计算理论

作业参考答案

1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

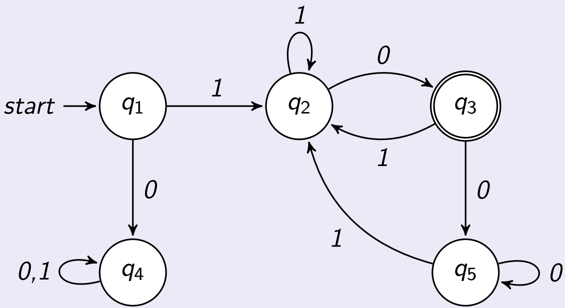
(a) $\{w|w$由1开头，由一个0结尾$\}$

Solution

构造自动机$M = \{Q, \Sigma, \delta, q_1, F\}$，其中：$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_3\}$

	0	*1*
q_1	q_4	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_5	q_2
q_4	q_4	q_4
q_5	q_5	q_2

Table: δ定义



1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

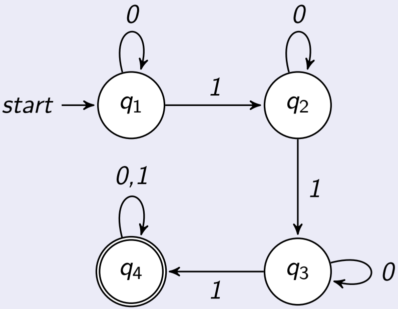
(b) $\{w|w$至少包含3个1$\}$

Solution

构造自动机$M=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $F=\{q_4\}$

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4

Table: δ定义



1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

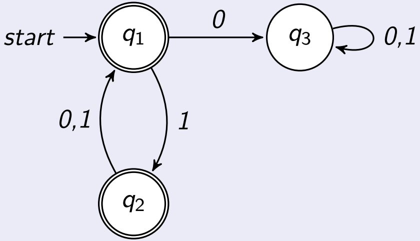
(c) $\{w | w$在奇数位置是1$\}$

Solution

构造自动机$M = \{Q, \Sigma, \delta, q_1, F\}$，其中：$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_1, q_2\}$

	0	1
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_1
q_3	q_3	q_3

Table: δ定义



1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

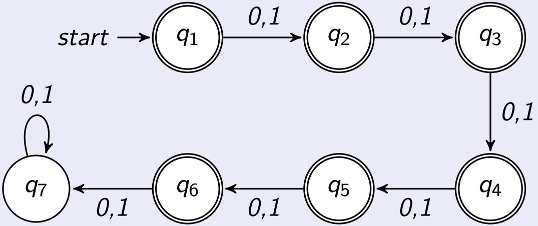
(*d*) $\{w|w$的长度至多为5$\}$

Solution

构造自动机$M=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7\}$，$\Sigma=\{0,1\}$，$F=\{q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6\}$

	0	1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	q_3
q_3	q_4	q_4
q_4	q_5	q_5
q_5	q_6	q_6
q_6	q_7	q_7
q_7	q_7	q_7

Table: δ定义



2.构造非确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

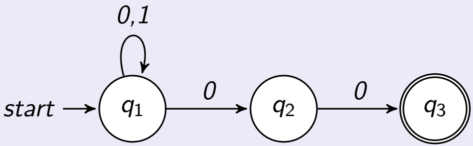
(a) $\{w|w$以00结尾$\}$并且仅有3个状态

Solution

构造自动机$N = \{Q, \Sigma, \delta, q_1, F\}$，其中：$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$,$F = \{q_3\}$

	0	1	ε
q_1	$\{q_1, q_2\}$	q_1	$\emptyset$
q_2	q_3	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Table: δ定义



2.构造非确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

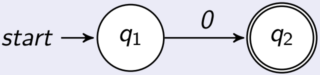
(b) {0}仅有2个状态

Solution

构造自动机$N=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2\}$, $\Sigma=\{0,1\}$,$F=\{q_2\}$

	0	1	ε
q_1	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Table: δ定义



3. 证明非确定自动机可以等价地转换为确定自动机.

Proof.

