华东师范大学计算机科学与软件工程学院

研究生考试试题 软件理论基础

考试时间：2017年1月12日

考生姓名：林烨煜 考生学号：51164500784 考生研究方向：

****

本试卷共六道大题，总分100+10分，共3页，请直接在答题纸上做。

一（命题逻辑，本题总分15分）

1. 计算下面公式的真度：

(1) $p_1 \to (p_2 \vee p_3)$ (2) $(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \to p_3)$ (3) $\neg p \wedge q$

2. 试证：$\vdash \neg A \to (A \to B)$.

$\neg A$

$A \to (B \to \neg A)$

$A \to (\neg A \to B)$、

$A \vee (\neg A \vee B)$.

$A \to \neg A$

$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$

$\neg A$ $\neg A \to B$、

$B \to A$.

3. 证明：若$\Gamma \vdash (A \to B)$则$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

二（一阶谓词逻辑，本题总分20分）

1. 在一阶谓词语言$\mathcal{L}$的自然数解释I中，找出赋值v使得v满足公式A，这里A分别是：

(1) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_3))$

(2) $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$

(3) $A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$

其中符号A_1^2, f_1^2, f_2^2涵义可以自由确定，a_1是常元素。

$(\forall x_i)\neg B \to \neg A$.

$= A \to (\neg A \to \forall(x_i)\neg B)$

$= A \to \forall(x_i)\neg B)$

$=$

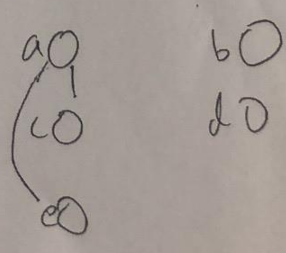
2. 证明：设x_i不在A中自由出现，则$\vdash ((\forall x_i)\neg B \to \neg A) \to ((\forall x_i)\neg B \to (\forall x_i)\neg A)$. $\neg B$.

$\neg A \to$

3. 证明：对于任何一阶语言$\mathcal{L}$，一阶公式$(\forall x_i)A(x_i) \to A(x_i)$是逻辑有效的，即，在$\mathcal{L}$的任何解释下都是真的。

三（模态逻辑系统，本题总分20分）

1. 考察Kripke模型$\mathcal{M} = (W, R, L)$，其中$W = \{a, b, c, d, e\}$；$R = \{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (d, e), (e, a)\}$，以及$L(a) = \{p\}$，$L(b) = \{p, q\}$，$L(c) = \{p, q\}$，$L(d) = \{q\}$，$L(e) = \emptyset$。



$x(t)=1$

- 画出$\mathcal{M}$的图
- 确定下面的公式在哪些世界是真的

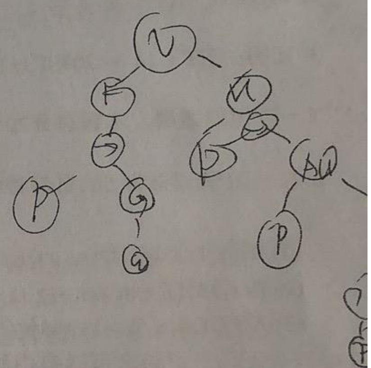
  1. $\Box\neg p \wedge \Box\Box\neg p$
  2. $\diamond q \wedge \neg\Box q$
  3. $\Box(p \vee \neg p)$

2. 设$\mathcal{M} = (W, R, L)$是一个模态逻辑模型。证明:

(1) 若R是线性的，即$\forall x, y, z \in W$, 若$(x, y) \in R$且$(x, z) \in R$ 则$(y, z) \in R$ 或$y = z$, 或$(z, y) \in R$, 则$\mathcal{M} \models \Box(\phi \wedge \Box\phi \to \psi) \vee \Box(\psi \wedge \Box\psi \to \phi)$.

(2) 若R是传递的，即$\forall x, y, z \in W$, 若$(x, y) \in R$, 且$(y, z) \in R$ 则$(x, z) \in R$, 则$\mathcal{M} \models \Box\phi \to \Box\Box\phi$.

四（时态逻辑系统，本题总分20分）



1. 画出下面LTL/CTL公式的Parse树

(a) $F(p \to Gr) \vee (\neg qUp)$

(b) $AG(p \to A[pU(\neg p \wedge E[\neg pUq])])$

2. 依照图1的系统，考虑下面每个LTL公式ϕ:

(a) Ga

(b) aUb

(c) $X(a \wedge b) \wedge F(\neg a \wedge \neg b)$

(1) 找到一条从q_3出发的路，满足公式ϕ

(2) 确定是否有$\mathcal{M}, q_3 \models \phi$.

