Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se estudia la gestión del inventario de varios artículos comercializados en una farmacia ubicada en la ciudad de Huelva.

En concreto, se recogen las compras, ventas y las cantidades en inventario de tres productos distribuidos por la farmacia durante el año 2022. También, se determinan los costes asociados con la gestión del inventario realizada por la empresa farmacéutica para esos productos.

Posteriormente, se estudia cómo sería el comportamiento del nivel de inventario de esos productos si se hubiese considerado políticas más eficientes en el control del sistema de inventario. Se comprueba que el uso de estas nuevas políticas hubiera supuesto una mejora económica en la gestión del inventario de estos productos.

Palabras clave: *Sistemas de inventario – Costes relacionados – Modelos de cantidad económica de pedido – . . ..*

Abstract

In this paper we study the management of the inventory of several items those marketed in a pharmacy located in the city of Huelva.

Specifically, purchases, sales and amounts in inventory of three products distributed by the pharmacy during the year 2022. Also, the costs associated with the inventory management carried out by the pharmaceutical company to those products.

Subsequently, we study how the behavior of the level would be of inventory of those products if policies had been considered more efficient in the control of the inventory system. Is checked that the use of these new policies would have been an improvement Economic in the management of the inventory of these products.

Keywords: *Inventory systems – Related costs – Economic Order Quantity Models – . . . .*

Contenido

Introducción

Las organizaciones iniciaron un gran proceso de expansión en el momento en que las máquinas comenzaron a sustituir la mano de obra que se necesitaba en las empresas e industrias, y los sistemas de transporte y comunicación empezaron a desarrollarse. Esto hizo aumentar la complejidad de la gestión en las empresas.

En los últimos años se detecta un cierto crecimiento de las organizaciones en tamaño y complejidad, aumentando la división del trabajo y la separación de responsabilidades administrativas. A medida que aumenta la complejidad, también es más difícil asignar recursos a las diferentes actividades que deben realizarse en la empresa de manera efectiva. Por tanto, se debe confiar la gestión de estas actividades a distintos administradores, los cuales pueden tener diferentes opiniones y plantear diferentes objetivos, que podrían ser en ocasiones contrapuestos. Estos problemas de toma de decisiones son analizados por la metodología y las técnicas propuestas por la Investigación Operativa (IO), la cual intenta ayudar a las organizaciones a encontrar la mejor política que responda a los intereses generales de la empresa. El estudio de la realización de las actividades empresariales de la forma más eficiente posible tiene sus raíces en el intento de aplicar el método científico a la gestión empresarial. Sin embargo, su inicio como actividad formal se atribuye a ciertos servicios militares que se prestaron durante la Segunda Guerra Mundial. Debido a la necesidad de asignar recursos de manera efectiva en las maniobras militares, se llamó a grupos de científicos expertos en diferentes áreas de conocimiento para aplicar nuevos métodos y técnicas a problemas estratégicos y tácticos. Estos grupos fueron los primeros equipos de investigación de operaciones. A partir de este hecho, se puede decir que estos métodos provocaron un cambio radical en la forma de abordar los problemas de decisión.

Después de la Segunda Guerra Mundial y gracias a su éxito, la Investigación Operativa (IO) comenzó a ser utilizada fuera del ámbito militar. La amplia variedad de técnicas y procedimientos que ofrece la IO ha contribuido a su desarrollo, incluyendo en ella diferentes materias o campos de conocimiento como son la Programación Matemática, la Teoría de Colas, la Planificación y Secuencias de Tareas y la Teoría de Inventarios.

El control y gestión de los inventarios aborda la investigación sobre las operaciones de una organización en relación con la renovación de productos y el mantenimiento del stock de los mismos, para atender futuras demandas de los clientes. Los modelos de gestión de stock de productos tienen en cuenta los procesos de producción, manufactura, transporte y comercialización de productos. Esta materia utiliza el método científico para explorar problemas, construir modelos matemáticos que permitan encontrar políticas óptimas de inventario, y perseguir objetivos congruentes con los objetivos globales de la empresa u organización. La meta de la gestión de inventarios es identificar la mejor estrategia de acción posible y proporcionar conclusiones claras para el tomador de decisiones o persona responsable del control de los inventarios. Por último, conviene resaltar que la gestión de stocks ha tenido un impacto importante en la mejora de la eficiencia de muchas organizaciones en todo el mundo, contribuyendo significativamente al aumento de la productividad de las mismas.

En esta memoria se estudia el control del inventario de varios productos que son comercializados por una farmacia localizada en Huelva capital.

En el primer capítulo se recogen los conceptos básicos y fundamentales de la gestión del inventario, describiendo los principales componentes que intervienen en la evolución de los inventarios. Así, se presentan las propiedades o características de las demandas, las reposiciones y los costos que intervienen en la gestión de los inventarios.

En el segundo capítulo se estudian los principales modelos clásicos de gestión de stocks, que son el Sistema de Tamaño del Lote, el Sistema de Nivel de Inventario el Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, presentando también el caso de unidades discretas para dichos sistemas.

En el tercer capítulo se muestra la evolución del inventario de tres artículos durante el año 2022. Se determinan los costes relacionados con la gestión del inventario de dichos artículos y se presenta un análisis de la gestión de inventarios realizado por los responsables de la farmacia.

Por último, en el cuarto capítulo se estudia cómo sería la gestión adecuada del inventario de estos artículos, si se hubiesen aplicado para esos tres productos las políticas óptimas obtenidas siguiendo los modelos de gestión de stocks descritos en el segundo capítulo.

1

Fundamentos de la gestión de inventarios

La Teoría de Inventarios recoge una gran cantidad de modelos matemáticos que pueden ayudar a las organizaciones en la toma de decisiones, con el objetivo de minimizar el coste relacionado con la gestión del inventario o maximizar el mayor beneficio posible si consideramos los ingresos obtenidos al vender los productos.

Estos modelos intentan administrar y gestionar el inventario de la manera más óptima posible. Para estudiar las características principales de estos modelos es necesario tener en cuenta algunos conceptos importantes relacionados con el control de inventarios.

1.1. Conceptos básicos en el control de los inventarios

Las componentes fundamentales que influyen en la gestión y control de los inventarios son las **demandas**, **reposiciones**, los **costos** y las **restricciones**.

- Las **demandas** son las cantidades requeridas por los clientes o consumidores de los productos de cierta organización.
- Las **reposiciones** son las cantidades que cierta organización ordena a los proveedores para reponer el inventario de los productos que comercializa.
- Los **costes** representan las cantidades monetarias que deben soportar las organizaciones en relación con el mantenimiento y la gestión de los inventarios.
- Las **restricciones** son las condiciones administrativas, físicas o económicas que restringen o limitan las demandas, reposiciones y/o costos.

Otros conceptos básicos usados en la gestión de inventarios son los siguientes:

- El **periodo de gestión o ciclo del inventario** (t) es el tiempo transcurrido entre dos pedidos consecutivos a los proveedores para la reposición del inventario. Puede estar fijado o no.

- El **nivel inicial del inventario** (S) es la cantidad en stock de cierto producto al comienzo del ciclo del inventario.
- En cada organización y para cada producto existe un **punto de pedido o nivel de reposición** (s), el cual es el nivel de stock del producto que indica cuando debe solicitarse la reposición.
- El **tamaño del lote** (q) representa la cantidad solicitada para reponer el inventario. En general, $s + q = S$.
- El **periodo de retardo** (L) es el tiempo que transcurre entre que se solicita una reposición hasta que esta llega a la empresa u organización.
- El **periodo de reposición** (t') es el tiempo que transcurre entre que se recibe la reposición y esta se añade al inventario, de forma que los productos están listos para ser vendidos.
- El **periodo de revisión** (w) Es el tiempo que transcurre entre dos revisiones consecutivas del estado del inventario.

1.2. Características de las demandas

La demanda no se puede controlar directamente, pero se puede obtener información sobre ella. El tamaño de la demanda puede ser tanto un valor continuo como un valor discreto. Si es la misma de periodo en periodo, se dirá que la demanda es constante. En caso contrario, se dirá que la demanda es variable. En relación con la demanda, se debe considerar:

x = tamaño de la demanda en el periodo de gestión t.
$r = \frac{x}{t}$ razón de demanda, esto es, demanda por unidad de tiempo.

En general, los modelos de gestión de inventarios se clasifican en dos grandes grupos. Se puede hablar de **sistemas determinísticos**, en los que la demanda es conocida, ya sea constante o variable en el tiempo, y de **sistemas probabilísticos**, donde la demanda es desconocida, pero se supone que sigue una cierta distribución de probabilidad. Según la política de inventario que se decida seguir, cada uno de estos grupos se subdivide en otras secciones.
En sistemas determinísticos, x (o r) debe ser un valor fijado. Sin embargo, en sistemas probabilísticos, x (o r) es una variable aleatoria discreta o continua con su función de probabilidad o su función de densidad correspondiente. En este último caso, se tiene:

$\mu = E(x)$ = demanda media
$E(r) = \frac{E(x)}{t}$ = razón de demanda media

Modelos o patrones de demanda

Los modelos o patrones de demanda representan distintas formas o maneras de extraer el producto del inventario para satisfacer la demanda de los clientes.

El modelo o patrón potencial de demanda viene dado por $I(T) = S - x\sqrt[n]{\frac{T}{t}}$ donde:

t es el periodo de gestión o ciclo del inventario.
$I(T)$ es la cantidad de stock en el instante T, $\forall T \in [0,t]$.
S es el nivel de inventario al comienzo del periodo t.
x es el tamaño de la demanda en el periodo t.
n es el índice del modelo o patrón de demanda.

Se distinguen distintos casos según los valores de n:

- $n = 1$: En este caso se tiene un patrón de demanda uniforme con $I(T) = S - x\frac{T}{t} = S - rT$.
- $n = \infty$: En este caso se tiene un patrón de demanda donde la demanda está totalmente concentrada al inicio del periodo. Así, se obtiene $I(T) = S - x(\frac{T}{t})^0 = S - x$.
- $n = 0$: En este caso se tiene que la demanda está totalmente concentrada al final del periodo, con $I(T) = S - x(\frac{T}{t})^\infty = S$ pues $0 < T < t$ luego $\frac{T}{t} < 1$.
- $n < 1$: En este caso se tiene una demanda más concentrada al final del periodo.
- $n > 1$: En este caso se tiene una demanda más concentrada al principio del periodo.

1.3. Características de las reposiciones

Las reposiciones son las cantidades solicitadas a los proveedores o al departamento de producción de la empresa para reponer el stock de productos. Un buen control de inventarios debe determinar que cantidad debe solicitarse de cada producto para reponer el stock de los mismos. Dichas cantidades pueden ser constantes o variables, dependiendo de la política de gestión de inventario que se aplique para controlar el inventario. Lógicamente, si el producto tiene una gran demanda, la cantidad a pedir debe ser alta para poder cubrir dicha demanda. Pero no puede ser muy grande porque se dispararía el coste de mantenimiento.

Modelos o patrones de reposición

Los modelos o patrones de reposición representan distintas formas de añadir el producto al inventario para aumentar el nivel de stock del producto. El modelo o patrón potencial de reposición viene dado por $I(T) = s + q\sqrt[m]{\frac{T}{t'}}$ donde:

t' es el periodo de reposición.
$I(T)$ es la cantidad de stock en el instante T, $\forall T \in [0,t']$.

s es el punto de pedido o reposición.
q es el tamaño del lote o cantidad solicitada para reponer.
m es el índice del modelo o patrón de reposición.
$p = \frac{q}{t'}$ es la razón de reposición .

Se distinguen ahora distintos casos según los valores de m:

- $m = 1$: En este caso se reponen p unidades cada t unidades de tiempo. Se tiene $I(T) = s + q\frac{T}{t'} = s + pT$.
- $m = \infty$: En este caso la reposición es instantánea, el periodo de reposición es $t' = 0$ y $p = \infty$. Se tiene $I(T) = s + q = S$.
- $m = 0$: En este caso se tiene $I(T) = s + q(\frac{T}{t'})^{\infty} = s$ pues $\frac{T}{t'} < 1$.
- $m < 1$: En este caso, al principio del periodo de reposición se añade poca cantidad al inventario y, posteriormente, la cantidad a añadir va aumentando a medida que pasa el tiempo. Por todo esto, se dice que la reposición está más concentrada al final del periodo.
- $m > 1$: En este caso, la reposición se concentra más al principio del periodo. Por tanto, cada vez se va reponiendo menos.

También se puede dar una reposición escalonada, es decir, se repone el inventario en ciertos instantes de tiempo.

1.4. Propiedades de los costes

En la metodología usada para el desarrollo de estos modelos deben considerarse los costos que intervienen en ellos. Así, se deben tener en cuenta los siguientes costos generales:

1. **Costo de mantenimiento del inventario** (C_1): En inglés *holding cost.* Representa el costo relacionado con el lugar de almacenamiento de los productos. Así, aquí se incluye el costo de mantenimiento de los artículos, de realizar o de invertir en inventarios, el costo de caída en desuso de los artículos, el costo de seguros, limpieza, etc. Es decir, el coste que requiere el mantenimiento de los artículos mientras están almacenados.
2. **Costo de incurrir en escasez o rotura** (C_2): En inglés *shortage cost.* Recoge el costo relacionado con una falta o escasez de cierto artículo. En esta situación se tienen los dos casos siguientes:
   - Costo de rotura recuperable (*backlogging cost*): Este costo se da cuando la organización presenta escasez de un cierto producto demandado, pero no se pierde la venta ya que el cliente está dispuesto a esperar a que se reponga de nuevo el producto.
   - Costo de ventas perdidas (*lost sales cost*): Este costo se presenta al tener rotura o escasez, pero en este caso el cliente no está dispuesto a esperar a

la llegada de nuevos artículos del producto. Es decir, se pierde la venta. Por tanto este coste incluye costos de ventas perdidas o de pérdidas de buenos clientes entre otros.

3. **Costo de reposición del inventario** (C_3): En inglés *ordering cost*. Representa el costo relacionado con la reposición de artículos. Es decir, el coste de realizar un pedido a los proveedores incluyendo el coste de transporte, de impuestos, de seguros, entre otros.