设非确定自动机$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$识别语言$A$, 即$N \models\!\!\!\rightarrow A$. 构造确定自动机$M = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$如下:

1) $Q' = 2^Q$
2) $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, $\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in E(\delta(r, a))$ 对某个$r \in R\}$
3) $q'_0 = E(\{q_0\})$
4) $F' = \{R \in Q' \mid R$至少包含N的一个终止状态$\}$

下面运用数学归纳法证明$M \models\!\!\!\rightarrow A$:
对任意$\omega \in A$, 设存在一个序列$y_1 y_2 ... y_m = \omega$能被N识别, 即$N \models\!\!\!\rightarrow y_1 y_2 ... y_m$.

* 先考虑y_1, 设$f = q'_0$. 若$y_1 = \epsilon$, 则$\emptyset \neq \delta(q_0, y_1) = \delta(q_0, \epsilon) \subseteq E(\{q_0\}) = q'_0 = g$.
若$y_1 \neq \epsilon$, 则根据M的定义有$\emptyset \neq \delta(q_0, y_1) \subseteq \delta'(q'_0, y_1)$
$= \{q \in Q \mid q \in E(\delta(r, y_1))$对某个$r \in q'_0\} = g$.

所以存在这样的$f, g \in Q'$, 满足$\delta'(f, y_1) = g$ 或$f = g = q'_0$, 并且$\{q \in Q \mid \delta(q, y_1) \neq \emptyset\} = \{q_0\} \subseteq f$.

若$q_0 \in F$, 则$q'_0 \in F'$ 因为$q_0 \in E(q_0) = q'_0$.

Proof(Cont.)

* 现假设对于y_{k-1}，存在$f_{k-1}, g_{k-1} \in Q'$ 使得$\delta'(f_{k-1}, y_{k-1}) = g_{k-1}$ 或$f_{k-1} = g_{k-1}$，并且$\{q \in Q \mid \delta(q, y_{k-1}) \neq \emptyset\} \subseteq f_{k-1}$.
  设$Q_k = \bigcup_{q \in f_{k-1}} \delta(q, y_{k-1})$. 易知$Q_k \subseteq g_{k-1}$. 设$f_k = g_{k-1}$.

  若$y_k \neq \epsilon$ 根据M的定义，有$\emptyset \neq \bigcup_{q_k \in Q_k} \delta(q_k, y_k) \subseteq \delta'(g_{k-1}, y_k)$
  $= \{q \in Q \mid q \in E(\delta(r, y_k))$对某个$r \in g_{k-1}\} = g_k$.
  若$y_k = \epsilon$，令$g_k = g_{k-1}$. 根据M的定义，有$\emptyset \neq \bigcup_{q_k \in Q_k} \delta(q_k, \epsilon) \subseteq g_{k-1}$.

  事实上，对于上述y_k的两种情况，易知$\{q \mid \delta(q, y_k) \neq \emptyset\} \subseteq f_k = g_{k-1}$. 因为对于任意$q \in \{q \mid \delta(q, y_k) \neq \emptyset\}$，由于$N$接受$\ldots y_{k-1} y_k \ldots$，所以必存在$q' \in \{q \in Q \mid \delta(q, y_{k-1}) \neq \emptyset\} \subseteq f_{k-1}$ 使得$q \in \delta(q', y_{k-1})$. 所以$q \in g_{k-1}$.

  所以无论如何,存在这样的$f_k, g_k \in Q'$，使得$\delta(f_k, y_k) = g_k$ 或$f_k = g_k$，并且有$\{q \in Q \mid \delta(q, y_k) \neq \emptyset\} \subseteq f_k$.

  由上述的证明过程易知若$\delta(q_k, y_k) \subseteq F$ $(q_k \in Q_k)$，我们有$g_k \in F'$.

Proof(Cont.)

由归纳法我们证明了对于一切y_n $(n \le m)$, 存在$f_n, g_n \in Q'$, 满足$\delta'(f_n, y_n) = g_n$或$f_n = g_n$, 且$g_m \in F'$. 由以上证明易知所有的令$f_n = g_n$成立的y_n恰好都是ϵ. 在原序列$y_1 y_2 ... y_m$中去掉那些$y_n = \epsilon$, 我们得到序列$z_1 z_2 ... z_p$, 显然M中有这样的一个状态序列$q_0 q_1 ... q_l$接受它(若$g_m \neq q_l$, 不影响$q_l \in F$, 因为我们去掉的那些状态q_{i+1}都满足$q_i = q_{i+1}$, $i \ge 0$). 所以$M |\!\!\circ\!\!\rightarrow z_1 z_2 ... z_p$ 且$z_1 z_2 ... z_p = y_1 y_2 ... y_m = \omega$. 所以$M |\!\!\circ\!\!\rightarrow \omega$.

