成

- 第一步：构造一个既完全又相容的SS的扩张系统T
- 第二步：构造一个解释I^+
- 第三步：证明任意一个闭公式A,都有$\vdash_T A$ 当且仅当$I^+ \models A$.
- 第四步：证明S中的每个定理在解释I中为逻辑有效公式.

作业