

1/1

#### 华东师范大学 软硬件协同设计技术与应用教育部工程研究中心 URL—http://faculty.ecnu.edu.cn/chenyixiang

yxchen@sei.ecnu.edu.cn

## 模态逻辑系统

#### 陈仪香

MoE Engineering Center for Software/Hardware Co-Design Technology and Application Software Engineering Institute East China Normal University(ECNU) Shanghai, China

2014级研究生软件工程理论课程, 2014年10月



## 模态逻辑系统

- 模态逻辑系统语法
- 模态逻辑系统语义结构
- 模态逻辑推理理论



2/19







Back

## 模态逻辑系统的语法

- 法=命题逻辑系统语法+两个一元连接词□和◇。

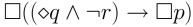
模态逻辑系统语法=命题逻辑系统语法+两个一元连接词□和◇。 定义 基本的modal逻辑

$$\phi ::= \bot |\top|p|\neg\phi|\phi \land \phi \mid \phi \lor \phi \mid \phi \to \phi \mid \Box \phi \mid \diamond \phi$$

其中p是原子公式.

- □ is read necessarily, ⋄ possibly in the logic that studies necessity and possibility, and
- $\bullet$   $\square$  is read agent Q knows,  $\diamond$  is read it is consistent with agent Q's knowledge that, in the logic of agent Q's knowledge.

例子: 
$$p \land \diamond (p \rightarrow \Box \neg r)$$





3/19





Back Close

# Parse 树



4/19







Back

### 模态逻辑系统的语义理论

#### 定义 Kripke 模型

模型M由三部分组成:

- W上的关系R, 称为可达关系,
- 标号函数 $L: W \to \mathcal{P}(Atoms)$ .

称公式 $\phi$ 在世界x为真,用符号x | →  $\phi$ 表之.

可达关系是模态逻辑系统的关键概念。 例子:



5/19







Class



#### 定义 真

设 $\mathcal{M}=(W,R,L)$ 是模态逻辑一个模型,  $x\in W$ ,  $\phi$ 是一个模态逻辑公式.称公式 $\phi$ 在世界x处为真,记作 $x\mid |-\phi,x\mid |-\phi$ 表示 $\phi$  在x处不真.

- $\bullet x \mid \vdash \top;$
- $\bullet x \not\vdash \bot;$
- $x \Vdash p$  当且仅当 $p \in L(x)$ ;
- $x \Vdash \neg \phi \text{ } \exists \text{ } \exists \text{ } x \not \vdash \phi;$
- $x \vdash \phi \lor \psi$  当且仅当 $x \vdash \phi \lor \psi$ ;
- $x \vdash \phi \land \psi$  当且仅当 $x \vdash \phi$  且 $x \vdash \psi$ ;
- $x \mid \vdash \phi \rightarrow \psi$  当且仅当若 $x \mid \vdash \phi \cup x \mid \vdash \psi$ ;
- $x \mid \vdash \Box \phi$ , 对于所有的世界 $y \in W$ ,只要满足R(x,y)就有 $y \mid \vdash \phi$ ;
- $x \mid \vdash \diamond \phi$ ,存在一个世界 $y \in W$ 使得R(x,y)且 $y \mid \vdash \phi$ ;

**44** 

4



### 满足性

#### 定义 模型满足公式

模型M满足公式 $\phi$ ,记作 $M \models \phi$ .

模型 $\mathcal{M}=(W,R,L)$ 满足模态逻辑公式 $\phi$ ,若对于任意一个世界 $x\in W$ 都有 $x\mid\vdash\phi$ .

例子:



7/19







Back

### 模态公式的等价性

#### 定义 模态公式的等价性

• 设 $\Gamma$ 是模态公式集, $\phi$ 是模态公式,模型 $\mathcal{M} = (W, R, L)$ . 称 $\Gamma$ 语义上推出 $\phi$ ,记作 $\Gamma \models_{\mathcal{M}} \phi$ ,或 $\Gamma \models \phi$ ,

若对于任一世界 $x \in W$ ,只要 $x \mid \vdash \Gamma$ 就有 $x \mid \vdash \phi$ 

其中 $x \models \Gamma$ 是指 $\forall \phi \in \Gamma, x \models \phi$ . 特别地 $\{\phi\} \models_{\mathcal{M}} \psi$ 简记为 $\phi \models \psi$ .

•  $\phi = \phi$  专 $\psi$  是语义等价的,记作 $\phi = \psi$ ,若对任一模型 $\mathcal{M}$ 都有 $\phi \models_{\mathcal{M}} \psi$  当且仅当 $\psi \models_{\mathcal{M}} \phi$ .