因为$\omega \in A$是任意的, 所以$M |\!\!\circ\!\!\rightarrow A$.

1. 证明: 上下文无关语言在语言的并运算、链接运算以及Kleene星运算是封闭的.

Proof.

设$G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ 和$G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$为任意两个上下文无关文法.

1) 并运算:

构造$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$, 其中$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$. 下面证明: $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$.
设$w \in \mathcal{L}(G_1)$, 则G_1中存在一个序列$S_1 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow ... \Rightarrow P_n = w$ 生成w, 记作:
$S_1 \overset{*}{\Rightarrow} w$.
显然G中存在一个序列$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow ... \Rightarrow P_n = w$ 生成w, 即$S \overset{*}{\Rightarrow} w$, 所以$w \in \mathcal{L}(G)$.
G_2同理.

反之, 对于任意$w \in \mathcal{L}(G)$, 设其生成序列为$S \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow ... \Rightarrow Q_n = w$. 易知$Q_1 = S_1$ 或$Q_1 = S_2$. 所以w 也能被G_1 或G_2 接受, 即$w \in \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$.

综上, $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$.

Cont.

2) 链接运算:

构造$G=(V_1\cup V_2\cup\{S\},\Sigma_1\cup\Sigma_2,R,S)$, 其中$R=R_1\cup R_2\cup\{S\to S_1S_2\}$. 下面证明: $\mathcal{L}(G)=\mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$.
设$w_1\in\mathcal{L}(G_1)$, $w_2\in\mathcal{L}(G_2)$, 则G_1中存在一个序列$S_1\Rightarrow P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow P_n=w_1$ 生成w_1, 记作: $S_1\overset{*}{\Rightarrow}w_1$. G_2 中同理,
设$S_2\Rightarrow Q_1\Rightarrow Q_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow Q_n=w_2$ 生成w_2, 记作: $S_2\overset{*}{\Rightarrow}w_2$.
显然G中存在一个序列$S\Rightarrow S_1S_2\Rightarrow P_1S_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow w_1S_2\Rightarrow w_1Q_1\Rightarrow\ldots\Rightarrow w_1w_2$ 生成w_1w_2, 即$S\overset{*}{\Rightarrow}w_1w_2$, 所以$w_1w_2\in\mathcal{L}(G)$.

反之, 对于任意$w\in\mathcal{L}(G)$, 设其生成序列为$S\Rightarrow(Q_1=S_1S_2)\Rightarrow Q_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow Q_n=w$. 根据$R$ 的定义, 该序列接下来必然仅按照R_1 和R_2 中的规则演化, 所以w 必为w_1w_2 的形式, 其中$S_1\overset{*}{\Rightarrow}w_1$, $S_2\overset{*}{\Rightarrow}w_2$. 即$w\in\mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$.

综上, $\mathcal{L}(G)=\mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$.

Cont.

2) Kleen运算:

构造$G=(V_1\cup\{S\},\Sigma_1,R,S)$, 其中$R=R_1\cup\{S\to\epsilon,S\to SS_1\}$. 下面证明: $\mathcal{L}(G)=\mathcal{L}(G_1)^*$.
设$w=w_1w_2...w_n\in\mathcal{L}(G_1)^*$, 其中$w_i\in\mathcal{L}(G_1), i\geq 0$. 则$G_1$中存在一个序列$S_1\Rightarrow P_1^i\Rightarrow P_2^i\Rightarrow ...\Rightarrow P_n^i=w_i$ 生成w_i, 记作: $S_1\overset{*}{\Rightarrow}w_i$, 对某个$i\geq 0$.
显然G中存在一个序列$S\Rightarrow SS_1\Rightarrow SS_1S_1\Rightarrow ...\Rightarrow SS_1...S_1\Rightarrow ...\Rightarrow SS_1...w_n\Rightarrow ...\Rightarrow Sw_1...w_n\Rightarrow\epsilon w_1...w_n=w_1w_2...w_n$ 生成w, 即$S\overset{*}{\Rightarrow}w$, 所以$w=w_1w_2...w_n\in\mathcal{L}(G)$.

