华东师范大学
软硬件协同设计技术与应用教育部工程研究中心
URL—http://faculty.ecnu.edu.cn/chenyixiang
yxchen@sei.ecnu.edu.cn

模态逻辑系统

陈仪香,吴恒洋

MoE Engineering Center for Software/Hardware Co-Design Technology and Application
Software Engineering Institute
East China Normal University(ECNU)
Shanghai, China

2018级研究生软件工程理论课程, 2018年4月

模态逻辑系统

- 模态逻辑系统语法
- 模态逻辑系统语义结构
- 模态逻辑推理理论

模态逻辑系统的语法

模态逻辑系统语法=命题逻辑系统语法+两个一元连接词$\Box$ 和$\Diamond$。

定义 基本的modal逻辑

$$\phi ::= \bot|\top|p|\neg\phi|\phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \phi \to \phi \mid \Box\phi \mid \Diamond\phi$$

其中p是原子公式.

- $\Box$ is read necessarily, $\Diamond$ possibly in the logic that studies necessity and possibility, and
- $\Box$ is read agent Q knows, $\Diamond$ is read it is consistent with agent Q's knowledge that, in the logic of agent Q's knowledge.

例子: $p \wedge \Diamond(p \to \Box\neg r)$
$\Box((\Diamond q \wedge \neg r) \to \Box p)$

Parse 树

定义 Kripke 模型

模型$\mathcal{M}$由三部分组成:

- 集合W, 其元素称为世界,
- W上的关系R, 称为可达关系,
- 标号函数$L: W \to \mathcal{P}(\mathrm{Atoms})$.

称公式ϕ在世界x为真,用符号$x \Vdash \phi$表之.

可达关系是模态逻辑系统的关键概念。

例子: $W = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$; $Atoms = \{p, q\}$

$$R = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_4, x_5), (x_5, x_4), (x_5, x_6)\}$$

标号如下:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$L(x)$	$\{q\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\emptyset$	$\{p\}$

真

定义　真

设$\mathcal{M}=(W,R,L)$是模态逻辑一个模型，$x\in W$, ϕ是一个模态逻辑公式.称公式ϕ在世界x处为真,记作$x \Vdash \phi$, $x \nVdash \phi$表示ϕ 在x处不真.

- $x \Vdash \top$;
- $x \nVdash \bot$;
- $x \Vdash p$ 当且仅当$p\in L(x)$;
- $x \Vdash \neg\phi$ 当且仅当$x \nVdash \phi$;
- $x \Vdash \phi\vee\psi$ 当且仅当$x \Vdash$ 或$x \Vdash \psi$;
- $x \Vdash \phi\wedge\psi$ 当且仅当$x \Vdash \phi$ 且$x \Vdash \psi$;
- $x \Vdash \phi\to\psi$ 当且仅当若$x \Vdash \phi$则$x \Vdash \psi$;
- $x \Vdash \Box\phi$, 对于所有的世界$y\in W$,只要满足$R(x,y)$就有$y \Vdash \phi$;
- $x \Vdash \Diamond\phi$,存在一个世界$y\in W$使得$R(x,y)$且$y \Vdash \phi$;

接前面的例子

- $x_1 \Vdash q$
- $x_1 \Vdash \Diamond q$
- $x_1 \nVdash \Box q$
- $x_5 \nVdash \Box p$,且$x_5 \nVdash \Box q$, 故$x_5 \nVdash \Box p \vee \Box q$
- $x_5 \Vdash \Box(p \vee q)$
- $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \Vdash \Box p \rightarrow q$
- $x_6 \nVdash \Diamond \phi$, 对于任意的公式$\phi$
- $x_6 \Vdash \Box \phi$, 对于任意的公式ϕ

满足性

定义　模型满足公式

模型$\mathcal{M}$满足公式ϕ,记作$\mathcal{M} \models \phi$.

模型$\mathcal{M} = (W, R, L)$满足模态逻辑公式ϕ,若对于任意一个世界$x \in W$都有$x \Vdash \phi$.

例子:将上例中的R修改为:

$$\{(x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_3)\}$$

验证$\mathcal{M} \models \Box p$.

