谓词逻辑系统

作业参考答案

1.设$\mathcal{L}$是一阶语言，它有1个个体常元a_1，1个函数符f_1^2和1个谓词符A_1^2，设公式A为$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,a_1) \to A_1^2(f_1^2(x_1,x_1),a_1))$.

(a) 设$\mathcal{L}$的解释为I, D_I是整数集合Z, $\overline{a_1}=0$, $\overline{f_1^2}(x,y)=x\times y$, $\overline{A_1^2}(x,y)$ 为$x<y$,问公式A在此解释下的意义是什么？是真是假？

Solution

在解释I下,$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,a_1) \to A_1^2(f_1^2(x_1,x_1),a_1))$的意义是:

$$\text{对于任何整数}x_1,\text{如果}x_1<0,\text{则}(x_1)^2<0.$$

为假. 例:$x_1=-1$时, $(-1)^2=1>0$.

(b) 把解释I稍作修改,记为I',设$\overline{f_1^2}(x,y) = x + y$,其余不变,问公式$A$在此解释$I'$下的意义是什么？是真是假？

Solution

在解释I'下,$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, a_1) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), a_1))$的意义是:

$$\text{对于任何整数}x_1,\text{如果}x_1 < 0,\text{则}2x_1 < 0.$$

为真.

(c) 把解释I稍作修改,记为I'',设$\overline{A_1^2}(x,y)$表示$x=y$,其余不变,问公式A 在此解释I'' 下的意义是什么？是真是假？

Solution

在解释I''下,$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,a_1)\to A_1^2(f_1^2(x_1,x_1),a_1))$ 的意义是:

$$\text{对于任何整数}x_1,\text{如果}x_1=0,\text{则}(x_1)^2=0.$$

为真.

2.设一阶语言$\mathcal{L}$中的公式A为$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(f_1^1(x_1)))$,公式$B$为$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$,试分别作出不同的解释,使$A$与$B$有时为真,有时为假.

Solution

例如,可以令$\mathcal{L}$的解释为I,D_I是整数集合Z.

1) A与B为真

令$\overline{A_1^1}(x)$为$x > 0$, $\overline{f_1^1}(x) = x + 1$, $\overline{A_1^2}(x, y)$为$x = y$.

公式A表示“对于任意整数x_1,如果$x_1 > 0$,则$x + 1 > 0$.”为真.

公式B表示“对于任意整数x_1,如果$x_1 = x_2$,则$x_2 = x_1$.”为真.

2) A与B为假

令$\overline{A_1^1}(x)$为$x > 0$, $\overline{f_1^1}(x) = x - 1$, $\overline{A_1^2}(x, y)$为$x < y$.

公式A表示“对于任意整数x_1,如果$x_1 > 0$,则$x - 1 > 0$.”为假.

例:$x = 1$时,$x - 1 = 0$.

公式B表示“对于任意整数x_1,如果$x_1 < x_2$,则$x_2 < x_1$.”为假.

例:取$x_1 = 1, x_2 = 2$.

3.证明:在任何一阶语言$\mathcal{L}$,公式$(\forall x_i)A(x_i) \to A(x_i)$在$\mathcal{L}$的任何解释下都为真.

Proof.

(说明：根据题意，应理解为$(\forall x_i A(x_i)) \to A(x_i)$ 而非$\forall x_i(A(x_i) \to A(x_i))$. 下面只对第一种理解方式做出解释，另一种相似.)

对任意解释I下的任意赋值v, 要么有$v \models \forall x_i A(x_i)$, 要么有$v \models \neg\forall x_i A(x_i)$.
若$v \models \neg\forall x_i A(x_i)$, 已经得结论. 若$v \models \forall x_i A(x_i)$, 则对任意的$x_i \in D_I$, $A(x_i)$成立.
易知对任意的v的x_i等价v', 均满足$v' \models A(x_i)$, 而v是自己的x_i等价.