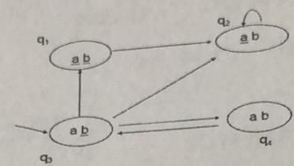
(3) 若将$\underline{a}$和$\underline{b}$解释为a与b的非，并表示通信协议中的发射信息，而a, b为接受信息，解释这些公式的具体含义.

3. 设ϕ, ψ是CTL 公式，若对于任何模型$M = (S, \to, L)$以及M中的任何状态s都有s满足ϕ当且仅当s满足ψ, 即$M, s \models \phi$当且仅当$M, s \models \psi$，则称ϕ是语义等价于ψ, 记作$\phi \equiv \psi$. 证明下列各条成立:

(1) $\neg AF\phi \equiv EG\neg\phi$.

(2) $\neg AX\phi \equiv EX\neg\phi$.

(3) $EF\phi \equiv E[\top U\phi]$.



（图1）

五（自动机理论，本题满分25分）

1. 证明正规语言的并还是正规语言。

2. 构造有限自动机分别能识别下面的语言,其中字母集为$\{0, 1\}$
$\{w \mid w$ 由00结尾并且仅有3个状态$\}$

3. 构造一个下推自动机都能生成$\{a, b\}$的语言$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$，并给出生成字$a^3 b^3$的计算过程.

4. 构造一个图灵机能计算$n + 1$，给出计算5+1的过程.

六（时间自动机与混成自动机，本题满分20分）

1. 针对交通灯红-黄-绿变换，设计一个具有三个时钟r, g, y交通灯控制系统的时间自动机，要求红灯亮30秒后，转换到黄灯，黄灯亮5秒后，转换到绿灯，绿灯亮40秒后，转换到黄灯，黄灯亮5秒后转换成红灯，一直这样循环下去。给出从红灯为开始状态并从r=0秒开始计时，200秒后交通灯处于何种灯光？

2. 设计一个制冷空调系统的混成自动机，室温维持在20度。空调制冷的温度变化微分方程为$\dot{x} = -\frac{1}{10}$，房间温度变化微分方程为$\dot{x} = \frac{1}{15}$，当房间温度为19度时空调关闭，当房间温度为21度时空调工作。现在假设室温为30度，问过多长时间（单位为秒）空调开始制冷工作？在此基础上，计算在200秒时空调处于何种状态（工作还是关闭）？

华东师范大学答题纸

课程名称：软件理论基础　　　　专　业：软件工程

学生姓名：朱婷婷　　　　学　号：51164500274

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名
								91+15=106	

一. 1. (1) $\tau(p_1 \to (p_2 \vee p_3)) = \frac{7}{8}$

(2) $\tau((p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \to p_3)) = \frac{5}{8}$

(3) $\tau(\neg p \wedge q) = \frac{1}{4}$

真值表如右图所示：

p_1	p_2	p_3	$p_1 \to (p_2 \vee p_3)$	$(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \to p_3)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

p	q	$\neg p \wedge q$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

2. 证明：$\vdash \neg A \to (A \to B)$

$\neg A \to (A \to B)$

$= \neg(\neg A) \vee (A \to B)$

$= A \vee (\neg A \vee B)$

$= A \vee \neg A \vee B$ 为重言式

$\therefore \vdash \neg A \to (A \to B)$

3. 证明：设 $\Gamma \vdash (A \to B)$，则存在一推演：

(1) A_1

(2) A_2

⋮

(n) $A_n (A \to B)$

其中每个 A_i 或是公理，或是 Γ 中成员，或存在 $k, j < i$，使得 A_i 由 A_j 和 A_k 通过 MP 规则得到，在此推演基础上构造一个序列如下：

(1) A_1

(2) A_2

⋮

(n) $A_n (A \to B)$

(n+1) A (假设)

(n+2) B MP(n, n+1)

这个序列是 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的一个推演，故有 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 成立

$\therefore \Gamma \vdash (A \to B)$ 则 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$

姓名：朱婷婷：学号：

二、1. (1) $f_1^2(x_1,x_2)=f_2^2(x_2,x_3)$

即 $v(x_1)+v(x_2)=v(x_2)\times v(x_3)$

赋值使 $v(x_1)=1$，$v(x_2)=1$，$v(x_3)=2$

(2) $f_2^2(x_1,x_2)=x_3$

即 $v(x_1)\times v(x_2)=v(x_3)$

赋值使 $v(x_1)=1$，$v(x_2)=2$，$v(x_3)=2$.

