

模态逻辑系统

作业参考答案

1. 考察Kripke模型 $M = (W, R, L)$, 其中:

$W = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (d, e), (e, a)\}$,

以及 $L(a) = \{p\}$, $L(b) = \{p, q\}$, $L(c) = \{p, q\}$, $L(d) = \{q\}$, $L(e) = \emptyset$.

1) 画出 M 的图

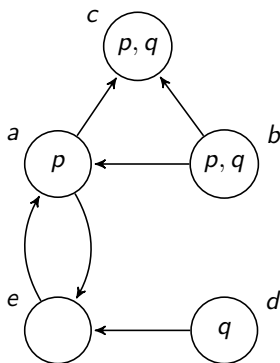


Figure: M 的图

2) 确定下面的公式那些世界是真的

Solution

- (a) $\Box \neg p \wedge \Box \Box \neg p$ $\{c\}$
- (b) $\Diamond q \wedge \neg \Box q$ $\{a, b\}$
- (c) $\Diamond p \vee \Diamond q$ $\{a, b, e\}$
- (d) $\Box p \vee \Box \neg p$ $\{b, c, d, e\}$
- (e) $\Box(p \vee \neg p)$ $\{a, b, c, d, e\}$

2.表明下面公式是逻辑有效的

$$(a) \Box(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$$

Solution

对任意模型 $\mathcal{M} = \langle W, R, L \rangle$ 的任意世界 $x \in W$, 若 $x \Vdash \Box(\phi \wedge \psi)$

当且仅当 $\forall y$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $y \Vdash \phi \wedge \psi$

当且仅当 $\forall y$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $y \Vdash \phi$ 且 $y \Vdash \psi$

当且仅当 $\forall y$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $y \Vdash \phi$ 并且

$\forall y$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $y \Vdash \psi$

当且仅当 $x \Vdash \Box\phi$ 且 $x \Vdash \Box\psi$

当且仅当 $x \Vdash \Box\phi \wedge \Box\psi$

2.表明下面公式是逻辑有效的

$$(b) \Diamond(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$$

Solution

对任意模型 $\mathcal{M} = \langle W, R, L \rangle$ 的任意世界 $x \in W$, 若 $x \Vdash \Diamond(\phi \vee \psi)$

当且仅当 $\exists y, (x, y) \in R$ 且 $y \Vdash \phi \vee \psi$

当且仅当 $\exists y, (x, y) \in R$ 且

$y \Vdash \phi$ 或 $y \Vdash \psi$

当且仅当 $\exists y, (x, y) \in R$ 且 $y \Vdash \phi$

或者

$\exists y, (x, y) \in R$ 且 $y \Vdash \psi$

当且仅当 $x \Vdash \Diamond\phi$ 或者 $x \Vdash \Diamond\psi$

当且仅当 $x \Vdash (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$

2.表明下面公式是逻辑有效的

(c) $\Box T \leftrightarrow T$

Solution

对任意模型 $\mathcal{M} = \langle W, R, L \rangle$ 的任意世界 $x \in W$,

- 1) 若 $x \Vdash \Box T$
 $\therefore x \Vdash T$ 永远成立
 $\therefore x \Vdash T$
- 2) 若 $x \Vdash T$
 $\therefore \forall y$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $y \Vdash T$
 $\therefore x \Vdash \Box T$

综上, $\Box T \leftrightarrow T$ 成立

2.表明下面公式是逻辑有效的

$$(d) \Diamond \top \rightarrow (\Box \phi \rightarrow \Diamond \phi)$$

Solution

对任意模型 $\mathcal{M} = \langle W, R, L \rangle$ 的任意世界 $x \in W$,

若 $x \Vdash \Diamond \top$

$\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且 $y \Vdash \top$

又若 $x \Vdash \Box \phi$

$\therefore \forall y, \text{若 } (x, y) \in R \text{ 则 } y \Vdash \phi$

$\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且 $y \Vdash \phi$

$\therefore x \Vdash \Diamond \phi$

$\therefore x \Vdash \Box \phi \rightarrow \Diamond \phi$

$\therefore x \Vdash \Diamond \top \rightarrow (\Box \phi \rightarrow \Diamond \phi)$

1. 证明公理B和公理5。

Proof.

1) 公理B:

若 $x \Vdash \phi$

$\forall y \in W$, 若 $(x, y) \in R$

$\therefore R$ 对称

$\therefore (y, x) \in R$

$\therefore \exists z, (y, z) \in R$ 且 $z \Vdash \phi$ (z 就是 x)

$\therefore y \Vdash \Diamond \phi$

$\therefore x \Vdash \Box \Diamond \phi$

2) 公理5:

$\forall x \in W$, 若 $x \Vdash \Diamond \phi$

$\therefore y, (x, y) \in R$ 且 $y \Vdash \phi$

$\therefore R$ 是欧式的

$\therefore (z, y) \in R$

$\therefore z \Vdash \Diamond \phi$

$\therefore x \Vdash \Box \Diamond \phi$



2. 定义可达关系 R 使得下面公式成立:

(a) $\phi \rightarrow \Box\phi$

R 是自反的且函数的.

Proof.

若 $x \Vdash \phi$

$\therefore x$ 是自反的

$\therefore (x, x) \in R$

又 $\therefore R$ 是函数的

$\therefore x$ 是唯一满足 $(x, x) \in R$ 的世界

$\therefore x \Vdash \Box\phi$



(b) $\Box\perp$

R 必为空集. 若不, 设 $(x, y) \in R$, 因为 $y \not\Vdash \perp$, 所以 $x \not\Vdash \Box\perp$.

(c) $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$
1) R 可以是函数的

Proof.

若 $x \models \Diamond\Box\phi$
 $\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且 $y \models \Box\phi$ (1)
 $\therefore \forall z, \text{若 } (y, z) \in R, \text{ 则 } z \models \phi$ (2)
 $\therefore R$ 是函数的
 \therefore (1) 中的 y 是唯一的, (2) 中的 z 必然存在
 $\therefore y \models \Diamond\phi$
 $\therefore x \models \Box\Diamond\phi$



(c) $\Diamond\Box\phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$
2) R 可以是对称的

Proof.

若 $x \models \Diamond\Box\phi$

$\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且 $y \models \Box\phi$

$\therefore R$ 对称

$\therefore (y, x) \in R$

$\forall z$, 若 $(y, z) \in R$ 则 $z \models \phi$, 所以 $x \models \phi$ (令 $z = x$)

$\forall p$, 若 $(x, p) \in R$, 则 $(p, x) \in R$, 则 $p \models \Diamond\phi$

$\therefore x \models \Box\Diamond\phi$



3.从自己的研究中，找到（特殊）模态逻辑可以表达（描述）的例子。
略.