反之, 用数学归纳法易证$w\in\mathcal{L}(G)\subseteq\mathcal{L}(G_1)^*$:

当$|w|=1$时, 显然必有$w\in\mathcal{L}(G_1)$ (因为w要么是ϵ, 要么必为S_1生成的字符), 因此结论成立.

Cont.

假设对于任意满足$|p| \leq k$的$p \in \mathcal{L}(G)$，都有$p \in \mathcal{L}(G_1)^*$成立. 现设$w \in \mathcal{L}(G)$且$|w| = k+1$. 设存在一个G中的序列生成w，在这个序列生成的过程中，必会出现这种形式：$S \Rightarrow ... \Rightarrow a_1 a_2 ... a_n S' b_1 b_2 ... b_m \Rightarrow ... \Rightarrow w$，其中$n \geq 0$，$m \geq 0$，且$a_1, ..., a_n, b_1, ... b_m$均为字符. S'是变量. 根据R的定义，S'只能是ϵ，S，S_1，或者满足$S_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} S'$. 无论如何，终有$S' \stackrel{*}{\Rightarrow} w' \in \mathcal{L}(G_1)$. 又由归纳假设

知$a_1 a_2 ... a_n \in \mathcal{L}(G_1)^*$，且$b_1 b_2 ... b_m \in \mathcal{L}(G_1)^*$. 所以$S \stackrel{*}{\Rightarrow} a_1 a_2 ... a_n w' b_1 b_2 ... b_m$
$= w \in \mathcal{L}(G_1)^*$.

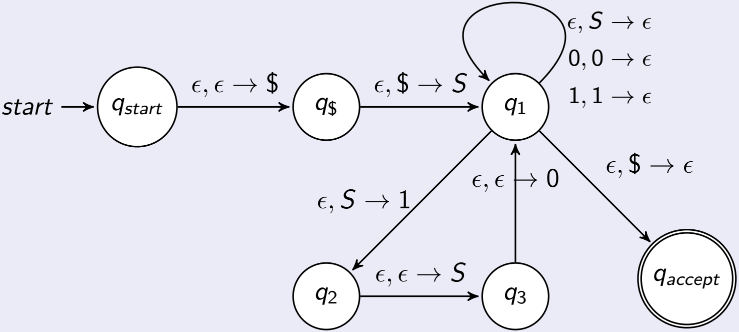
综上，$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1)^*$.

2. 构造一个上下文无关文法G和一个下推自动机P都生成$\{0,1\}$上的语言$\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$.

Solution

$G: S \to 0S1 \mid \epsilon$

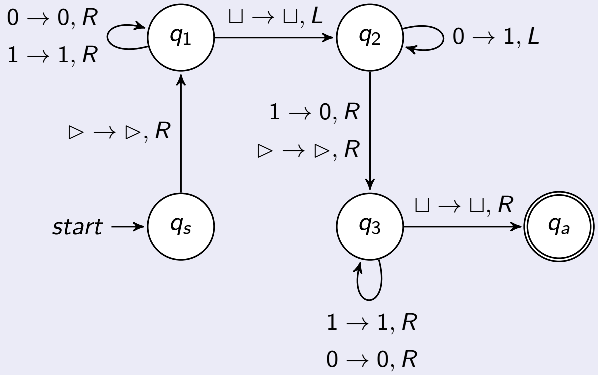
P如下图所示:



1. 构造TM计算n-1函数.