无论如何，均有: 对任意解释I下的任意赋值v, $v \models \forall x_i A(x_i) \to A(x_i)$. 所以,
$I \models \forall x_i A(x_i) \to A(x_i)$. □

1.证明:$\simeq$是公式集$\mathcal{F}(\mathcal{L})$的一个同余关系.

Proof.

1.

根据'$\simeq$'的定义, 易知: $A \simeq B \iff B \simeq A$ 并且$A \simeq A$.
若$A \simeq B$, $B \simeq C$, 则有$\vDash A \to B$, $\vDash B \to C$
所以$\vDash A \to C$, 同理有: $\vDash c \to A$
所以$A \simeq C$
综上, '$\simeq$'是一个等价关系.

2.

1)证: 若$A \simeq B$, 则$\neg A \simeq \neg B$
$\because A \simeq B$
$\therefore \vDash A \iff \vDash B$
用反证法易知: $\neg A \simeq \neg B$ ($\forall v$, 若$v \vDash \neg A$ 且$v \vDash B$. 则$v \vDash A$与$v \vDash A$ 矛盾).

2)证: 若$A \simeq B$ 且$C \simeq D$, 则$A \to C \simeq B \to D$.
若$\vDash A \to C$, 则对任意赋值v, 若$v \vDash A$, 则$v \vDash C$.
$\because A \simeq B, C \simeq D$
$\therefore$ 对任意v, 若$v \vDash A$, 则$v \vDash B, v \vDash C, v \vDash D$.

Proof (Cont.)

$\therefore$ 有$v \vDash B \to D$
若$v \vDash \neg A$, 则$v \vDash \neg B$,
$\therefore v \vDash B \to D$
$\therefore$ 若$\vDash A \to C$, 则$\vDash B \to D$
同理可得: 若$\vDash B \to D$, 则$\vDash A \to C$
$\therefore A \to C \simeq B \to D$.

3)证: $A \simeq B$, 则$(\forall x_i)A \simeq (\forall x_i)B$.
若$\vDash (\forall x_i)A$, 则对任意解释I, 有$I \vDash A$ 当且仅当$I \vDash (\forall x_i)A$.
$\therefore \vDash A$
$\because A \simeq B$, $\therefore \vDash B$, $\therefore$ 同理有$\vDash (\forall x_i)B$.
$\therefore$ 若$\vDash (\forall x_i)A$, 则$\vDash (\forall x_i)B$.
同理有: 若$\vDash (\forall x_i)B$, 则$\vDash (\forall x_i)A$.
$\therefore (\forall x_i)A \simeq (\forall x_i)B$.

4)证: 若$A \simeq B$, 则$(\exists x_i)A \simeq (\exists x_i)B$
若$\vDash (\exists x_i)A$, (反证法:)假设存在解释I下的赋值v, 使得$v \nvDash \exists x_i B$.
那么对任意v的$i-$等价v', 有$v' \nvDash B$.
$\therefore$ 有$v' \vDash \neg B$.
$\because A \simeq B$, $\therefore v' \vDash \neg A$, $\therefore v' \nvDash A$

Proof (Cont.)

但这与$\models \exists x_i A$ 矛盾(因为v'是解释I下的任意i–等价)

$\therefore \models \exists x_i B$

同理可得: 若$\models \exists x_i B$, 则$\models \exists x_i A$.

$\therefore (\exists x_i)A \simeq (\exists x_i)B$

综上, $\simeq$是一个同余关系.

2.设A, B, C是谓词公式，则:
(a) $A \vee B \simeq B \vee A$

Proof.

若$\vDash A \vee B$, 则对任意I下的任意v, $v \vDash A \vee B$, 则$v \vDash A$或$v \vDash B$
$\therefore\ v \vDash B$或$v \vDash A$
$\therefore\ v \vDash B \vee A$
反之亦然.
$\therefore \vDash A \vee B \Leftrightarrow \vDash B \vee A$
$\therefore\ A \vee B \simeq B \vee A$. □

2.设A, B, C是谓词公式，则:
(b) $A \wedge B \simeq B \wedge A$

Proof.