En algunos sistemas también se considera el costo de compra (*purchasing cost*), es decir, el costo de la cantidad solicitada para reponer el producto.

Para el cálculo de los costes anteriores se necesitan ciertos parámetros que se usarán para obtener el costo total que sufre la organización. Estos parámetros son los siguientes:

c_1 : representa el costo unitario de mantenimiento del producto en el inventario. Se mide en euros por unidad y tiempo. Es decir, con dimensión $\frac{[\$]}{[Q][T]}$.
c_2 : representa el costo unitario de rotura. En el caso de presentar roturas recuperables, se mide en euros por unidad y tiempo, es decir, con dimensión $\frac{[\$]}{[Q][T]}$. En el caso de tener ventas perdidas se mide en euros por unidad, con dimensión $\frac{[\$]}{[Q]}$.
c_3 : representa el costo unitario de reposición. Se mide en euros por reposición, esto es, tiene por dimensión [\$].

Todo esto nos lleva a poder definir el costo total que tiene la organización o empresa relacionado con la gestión de inventarios como la suma de los costes anteriores, esto es: $C(t) = C_1 + C_2 + C_3 = c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3$, donde I_1 representa la cantidad media disponible en el inventario de cierto producto, I_2 representa la cantidad media de rotura, e I_3 es el número medio de reposiciones.

En relación con la gestión de inventarios, se pueden encontrar varios **tipos de sistemas de inventarios**, los cuales se clasifican en función de los costes que intervienen en la gestión. Por ejemplo, si un sistema no permite la existencia de roturas, porque siempre tiene stock suficiente, se tiene un modelo donde el costo por roturas (C_2) no interviene, ya que es nulo. Por tanto, se tendría un sistema del tipo (1,3), donde solo intervienen los costos C_1 y C_3. Los posibles tipos de sistemas son (1,2), (1,3), (2,3) y (1,2,3). Ejemplos de sistemas de tipo (1,2), donde no existe el costo de reposición son las delegaciones o franquicias, las cuales no pagan a sus franquiciadores por reponer la mercancía. Ejemplos de sistemas del tipo (2,3) son aquellas empresas dedicadas a la venta por catálogos o muestrarios, es decir, no tienen inventario. Por último, los sistemas tipo (1,2,3) son aquellos en los que intervienen los tres costes generales.

Se plantea o formula el problema de inventario con el objetivo de buscar la forma más eficiente de gestionar y controlar un inventario. Generalmente, se fija un criterio de tipo económico (ya sea minimizar costes o maximizar beneficios), y se busca la mejor forma de gestionar el inventario con el fin de optimizar el criterio deseado. Los modelos que se estudiarán posteriormente en el siguiente capítulo se centran en buscar la opción que minimice el coste total del sistema de inventario.

1.5. Políticas de inventario

Las políticas de inventario se definen como las distintas estrategias que pueden seguirse para resolver un problema de inventario. Se utilizan para obtener la mejor decisión que optimice la gestión del inventario. Para desarrollar estas estrategias óptimas se consideran las decisiones en base a ciertas variables que permiten controlar el sistema. Estas variables de control son el tiempo y la cantidad. Es decir, las organizaciones se deben preguntar cuándo debe reponerse el inventario y qué cantidad se debe pedir. Con las variables definidas al comienzo de este capítulo, se puede elegir una política de inventario concreta, teniendo como posibilidades las políticas (s,q), (t,S), (s,S) y (t,q).

La política (s,q) busca reponer el inventario cuando el nivel de stock sea menor o igual que s, y se repone siempre q unidades de producto. La política (t,S) busca reponer el inventario cada t unidades de tiempo, y se repone la cantidad necesaria para subir el nivel del stock a S unidades de producto. La política (s,S) busca reponer el inventario cuando el nivel de stock sea menor o igual que s, y se repone la cantidad necesaria para obtener S unidades de producto en stock. La política (t,q) busca reponer el inventario cada t unidades de tiempo, y se repone q unidades de producto.

Si el periodo de retardo (L) no es nulo, se pueden considerar también las políticas (z,q), (t,Z) y (z,Z), teniendo en cuenta que $z = s + R$, $Z = S + R$ donde R representa la demanda total que ha ocurrido durante el periodo de retardo. En sistemas determinísticos, los sistemas con retardo son equivalentes a sistemas sin retardo, ya que se conoce con certeza la demanda R. Además, en ciertos sistemas de inventario, alguna de las variables que intervienen pueden estar fijadas de antemano. Si, por ejemplo, se usa una política (s,q) con el punto de reposición fijado, este deja de ser una variable y la política se representa como (s_f,q).

En el siguiente capítulo se recogen los principales modelos clásicos de gestión de inventarios para demanda determinística.

2

Modelos clásicos de la gestión de stocks

En este capítulo se desarrolla el Modelo de cantidad económica de pedido (economic ordering quantity model), el Modelo de Nivel de Inventario (order level model) y el Modelo de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario (lot-size and order-level model). Para ambos modelos, se estudia también el caso de unidades discretas.

2.1. Sistema de tamaño del lote

El primer análisis conocido de un sistema de inventario fue desarrollado por Ford Whitman Harris en 1915. Fue el primero en desarrollar la fórmula clásica de tamaño del lote:

$$q_o = \sqrt{\frac{2c_3r}{c_1}}$$

que se estudiará a continuación, donde:

q_0 = tamaño del lote óptimo
r = razón de demanda
c_1 = coste unitario de mantenimiento
c_3 = coste de reposición

Este sistema se conoce también como modelo de la cantidad económica de pedido (EOQ, en inglés).

Es un sistema del tipo (1,3), pues el costo de rotura es nulo. Las características de este sistema son las siguientes:

1. Se tiene una razón de demanda determinística con razón r conocida y constante.
2. La variable a determinar es el tamaño del lote (q).
3. Se trabaja con una reposición instantánea, es decir, la razón de reposición es $p = \infty$.

4. El punto de reposición es $s = 0$. Por tanto, no se permiten roturas.
5. El tiempo de retardo es nulo, es decir, $L = 0$.
6. El patrón de demanda es uniforme ($n = 1$).
7. El periodo de gestión o ciclo del inventario es t, con $t = \frac{q}{r}$.

Consecuentemente, se sigue una política (s_f, q), donde el punto de reposición s está fijado y es $s_f = 0$.

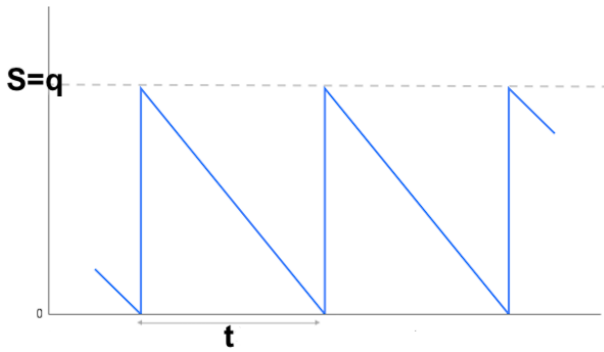

Figura 2.1. Movimiento del inventario en el sistema de tamaño del lote

En la Figura 2.1 se representa el movimiento del inventario a lo largo del tiempo, es decir, de $I(T) = S - rT$, con $T \in [0, t]$. Teniendo en cuenta la gráfica del nivel de inventario, podemos calcular lo siguiente:

- La cantidad media en stock:

$$I_1 = \frac{\text{área dentro del triángulo}}{t} = \frac{qt}{2t} = \frac{q}{2}$$

- El número medio de reposiciones es $I_3 = \frac{1}{t} = \frac{r}{q}$, ya que la cantidad solicitada para reponer el inventario q debe coincidir con la cantidad demandada rt.

El costo total es $C(q) = C_1 + C_2 + C_3$ donde:

- $C_1 = c_1 I_1 = c_1 \frac{q}{2}$
- $C_2 = c_2 I_2 = 0$ pues I_2 (cantidad media de rotura) $= 0$
- $C_3 = c_3 I_3 = c_3 \frac{r}{q}$

Por lo tanto el costo total viene dado por $C(q) = c_1 \frac{q}{2} + c_3 \frac{r}{q}$, y el problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \qquad C(q) = c_1\frac{q}{2} + c_3\frac{r}{q} \tag{2.1}$$

$$\text{sujeto a} \qquad q > 0 \tag{2.2}$$

donde c_1, c_3 y r son parámetros conocidos del sistema, y q es la variable de decisión (tamaño del lote).

Para resolver el sistema, se iguala a cero la derivada del costo:

$$C'(q) = 0 \iff \frac{c_1}{2} - \frac{c_3 r}{q^2} = 0 \iff \frac{c_1}{2} = \frac{c_3 r}{q^2} \iff q^2 = \frac{2c_3 r}{c_1} \iff q_0 = \sqrt{\frac{2rc_3}{c_1}}$$

siendo q_0 el **tamaño del lote óptimo**. Esta es la fórmula de F.W. Harris mencionada anteriormente.
Para obtener el coste mínimo C_0 se sustituye este valor en la función del costo total:

$$C_0 = c_1\frac{q_0}{2} + c_3\frac{r}{q_0} = \frac{c_1}{2}\sqrt{\frac{2rc_3}{c_1}} + \frac{c_3 r}{\sqrt{\frac{2rc_3}{c_1}}} = \frac{rc_3 + rc_3}{\sqrt{\frac{2rc_3}{c_1}}} = \sqrt{\frac{(2rc_3)^2}{\frac{2rc_3}{c1}}} = \sqrt{2c_1c_3r}$$

El periodo de gestión óptimo viene dado por $t_0 = \frac{q_0}{r} = \sqrt{\frac{2c_3}{rc_1}}$

2.2. Sistema de tamaño del lote en el caso de unidades discretas

Se trata del mismo sistema que el anterior, pero en este caso las cantidades a reponer se entregan en lotes de v unidades, siendo v un valor entero positivo y conocido. Por tanto los posibles valores de q son $q = v, 2v, 3v...$ Ahora el problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \qquad C(q) = c_1\frac{q}{2} + c_3\frac{r}{q} \tag{2.3}$$

$$\text{sujeto a} \qquad q = v, 2v, 3v... \tag{2.4}$$

El tamaño del lote óptimo q_0 deberá cumplir las siguientes condiciones, ya que debe minimizar el costo:

$$\begin{cases} C(q_0) \leq C(q_0 - v) \\ C(q_0) \leq C(q_0 + v) \end{cases}$$

Desarrollando la primera condición, se tiene que:

$$C(q) \leq C(q-v) \iff c_1\frac{q}{2} + c_3\frac{r}{q} \leq \frac{c_1(q-v)}{2} + c_3\frac{r}{q-v} \iff$$

$$\iff c_3\frac{r}{q} \leq -\frac{c_1 v}{2} + \frac{c_3 r}{q-v} \iff$$

$$\iff \frac{c_3 r 2(q-v)}{2q(q-v)} \leq \frac{-c_1 v q(q-v)}{2q(q-v)} + \frac{c_3 r 2q}{2q(q-v)} \iff$$

$$\iff c_3 r 2q - 2c_3 r v \leq -c_1 v q(q-v) + 2c_3 r q \iff$$

$$\iff -2c_3 r \leq -c_1 q(q-v) \iff 2c_3 r \geq c_1 q(q-v)$$

Haciendo lo mismo con la segunda condición se llega a:

$$C(q) \leq C(q+v) \iff c_1\frac{q}{2} + c_3\frac{r}{q} \leq \frac{c_1(q+v)}{2} + c_3\frac{r}{q+v} \iff$$

$$\iff c_3\frac{r}{q} \leq \frac{c_1 v}{2} + \frac{c_3 r}{q+v} \iff$$

$$\iff \frac{c_3 r 2(q+v)}{2q(q+v)} \leq \frac{c_1 v q(q+v)}{2q(q+v)} + \frac{c_3 r 2q}{2q(q-v)} \iff$$

$$\iff c_3 r 2q + 2c_3 r v \leq c_1 v q(q-v) + 2c_3 r q \iff$$

$$\iff 2c_3 r \leq c_1 q(q+v) \iff 2c_3 r \leq c_1 q(q+v)$$

Por tanto se llega a la siguiente desigualdad:

$$q(q-v) \leq \frac{2c_3 r}{c_1} \leq q(q+v)$$

Dicha desigualdad es la condición necesaria y suficiente que debe cumplir la cantidad a pedir q_0 para ser el tamaño del lote óptimo.

2.3. Sistema de nivel de inventario

Las características de este sistema son las siguientes:

1. Se tiene una razón de demanda determinística con razón r conocida y constante.

2. El periodo de gestión es t_f, el cual está fijado, así como el tamaño del lote $q_f = r \cdot t_f$.
3. La variable a determinar es el nivel inicial de inventario (S).
4. Se trabaja con una reposición instantánea, es decir, la razón de reposición es $p = \infty$.
5. Se permiten roturas, las cuales se recuperan con la llegada de la siguiente reposición.
6. El punto de pedido o reposición es $s = S - q_f$.
7. El tiempo de retardo es nulo, es decir, $L = 0$.
8. El patrón de demanda es uniforme ($n = 1$).

El coste total asociado a este sistema es: $C(S) = C_1(S) + C_2(S) + C_3$, donde

$C_1(S) = c_1 \cdot I_1(S)$, siendo $I_1(S)$ la cantidad media en stock.
$C_2(S) = c_2 \cdot I_2(S)$, siendo $I_2(S)$ la cantidad media de rotura.
$C_3 = c_3 \cdot I_3$, siendo I_3 el número medio de reposiciones.