例子:  $\Box \phi \equiv \neg \diamond \neg \phi$ ,  $\phi \to \psi \equiv \neg \phi \lor \psi$ ;  $\phi \land \psi \equiv \neg (\phi \to \neg \psi)$ ,  $\Box (\phi \land \psi) \equiv \Box \phi \land \Box \psi$ ;  $\diamond (\phi \lor \psi) \equiv \diamond \phi \lor \diamond \psi$ ;  $\diamond \top \equiv \Box \phi \to \diamond \phi$ 



8/19







Back

### 逻辑有效性

#### 定义 逻辑有效性

模态逻辑公式 $\phi$ 称为逻辑有效的,记作 $\models \phi$ ,若对于任一模型M都有 $M \models \phi$ .

#### 定理

命题逻辑系统L中的任一重言式在模态逻辑系统的代换实例都是逻辑有效的.

例子: 下面公式是逻辑有效的:

- 1.  $\neg \Box \phi \leftrightarrow \diamond \neg \phi$
- 2.  $(\Box(\phi \to \psi) \land \Box\phi) \to \Box\psi$ .



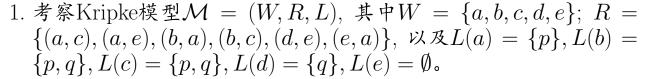
9/19





Back

### 作业



- 画出 M的图
- 确定下面的公式在哪些世界是真的
  - (a)  $\Box \neg p \land \Box \Box \neg p$
  - (b)  $\diamond q \land \neg \Box q$
  - (c)  $\diamond p \lor \diamond q$
  - (d)  $\Box p \vee \Box \neg p$
  - (e)  $\Box(p \lor \neg p)$
- 2. 表明下面公式是逻辑有效的
  - (a)  $\Box(\phi \land \psi) \leftrightarrow (\Box \phi \land \Box \psi)$
  - (b)  $\Diamond(\phi \lor \psi) \leftrightarrow (\Diamond \phi \lor \Diamond \psi)$
  - (c)  $\Box T \leftrightarrow T$
  - $(d) \diamond T \to (\Box \phi \to \diamond \phi)$



10/19

44

1



Back Close

## 特殊的可达关系

可达关系R是世界集合W的二元关系,可以考虑特殊的二元关系.

- 1. 自反性:  $\forall x \in W, (x, x) \in R$ ;
- 2. 对称性:  $\forall x, y \in W$ , 若 $(x, y) \in R$ 则 $(y, x) \in R$ ;
- 3. 连续性:  $\forall x \in W$ , 存在 $y \in W$ 使得 $(x, y) \in R$ ;
- 4. 传递性:  $\forall x, y, z \in W, \, \Xi(x, y) \in R, (y, z) \in R \text{则}(x, z) \in R$ ;
- 5. 欧式性:  $\forall x, y, z \in W$ , 若 $(x, y) \in R$ ,  $(x, z) \in R$ 则 $(y, z) \in R$ .
- 6. 函数性:  $\forall x \in W$  存在唯一的 $y \in W$ 使得 $(x, y) \in R$ ;
- 7. 线性性: $\forall x, y, z \in W$ , 若 $(x, y) \in R$ 且 $(x, z) \in R$ 则 $(y, z) \in R$ 或y = z,或 $(z, y) \in R$ ;
- 8. 全性:  $\forall x, y \in W$ 有 $(x, y) \in R$ 或 $(y, x) \in R$ ;
- 9. 反对称性:  $\forall x, y \in W \stackrel{.}{=} (x, y) \in R \mathbb{1}(y, x) \in R$ ,则x = y.



11/19





### 特殊的可达关系

#### 定理

设 $\mathcal{M} = (W, R, L)$ 是一个模型,

- 1.  $\exists R$ 是自反的,则 $\mathcal{M} \models \Box \phi \rightarrow \phi$ .
- 2.  $\exists R$ 是传递的,则 $\mathcal{M} \models \Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi$ ;
- 3. 若R是对称的,则 $\mathcal{M} \models \phi \rightarrow \Box \diamond \phi$ ;
- 4. 若R是连续的, 则 $\mathcal{M} \models \Box \phi \rightarrow \diamond \phi$ ;
- 5. 若R是欧式的,则 $\mathcal{M} \models \diamond \phi \rightarrow \Box \diamond \phi$ ;
- 6. 若R是函数的,则 $\mathcal{M} \models \Box \phi \leftrightarrow \diamond \phi$ ;
- 7. 若R是线性的,则 $\mathcal{M} \models \Box(\phi \land \Box \phi \rightarrow \psi) \lor \Box(\psi \land \Box \psi \rightarrow \phi)$ .