(3) $(f_1^2(x_1,a_1)=x_2)\to(f_1^2(x_1,x_2)=x_3)$

$(x_1+a_1=x_2)\to(x_1+x_2=x_3)$

赋值使 $v(a_1)=0$，$v(x_1)=2$，$v(x_2)=2$，$v(x_3)=4$

则满足公式

2. 证明：设 v 是 T_E 一赋值，则 $v\models(\forall x_i)\neg B\to\neg A$，设 $v\models(\forall x_i)\neg B$，$w$ 为 v 的 x_i 等价

$\therefore v\models\neg A$. $\because x_i$ 不在 A 中自由出现

$\therefore w\models\neg A$，$\therefore v\models(\forall x_i)\neg A$

$\therefore v\models((\forall x_i)\neg B\to(\forall x_i)\neg A)$

$\therefore\ \vdash((\forall x_i)\neg B\to\neg A)\to((\forall x_i)\neg B\to(\forall x_i)\neg A)$

3. 对任意解释 I 下的任意赋值 v，有2种情况. ①：$v\models\neg\forall x_i\,A(x_i)$ ②：$v\models(\forall x_i)A(x_i)$

若① 即 $v\models\neg(\forall x_i)A(x_i)$，则 $(\forall x_i)A(x_i)\to A(x_i)$ 为真

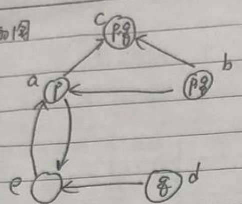
若②，即 $v\models(\forall x_i)A(x_i)$ 则对任意 $x_i\in D_I$，$A(x_i)$ 为真，对任意 v 的 x_i 等价 v'，满足 $v'\models A(x_i)$

而 v 是自己的 x_i 等价.

无论如何，均有 $v\models(\forall x_i)A(x_i)\to A(x_i)$，$\therefore$ 公式 $(\forall x_i)A(x_i)\to A(x_i)$ 在 I 的任何解释下

都为真

三、1. M如图



(1) $\Box\neg p \wedge \Box\Box\neg p$ 在世界{c}上是真的.

(2) $\Diamond q \wedge \neg\Box q$: 在世界{a, b}上是真的.

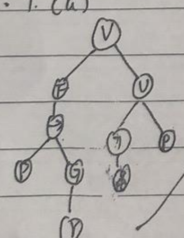
(3) $\Box(p \vee \neg p)$. 在世界{a, b, c, d, e}上是真的

2. (1) 证明: $\forall x \in W$, $M = \langle W, R, L \rangle$. 设 $x \Vdash \Box$

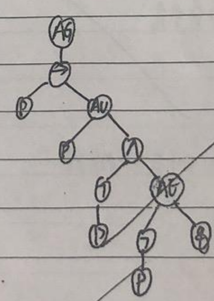
(2) 证明: $\forall x \in W$, $M = \langle W, R, L \rangle$ 设 $x \Vdash \Box\phi$, $y \in W$, 且 $(x, y) \in R$, 再设 $z \in W$, 且 $(y, z) \in R$,
由于R是传递的. $\therefore (x, z) \in R$, 故 $z \Vdash \phi$.

$\therefore x \Vdash \phi$ $\therefore y \Vdash \Box\phi$. $\therefore x \Vdash \Box\Box\phi$ $\therefore M \models \Box\phi \to \Box\Box\phi$.

四、1. (a)



(b)



2. (1) Ga: $q_3 q_4 q_3 q_4 \cdots$ aUb: $q_3 q_2 q_2 \cdots$

(2) $X(a \wedge b) \wedge F(\neg a \wedge \neg b)$: $q_3 q_4 q_3 q_1 q_2 \cdots$

(2) Ga: 在M, $q_3 \models Ga$ aUb: 在M, $q_3 \models aUb$.

$X(a \wedge b) \wedge F(\neg a \wedge \neg b)$ 在M, $q_3 \models X(a \wedge b) \wedge F(\neg a \wedge \neg b)$

(3) Ga: 在所有状态下都接受a. aUb: 接受a, 直到某个状态, 接收b.

[redacted]

$X(a \wedge b) \wedge F(\neg a \wedge \neg b)$ ：下一个状态满足a和b，且在未来某个状态，否a和b.