En este modelo, $I_3 = \frac{1}{t_f}$. Así, el coste de reposición es $C_3 = \frac{c_3}{t_f}$ y, por tanto, es un valor constante. Luego, el problema de minimizar $C(S)$ es equivalente a minimizar el coste $C_1(S) + C_2(S)$. Se trabaja con una política (S, q_f).
A continuación se determinará $I_1(S)$ e $I_2(S)$. Para ello, se analizará la evolución del nivel de inventario, el cual depende del comportamiento de la variable S. Así, hay tres posibles situaciones:

1. El primer caso se tiene cuando $S \geq q_f$.
   En esta situación, la evolución del inventario se muestra en la Figura 2.2:

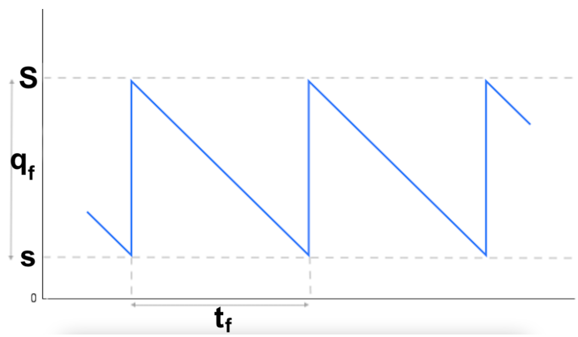

Figura 2.2. Evolución del inventario en el primer caso

La cantidad media en stock viene dada por

$$I_1(S) = \frac{\text{área del triángulo superior} + \text{área del rectángulo inferior}}{t} = \frac{\frac{t_f q_f}{2} + s t_f}{t_f} =$$

$$= s + \frac{q_f}{2} = S - q_f + \frac{q_f}{2} = S - \frac{q_f}{2}$$

La cantidad media de rotura es $I_2(S) = 0$ pues, en este caso, nunca hay falta de existencias.

2. El segundo caso se da cuando $0 \leq S \leq q_f$.
La evolución del inventario correspondiente a esta situación se muestra en la gráfica mostrada en la Figura 2.3, donde t_1 representa el periodo de tiempo en el que hay stock y t_2 se corresponde con el periodo de rotura. El periodo de gestión o ciclo del inventario t es la suma de t_1 y t_2.

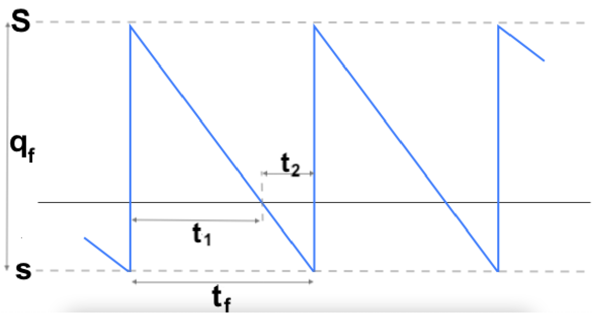

Figura 2.3. Evolución del inventario en el segundo caso

La cantidad media en stock viene dada por

$$I_1(S) = \frac{\text{área triángulo superior}}{t_f} = \frac{S t_1}{2 t_f} = \frac{S^2}{2 q_f}$$

pues, por la proporcionalidad en triángulos, se tiene que $\frac{t_1}{t_f} = \frac{S}{q_f}$

La cantidad media de rotura viene dada por

$$I_2(S) = \frac{\text{área triángulo inferior}}{t_f} = \frac{-s t_2}{2 t_f} = \frac{(q_f - S)^2}{2 q_f}$$

ya que por la proporcionalidad en triángulos se tiene que $\frac{t_2}{t_f} = \frac{-s}{q_f}$

3. El tercer caso se da cuando $S \leq 0$.
La evolución del inventario en este caso viene representada por la gráfica recogida en la Figura 2.4:

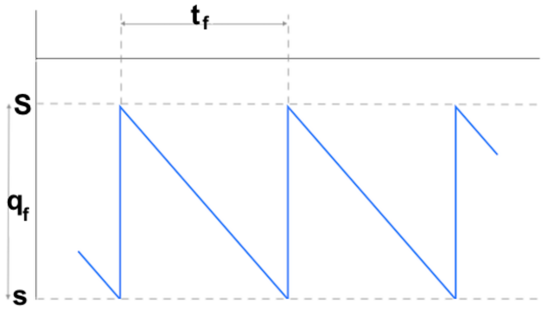

Figura 2.4. Evolución del inventario en el tercer caso

La cantidad media en stock en este caso es nula ya que no hay stock. Por tanto $I_1(S) = 0$.

La cantidad media de rotura viene dada por

$$I_2(S) = \frac{\text{área del triángulo} + \text{área del rectángulo}}{t_f} = \frac{-St_f + \frac{q_f t_f}{2}}{t} = \frac{q_f}{2} - S$$

Por tanto, en resumen, se tiene:

$$I_1(S) = \begin{cases} 0, \text{ si } S \leq 0 \\ \dfrac{S^2}{2q_f}, \text{ si } 0 \leq S \leq q_f \\ S - \dfrac{q_f}{2}, \text{ si } S \geq q_f \end{cases}$$

$$I_2(S) = \begin{cases} \dfrac{q_f}{2} - S, \text{ si } S \leq 0 \\ \dfrac{(q_f - S)^2}{2q_f}, \text{ si } 0 \leq S \leq q_f \\ 0, \text{ si } S \geq q_f \end{cases}$$

Además, el número medio de reposiciones es $I_3 = \frac{r}{q_f}$ en todos los casos. Por tanto, teniendo en cuenta el coste unitario de mantenimiento c_1, el de rotura c_2, y el coste de reposición c_3, la función de coste por unidad de tiempo es:

$$C(S) = c_1 \cdot I_1(S) + c_2 \cdot I_2(S) + c_3 \cdot I_3$$

esto es,

$$C(S) = \begin{cases} c_2(\frac{q_f}{2} - S) + c_3 \frac{r}{q_f}, \text{ si } S \leq 0 \\ c_1 \frac{S^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S)^2}{2q_f} + c_3 \frac{r}{q_f}, \text{ si } 0 \leq S \leq q \\ c_1(S - \frac{q_f}{2}) + c_3 \frac{r}{q_f}, \text{ si } S \geq q \end{cases}$$

Ahora, como $c_3 \frac{r}{q_f}$ es constante, la función de coste a minimizar es:

$$C(S) = \begin{cases} c_2(\frac{q_f}{2} - S), \text{ si } S \leq 0 \\ c_1 \frac{S^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S)^2}{2q_f}, \text{ si } 0 \leq S \leq q \\ c_1(S - \frac{q_f}{2}), \text{ si } S \geq q \end{cases}$$

Se puede observar lo siguiente:

- Si $S \leq 0 \Rightarrow -S \geq 0 \Rightarrow C(S) = c_2(\frac{q_f}{2} - S) \geq c_2 \frac{q_f}{2} = C(0)$ entonces el mínimo coste se da en $S = 0$.
- Si $S \geq q \Rightarrow C(S) = c_1(S - \frac{q_f}{2}) \geq c_1 \frac{q_f}{2} = C(q_f)$. Por tanto, el coste mínimo se da en $S = q_f$.

En consecuencia, el problema a resolver será el siguiente:

$$\text{minimizar} \qquad C(S) = c_1 \frac{S^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S)^2}{2q_f} \tag{2.5}$$

$$\text{sujeto a} \qquad 0 \leq S \leq q_f \tag{2.6}$$

Se resuelve el sistema calculando la derivada de $C(S)$ e igualando a cero de la siguiente manera:

$$C'(S) = c_1 \frac{S}{q_f} - c_2 \frac{q_f - S}{q_f} = 0 \iff (c_1 + c_2)S = c_2 q_f \Rightarrow \boxed{S_0 = \frac{q_f c_2}{c_1 + c_2}}$$

Como $C''(S) = \frac{c_1}{q_f} + \frac{c_2}{q_f} > 0$, se tiene que S_0 es un mínimo.
Además, se comprueba que $0 < S_0 = \frac{q_f c_2}{c_1 + c_2} \leq q_f$ pues $\frac{c_2}{c_1 + c_2} \leq 1$.
Por tanto, en resumen, se tiene la siguiente política de inventario óptima:

El nivel de inventario óptimo es

$$S_0 = \frac{q_f c_2}{c_1 + c_2}$$

El coste mínimo total viene dado por:

$$C_0 = C(S_0) = \frac{c_1 S_0^2}{2q_f} + \frac{c_2(q_f - S_0)^2}{2q_f} + \frac{c_3 r}{q_f}$$

Desarrollando la expresión anterior se tiene

$$\boxed{C_0 = \sqrt{\frac{c_1 c_2 q_f}{2 \cdot (c_1 + c_2)}}}$$

2.4. Sistema de nivel de inventario en el caso de unidades discretas

Se trata del mismo sistema que el anterior, pero en este caso el nivel de inventario debe ser una cantidad discreta múltiplo de u, siendo u un valor entero positivo y conocido. Por tanto los posibles valores de S son $S = ..., -2u, -u, 0, u, 2u, 3u....$ El problema a resolver es:

$$\text{minimizar} \qquad c_1 \frac{S^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S)^2}{2q_f} \tag{2.7}$$

$$\text{sujeto a} \qquad S = ..., -2u, -u, 0, u, 2u, 3u... \tag{2.8}$$

Se tiene lo siguiente:

- Si $S \leq 0$ entonces $C(S) \geq C(0)$, y por tanto, en esta región, la mejor alternativa es $S_0 = 0$. El coste correspondiente es $C_0 = C(0) = \frac{c_2 q_f}{2} + \frac{c_3 r}{q_f}$
- Si $S \geq q_f$ entonces $C(S) \geq C(q_f)$ y la mejor alternativa en esta región es $S_1 =$ menor múltiplo de u que sea mayor o igual que q_f. El coste correspondiente es $C_1 = C(S_1) = c_1(S_1 - \frac{q_f}{2}) + \frac{c_3 r}{q_f}$

En la región $0 < S \leq q_f$, para que un valor S_2 sea el nivel de inventario óptimo debe cumplir la condición de optimalidad, la cual es:

$$\begin{cases} C(S_2, q_f) \leq C(S_2 - u, q_f) \\ C(S_2, q_f) \leq C(S_2 + u, q_f) \end{cases}$$

Desarrollando la primera desigualdad, tenemos que:

$$c_1 \frac{S^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S)^2}{2q_f} \leq c_1 \frac{(S-u)^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S + u)^2}{2q_f} \iff$$

$$\iff 0 \leq c_1 \frac{u^2 - 2Su}{2q_f} + c_2 \frac{u^2 + 2(q_f - S)u}{2q_f} \iff$$

$$\iff 0 \leq c_1(\frac{u}{2} - S) + c_2(\frac{u}{2} - S) + c_2 q_f \iff$$
$$\iff (c_1 + c_2)(S - \frac{u}{2}) \leq c_2 q_f \iff S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2}$$

Para la segunda desigualdad se tiene que:

$$c_1 \frac{S^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S)^2}{2q_f} \leq c_1 \frac{(S+u)^2}{2q_f} + c_2 \frac{(q_f - S - u)^2}{2q_f} \iff$$
$$\iff 0 \leq c_1 \frac{u^2 + 2Su}{2q_f} + c_2 \frac{u^2 - 2(q_f - S)u}{2q_f} \iff$$
$$\iff 0 \leq c_1(\frac{u}{2} + S) + c_2(\frac{u}{2} + S) - c_2 q_f \iff$$
$$\iff (c_1 + c_2)(S + \frac{u}{2}) \geq c_2 q_f \iff S + \frac{u}{2} \geq \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2}$$

Así, en la región $0 < S \leq q_f$, se tiene que S_2 es el múltiplo de u que cumple la desigualdad siguiente:

$$\boxed{S_2 - \frac{u}{2} \leq \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2} \leq S_2 + \frac{u}{2}}$$

En este caso, el coste correspondiente es $C_2 = C(S_2) = \frac{c_1 s_2^2}{2q_f} + \frac{c_2(q_f - S_2)^2}{2q_f} + \frac{c_3 r}{q_f}$. Por último, el nivel de inventario óptimo S^* será aquel valor de entre S_0, S_1, S_2 que dé menor coste total en la gestión del inventario.

2.5. Sistema de tamaño del lote y nivel de inventario

En este apartado se describe un sistema determinístico de inventario donde se consideran como variables el tamaño del lote q y el nivel de inventario S al comienzo del periodo. Se tienen las siguientes características:

1. La razón de demanda determinística r es conocida y constante.
2. Las variables a determinar son q y S.
3. La reposición es instantánea, es decir, $p = \infty$.
4. Se permiten roturas recuperables.
5. El punto de reposición es $s = S - q$.
6. El periodo de gestión o ciclo del inventario t es desconocido, aunque $t = \frac{q}{r}$.
7. El tiempo de retardo es nulo, es decir, $L = 0$.
8. El patrón de demanda es uniforme ($n = 1$).

En este sistema intervienen los tres costes (mantenimiento, rotura y reposición). Por lo tanto, es un sistema del tipo (1,2,3).
La función de coste a minimizar será $C(S,q) = C_1(S,q) + C_2(S,q) + C_3(q)$, donde:

$C_1(S,q) = c_1 \cdot I_1(S,q)$, siendo $I_1(S,q)$ la cantidad media en stock.
$C_2(S,q) = c_2 \cdot I_2(S,q)$, siendo $I_2(S,q)$ la cantidad media de rotura.
$C_3(q) = c_3 \cdot I_3(q)$, siendo $I_3(q)$ el número medio de reposiciones.

Se va a trabajar con una política (S,q).
A continuación se estudiará la evolución del nivel de inventario, pero éste depende de las posiciones relativas que tengan q y S. Así, hay tres posibilidades:

1. Cuando $S \geq q$. En este caso, la evolución del inventario se muestra en la Figura 2.5:

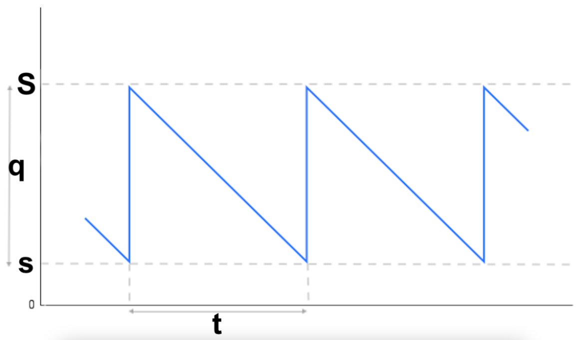

Figura 2.5. Evolución del inventario en el primer caso

La cantidad media en stock viene dada por

$$I_1(S,q) = \frac{\text{área del triángulo superior y del rectángulo inferior}}{t} = \frac{\frac{tq}{2} + st}{t} =$$

$$= s + \frac{q}{2} = S - q + \frac{q}{2} = S - \frac{q}{2}$$

La cantidad media de rotura es $I_2(S,q) = 0$ pues en este caso nunca hay rotura o falta de existencias.