模态公式的等价性

定义　模态公式的等价性

- 设Γ是模态公式集,ϕ是模态公式, 模型$\mathcal{M}=(W,R,L)$. 称Γ语义上推出ϕ,记作$\Gamma \models_{\mathcal{M}} \phi$,或$\Gamma \models \phi$,

$$\text{若对于任一世界}x \in W,\text{只要}x \Vdash \Gamma\text{就有}x \Vdash \phi$$

  其中$x \Vdash \Gamma$是指$\forall \phi \in \Gamma, x \Vdash \phi$.
  特别地$\{\phi\} \models_{\mathcal{M}} \psi$简记为$\phi \models \psi$.

- 称ϕ与ψ是语义等价的,记作$\phi \equiv \psi$,若对任一模型$\mathcal{M}$都有$\phi \models_{\mathcal{M}} \psi$当且仅当$\psi \models_{\mathcal{M}} \phi$.

例子: $\Box\phi \equiv \neg\Diamond\neg\phi$,
$\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$;
$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\phi \to \neg\psi)$,
$\Box(\phi \wedge \psi) \equiv \Box\phi \wedge \Box\psi$;
$\Diamond(\phi \vee \psi) \equiv \Diamond\phi \vee \Diamond\psi$;
$\Diamond\top \equiv \Box\phi \to \Diamond\phi$

论证: $\Box(\phi \vee \psi)$ 与$\Box\phi \vee \Box\psi$以及$\diamond(\phi \wedge \psi)$ 与$\diamond\phi \wedge \diamond\psi$ 之间的关系.

逻辑有效性

定义　逻辑有效性

模态逻辑公式ϕ称为逻辑有效的,记作$\models \phi$,若对于任一模型$\mathcal{M}$都有$\mathcal{M} \models \phi$.

定理

命题逻辑系统L中的任一重言式在模态逻辑系统的代换实例都是逻辑有效的.

例子：下面公式是逻辑有效的:

1. $\neg\Box\phi \leftrightarrow \Diamond\neg\phi$
2. $(\Box(\phi \to \psi) \wedge \Box\phi) \to \Box\psi$.

作业

1. 考察Kripke模型$\mathcal{M} = (W, R, L)$，其中$W = \{a, b, c, d, e\}$; $R = \{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (d, e), (e, a)\}$，以及$L(a) = \{p\}, L(b) = \{p, q\}, L(c) = \{p, q\}, L(d) = \{q\}, L(e) = \emptyset$。
   - 画出$\mathcal{M}$的图
   - 确定下面的公式在哪些世界是真的
     (a) $\Box\neg p \wedge \Box\Box\neg p$
     (b) $\Diamond q \wedge \neg\Box q$
     (c) $\Diamond p \vee \Diamond q$
     (d) $\Box p \vee \Box\neg p$
     (e) $\Box(p \vee \neg p)$
2. 表明下面公式是逻辑有效的

   (a) $\Box(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$
   (b) $\Diamond(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$
   (c) $\Box T \leftrightarrow T$
   (d) $\Diamond T \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi)$

特殊的可达关系

可达关系R是世界集合W的二元关系，可以考虑特殊的二元关系.

1. 自反性: $\forall x \in W, (x,x) \in R$;
2. 对称性: $\forall x, y \in W$，若$(x,y) \in R$则$(y,x) \in R$;
3. 连续性: $\forall x \in W$, 存在$y \in W$使得$(x,y) \in R$;
4. 传递性: $\forall x, y, z \in W$, 若$(x,y) \in R, (y,z) \in R$则$(x,z) \in R$;
5. 欧式性: $\forall x, y, z \in W$，若$(x,y) \in R, (x,z) \in R$则$(y,z) \in R$.
6. 函数性: $\forall x \in W$ 存在唯一的$y \in W$使得$(x,y) \in R$;
7. 线性性:$\forall x, y, z \in W$, 若$(x,y) \in R$且$(x,z) \in R$则$(y,z) \in R$或$y = z$,或$(z,y) \in R$;
8. 全性: $\forall x, y \in W$有$(x,y) \in R$或$(y,x) \in R$;
9. 反对称性: $\forall x, y \in W$若$(x,y) \in R$且$(y,x) \in R$,则$x = y$.