若$\models A \wedge B$, 则对任意I下的任意v, $v \models A \wedge B$, 则$v \models A$且$v \models B$
$\therefore\ v \models B$且$v \models A$
$\therefore\ v \models B \wedge A$
反之亦然.
$\therefore \models A \wedge B \Leftrightarrow \models B \wedge A$
$\therefore\ A \wedge B \simeq B \wedge A.$

□

2. 设A, B, C是谓词公式，则:
$(c)\ A \to B \simeq \neg A \vee B$

Proof.

若$\vDash A \to B$.则对任意I下的任意v, $v \vDash A \to B$,

1. 若$v \vDash A$, 则$v \vDash B$
   $\therefore\ v \vDash \neg A \vee B$.
2. 若$v \vDash \neg A$, 则$v \vDash \neg A \vee B$.

反之亦然.

$\therefore \vDash A \to B \Leftrightarrow \vDash \neg A \vee B$

$\therefore\ A \to B \simeq \neg A \vee B$.

□

2.设A, B, C是谓词公式，则:

(d) $(\forall x_i)A \simeq \neg(\exists x_i)\neg A$

Proof.

若$\vDash (\forall x_i)A$, 则对任意I下的任意v, $v \vDash (\forall x_i)A$

若$v \nvDash \neg(\exists x_i)\neg A$, 则$v \vDash (\exists x_i)\neg A$

$\therefore$存在一个v的x_i等价v', $v' \vDash \neg A$, 即$v \nvDash A$, 与$v \vDash (\forall x_i)A$矛盾.

$\therefore$ $v \vDash \neg(\exists x_i)\neg A$

反之亦然.

$\therefore$ $v \vDash (\forall x_i)A \leftrightarrow v \vDash \neg(\exists x_i)\neg A$

$\therefore$ $(\forall x_i)A \simeq \neg(\exists x_i)\neg A$.

□

1.证明：设x_i不在A中自由出现，则$\vdash (\exists x_i)(A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)$.

Proof.

1.	$\{A, A \to B\} \vdash B$	
2.	$B \vdash (\exists x_i)B$	
3.	$\{A, A \to B\} \vdash (\exists x_i)B$	HS(1,2)
4.	$\vdash (A \to B) \to (A \to (\exists x_i B))$	演绎定理（未使用过Gen规则）
5.	$((A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)) \to$ $(\neg(A \to (\exists x_i)B) \to \neg(A \to B))$	K3
6.	$\neg(A \to (\exists x_i)B) \to \neg(A \to B)$	MP(4,5)
7.	$\neg(A \to B) \to (\forall x_i)\neg(A \to B)$	Gen规则
8.	$\neg(A \to (\exists x_i)B) \to (\forall x_i)\neg(A \to B)$	HS(6,7)
9.	$\neg(A \to (\exists x_i)B) \to (\forall x_i)\neg(A \to B)$ $\to (\neg(\forall x_i)\neg(A \to B)) \to (A \to (\exists x_i)B)$	K3
10.	$(\exists x_i)(A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)$	MP(8,9)

$\therefore \vdash (\exists x_i)(A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)$.

□

2.化下列各式为和它们可证等价的前束范式:

(a) $(\exists x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$

Solution

$(\exists x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$
$\sim (\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_3, x_2))$

(b) $(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$

Solution

$(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$
$\sim (\forall x_2)(\exists x_1)(A_1^2(x_1, x_3) \rightarrow A_1^2(x_4, x_2))$

(c) $(\exists x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$

Solution

$(\exists x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$
$\sim (\forall x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_4)) \rightarrow (A_1^1(x_2) \rightarrow A_1^2(x_4, x_3))$