2. Cuando $0 \leq S \leq q$:
La evolución del inventario de este caso se muestra en la gráfica mostrada en la Figura 2.6, donde t_1 representa el periodo de tiempo en el que hay stock y t_2 se corresponde con el periodo de rotura. El periodo de gestión o ciclo del inventario t es la suma de t_1 y t_2.

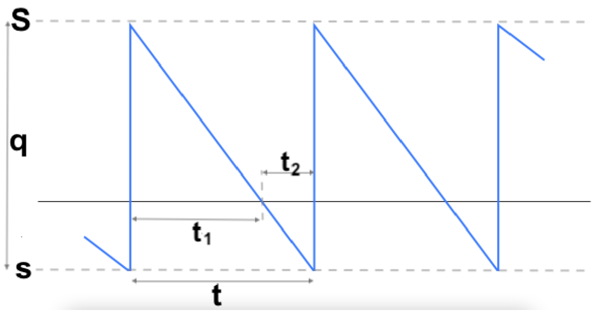

Figura 2.6. Evolución del inventario en el segundo caso

La cantidad media en stock viene dada por

$$I_1(S,q) = \frac{\text{área triángulo superior}}{t} = \frac{St_1}{2t} = \frac{S^2}{2q}$$

pues por la proporcionalidad en triángulos se tiene que $\frac{t_1}{t} = \frac{S}{q}$

La cantidad media de rotura viene dada por

$$I_2(S,q) = \frac{\text{área triángulo inferior}}{t} = \frac{-st_2}{2t} = \frac{(q-S)^2}{2q}$$

ya que por la proporcionalidad en triángulos se tiene que $\frac{t_2}{t} = \frac{-s}{q}$

3. Cuando $S \leq 0$:
La evolución del inventario en este caso viene representada por la gráfica recogida en la Figura 2.7:

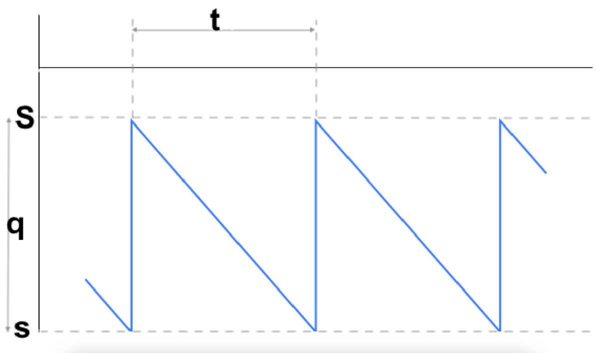

Figura 2.7. Evolución del inventario en el tercer caso

La cantidad media en stock en este caso es nula ya que no hay stock. Por tanto $I_1(S,q)=0$.

La cantidad media de rotura viene dada por

$$I_2(S,q)=\frac{\text{área del triángulo y del rectángulo}}{t}=\frac{-St+\frac{qt}{2}}{t}=\frac{q}{2}-S$$

Por tanto, en resumen, se tiene:

$$I_1(S,q)=\begin{cases} 0, \text{ si } S\le 0 \\ \dfrac{S^2}{2q}, \text{ si } 0\le S\le q \\ S-\dfrac{q}{2}, \text{ si } S\ge q \end{cases}$$

$$I_2(S,q)=\begin{cases} \dfrac{q}{2}-S, \text{ si } S\le 0 \\ \dfrac{(q-S)^2}{2q}, \text{ si } 0\le S\le q \\ 0, \text{ si } S\ge q \end{cases}$$

Además, el número medio de reposiciones es $I_3(q)=\frac{r}{q}$ en todos los casos. Por tanto, teniendo en cuenta el coste unitario de mantenimiento c_1, el de rotura c_2, y el coste de reposición c_3, la función de coste por unidad de tiempo es:

$$C(S,q)=c_1\cdot I_1(S,q)+c_2\cdot I_2(S,q)+c_3\cdot I_3(q)$$

esto es,

$$C(S,q)=\begin{cases} c_2(\dfrac{q}{2}-S)+c_3\dfrac{r}{q}, \text{ si } S\le 0 \\ c_1\dfrac{S^2}{2q}+c_2\dfrac{(q-S)^2}{2q}+c_3\dfrac{r}{q}, \text{ si } 0\le S\le q \\ c_1(S-\dfrac{q}{2})+c_3\dfrac{r}{q}, \text{ si } S\ge q \end{cases}$$

Se puede observar lo siguiente:

- Si $S\le 0\Rightarrow -S\ge 0\Rightarrow C(S,q)=c_2(\frac{q}{2}-S)+c_3\frac{r}{q}\ge c_2\frac{q}{2}+c_3\frac{r}{q}=C(0,q)$ entonces el mínimo coste se da en $S=0$.

- Si $S \geq q \Rightarrow C(S,q) = c_1(S - \frac{q}{2}) + c_3\frac{r}{q} \geq c_1\frac{q}{2} + c_3\frac{r}{q} = C(q,q)$. Por tanto, el coste mínimo se da en $S = q$.

En consecuencia, el problema a resolver será el siguiente:

$$\text{minimizar} \qquad C(S,q) = c_1\frac{S^2}{2q} + c_2\frac{(q-S)^2}{2q} + c_3\frac{r}{q} \tag{2.9}$$

$$\text{sujeto a} \qquad 0 \leq S \leq q \tag{2.10}$$

Vamos a probar a continuación que la función $C(S,q)$ es convexa en esa región. Para ello, se calculan las derivadas parciales segundas respecto de S y q, comprobándose que $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,q)$ y $\frac{\partial^2 C}{\partial q^2}(S,q)$ son positivas. Luego, halla la matriz Hessiana de la función y se comprueba que su determinante es mayor que cero.

- En primer lugar, calculamos las derivadas segundas parciales con respecto a S y q:

  - $\frac{\partial C}{\partial S}(S,q) = \frac{c_1S + c_2S - c_2q}{q} = \frac{(c_1+c_2)S - c_2q}{q} = (c_1+c_2)\frac{S}{q} - c_2$
  - $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,q) = \boxed{\dfrac{c_1+c_2}{q}} > 0$
  - $\frac{\partial C}{\partial q}(S,q) = -c_1\frac{S^2}{2q^2} + \frac{c_2}{2} \cdot \frac{2(q-S)q - (q-S)^2}{q^2} - \frac{c_3r}{q^2} == \frac{-c_1S^2 + c_2(q^2 - S^2)}{2q^2} - \frac{c_3r}{q^2} = -(c_1+c_2)\frac{S^2}{2q^2} + \frac{c_2}{2} - \frac{c_3}{q^2}$
  - $\frac{\partial^2 C}{\partial q^2}(S,q) = \frac{-(c_1+c_2)S^2}{2} \cdot \frac{-2q}{q^4} + \frac{2c_3r}{q} = \boxed{(c_1+c_2)\dfrac{S^2}{q^3} + \dfrac{2c_3r}{q}} > 0$

  Estas segundas derivadas son siempre positivas ya que el tamaño del lote $q > 0$.

- A continuación, calculamos las derivadas parciales cruzadas de la función:

$$\frac{\partial C}{\partial S \partial q}(S,q) = \frac{\partial C}{\partial q \partial S}(S,q) = \boxed{\frac{-(c_1+c_2)}{q^2}S}$$

Por tanto, el determinante de la matriz Hessiana de la función $C(S,q)$ es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,q) & \frac{\partial C}{\partial S\partial q}(S,q) \\ \frac{\partial C}{\partial q\partial S}(S,q) & \frac{\partial^2 C}{\partial q^2}(S,q) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{c_1+c_2}{q} & \frac{-(c_1+c_2)}{q^2} \\ \frac{-(c_1+c_2)}{q^2} & (c_1+c_2)\frac{S^2}{q^3} + \frac{2c_3r}{q} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{c_1+c_2}{q} \cdot \left[(c_1+c_2)\frac{S^2}{q^3} + \frac{2c_3r}{q}\right] - \left[\frac{-(c_1+c_2)}{q^2}\right]^2 = \frac{(c_1+c_2)2c_3r}{q^2} > 0$$

Con este resultado se tiene que la función $C(S,q)$ es convexa en el dominio $0 \leq S \leq q$.

Para calcular la política óptima que minimiza el coste $C(S,q)$ se igualan a cero las derivadas parciales de la función de coste (2.9). Así, se tiene:

- Derivada parcial con respecto a S:

$$\frac{\partial C}{\partial S}(S,q) = c_1\frac{S}{q} - c_2\frac{q-S}{q} = 0 \iff (c_1+c_2)S = c_2 q \Rightarrow \boxed{S = \frac{qc_2}{c_1+c_2}}$$

- Derivada parcial con respecto a q:

$$\frac{\partial C}{\partial q}(S,q) = \frac{-c_1S^2}{2q^2} + c_2\frac{2(q-S)2q - 2(q-S)^2}{4q^2} - \frac{c_3 r}{q^2} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{-c_1S^2}{2q^2} + c_2\frac{q^2-S^2}{2q^2} - \frac{c_3r}{q^2} = 0 \iff -c_1S^2 + c_2q^2 - c_2S^2 - 2c_3r = 0 \iff$$

$$\iff (c_1+c_2)S^2 = c_2q^2 - 2c_3r \iff \boxed{S^2 = \frac{c_2q^2 - 2c_3r}{c_1+c_2}}$$

Si se sustituye el primer resultado en el segundo, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{c_2^2q^2}{(c_1+c_2)^2} = \frac{c_2q^2-2c_3r}{c_1+c_2} \iff c_2^2q^2 = (c_1+c_2)(c_2q^2-2c_3r) \iff$$

$$\iff c_2^2q^2 = c_1c_2q^2 + c_2^2q^2 - 2c_3r(c_1+c_2) \iff$$

$$\iff c_1c_2q^2 = 2c_3r(c_1+c_2) \iff \boxed{q^2 = \frac{2c_3r(c_1+c_2)}{c_1c_2}}$$

Por tanto, en resumen, se tiene la siguiente política de inventario óptima:

El tamaño económico del lote es $q_0 = \sqrt{\frac{2c_3r(c_1+c_2)}{c_1c_2}}$

El nivel de inventario óptimo es $S_0 = \sqrt{\frac{2rc_3c_2}{c_1(c_1+c_2)}}$

El coste mínimo total viene dado por: $C_0 = C(S_0,q_0) = \frac{c_1S_0^2}{2q_0} + \frac{c_2(q_0-S_0)^2}{2q_0} + c_3\frac{r}{q_0}$

Desarrollando la expresión anterior se tiene $\boxed{C_0 = \sqrt{\frac{2rc_1c_2c_3}{c_1+c_2}}}$

Puede observarse que $\frac{S_0}{q_0} = \frac{c_2}{c_1+c_2} < 1$ luego $0 < S_0 < q_0$ siempre. Por tanto, la política óptima está dentro de la región determinada por $0 \leq S \leq q$.

Nótese que este sistema de nivel de inventario y tamaño del lote generaliza al sistema clásico del tamaño del lote (considerando $c_2 = \infty$). Sin embargo, no generaliza al sistema clásico de nivel de inventario.

2.6. Sistema de tamaño del lote y nivel de inventario en el caso de unidades discretas

En este caso se va a considerar el mismo sistema anterior, pero suponiendo que el nivel de inventario S debe ser múltiplo de una cantidad u (un número entero prefijado), esto es, $S = ..., -2u, -u, 0, u, 2u...$ y que el tamaño del lote q debe ser múltiplo de otro entero positivo v fijado con anterioridad, es decir, $q = v, 2v, 3v....$ Como la función de coste $C(S, q) > C(0, q)$ si $S < 0$, entonces podemos suponer que $S = 0, u, 2u, 3u, ...$

La función de coste por unidad de tiempo viene dada por la expresión (2.5). Si suponemos que la política óptima viene dada por (S_0,q_0), entonces debe cumplirse lo siguiente:

$$\begin{cases} C(S_0, q_0) \leq C(S_0 \pm u, q_0) \\ C(S_0, q_0) \leq C(S_0, q_0 \pm v) \\ C(S_0, q_0) \leq C(S_0 \pm u, q_0 \pm v) \end{cases}$$

Sin embargo, en este caso, estas condiciones son necesarias pero **no suficientes**.

Ahora bien, podemos buscar la política óptima (S_0, q_0) para el caso discreto considerando que el tamaño del lote se fija en un múltiplo de v, esto es, $q = q_f = k \cdot v$ y luego se determina el nivel de inventario óptimo S_{kv} que minimiza el coste cuando $q = q_f = k \cdot v$. Posteriormente, haciendo variar k vamos determinando los sucesivos niveles óptimos para los diferentes valores de q.

Nótese que si fijamos $q = q_f$, entonces el nivel óptimo (S_0, q_f) debe verificar la condición dada para el sistema de nivel de inventario en el caso de unidades discretas, la cual es la siguiente:

$$\boxed{S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2} \leq S + \frac{u}{2}}$$

Por lo tanto, para resolver este sistema se propone el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1

- **Paso 1**: Insertar los valores de u y de v. Poner $k = 1$.

- **Paso 2**: Considerar $q_f = k \cdot v$.
  - Si $u > q_f$, entonces $S^*_{kv} = u$ e ir al paso 5.
  - Si $u \leq q_f$, entonces ir al paso 3.

