

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

1η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 30/11/2021

Ασκηση 1: Τηλεμεταφορές!

Όπως ίσως γνωρίζετε, υπάρχουν άπειρα παράλληλα σύμπαντα. Σε N από αυτά, ο Morty, ο εγγονός του Rick, έκλεψε το portal gun του παππού του για να εντυπωσιάσει την Jessica. Όμως, δίχως να το καταλάβει, τηλεμεταφέρθηκε σε ένα άλλο παράλληλο σύμπαν! Για την ακρίβεια, γνωρίζουμε ότι ο M_i , δηλ. ο Morty του σύμπαντος i, τηλεμεταφέρθηκε στο σύμπαν $c_i \in \{1,\ldots,N\}$. Μετά από όλες αυτές τις ατυχείς τηλεμεταφορές, συνεχίζουμε να έχουμε έναν και μόνο Morty σε καθένα από τα N παράλληλα σύμπαντα (δηλ. η ακολουθία $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_N)$ αποτελεί μια μετάθεση των στοιχείων του $\{1,\ldots,N\}$). Για καλή τους τύχη, έμειναν ανοιχτά M portals μεταξύ μερικών συμπάντων τα οποία δύο Mortys μπορούν να χρησιμοποιήσουν για να ανταλλάξουν σύμπαντα. Κάθε ανοιχτό portal j συνδέει δύο παράλληλα σύμπαντα a_j και b_j , έχει πλάτος w_j , και μπορεί να χρησιμοποιηθεί απεριόριστες φορές. Οι Mortys πρέπει να επιστρέψουν στα σωστά σύμπαντα (δηλ. να επαναφέρουν την ακολουθία \vec{c} στην αρχική ταυτοτική της μορφή) πριν το καταλάβουν οι Ricks! Οι Mortys είναι γκρινιάρηδες σε όλα τα N σύμπαντα, και δεν θέλουν να στριμωχτούν σε ανοιχτά portals που είναι στενά.

Να γράψετε ένα πρόγραμμα που βοηθάει τους Mortys να επιστρέψουν άνετα στα (σωστά) σύμπαντά τους, δηλ. να επαναφέρουν την ακολουθία \vec{c} στην αρχική ταυτοτική της μορφή, υπολογίζοντας το μέγιστο πλάτος του στενότερου portal που χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν για αυτό τον σκοπό.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας αρχικά θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακεραίους, το πλήθος N των παράλληλων συμπάντων και το πλήθος M των portals που έχουν μείνει ανοικτά. Στην επόμενη γραμμή, δίνεται μια μετάθεση $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_N)$ του συνόλου $\{1,\ldots,N\}$, στην οποία το στοιχείο c_i δηλώνει το παράλληλο σύμπαν στο οποίο κατέληξε ο Morty του i-οστού σύμπαντος. Στις M επόμενες γραμμές, δίνονται M τριάδες φυσικών αριθμών που περιγράφουν τα portals που έχουν μείνει ανοικτά. Συγκεκριμένα, κάθε ανοικτό portal j περιγράφεται από τρεις φυσικούς αριθμούς, τα σύμπαντα a_j και b_j που ενώνει, και το πλάτος του w_j .

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output ένα φυσικό αριθμό, που εκφράζει το μέγιστο πλάτος του στενότερου portal που χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί, ώστε η ακολουθία εισόδου $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_N)$ να επανέλθει στην αρχική ταυτοτική της μορφή 1 . Σε όλα τα στιγμιότυπα εισόδου, θα είναι εφικτό να επανέλθει η ακολουθία εισόδου $\vec{c}=(c_1,\ldots,c_N)$ σε ταυτοτική μορφή.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$1 \le N \le 10^5$	4 4	73
$1 \le M \le 10^5$	3 2 1 4	
$1 \le a_j \ne b_j \le N$	1 2 73	
$1 \le w_j \le 10^9$	1 3 42	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	2 4 17	
Όριο μνήμης: 64 ΜΒ.	2 3 100	

Bonus: Θα υπάρχουν testcases όπου $10^5 < N, M \le 10^6$ και τα portals θα δίνονται ταξινομημένα ως προς το πλάτος τους w_i .