12/19







## 模态逻辑系统的推理理论



#### 逻辑工程

逻辑工程是使逻辑工程化且满足新的应用.

□以及◇的含义

$\Box \phi$	$ \diamond\phi $	逻辑系统
<ul><li> φ必须是真的</li></ul>	♦可能是真的	必然逻辑
$\phi$ 将总是真的	$\phi$ 将来某时刻是真的	时态逻辑
$\phi$ 应该是真的	$\phi$ 允许是真的	应该逻辑
程序 $P$ 任何执行后 $\phi$ 成立	程序 $P$ 某子程序执行后 $\phi$ 成立	程序逻辑
$Agent Q$ 相信 $\phi$	$Agent Q$ 的所有相信都与 $\phi$ 相关	信任逻辑
Agent $Q$ 知道 $\phi$	$Agent Q$ 的所有知道都与 $\phi$ 相关	知道逻辑

13/19





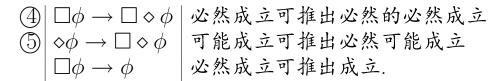
Back

## 特殊模态逻辑系统

A CHISTAN OF THE CHIS

14/19

1. 必然逻辑



2. 时态逻辑

$$\Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi |$$
 将来成立可推出将来的将来成立

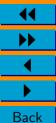
3. 应该逻辑

$$D \mid \Box \phi \rightarrow \diamond \phi \mid$$
 应该知道可推出允许知道

4. 信任逻辑

$$\Box \phi \rightarrow \diamond \phi$$
 相信你可以推出我的信任是与你相容的  $\Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi$  信任你可以推出信任信任你

5. 知道逻辑



 $\boxed{ } \boxed{ } \boxed{ } \boxed{ } \boxed{ } \phi \rightarrow \phi \ | \$  我知道你好 $\rightarrow$  你好 $\boxed{ } \boxed{ } \phi \rightarrow \diamond \phi \ | \$  我知道你好 $\rightarrow$  我所知道的就是你好



15/19



Back Close

## 公式有效性与可达关系

名称	公式模式	可达关系性质
T(自反公理)	$\Box \phi \to \phi$	自反的
B (对称公理)	$\phi \to \Box \diamond \phi$	对称性
D(连续公理)	$\Box \phi \to \diamond \phi$	Serial 连续性
4 (传递公理)	$\Box \phi \to \Box \Box \phi$	传递性
5(欧氏公理)	$\diamond \phi \to \Box \diamond \phi$	欧氏性



16/19







Back

### 一些特殊模态逻辑



17/19

1. 标准的模态逻辑L(K)

L是基本模态逻辑公式集,且满足

- (a) L在命题逻辑下封闭
- (b) L 含有所有模式K的实例  $K: \Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$  分配公理
- (c) L在必然规则下封闭,即若 $\phi \in L$ 则 $\square \phi \in L$
- (d) L在子代换实例下封闭,即,若 $\phi \in L$ 则 $\phi$ 的任何子代换实例也在L中.
- 2. S5模态逻辑KT45 = K + 公理T + 公理4 + 公理5
  - (a) 公理 $T: \Box \phi \to \phi$  (自反性)
  - (b) 公理4:  $\Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi$  (传递性)
  - (c) 公理5:  $\diamond \phi \rightarrow \Box \diamond \phi$  (欧式)

用于进行知识推理:  $\Box \phi$  指知道 $\phi$ 。







Back

#### 3. S4 模态逻辑KT4

- (a) 公理 $T: \Box \phi \rightarrow \phi$  (自反性)
- (b) 公理4:  $\Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi$  (传递性)

例子: ∅代表一片代码类型, 如

$$\phi: \operatorname{Int} \times \operatorname{Int} \to \operatorname{Bool}$$
$$(n, m) \mapsto \{0, 1\}$$

 $\square \phi$  代表类型 $\phi$ 的留下代码。即,在世界x处这片代码不愿执行,留下将来执行.

- 公理 $T: \Box \phi \rightarrow \phi$  表明: 留下的代码总可被执行
- 公理4:  $\Box \phi \rightarrow \Box \Box \phi$  表明: 留下的代码仍是留下代码不能毁掉.

S4可用于于程序的规范与代码的部分进化/演化.



18/19



### 作业



19/19

- 1. 证明公理B和公理5.
- 2. 定义可达关系R使得下面公式成立:
  - (a)  $\phi \to \Box \phi$
  - (b)  $\Box \bot$
  - (c)  $\Diamond \Box \phi \rightarrow \Box \Diamond \phi$
- 3. 从自己研究中,找到(特殊)模态逻辑可以表达(描述)的例子.





Back