- **Paso 3**:

  Calcular S_{01} como el menor múltiplo de u que sea mayor o igual que q_f.
  Calcular S_{02}, como el valor positivo múltiplo de u que cumpla la condición siguiente:
  $$\boxed{S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2} \leq S + \frac{u}{2}}$$
  Poner $S_{03} = 0$

- **Paso 4**: Computar los costes
  $$C(S_{01}) = c_1(S_{01} - \frac{q_f}{2}) + c_3\frac{r}{q_f}$$
  $$C(S_{02}) = c_1\frac{S_{02}^2}{2q_f} + c_2\frac{(q_f - S_{02})^2}{2q_f} + c_3\frac{r}{q_f}$$
  $$C(S_{03}) = C(0) = \frac{c_2 q_f}{2} + \frac{c_3 r}{q_f}$$
  La solución es

  $S_{kv}^* = S_{01}$, si $C(S_{01}) < C(S_{02})$ y $C(S_{01}) < C(S_{03})$
  $S_{kv}^* = S_{02}$, si $C(S_{01}) \geq C(S_{02})$ y $C(S_{03}) \geq C(S_{02})$
  $S_{kv}^* = S_{03}$, si $C(S_{03}) < C(S_{01})$ y $C(S_{03}) < C(S_{02})$

- **Paso 5**: Guardar la solución obtenida, esto es, el tamaño del lote $q_f^* = k \cdot v$, el nivel de inventario S_{kv}^* y su coste correspondiente $C(S_{kv}^*, q_f^*)$.

- **Paso 6**: Si $k > 1$ ir al Paso 7. Si $k \leq 1$, poner $k = k + 1$ y volver al paso 2.

- **Paso 7**:
  - Si $C(S_{kv}^*) > C(S_{(k-1)v}^*)$, parar. La solución óptima es $q^* = (k-1)v$ y $S^* = S_{(k-1)v}^*$.
  - Si $C(S_{kv}^*) \leq C(S_{(k-1)v}^*)$, poner $k = k + 1$ y volver al paso 2.

Nótese que en el Paso 7 aparece el criterio de parada, el cual se debe a que la función $C(S, q)$ es una función convexa, y por lo tanto cuando empieza a crecer, no vuelve a decrecer en todo su dominio. Se ha programado en Matlab este Algoritmo 1, y el código se recoge en el Apéndice de esta memoria.

Para obtener más rápidamente valores del nivel de inventario y del tamaño del lote que cumplan con los requisitos que se han impuesto (ser múltiplos de u y de v) se propone también una solución aproximada o heurística siguiendo los pasos que se muestran a continuación:

Algoritmo 2

- **Paso 1**: Calcular q_0 y S_0 mediante las fórmulas óptimas del caso continuo.

- **Paso 2**: Hallar los siguientes valores:
  q_0^1 : máximo valor múltiplo de v que sea menor o igual que q_0.
  q_0^2 : mínimo valor múltiplo de v que sea mayor o igual que q_0.
  S_0^1 : máximo valor múltiplo de u que sea menor o igual que S_0.
  S_0^2 : mínimo valor múltiplo de u que sea mayor o igual que S_0.

- **Paso 3**: Calcular los siguientes valores de la función de coste: $C(S_0^1, q_0^1)$, $C(S_0^1, q_0^2)$, $C(S_0^2, q_0^1)$ y $C(S_0^2, q_0^2)$.

- **Paso 4**: Elegir como política aproximada la de menor coste de las cuatro enteriores.

En el siguiente capítulo se analiza la gestión de inventario realizada por la empresa para los productos seleccionados. También, se calculan los costes de mantenimiento, rotura y reposición de cada uno de los artículos considerados en este trabajo.

3

Análisis de la gestión de inventarios de ciertos artículos en la empresa

En este capítulo se recoge el control del inventario aplicado por la empresa para ciertos artículos comercializados por la farmacia. En concreto, se va a analizar la gestión del inventario de los siguientes productos: Omeprazol, Nolotil y Enjuage Bucal Lacer.
Comenzamos mostrando la evolución del nivel de inventario y las ventas que se han realizado de cada uno de los productos durante el año 2022. Los artículos se reponen al comienzo de cada semana y las cantidades vendidas a lo largo de la semana se recogen en la columna de ventas.

- **Omeprazol**
  Las ventas y reposiciones realizadas de este producto por semana a lo largo del año 2022 vienen dadas en la Tabla 3.1:

Semana	Stock inicial	Ventas	Reposición	Stock final
1	22	19	20	23
2	23	16	20	27
3	27	18	15	24
4	24	21	20	23
5	23	19	20	24
6	24	20	20	24
7	24	17	20	27
8	27	19	15	23
9	23	21	20	22
10	22	20	20	22
11	22	19	20	23
12	23	22	20	21
13	21	19	20	22
14	22	20	20	22
15	22	17	20	25
16	25	18	20	27
17	27	16	15	26
18	26	21	15	20
19	20	21	20	19
20	19	18	20	21
21	21	20	20	21
22	21	17	20	24
23	24	19	20	25
24	25	21	20	24
25	24	18	20	26

Semana	Stock inicial	Ventas	Reposición	Stock final
26	26	19	15	22
27	22	20	20	22
28	22	17	20	25
29	25	19	20	26
30	26	20	20	26
31	26	18	15	23
32	23	21	20	22
33	22	19	20	23
34	23	20	20	23
35	23	17	20	26
36	26	18	15	23
37	23	16	20	27
38	27	17	15	25
39	25	19	20	26
40	26	20	15	21
41	21	18	20	23
42	23	18	20	25
43	25	21	20	24
44	24	21	15	18
45	18	19	20	19
46	19	20	20	19
47	19	19	20	20
48	20	18	20	22
49	22	21	20	21
50	21	20	20	21
51	21	19	20	22
52	22	19	20	23

Tabla 3.1. Reposiciones y ventas del Omeprazol durante el año 2022

La evolución de los movimientos en el inventario del Omeprazol se muestra en la gráfica de la Figura 3.1:

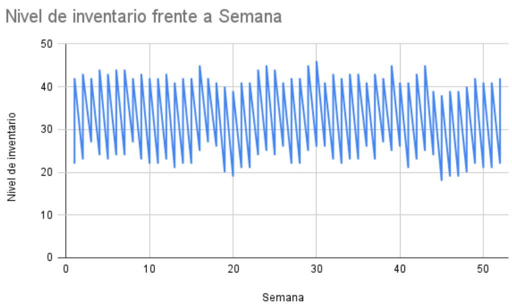

Figura 3.1. Evolución del inventario del Omeprazol

- **Nolotil**
  Las ventas y reposiciones por semana de este producto a lo largo del año 2022 vienen dadas en la Tabla 3.2:

Semana	Stock inicial	Ventas	Reposición	Stock final
1	27	24	30	33
2	33	23	25	35
3	35	26	25	34
4	34	27	25	32
5	32	23	30	39
6	39	22	30	47
7	47	24	25	48
8	48	21	30	57
9	57	23	25	59
10	59	30	25	54
11	54	25	30	59
12	59	19	25	65
13	65	22	30	73
14	73	30	30	73
15	73	29	30	74
16	74	26	25	73
17	73	19	25	79
18	79	30	25	74
19	74	29	30	75
20	75	28	30	77
21	77	28	25	74
22	74	25	30	79
23	79	20	25	84
24	84	30	25	79
25	79	30	30	79
26	79	29	30	80
27	80	25	25	80
28	80	19	30	91
29	91	22	25	94
30	94	23	25	96
31	96	26	30	100
32	100	19	25	106
33	106	23	25	108
34	108	19	25	114
35	114	23	30	121
36	121	30	25	116
37	116	25	25	116
38	116	30	30	116
39	116	20	25	121
40	121	27	30	124
41	124	22	25	127
42	127	28	30	129
43	129	21	25	133
44	133	20	30	143
45	143	19	25	149
46	149	18	25	156
47	156	22	30	164
48	164	20	30	174
49	174	23	25	176
50	176	17	25	184
51	184	18	30	196
52	196	20	30	206

Tabla 3.2. Reposiciones y ventas del Nolotil durante el año 2022

La evolución de los movimientos en el inventario del Nolotil se muestra en la gráfica de la Figura 3.2:

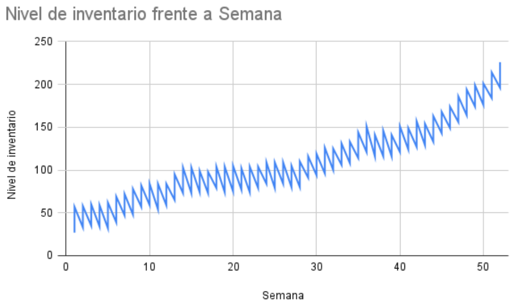

Figura 3.2. Evolución del inventario del Nolotil

- **Enjuague bucal lacer**
  Las ventas y reposiciones por semana que se han dado de este producto a lo largo del año 2022 se muestran en la Tabla 3.3.

Semana	Stock inicial	Ventas	Reposición	Stock final
1	2	0	0	2
2	2	0	0	2
3	2	0	0	2
4	2	0	0	2
5	2	1	5	6
6	6	0	0	6
7	6	0	0	6
8	6	0	0	6
9	6	0	0	6
10	6	0	0	6
11	6	1	0	5
12	5	0	0	5
13	5	0	0	5
14	5	0	0	5
15	5	0	0	5
16	5	1	0	4
17	4	0	0	4
18	4	0	0	4
19	4	0	0	4
20	4	0	0	4
21	4	0	0	4
22	4	0	0	4
23	4	0	0	4
24	4	1	5	8
25	8	0	0	8
26	8	0	0	8
27	8	0	0	8
28	8	0	0	8
29	8	0	0	8
30	8	0	0	8

Semana	Stock inicial	Ventas	Reposición	Stock final
31	8	0	0	8
32	8	0	0	8
33	8	0	0	8
34	8	0	0	8
35	8	0	0	8
36	8	1	0	7
37	7	0	0	7
38	7	0	0	7
39	7	0	0	7
40	7	0	0	7
41	7	1	0	6
42	6	0	0	6
43	6	0	0	6
44	6	0	0	6
45	6	1	5	10
46	10	0	0	10
47	10	0	0	10
48	10	0	0	10
49	10	0	0	10
50	10	0	0	10
51	10	0	0	10
52	10	0	0	10

Tabla 3.3. Reposiciones y ventas del Enjuague Bucal Lacer durante el año 2022

En la Figura 3.3 pueden apreciarse los movimientos por semana del stock del Enjuague Bucal Lacer durante el año 2022.

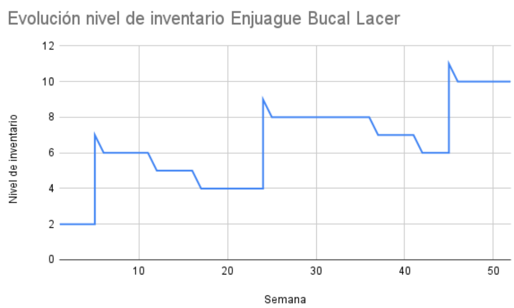

Figura 3.3. Evolución del inventario de Enjuague bucal Lacer por semana

3.1. Costes relacionados con la farmacia

En este apartado se va a determinar los costos relacionados con el control o gestión de inventario de estos tres productos. Podemos asumir que el Omeprazol es el Producto 1, el Nolotil es el Producto 2, y el Enjuague Bucal Lacer es el Producto 3. Para cada producto i, con $i = 1, 2, 3$, se deben determinar los valores del coste unitario de mantenimiento (c_{1i}), del coste unitario de rotura (c_{2i}) y del coste de reposición (c_{3i}). Para calcularlos, se deben presentar primero los datos relativos a los costes fijos que tiene la farmacia en relación con el almacenamiento de estos productos, que aparecen en la Tabla 3.4.

Tipo de gasto	Costo	Costo por semana
Alquiler del local	600 euros/año	150 euros
Seguros	620,63 euros/año	11,94 euros
Agua	366 euros/año	7,04 euros
Luz	812 euros/año	15,60 euros
Seguridad y vigilancia	611,28 euros/año	11,76 euros
Impuestos (IBI y residuos)	251 euros/año	4,83 euros
Limpieza	1.070 euros/año	20,58 euros
Gasto total		221,75 euros

Tabla 3.4. Costes fijos relacionados con el mantenimiento del local donde se guardan los productos

Se necesita determinar el costo de guardar una unidad de material en el local para poder obtener el costo unitario de mantenimiento c_{1i} del producto i. El tamaño del local es de 60 m^2 pero, como hay que dejar pasillos para poder transitar y hay un pequeño aseo, el tamaño del local usado para almacenar productos es de 30 m^2, contando con 2 m de altura, por tanto el volumen destinado a almacenar productos es de 60 m^3.

Se considera que una unidad de Omeprazol es una caja de este producto con catorce cápsulas, una unidad de Nolotil es una caja de este producto con veinte cápsulas, y una unidad de Enjuague Bucal Lacer es una caja que contiene un bote de este producto. Por otro lado, se sabe que una caja o unidad del producto Omeprazol ocupa 0.00126 m^3, una caja o unidad del producto Nolotil ocupa 0.001 m^3 y un bote o unidad del producto Enjuague Bucal Lacer ocupa 0.0106 m^3. Luego, teniendo en cuenta que

$$c_{1i} = \frac{\text{Gasto fijo por semana del artículo i}}{m^3 \text{ de almacenamiento}} \cdot \text{volumen del artículo i}$$

se tienen los siguientes costes para cada producto:

- **Omeprazol**: El coste unitario de mantenimiento en este caso es $c_{11} = \frac{221.75}{60} \cdot 0.00126 = 0.0046$ euros/caja y semana.
- **Nolotil**: El coste unitario de mantenimiento del Nolotil es $c_{12} = \frac{221.75}{60} \cdot 0.001 = 0.0037$ euros/caja y semana.
- **Enjuague Bucal Lacer**: El coste unitario de mantenimiento del Enjuague Bucal Lacer es $c_{13} = \frac{221.75}{60} \cdot 0.0106 = 0.039$ euros/bote y semana.