¹ Εξήγηση Παραδείγματος: Οι Mortys μπορούν να επιστρέψουν στα σωστά σύμπαντα χρησιμοποιώντας portals πλάτους τουλάχιστον 73 ως εξής: Οι M_1 και M_2 ανταλλάσσουν σύμπαντα χρησιμοποιώντας το portal 4 (πλάτους 100). Οι M_1 και M_3 ανταλλάσσουν σύμπαντα χρησιμοποιώντας το portal 1 (πλάτους 73). Τέλος, οι M_2 και M_3 ανταλλάσσουν σύμπαντα χρησιμοποιώντας το portal 4. Δεν είναι δυνατόν να επιστρέψουν όλοι οι Mortys στα σωστά σύμπαντα, αν χρησιμοποιήσουμε μόνο το portal 4, αφού σε αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατή η επιστροφή του M_1 στο σύμπαν 1 (από το σύμπαν 3) και του M_3 στο σύμπαν 3 (από το σύμπαν 1).

Άσκηση 2: Καταστήματα με Χριστουγεννιάτικα

Ενόψει των εορτών, σχεδιάζετε να ανοίξετε καταστήματα με είδη Χριστουγεννιάτικου στολισμού στην κεντρική λεωφόρο της χώρας των Αλγορίθμων. Η κεντρική λεωφόρος, ένα από τα αξιοθέατα της χώρας των Αλγορίθμων, εκτείνεται σε μια μεγάλη ευθεία, και κατά μήκος της, υπάρχουν πολυτελείς (πολυ)κατοικίες, που αριθμούνται από 1 μέχρι N. Έχετε κάνει την έρευνά σας και γνωρίζεται το πλήθος των κατοίκων p_i κάθε κατοικίας i. Τα προβλήματα στην εφοδιαστική αλυσίδα, λόγω covid, σας επιτρέπουν να απευθυνθείτε και να εξυπηρετήσετε K κατοίκους το πολύ. Στην ιδανική περίπτωση, θέλετε να εξυπηρετήσετε ακριβώς K κατοίκους, μεγιστοποιώντας το αναμενόμενο κέρδος σας. Ο προϋπολογισμός σας επιτρέπει το άνοιγμα ενός ή δύο καταστημάτων, καθένα από τα οποία θα εξυπηρετεί ένα διάστημα διαδοχικών κατοικιών. Το σημαντικότερο έξοδο αφορά στη διαφημιστική σας καμπάνια, το κόστος της οποίας εξαρτάται από το πλήθος των κατοικιών στις οποίες θα απευθυνθείτε.

Έχοντας λοιπόν στη διάθεσή σας το πλήθος των κατοίκων p_1, \ldots, p_N των (πολυ)κατοικιών, θέλετε να διαπιστώσετε αν υπάρχουν ένα ή δύο μη επικαλυπτόμενα διαστήματα διαδοχικών κατοικιών με άθροισμα κατοίκων ίσο με K. Στην περίπτωση που υπάρχουν τέτοια διαστήματα, θέλετε να υπολογίσετε το ελάχιστο συνολικό μήκος τους, ώστε να ελαχιστοποιήσετε το κόστος της διαφημιστικής σας καμπάνιας.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα αρχικά θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακεραίους, το πλήθος N των κατοικιών και το πλήθος K των κατοίκων που θέλετε να εξυπηρετήσετε. Στην επόμενη γραμμή, θα δίνονται N φυσικοί αριθμοί p_1,\ldots,p_N , χωρισμένοι με ένα κενό μεταξύ τους. Ο φυσικός p_i αντιστοιχεί στο πλήθος των κατοίκων της (πολυ)κατοικίας i.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output έναν ακέραιο, το ελάχιστο συνολικό μήκος δύο το πολύ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων διαδοχικών κατοικιών με άθροισμα κατοίκων ίσο με K. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν τέτοια διαστήματα, το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει -1.

Περιορισμοί:	Παραδείγματα Εισόδου:	Παραδείγματα Εξόδου:
$1 \le N \le 2 \cdot 10^4$	6 9	3
$0 \le p_i \le K \le 10^6$ Όριο γρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	1 1 3 7 3 3	
, ,,,		
Όριο μνήμης: 64 ΜΒ.	5 15	-1
	10 6 11 7 3	
	4 10	1
	10 6 1 4 3	