特殊的可达关系

定理

设$\mathcal{M}=(W,R,L)$是一个模型,

1. 若R是自反的,则$\mathcal{M}\models\Box\phi\to\phi$.
2. 若R是传递的,则$\mathcal{M}\models\Box\phi\to\Box\Box\phi$;
3. 若R是对称的, 则$\mathcal{M}\models\phi\to\Box\Diamond\phi$;
4. 若R是连续的, 则$\mathcal{M}\models\Box\phi\to\Diamond\phi$;
5. 若R是欧式的,则$\mathcal{M}\models\Diamond\phi\to\Box\Diamond\phi$;
6. 若R是函数的, 则$\mathcal{M}\models\Box\phi\leftrightarrow\Diamond\phi$;
7. 若R是线性的,则$\mathcal{M}\models\Box(\phi\wedge\Box\phi\to\psi)\vee\Box(\psi\wedge\Box\psi\to\phi)$.

模态逻辑系统的推理理论

逻辑工程

逻辑工程是使逻辑工程化且满足新的应用.

- $\Box$ 以及$\Diamond$的含义

$\Box\phi$	$\Diamond\phi$	逻辑系统
ϕ必须是真的	ϕ可能是真的	必然逻辑
ϕ将总是真的	ϕ将来某时刻是真的	时态逻辑
ϕ应该是真的	ϕ允许是真的	应该逻辑
程序P任何执行后ϕ成立	程序P某个执行后ϕ成立	程序逻辑
Agent Q相信ϕ	Agent Q的所有相信都与ϕ相关	信任逻辑
Agent Q知道ϕ	Agent Q的所有知道都与ϕ相关	知道逻辑

特殊模态逻辑系统

1. 必然逻辑

4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	必然成立可推出必然的必然成立
5	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$	可能成立可推出必然可能成立
	$\Box\phi \to \phi$	必然成立可推出成立.

2. 时态逻辑

$\Box\phi \to \Box\Box\phi$ | 将来成立可推出将来的将来成立

3. 应该逻辑

D | $\Box\phi \to \Diamond\phi$ | 应该知道可推出允许知道

4. 信任逻辑

$\Box\phi \to \Diamond\phi$	相信你可以推出我的信任是与你相容的
$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	信任你可以推出信任信任你

5. 知道逻辑

$\mathcal{T}$	$\Box\phi \to \phi$	我知道你好$\to$ 你好
	$\Box\phi \to \Diamond\phi$	我知道你好$\to$ 我所知道的就是你好

公式有效性与可达关系

名称	公式模式	可达关系性质
T (自反公理)	$\Box\phi \to \phi$	自反的
B (对称公理)	$\phi \to \Box\Diamond\phi$	对称性
D(连续公理)	$\Box\phi \to \Diamond\phi$	Serial 连续性
4 (传递公理)	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	传递性
5(欧氏公理)	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$	欧氏性

Back
Close

一些特殊模态逻辑

1. 标准的模态逻辑$L(K)$

   L是基本模态逻辑公式集，且满足

   (a) L在命题逻辑下封闭

   (b) L 含有所有模式K的实例

   $K : \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$ 分配公理

   (c) L在必然规则下封闭，即若$\phi \in L$则$\Box\phi \in L$

   (d) L在子代换实例下封闭，即，若$\phi \in L$则ϕ的任何子代换实例也在L中.

2. $S5$模态逻辑$KT45 = K$ + 公理T+公理4+公理5

   (a) 公理T: $\Box\phi \to \phi$ (自反性)

   (b) 公理4: $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ (传递性)

   (c) 公理5: $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$ (欧式)

   用于进行知识推理：$\Box\phi$ 指知道ϕ。

3. $S4$ 模态逻辑$KT4$

(a) 公理T: $\Box\phi \to \phi$ (自反性)

(b) 公理4: $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ (传递性)

例子：ϕ代表一片代码类型，如

$$\begin{array}{rcl}\phi: \ \mathsf{Int} \times \mathsf{Int} & \to & \mathsf{Bool} \\ (n, m) & \mapsto & \{0, 1\}\end{array}$$

$\Box\phi$ 代表类型ϕ的留下代码。即，在世界x处这片代码不愿执行，留下将来执行.

- 公理T: $\Box\phi \to \phi$ 表明：留下的代码总可被执行
- 公理4: $\Box\phi \to \Box\Box\phi$ 表明: 留下的代码仍是留下代码不能毁掉.

$S4$可用于于程序的规范与代码的部分进化/演化.

作业

1. 证明公理B和公理5。
2. 定义可达关系R使得下面公式成立:
   (a) $\phi \to \Box\phi$
   (b) $\Box\bot$
   (c) $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$
3. 从自己研究中，找到（特殊）模态逻辑可以表达(描述)的例子.