El coste unitario de rotura (c_{2i}) del producto i representa el dinero que se deja de ganar por no tener stock disponible. Como suponemos que las roturas son recuperables, este coste se determina teniendo en cuenta el tiempo que se tarda en recibir el dinero de la venta del producto, y esto se ve reflejado en los intereses que abonaría el banco si se hubiera depositado en una cuenta bancaria el beneficio obtenido por la venta en el momento actual. Dichos intereses están actualmente en torno a un dos por ciento anual de lo ingresado. En este caso, por semana es un 0,038 por ciento de los beneficios. Por tanto, el coste unitario de rotura c_{2i} de cada producto i viene dado por:

- **Omeprazol**: En este caso, el coste de compra es de 1,68 euros y el coste de venta es de 2,72 euros. Por lo tanto, el beneficio de vender una unidad de este producto es de 1,04 euros. Luego, el coste unitario de rotura para este artículo es $c_{21} = 0,00038 \cdot 1,04 = 0,000395$ euros/caja y semana.
- **Nolotil**: En este caso, el coste de compra es de 1,57 euros y el coste de venta es de 2,54 euros. Por lo tanto, el beneficio de vender una unidad de este producto es de 0,97 euros. Luego, el coste unitario de rotura para este artículo es $c_{22} = 0,00038 \cdot 0,97 = 0,00037$ euros/caja y semana.
- **Enjuague bucal Lacer**: En este caso, el coste de compra es de 6,21 euros y el coste de venta es de 10,05 euros. Por lo tanto, el beneficio de vender una unidad de este producto es de 3,84 euros. Luego, el coste unitario de rotura para este artículo es $c_{23} = 0,00038 \cdot 3,84 = 0,0015$ euros/bote y semana.

En cuanto al coste de reposición, se tiene, para cada producto, un coste por reposición diferente:

- **Omeprazol:** El precio de compra del Omeprazol es $\alpha_1 = 1,68$ euros. El coste de reposición c_{31} viene dado por el cinco por ciento del precio de la cantidad solicitada:

$$c_{31} = \frac{0,05 \cdot 1,68 \cdot [20 \cdot 42 + 15 \cdot 10]}{52} = 1,5992 \text{ euros/reposición.}$$

- **Nolotil**: El precio de compra del Nolotil es $\alpha_2 = 1,57$ euros. El coste de reposición c_{32} viene dado por el cinco por ciento del precio de la cantidad solicitada:

$$c_{32} = \frac{0,05 \cdot 1,57 \cdot [30 \cdot 24 + 25 \cdot 28]}{52} = 2,14365 \text{ euros/reposición.}$$

- **Enjuague Bucal Lacer**: Sabiendo que el precio de compra de este producto es $\alpha_3 = 6,21$ euros, el coste de reposición viene dado por el cinco por ciento del precio de la cantidad solicitada:

$$c_{33} = \frac{0,05 \cdot 6,21 \cdot (5 \cdot 3)}{3} = 1,5525 \text{ euros/reposición.}$$

El coste total de la gestión del inventario del producto i viene dado por $C_i = C_{1i} + C_{2i} + C_{3i} = c_{1i} \cdot I_{1i} + c_{2i} \cdot I_{2i} + c_{3i} \cdot I_{3i}$. La suma de los tres costes representa el coste total de la gestión de los productos durante el año 2022. Para calcular I_{1i} (cantidades medias en stock), debemos calcular las áreas que encierran la funciones representadas en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3, relativas a los tres productos que se están estudiando: Omeprazol, Nolotil y Enjuague Bucal Lacer. Por otro lado, $I_{2i} = 0$ en los tres casos ya que en ninguno de ellos se presenta rotura, como se puede observar en los datos. El valor de I_{3i} viene dado por el número de reposiciones realizadas al año de cada producto.

- **Omeprazol**: En este caso, para este producto se tiene $I_{11} = 1664$ cajas/año $=$ 32 cajas/semana, y el valor de I_{31} es 52 ya que durante el año se ha realizado una reposición cada semana. Por otro lado, sabemos por lo calculado anteriormente que $c_{11} = 0,0046$ euros/caja y semana, por tanto $c_{11} = 0,24$ euros/caja y año. También se tiene que $c_{31} = 1,5992$ euros/reposición. El Omeprazol se repone en tandas de 15 o 20 unidades, habiéndose realizado 42 reposiciones de 20 unidades y 10 reposiciones de 15 unidades. Por lo tanto el coste total que este artículo proporciona a la empresa es

$$C_1 = c_{11} \cdot I_{11} + c_{31} \cdot I_{31} = 0,242 \cdot 1664 + 1,5992 \cdot 52 = \boxed{485,85 \text{ euros/año}}$$

- **Nolotil**: Para este producto se tiene $I_{12} = 5484,5$ cajas/año $= 105,4712$ cajas/semana, y el valor de I_{32} es 52 ya que durante el año se ha realizado una reposición cada semana. Por otro lado, sabemos por lo calculado anteriormente que $c_{12} = 0,0037$ euros/caja y semana, por tanto $c_{12} = 0,192$ euros/caja y año. También se tiene que $c_{32} = 2,14365$ euros/reposición. El Nolotil se repone en tandas de 25 o 30 unidades, habiéndose realizado 24 reposiciones de 30 unidades y 28 reposiciones de 25 unidades. Por lo tanto el coste total que este artículo proporciona a la empresa es

$$C_2 = c_{12} \cdot I_{12} + c_{32} \cdot I_{32} = 0,192 \cdot 5484,5 + 2,14365 \cdot 52 = \boxed{1164,49 \text{ euros/año}}$$

- **Enjuague Bucal Lacer**: En este caso se tiene $I_{13} = 435{,}5$ botes/año $= 8{,}375$ botes/semana, y el valor de I_{33} es 3 ya que durante el año se han realizado tres reposiciones. Por otro lado, sabemos por lo analizado anteriormente que $c_{13} = 0,039$ euros/caja y semana, por tanto $c_{13} = 2,037$ euros/caja y año. También se tiene que $c_{33} = 1,5525$ euros/reposición. Por lo tanto el coste total que este artículo proporciona a la empresa es

$$C_3 = c_{13} \cdot I_{13} + c_{33} \cdot I_{33} = 2,037 \cdot 435,5 + 1,5525 \cdot 3 = \boxed{891,771 \text{ euros/año}}$$

En el siguiente capítulo se presenta cómo sería la gestión del inventario de la empresa si se hubiera aplicado alguno de los modelos clásicos de gestión de stocks para unidades discretas, recogidos en el segundo capítulo de esta memoria.

4

Aplicación de algunos modelos clásicos en el control del inventario de los productos

En este capítulo se va a estudiar la gestión del inventario de los tres productos de la farmacia (Omeprazol, Nolotil y Enjuague Bucal Lacer) mediante la aplicación de los modelos de gestión de inventarios desarrollados en el segundo capítulo. Estos son el Modelo de Tamaño del Lote, el Modelo de Nivel de Inventario y el Modelo de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, asumiendo en cada modelo el caso de unidades discretas.

Vamos a considerar ahora que la razón de demanda r es conocida y constante, y para cada artículo será la media de las demandas de ese artículo. Así, se tiene:

Para el producto Omeprazol, la razón de demanda es $r_1 = 19$ cajas por semana.
Para el producto Nolotil, la razón de demanda es $r_2 = 23,9$ cajas por semana.
Para el producto Enjuague Bucal Lacer, la razón de demanda es $r_3 = 0.13462$ botes por semana.

Tras haber calculado en el capítulo anterior los costos unitarios de mantenimiento, rotura y reposición para cada uno de los productos, y considerando las razones de demanda comentadas, se pueden aplicar los modelos mencionados anteriormente. En principio, se estudiarán dos situaciones distintas: el caso en el que se considera que no se admiten roturas, y el caso en el que sí se admiten roturas y son totalmente recuperables. Se debe usar el Sistema Clásico de Tamaño del Lote cuando no se permiten las roturas y el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario cuando las roturas son recuperables. En ambos casos se determina la política óptima cuando se trabaja con unidades discretas. Se va a considerar que S es múltiplo de $u = 1$ y q es múltiplo de $v = 1$. Finalmente, se estudiará la situación en la que el periodo de gestión o ciclo del inventario esté fijado previamente. En este caso, se aplicará el Sistema Clásico de Nivel de Inventario en la gestión y mantenimiento de los productos.

4.1. Caso sin permitir roturas

En principio se va a calcular el tamaño del lote óptimo para cada producto de forma que se minimice el coste total del control del inventario, aplicando el Modelo de Tamaño del Lote en el caso de unidades discretas.

- Para el producto Omeprazol, se tienen los siguientes costes unitarios de mantenimiento, rotura y reposición calculados en el capítulo anterior:

  $c_{11} = 0,0046$ euros por caja y semana.
  $c_{21} = 0,000395$ euros por caja y semana.
  $c_{31} = 1,5992$ euros por reposición.

  En este caso, $q = S$ al no haber roturas, y se debe buscar un valor de q que cumpla la siguiente condición:

  $$q(q-v) \leq \frac{2c_{31}r_1}{c_{11}} \leq q(q+v) \iff q(q-1) \leq 13.210,78 \leq q(q+1)$$

  El valor múltiplo de v que cumple esta condición es $q_0 = 115$ cajas de Omeprazol. Por tanto, el periodo de gestión óptimo es $t_0 = \frac{q_0}{r_1} = \frac{115}{19} = 6,05$ semanas, y el coste mínimo asociado a este producto es

  $$C_0 = C(q_0) = c_{11}\frac{q_0}{2} + c_{31}\frac{r_1}{q_0} = 0,52872 \text{ euros/semana } = 27,49 \text{ euros/año.}$$

- Para el producto Nolotil, se tienen los siguientes costes unitarios de mantenimiento, rotura y reposición calculados previamente en el capítulo tres:

  $c_{12} = 0,0037$ euros por caja y semana.
  $c_{22} = 0,00037$ euros por caja y semana.
  $c_{32} = 2,1437$ euros por reposición.

  De nuevo se debe buscar un valor de q que cumpla la siguiente condición:

  $$q(q-v) \leq \frac{2c_{32}r_2}{c_{12}} \leq q(q+v) \iff q(q-1) \leq 27.694,29 \leq q(q+1)$$

  El valor múltiplo de v que cumple esta condición es $q_0 = 166$ cajas de Nolotil. Por tanto, el periodo de gestión óptimo es $t_0 = \frac{q_0}{r_2} = \frac{166}{23,9} = 6,94$ semanas, y el coste mínimo asociado a este producto es

  $$C_0 = C(q_0) = c_{12}\frac{q_0}{2} + c_{32}\frac{r_2}{q_0} = 0,61574 \text{ euros/semana } = 32,02 \text{ euros/año.}$$

- Para el producto Enjuague Bucal Lacer, se tienen los siguientes costes unitarios de mantenimiento, rotura y reposición calculados obtenidos en el tercer capítulo:

  $c_{13} = 0,0390$ euros por caja y semana.

$c_{23} = 0,0015$ euros por caja y semana.
$c_{33} = 1,5525$ euros por reposición.

Al igual que para los productos ateriores, se debe buscar un valor de q que cumpla la siguiente condición:

$$q(q-v) \leq \frac{2c_{33}r_3}{c_{13}} \leq q(q+v) \iff q(q-1) \leq 10,72 \leq q(q+1)$$

El valor múltiplo de v que cumple esta condición es $q_0 = 3$. Por tanto, el periodo de gestión óptimo es $t_0 = \frac{q_0}{r_3} = \frac{3}{0,1346} = 22,28$ semanas, y el coste mínimo asociado a este producto es

$$C_0 = C(q_0) = c_{13}\frac{q_0}{2} + c_{33}\frac{r_3}{q_0} = 0,1282 \text{ euros/semana } = 6,66 \text{ euros/año.}$$

4.2. Caso con roturas recuperables

En este apartado se considera el Modelo Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario con unidades discretas, para obtener los valores óptimos de S y q, siendo éstos múltiplos de $u = 1$ y $v = 1$ respectivamente.

Para aplicar este modelo, podemos obtener la solución óptima mediante el algoritmo planteado en el capítulo dos, o bien calcular una solución aproximada mediante la heurística (Algoritmo 2) propuesta en dicho capítulo. El primer algoritmo ha sido programado mediante el programa matemático Matlab, como se puede observar en el Apéndice. De ahí se han obtenido las siguientes soluciones óptimas para cada producto.

- **Omeprazol**:
  Para el producto Omeprazol, la solución óptima dada por el Algoritmo 1 es $q_0 = 408$ y $S_0 = 32$. A continuación podemos comprobar que la solución aproximada obtenida a partir de la heurística nos da también la misma solución.

  Paso 1: Calcular q_0 y S_0 mediante las fórmulas óptimas del caso continuo. Así, tendremos que

$$q_0 = \sqrt{\frac{2c_{31}r_1(c_{11}+c_{21})}{c_{11}c_{21}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5992 \cdot 19 \cdot (0,0046 + 0,000395)}{0,0046 \cdot 0,000395}} = 408,39$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2r_1c_{31}c_{21}}{c_{11}(c_{11}+c_{21})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5992 \cdot 19 \cdot 0,000395}{0,0046 \cdot (0,0046 + 0,000395)}} = 32,30$$

Paso 2: Hallamos los valores siguientes:
$q_0^1 = 408$: máximo valor múltiplo de v que sea menor o igual que q_0
$q_0^2 = 409$: mínimo valor múltiplo de v que sea mayor o igual que q_0
$S_0^1 = 32$: máximo valor múltiplo de u que sea menor o igual que S_0
$S_0^2 = 33$: mínimo valor múltiplo de u que sea mayor o igual que S_0

Paso 3: Calcular los siguientes valores: $C(S_0^1, q_0^1)$, $C(S_0^1, q_0^2)$, $C(S_0^2, q_0^1)$ y $C(S_0^2, q_0^2)$, donde la función de coste es

$$C(S, q) = c_{11}\frac{S^2}{2q} + c_{21}\frac{(q-S)^2}{2q} + c_{31}\frac{r_1}{q}.$$

Así, se tiene
$C(S_0^1, q_0^1) = C(32, 408) = 0,1486807843$ euros/semana.
$C(S_0^1, q_0^2) = C(32, 409) = 0,1486808741$ euros/semana.
$C(S_0^2, q_0^1) = C(33, 408) = 0,1486836703$ euros/semana.
$C(S_0^2, q_0^2) = C(33, 409) = 0,1486827873$ euros/semana.