3 (1) $BS \in \neg AF\phi$ 并非所有公式都[illegible]某个状态满足 ϕ 等价于存在未来所有状态中都不满足 ϕ 成立. (2) 并非所有都使得某个下个状态满足 ϕ 等价于存在下个状态都不满足 ϕ 成立. (3) 存在未来某个状态满足 ϕ 等价于存在使得前状态都会直到满足公式 ϕ 成立.

五. 1. 证明：设A.B是正规语言，证明AUB是正规语言)：

设计一个能识别语言AUB的有限自动机M. 设A.B是Σ上的正规语言，即有Σ上的自动机，

$M_i = \{Q_i, \Sigma, \delta_i, q_0^i, F_i\}$ 使 M_1 能识别A，M_2 能识别B 即 $M_1 \to A$，$M_2 \to B$

构造自动机 $M = \{Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_1 \times \delta_2, (q_0^1, q_0^2), F_1 \times Q_1 \cup Q_1 \times F_1\}$.

其中 $\delta_1 \times \delta_2 : (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma \to Q_1 \times Q_2$ $((r_1, r_2), \delta) \to (\delta_1(r_1, \alpha); \delta_2(r_2, \alpha))$. 证明AUB.

设字 $w = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n \in A$，则 $M_1 \to w$，从而有一个有限状态序列 $\{q_0^1, q_1^1, \cdots q_n^1\}$ 使

$$q_0^1 \xrightarrow{\alpha_1} q_1^1 \xrightarrow{\alpha_2} q_2^1 \to \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} q_{n-1}^1 \xrightarrow{\alpha_n} q_n^1 \text{ 且 } q_n^1 \in F_1$$

将自动机 M_2 作用到w上面得到如下序列：$q_0^2 \xrightarrow{\alpha_1} q_1^2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} q_{n-1}^2 \xrightarrow{\alpha_n} q_n^2$. 其中 q_n^2 不一定是 M_2 的终止状态，即 $q_n^2 \in F_2$ 不一定成立.

构造自动机M的有限状态序列：$(q_0^1, q_0^2), (q_1^1, q_1^2), \cdots (q_{n-1}^1, q_{n-1}^2), (q_n^1, q_n^2)$，且有性质：

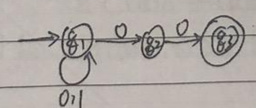
$(q_0^1, q_0^2) \xrightarrow{\alpha_1} (q_1^1, q_1^2) \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} (q_{n-1}^1, q_{n-1}^2) \xrightarrow{\alpha_n} (q_n^1, q_n^2)$. 且 $(q_n^1, q_n^2) \in (F_1 \times Q_2)$，即 (q_n^1, q_n^2) 为M的终止状态.

∴ M接受w，即 $M \to w$. 同样可证，若字 $w = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n \in B$，也有 $M \to w$，

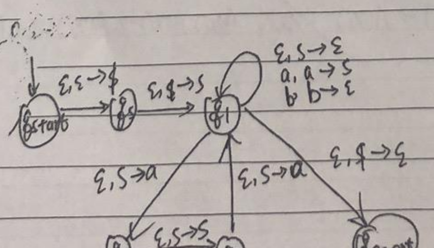
∴ 综上所述，$M \to AUB$ 即若A.B是正规语言，则AUB也是正规语言. ∴ 正规语言的并运算是正规语言.

2. 构造自动机 $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_1, F\}$. $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$. $\Sigma = \{0, 1\}$. $F = \{q_3\}$.

	0	1	ε
	$\{q_1, q_2\}$	q_1	ϕ
	q_3	ϕ	ϕ
	ϕ	ϕ	ϕ



3.



[redacted]

专业：软件工程　　课程名称：软件理论基础　　姓名：朱婷婷　学号：51164500274

接上

五. 4. 构造能计算 n+1 图灵机，转移函数如下所示

Symbol

	▷	0	1	⊔
0	q_1,▷,R			
1		q_1,0,R	q_1,1,R	q_2,⊔,L
2		q_3,1,R	q_2,0,L	
3		q_3,0,R	q_3,1,R	q_a,⊔,R

∴ 计算 5+1 过程

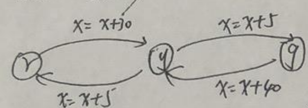
5 作二进制转换为 101

则 q_0▷101⊔，▷$q_1$101⊔，▷1$q_1$01⊔，▷10$q_1$1⊔，▷101q_1⊔，

▷10$q_2$1⊔，▷1$q_2$00⊔，▷11$q_3$0⊔，▷110q_3⊔，▷110q_a

∴ 5+1 ⇒ 101 + 1 = 110

六. 1.



200 秒后处于绿灯

+15、

2.