Solution

如下图所示:



2.依据下面的图灵机构造格局演算序列，表明图灵机能接受输入11001♯11001.
TM能识别语言$B = \{\omega\sharp\omega | \omega \in \{0,1\}*\}$.
设$\Sigma = \{0,1,\sharp\}, \Gamma = \{0,1,\sharp,X,\sqcup,\triangleright\}$,转移函数$\delta$定义如下表:

	Symbol					
state	$\triangleright$	0	1	$\sharp$	X	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \triangleright, R)$					
q_1		(q_2, X, R)	(q_3, X, R)	$(q_8, \sharp, R)$		
q_2		$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_4, \sharp, R)$		
q_3		$(q_3, 0, R)$	$(q_3, 1, R)$	$(q_5, \sharp, R)$		
q_4		(q_6, X, L)			(q_4, X, R)	
q_5			(q_6, X, L)		(q_5, X, R)	
q_6		$(q_6, 0, L)$	$(q_6, 1, L)$	$(q_7, \sharp, L)$	(q_6, X, L)	
q_7		$(q_7, 0, L)$	$(q_7, 1, L)$		(q_1, X, R)	
q_8					(q_8, X, R)	$(q_a, \sqcup, R)$

Solution

格局演算序列为: $q_0 \rhd 11001\sharp 11001\sqcup$, $\rhd q_1 11001\sharp 11001\sqcup$, $\rhd X q_3 1001\sharp 11001\sqcup$, $\rhd X1001\sharp q_5 11001\sqcup$, $\rhd X1001 q_6\sharp X1001\sqcup$, $\rhd X100 q_7 1\sharp X1001\sqcup$, $\rhd X q_1 1001\sharp X1001\sqcup$, $\rhd XX q_3 001\sharp X1001\sqcup$, $\rhd XX001\sharp q_5 X1001\sqcup$, $\rhd XX001\sharp XX q_6 001\sqcup$, $\rhd XX00 q_7 1\sharp XX001\sqcup$, $\rhd XX q_1 001\sharp XX001\sqcup$, $\rhd XXX q_2 01\sharp XX001\sqcup$, $\rhd XXX01\sharp q_4 XX001\sqcup$, $\rhd XXX01\sharp X q_6 XX01\sqcup$, $\rhd XXX0 q_7 1\sharp XXX01\sqcup$, $\rhd XXX q_1 01\sharp XXX01\sqcup$, $\rhd XXXX q_2 1\sharp XXX01\sqcup$, $\rhd XXXX1\sharp q_4 XXX01\sqcup$, $\rhd XXXX1\sharp XX q_6 XX1\sqcup$, $\rhd XXXX q_7 1\sharp XXXX1\sqcup$, $\rhd XXXX q_1 1\sharp XXXX1\sqcup$, $\rhd XXXXX q_3\sharp XXXX1\sqcup$, $\rhd XXXXX\sharp q_5 XXXX1\sqcup$, $\rhd XXXXX\sharp XXX q_6 XX\sqcup$, $\rhd XXXX q_7 X\sharp XXXXX\sqcup$, $\rhd XXXXX q_1\sharp XXXXX\sqcup$, $\rhd XXXXX\sharp q_8 XXXXX\sqcup$, $\rhd XXXXX\sharp XXXXX q_8\sqcup$, $\rhd XXXXX\sharp XXXXX \sqcup q_a$.

3.修改图灵机TM$M_0 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_a, q_r\}, \{0,1\}, \{0,1,X,Y,\triangleright,\sqcup\}, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$,使之能判定语言:$\{0^n1^n | n \geq 1\}$.

state	Symbol $\triangleright$	0	1	X	Y	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \triangleright, R)$					
q_1		(q_2, X, R)			(q_4, Y, R)	
q_2		$(q_2, 0, R)$	(q_3, Y, L)		(q_2, Y, R)	
q_3		$(q_3, 0, L)$		(q_1, X, R)	(q_3, Y, L)	
q_4					(q_4, Y, R)	$(q_a, \sqcup, R)$

Solution

state	*Symbol* $\triangleright$	*0*	*1*	X	Y	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \triangleright, R)$					
q_1		(q_2, X, R)	$\boldsymbol{(q_r, 1, R)}$		(q_4, Y, R)	$\boldsymbol{(q_r, \sqcup, R)}$
q_2		$(q_2, 0, R)$	(q_3, Y, L)		(q_2, Y, R)	$\boldsymbol{(q_r, \sqcup, R)}$
q_3		$(q_3, 0, L)$		(q_1, X, R)	(q_3, Y, L)	
q_4		$\boldsymbol{(q_r, 0, R)}$	$\boldsymbol{(q_r, 1, R)}$		(q_4, Y, R)	$(q_a, \sqcup, R)$