Paso 4: Elegir como política aproximada la de menor coste de las cuatro anteriores. Por tanto se considera la política $q_0 = 408$ y $S_0 = 32$

Luego, en este caso, la solución propuesta por ambos algoritmos será la misma: $S_0 = 32$, $q_0 = 408$ y $s_0 = S_0 - q_0 = -376$. Es decir, se tiene que el nivel de inventario es $S_0 = 32$ cajas de Omeprazol, y los pedidos que se realizarán para reponer el inventario serán de $q_0 = 408$ cajas. Considerando roturas en nuestro modelo, se ha obtenido que el punto de reposición será $s = -376$. Como la cantidad pedida para reponer el inventario debe coincidir con la cantidad demandada en cada ciclo del inventario, se tiene $q = r_1 \cdot t$, siendo t el periodo de gestión. Así, obtenemos que el periodo de gestión óptimo es $t_0 = \frac{q_0}{r_1} = 21,47$ semanas, es decir, aproximadamente 5 meses. Sustituyendo la política $S_0 = 32$ y $q_0 = 408$ en la función de coste y multiplicando por 52 semanas que tiene un año, se puede concluir que el mínimo costo anual que supone este modelo es $C_0 = 7,731400784$ euros.

- **Nolotil**:
Para el producto Nolotil, la solución óptima dada por el primer algoritmo es $q_0 = 552$ y $S_0 = 50$. A continuación comprobamos que la solución aproximada que nos da la heurística también coincide con la solución anterior.

Paso 1: Calcular q_0 y S_0 mediante las fórmulas óptimas del caso continuo. Así, se tiene

$$q_0 = \sqrt{\frac{2c_{32}r_2(c_{12}+c_{22})}{c_{12}c_{22}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,14365 \cdot 23,9 \cdot (0,0037 + 0,00037)}{0,0037 \cdot 0,00037}} = 551,933$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2r_2c_{32}c_{22}}{c_{12}(c_{12}+c_{22})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,14365 \cdot 23,9 \cdot 0,00037}{0,0037 \cdot (0,0037 + 0,00037)}} = 50,176$$

Paso 2: Hallar los valores siguientes:
$q_0^1 = 551$: máximo valor múltiplo de v que sea menor o igual que q_0
$q_0^2 = 552$: mínimo valor múltiplo de v que sea mayor o igual que q_0
$S_0^1 = 50$: máximo valor múltiplo de u que sea menor o igual que S_0
$S_0^2 = 51$: mínimo valor múltiplo de u que sea mayor o igual que S_0

Paso 3: Calcular los siguientes valores: $C(S_0^1, q_0^1)$, $C(S_0^1, q_0^2)$, $C(S_0^2, q_0^1)$ y $C(S_0^2, q_0^2)$, donde la función de coste es

$$C(S,q) = c_{12}\frac{S^2}{2q} + c_{22}\frac{(q-S)^2}{2q} + c_{32}\frac{r_2}{q}.$$

Así, se tiene
$C(S_0^1, q_0^1) = C(50, 551) = 0,18565049$ euros/semana.
$C(S_0^1, q_0^2) = C(50, 552) = 0,185650317$ euros/semana.
$C(S_0^2, q_0^1) = C(51, 551) = 0,1856535118$ euros/semana.
$C(S_0^2, q_0^2) = C(51, 552) = 0,185652663$ euros/semana.

Paso 4: Elegir como política aproximada la de menor coste de las cuatro enteriores. Así, se elige la política $q_0 = 552$ y $S_0 = 50$

Por tanto, en este caso, la solución propuesta por ambos algoritmos sería $S_0 = 50$, $q_0 = 552$ y $s_0 = S_0 - q_0 = -502$. Es decir, se tiene que el nivel de inventario es $S_0 = 50$ cajas de Nolotil, y los pedidos que se realizarán para reponer el inventario serán de $q_0 = 552$ cajas. Considerando roturas en nuestro modelo, se ha obtenido que el punto de reposición será $s = -502$. Al existir la relación lineal $q = r_2 \cdot t$, siendo t el periodo de gestión, en este caso obtenemos que el periodo de gestión óptimo es $t_0 = 23,1$ semanas, es decir, aproximadamente 6 meses. Se puede concluir que el mínimo costo anual que supone este modelo es $C_0 = 9,653816486$ euros.

- **Enjuague Bucal Lacer**:
  Para el producto Enjuague Bucal Lacer, la solución óptima dada por el primer algoritmo es $q_0 = 6$ y $S_0 = 2$. A continuación comprobamos que esta solución coincide con la solución aproximada obtenida a partir de la heurística.

  Paso 1: Calcular q_0 y S_0 mediante las fórmulas óptimas del caso continuo. Así, tendremos que

$$q_0 = \sqrt{\frac{2c_{33}r_3(c_{13}+c_{23})}{c_{13}c_{23}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5525 \cdot 0,1346 \cdot (0,039+0,0195)}{0,039 \cdot 0,0195}} = 5,67$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2r_3c_{33}c_{23}}{c_{13}(c_{13}+c_{23})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5525 \cdot 0,1346 \cdot 0,0195}{0,039 \cdot (0,039+0,0195)}} = 1,88999$$

Paso 2: Hallamos los valores siguientes:
$q_0^1 = 5$: máximo valor múltiplo de v que sea menor o igual que q_0
$q_0^2 = 6$: mínimo valor múltiplo de v que sea mayor o igual que q_0
$S_0^1 = 1$: máximo valor múltiplo de u que sea menor o igual que S_0
$S_0^2 = 2$: mínimo valor múltiplo de u que sea mayor o igual que S_0

Paso 3: Calcular los siguientes valores: $C(S_0^1, q_0^1)$, $C(S_0^1, q_0^2)$, $C(S_0^2, q_0^1)$ y $C(S_0^2, q_0^2)$, donde la función de coste es

$$C(S,q) = c_{13}\frac{S^2}{2q} + c_{23}\frac{(q-S)^2}{2q} + c_{33}\frac{r_3}{q}.$$

Así, se tiene
$C(S_0^1, q_0^1) = C(1,5) = 0,0768933$ euros/semana.
$C(S_0^1, q_0^2) = C(1,6) = 0,07870275$ euros/semana.
$C(S_0^2, q_0^1) = C(2,5) = 0,0749433$ euros/semana.
$C(S_0^2, q_0^2) = C(2,6) = 0,07382775$ euros/semana.

Paso 4: Elegir como política aproximada la de menor coste de las cuatro enteriores. Así, se elige la política $q_0 = 6$ y $S_0 = 2$.

Por tanto, en este caso, la solución propuesta por ambos algoritmos sería $S_0 = 2$ $q_0 = 6$ y $s_0 = S_0 - q_0 = -4$. Es decir, se tiene que el nivel de inventario es $S_0 = 2$ botes de Enjuague Bucal Lacer, y los pedidos que se realizarán para reponer el inventario serán de $q_0 = 6$ cajas o botes. Considerando roturas en nuestro modelo, se ha obtenido que el punto de reposición será $s = -4$ botes. Al existir la relación lineal $q = r_3 \cdot t$, siendo t el periodo de gestión, en este caso se obtiene que el periodo de gestión óptimo es $t_0 = 44,58$ semanas, es decir, aproximadamente 11 meses. Se puede concluir que el mínimo costo anual que supone este modelo es $C_0 = 3,839043$ euros.

Con esto, hemos obtenido las políticas óptimas para cada producto cuando se permiten roturas. Se puede observar que el coste mínimo es mucho menor que en el caso en el que no se consideran roturas. Sin embargo, estos resultados no son realistas ya que los clientes generalmete no están dispuestos a esperar 5, 6 u 11 meses para recibir sus productos. Por tanto, en la siguiente sección, vamos a estudiar cuál sería la política óptima de inventario si se fija de antemano el periodo de gestión t. Es decir, los clientes no deben esperar más de un cierto periodo de tiempo por la llegada de dichos productos. Por tanto, en el siguiente apartado vamos a aplicar el Sistema de Nivel de Inventario considerando que el periodo de gestión está fijado previamente.

4.3. Periodo de gestión fijado

Como el periodo de gestión o ciclo de inventario se considera ahora fijado de antemano ($t = t_f$), se debe aplicar el Modelo Clásico de Nivel de Inventario en el caso de unidades discretas a los tres productos. Nótese que el tamaño del lote q está fijado pues $q = q_{if} = r_i \cdot t_f$, $i = 1, 2, 3$, y el nivel de inventario S sigue siendo un valor entero múltiplo de $u = 1$.

Primero se determina la política óptima si se considera que el periodo de gestión es de una semana, luego se obtendrá la política óptima cuando el periodo de gestión sea dos y tres semanas.

4.3.1. El ciclo de inventario es una semana

Se considera que el ciclo de inventario es $t_f = 1$ semana. En este caso se analiza la política óptima para cada producto.

- Para el producto Omeprazol, se tiene que $q_{1f} = r_1 \cdot t_f = 19$ unidades o cajas. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:

  $$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_{21} q_{1f}}{c_{11} + c_{21}} \leq S + \frac{u}{2}$$

  es decir,

  $$S - \frac{1}{2} \leq 1,502502 \leq S + \frac{1}{2}$$

  Este valor viene dado por $S_0 = 2$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 2$, $q_0 = q_{1f} = 19$, $s_0 = -17$ y $t_0 = 1$ semana. El coste mínimo correspondiente a esta política es:

  $$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{11} \frac{S^2}{2q_0} + c_{21} \frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{31} \frac{r_1}{q_0} =$$

  $$= 1,5228995 \text{ euros/semana} = 79,190774 \text{ euros/año}$$

- Para el producto Nolotil, se tiene que $q_{2f} = r_2 \cdot t_f = 23,9$ unidades. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:
$$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_{22}q_{2f}}{c_{12} + c_{22}} \leq S + \frac{u}{2}$$
es decir,
$$S - \frac{1}{2} \leq 2,17272727 \leq S + \frac{1}{2}$$
Este valor viene dado por $S_0 = 2$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 2$, $q_0 = 24$, $s_0 = -22$ y $t_0 = 1$ semana, ya que q debe ser un valor entero múltiplo de $v = 1$. El coste mínimo correspondiente a esta política es:
$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{12}\frac{S^2}{2q_0} + c_{22}\frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{32}\frac{r_2}{q_0} =$$
$$= 2,138757292 \text{ euros/semana} = 111,2153792 \text{ euros/año.}$$
- Para el producto Enjuague Bucal Lacer, se tiene que $q_{3f} = r_3 \cdot t_f = 0,1346$ unidades. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:
$$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_{23}q_{3f}}{c_{13} + c_{23}} \leq S + \frac{u}{2}$$
es decir,
$$S - \frac{1}{2} \leq 0,04486666667 \leq S + \frac{1}{2}$$
Este valor viene dado por $S_0 = 0$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 0$, $q_0 = 1$, $s_0 = -1$ y $t_0 = 1$ semana, ya que q debe ser un valor entero múltiplo de $v = 1$. El coste mínimo correspondiente a esta política es:
$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{13}\frac{S^2}{2q_0} + c_{23}\frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{33}\frac{r_3}{q_0} =$$
$$= 0,2187165 \text{ euros/semana} = 11,37 \text{ euros/año.}$$

Ahora bien, la solución anterior propuesta para el enjuague bucal es algo contradictoria, ya que alcanzar una unidad de rotura para poder reponer el inventario requiere que transcurran varias semanas, debido a que la razón de demanda r_3 del producto es muy pequeña. Así, este producto requiere en torno a ocho semanas por término medio para que aparezca la demanda de una caja del enjuague bucal, luego según esto, en una semana no se debería reponer el producto.

Por otro lado, si se obliga a tener que reponer al menos una unidad del enjuague bucal cada semana, entonces al ser la demanda tan pequeña estaríamos inflando el stock de dicho producto y la cantidad media mantenida en el inventario iría aumentando con el paso del tiempo.

En consecuencia, la mejor decisión para este producto será no hacer ningún pedido al principio de cualquier semana si en la semana anterior no ha habido demanda del producto, y realizar un pedido sólo cuando haya habido demanda del producto en el periodo previo. En este caso, se debe solicitar exactamente la cantidad demandada en la semana anterior. En resumen, no habría stock y estaríamos siempre en rotura. Para esta nueva política, el coste que tendríamos sería $\frac{c_{23}}{2}+c_{33}$ para un periodo de ocho semanas, es decir, $\frac{c_{23}}{16}+\frac{c_{33}}{8}=\frac{0{,}0015}{16}+\frac{1{,}2555}{8}=0,19415625$ euros sería el coste por semana.

Nótese que, en general, para todos los productos analizados el valor del coste mínimo ha aumentado con respecto al caso sin roturas, ya que ahora los clientes no deben esperar más de una semana por la llegada de sus pedidos.

4.3.2. El ciclo de inventario es dos semanas

Se va a considerar ahora que el periodo de gestión o ciclo de inventario es $t_f =$ 2 semanas. Por tanto, aplicando el Sistema de Nivel de Inventario, se obtienen los siguientes resultados.

- Para el producto Omeprazol, se tiene que $q_{1f} = r_1 \cdot t_f = 38$ unidades. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:

$$S-\frac{u}{2}\leq\frac{c_{21}q_{1f}}{c_{11}+c_{21}}\leq S+\frac{u}{2}$$

  es decir,

$$S-\frac{1}{2}\leq 3,005005005\leq S+\frac{1}{2}$$

  Este valor viene dado por $S_0 = 3$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 3$, $q_0 = 38$, $s_0 = -35$ y $t_0 = 2$ semanas. El coste mínimo correspondiente a esta política es:

$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{11}\frac{S^2}{2q_0} + c_{21}\frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{31}\frac{r_1}{q_0} =$$

$$= 0,8065115132 \text{ euros/semana} = 41,94 \text{ euros/año}.$$

- Para el producto Nolotil, se tiene que $q_{2f} = r_2 \cdot t_f = 47,8$ unidades. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:

$$S-\frac{u}{2}\leq\frac{c_{22}q_{2f}}{c_{12}+c_{22}}\leq S+\frac{u}{2}$$

es decir,

$$S - \frac{1}{2} \leq 4,345454545 \leq S + \frac{1}{2}$$

Este valor viene dado por $S_0 = 4$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 4$, $q_0 = 48$, $s_0 = -44$ y $t_0 = 2$ semanas, ya que q debe ser un valor entero múltiplo de $v = 1$. El coste mínimo correspondiente a esta política es:

$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{12}\frac{S^2}{2q_0} + c_{22}\frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{32}\frac{r_2}{q_0} =$$

$$= 1,075437396 \text{ euros/semana} = 55,92 \text{ euros/año.}$$

- Para el producto Enjuague Bucal Lacer, se tiene que $q_{3f} = r_3 \cdot t_f = 0,2692$ unidades. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:

$$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_{23}q_{3f}}{c_{13} + c_{23}} \leq S + \frac{u}{2}$$

es decir,

$$S - \frac{1}{2} \leq 0,08973333333 \leq S + \frac{1}{2}$$

Este valor viene dado por $S_0 = 0$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 0$, $q_0 = 1$, $s_0 = -1$ y $t_0 = 2$ semanas, ya que q debe ser un valor entero múltiplo de $v = 1$. El coste mínimo correspondiente a esta política es:

$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{13}\frac{S^2}{2q_0} + c_{23}\frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{33}\frac{r_3}{q_0} =$$

$$= 0,2187165 \text{ euros/semana} = 11,37 \text{ euros/año.}$$

Nótese que esta política coincide con la política obtenida cuando $t_f = 1$ semana. Ello es debido a que la cantidad a pedir $q_0 = 1$ unidad y el nivel de inventario $S_0 = 0$ unidades es la misma en ambos casos. Por ello, nos encontramos en la misma situación que antes, esto es, la solución obtenida es algo contradictoria, ya que en el periodo de dos semanas no se cubre en media una unidad del enjuague bucal. Consecuentemente, la solución que se propone es similar a la comentada para un ciclo de inventario de una semana. Así, no se debe tener stock y si en el periodo de dos semanas hay demanda, entonces al principio de la siguiente semana se debe pedir lo demandado para cubrir la rotura. En caso contrario, no se debe realizar ningún pedido.

4.3.3. El ciclo de inventario es tres semanas

Por último, consideraremos un periodo de gestión de $t_f = 3$ semanas, y en este caso se obtienen los siguientes costes óptimos para cada producto.

- Para el producto Omeprazol, se tiene que $q_{1f} = r_1 \cdot t_f = 57$. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:
$$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_{21} q_{1f}}{c_{11} + c_{21}} \leq S + \frac{u}{2}$$
es decir,
$$S - \frac{1}{2} \leq 4,507507508 \leq S + \frac{1}{2}$$
Este valor viene dado por $S_0 = 5$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 5$, $q_0 = 57$, $s_0 = -52$ y $t_0 = 3$ semanas. El coste mínimo correspondiente a esta política es:
$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{11} \frac{S^2}{2q_0} + c_{21} \frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{31} \frac{r_1}{q_0} =$$
$$= 0,5434445614 \text{ euros/semana} = 28,26 \text{ euros/año}.$$
- Para el producto Nolotil, se tiene que $q_{2f} = r_2 \cdot t_f = 71,7$ unidades. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:
$$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_{22} q_{2f}}{c_{12} + c_{22}} \leq S + \frac{u}{2}$$
es decir,
$$S - \frac{1}{2} \leq 6,518181818 \leq S + \frac{1}{2}$$
Este valor viene dado por $S_0 = 7$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 7$, $q_0 = 72$, $s_0 = -65$ y $t_0 = 3$ semanas, ya que q debe ser un valor entero múltiplo de $v = 1$. El coste mínimo correspondiente a esta política es:
$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{12} \frac{S^2}{2q_0} + c_{22} \frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{32} \frac{r_2}{q_0} =$$
$$= 0,7236876389 \text{ euros/semana} = 37,63 \text{ euros/año}.$$
- Para el producto Enjuague Bucal Lacer, se tiene que $q_{3f} = r_3 \cdot t_f = 0,4038$ unidades. Se debe buscar S múltiplo de $u = 1$ que cumpla la desigualdad siguiente:
$$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_{23} q_{3f}}{c_{13} + c_{23}} \leq S + \frac{u}{2}$$

es decir,

$$S - \frac{1}{2} \leq 0,1346 \leq S + \frac{1}{2}$$

Este valor viene dado por $S_0 = 0$. Por tanto, la política óptima en este caso viene dada por: $S_0 = 0$, $q_0 = 1$, $s_0 = -1$ y $t_0 = 2$ semanas, ya que q debe ser un valor entero múltiplo de $v = 1$. El coste mínimo correspondiente a esta política es:

$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_{13}\frac{S^2}{2q_0} + c_{23}\frac{(q_0 - S)^2}{2q_0} + c_{33}\frac{r_3}{q_0} =$$

$$= 0,2187165 \text{ euros/semana} = 11,37 \text{ euros/año}.$$

Nótese que esta política coincide con las políticas obtenidas cuando $t_f = 1$ y $t_f = 2$ semanas. Ello es debido a que la cantidad a pedir $q_0 = 1$ unidad y el nivel de inventario $S_0 = 0$ unidades es la misma en los tres casos. Pero, como ya hemos comentado anteriormente, al ser la razón de demanda tan pequeña, la mejor decisión es no mantener nunca stock y pedir solamente cuando haya habido alguna demanda en el periodo anterior de tres semanas. La cantidad a pedir al inicio del siguiente ciclo del inventario debe coincidir con la cantidad demandada en el periodo previo.

Se observa que al suponer que los clientes están dispuestos a esperar tres semanas por la llegada de los productos, el coste anual disminuye considerablemente con respecto al caso en el que los clientes esperan dos semanas por los productos, y es bastante similar al caso en el que no se consideran roturas en el sistema.

Conclusiones

En este trabajo de fin de grado se ha estudiado la aplicación de algunos modelos clásicos de gestión de inventarios al control del stock de varios artículos comercializados en una farmacia.

Primero, se han recogido las principales características que configuran los sistemas de inventario y luego se han presentado algunos modelos matemáticos de gestión de inventarios que pueden ayudar en el análisis y control del inventario de tres productos que se venden en la farmacia: *Omeprazol, Nolotil* y *Enjuague Bucal Lacer*.

Posteriormente, se han determinado los costes que intervienen en el mantenimiento y gestión del stock de estos tres productos y su cuantificación, teniendo en cuenta la política realizada por la empresa en la gestión y control de estos productos. Así, aplicando las tácticas y decisiones que han empleado los responsables de la farmacia para la gestión del inventario, se obtienen costes anuales de $485,85$ euros, $1164,49$ euros y $891,771$ euros para los productos Omeprazol, Nolotil y Enjuague Bucal Lacer, respectivamente, durante el año 2022.

Luego, en el capítulo cuatro se ha analizado la aplicación de diferentes modelos de control de stocks a los productos de la empresa. En primer lugar, se ha aplicado el Sistema Clásico de Tamaño del Lote, en el que no se consideran roturas, y se obtiene que el coste anual asociado con el producto Omeprazol es de $27,49$ euros, el coste de Nolotil es $32,02$ euros por año, y el coste anual del producto Enjuague Bucal Lacer es $6,66$ euros. Nótese que estos costes son mucho menores que los obtenidos siguiendo la política de la empresa. Por tanto, aplicando este sistema se consigue reducir en gran cantidad el coste de los tres productos.

En segundo lugar, se ha analizado la situación en la que se permiten roturas recuperables. Para ello, se sigue la política que viene dada por el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, y así se consigue un coste mucho menor con respecto al obtenido con el modelo anterior. El coste anual asociado con el producto Omeprazol es $7,73$ euros, el coste anual de Nolotil es $9,65$ euros y el coste del producto Enjuague Bucal Lacer es $3,84$ euros por año. Sin embargo, aunque se haya conseguido una gran mejora con respecto al coste, este caso puede no ser muy realista, pues siguiendo la política óptima obtenida, se asume que los clientes están dispuestos a esperar más de cinco meses por la llegada de los productos a la farmacia, lo cual es dudoso de aceptar y puede no ser apropiado en la práctica.

Por ello, se ha planteado analizar el caso en el que se consideren roturas recuperables, pero fijando de antemano el periodo de gestión o ciclo del inventario. De este modo los clientes sólo tendrían que esperar ese periodo de tiempo por la llegada de sus productos. Así, se ha aplicado también el Sistema Clásico de Nivel de Inventario para los casos en los que el ciclo de inventario fuera $t_f = 1, 2$ o 3 semanas. Los costes obtenidos con estas políticas óptimas son, en general, mayores a los costes obtenidos tanto en el caso en el que no se consideran roturas como en el caso en el que se permiten roturas recuperables.

En consecuencia, considerando no realista la situación en la que se supone que los clientes están dispuestos a esperar más de cinco meses por la llegada de los productos, se puede deducir que la mejor opción para la gestión del inventario de estos tres productos es considerar la política óptima obtenida al aplicar el Sistema Clásico de Tamaño del Lote. Se comprueba que siguiendo dicha política, el coste es mucho menor que el coste soportado por la empresa durante el año 2022.

A

Apéndice

En este apéndice recogemos el programa desarrollado para la programación del Algoritmo 1 estudiado en el capítulo dos para determinar la política óptima de inventario en el Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, considerando el caso de unidades discretas. El programa propuesto se ha desarrollado en Matlab y se detalla a continuación.

A.1. Código del programa

```
function costes(c1,c2,c3,r)
v=1;
W=zeros(1,3000); %vector que guarda los costes en cada iteracion
S=zeros(1,3000); % guarda los valores de S
% Resolvemos el caso k=1 fuera del bucle:
S1=v;
S2=round(c2*v/(c1+c2),0);
coste2=c1*(S2.^2)/(2*v)+c2*((v-S2).^2)/(2*v)+c3*r/v;
coste1=c1*(S1-v/2)+c3*(r/v);
coste3=c2*v/2+c3*r/v;
if (coste3 < coste2) && (coste3<coste1)
    W(1)=coste3;
elseif coste2<coste1
    W(1)=coste2;
else
    W(1)=coste1;
end
if W(1)==coste3
    S(1)=0;
elseif coste1 < coste2
    S(1)=S1;
else
    S(1)=S2;
end
% Realizamos las demas iteraciones:
for k=2:3000
    q=k*v;
    x=c2*q/(c1+c2);
```

```
    S01=q;
    S02=round(x,0);
    C=c1*(S02.^2)/(2*q)+c2*((q-S02).^2)/(2*q)+c3*r/q;
    C2=c1*(S01-q/2)+c3*r/q;
    C3=c2*q/2+c3*r/v;
    if (C3 < C2) && (C3<C)
        W(k)=C3;
    elseif C2<C
           W(k)=C2;
    else
        W(k)=C;
    end
    if W(k)==C3
        S(k)=0;
    elseif C < C2
        S(k)=S02;
    else
        S(k)=S01;
    end
    fprintf('coste del paso k=%d: C=%d, C2=%d con S02=%d y S01=%d \n',
    k,C,C2,S02,S01)
    if W(k-1)<W(k)
       fprintf('La solucion se da en el paso k=%d, con q=%d y S=%d',
       k-1, (k-1)*v , S(k-1))
       break
    end
end
end
```

- Para los datos correspondientes al producto **Omeprazol**, se tienen los siguientes resultados:
  ≫costes(0.0046,0.000395,1.5992,19)
  ≫La solución óptima se da en el paso k=204, con **q=408** y **S=32**.
- Para el producto **Nolotil**, se tiene:
  ≫costes(0.0037,0.00037,2.14365,23.9)
  ≫La solución óptima se da en el paso k=276, con **q=552** y **S=50**.
- Para el **Enjuague Bucal Lacer**, se tiene:
  ≫costes(0.039,0.0195,1.5525,0.1346)
  ≫La solución óptima se da en el paso k=3, con **q=6** y **S=2**.

Bibliografía

[1] HILIER F.S. y LIEBERMAN G.J. *Introducción a la Investigación de Operaciones.* 2010. Ed. McGraw-Hill. Disponible en: https://dudasytareas.files.wordpress.com/2017/05/hillier_lieberman.pdf.

[2] ZAPATA CORTES, J.A. *Fundamentos de la gestión de inventarios.* 2014. Centro Editorial Esumer. Disponible en: https://www.accioneduca.org/admin/archivos/clases/material/manejo-de-inventario_1563983589.pdf.

[3] TRAJADA A.A.,PRADO M.V., CARDENAS A., JANAMPA G.G, JANAMPA N, y GRIJALVA R.V. *Gestión de Stock y mejora continua.* 2022. Ed. Grupo Compás. Disponible en: http://142.93.18.15:8080/jspui/bitstream/123456789/780/1/iii.pdf.

[4] LOPEZ MONTES, J. *Gestión de Inventarios.* 2014. Ed. ELEARNING S.L. Disponible en: https://www.editorialelearning.com/catalogo/media/iverve/uploadpdf/1525965865_UF0476_demo.pdf.

[5] MORALES PIÑERO, J.C. *Gestión de Inventarios: Principales modelos aplicados a casos prácticos.* 2020. 658.787 ed. 22. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Juan-Morales-Pinero/publication/346961204_Gestion_de_inventarios_1/links/5fd40b7192851c13fe7be87b/Gestion-de-inventarios-1.pdf.

[6] RAMIREZ C.V., GARCIA M. y PANTOJA C.R. *Fundamentos y técnicas de costos.* 2010. Ed. Universidad Libre, Sede Cartagena. Disponible en: https://www.unilibre.edu.co/cartagena/pdf/investigacion/libros/ceac/FUNDAMENTOS_Y_TECNICAS%20DE%20COSTO.pdf.