

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и технологий  
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

## Телекоммуникационные технологии

Отчет по лабораторным работам №1, №2

Сигналы телекоммуникационных систем. Ряд Фурье. Преобразование Фурье.  
Корреляция.

**Работу выполнил:**

Маринченко В.А.

Группа: 33501/4

**Преподаватель:**

Богач Н.В.

Санкт-Петербург  
2018

# Содержание

<b>1</b>	<b>Название работы</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Цели работы</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Теоретическая информация</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>Ход работы</b>	<b>3</b>
5.1	Matlab . . . . .	3
5.1.1	Исследование синусоидальных сигналов . . . . .	3
5.1.2	Исследование прямоугольных сигналов . . . . .	5
5.2	Simulink . . . . .	7
5.2.1	Исследование синусоидальных сигналов . . . . .	7
5.2.2	Исследование прямоугольных сигналов . . . . .	8
5.3	Корреляция . . . . .	10
5.3.1	Прием пакета данных . . . . .	10
5.3.2	Сравнение алгоритмов быстрой и прямой корреляции . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Выводы</b>	<b>11</b>

# 1 Название работы

Раздел «Элементы частотно-временного анализа», лабораторная работа №1 «Сигналы телекоммуникационных систем», лабораторная работа №2 «Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция».

## 2 Цели работы

- Познакомиться со средствами генерации и визуализации простых сигналов.
- Получить представление о спектрах телекоммуникационных сигналов.

## 3 Постановка задачи

1. В командном окне MatLab и в среде Simulink промоделировать синусоидальный и прямоугольный сигналы с различными параметрами.
2. Получить их спектры с помощью преобразования Фурье, вывести на график.
3. С помощью функции корреляции найти позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получить пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислить корреляцию прямым методом, воспользоваться алгоритмом быстрой корреляции, сравнить время работы обоих алгоритмов.

## 4 Теоретическая информация

Классификация сигналов осуществляется на основании существенных признаков соответствующих математических моделей сигналов. Все сигналы разделяют на две крупных группы: детерминированные и случайные (рис. 1).



Рис. 1: Классификация сигналов

Для исследования периодических сигналов, к которым относятся синусоидальный и прямоугольный сигнал, нужно выделить их основные параметры: период (частота), амплитуда и фаза. В ходе работы будем их варьировать и анализировать результат (график, спектр).

Синусоидальный сигнал является гармоническим периодическим детерминированным сигналом и описывается формулой

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

где  $A$  - амплитуда,  $f_0$  - частота,  $t$  - время,  $\phi$  - фаза сигнала.

Прямоугольный сигнал (меандр) относится к полигармоническим периодическим детерминированным сигналам, которые являются суммой гармоник и описываются формулой

$$s(t) = \sum_{n=0}^N A_n \sin(2\pi f_n t + \phi_n)$$

где  $n$  - номер гармоники,  $A_n$  - амплитуда  $n$ -той гармоники,  $f_n$  - частота  $n$ -той гармоники,  $t$  - время,  $\phi_n$  - фаза  $n$ -той гармоники.

Существует два способа представления сигналов: временной и частотный.

В первом случае сигнал представляется функцией времени  $s(t)$ , характеризующей изменение его параметра.

Во втором используется описание сигналов функциями частоты. Действительно, любой сколь угодно сложный по своей форме сигнал можно представить в виде суммы более простых сигналов, и, в частности, в виде суммы простейших гармонических колебаний, совокупность которых называется частотным спектром сигнала.

Для перехода к частотному способу представления используется преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

Функция  $S(\omega)$  называется спектральной функцией и является комплексной.

Свойства преобразования Фурье:

1. Линейность

$$F(ax(t) + by(t)) = aX(w) + bY(w)$$

2. Задержка во времени

$$\text{Пусть } X(w) \text{ - спектр } x(t). \text{ Тогда спектр } F[x(t - \tau)] = e^{-jw\tau} X(w)$$

3. Изменение масштаба

$$\text{Пусть } X(w) \text{ - спектр } x(t). \text{ Тогда спектр } F[x(at)] = X(w/a)/a$$

4. Умножение на  $e^{jw_0 t}$

$$\text{Пусть } X(w) \text{ - спектр } x(t). \text{ Тогда спектр } F[e^{jw_0 t} x(t)] = X(w - w_0)$$

5. Спектр производной

$$\text{Пусть } X(w) \text{ - спектр } x(t). \text{ Тогда спектр } F[dx(t)/dt] = jwX(w)$$

6. Спектр интеграла

Найдем спектр сигнала  $g(t) = \int_{-\infty}^t x(z)dz$ . Будем считать, что у спектра отсутствует постоянная составляющая. Тогда  $F[g(t)] = X(w)/jw$ .

7. Теорема о свертке

Пусть  $X(w)$  и  $G(w)$  - спектры функций  $x(t)$  и  $g(t)$ . Тогда спектр свертки  $u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z)g(t-z)dz$  выражается как  $X(w) \cdot G(w)$ .

8. Произведение сигналов

Пусть  $X(w)$  и  $G(w)$  - спектры функций  $x(t)$  и  $g(t)$ . Тогда спектр произведения  $x(t) \cdot g(t)$  выражается как свертка  $1/2\pi[X(w) * G(w)]$ .

## 5 Ход работы

### 5.1 Matlab

#### 5.1.1 Исследование синусоидальных сигналов

Создадим функцию синусоидального сигнала, аргументами которой будут являться амплитуда  $A$ , частота  $f$ , фаза  $\phi$  и время  $t$ .

Пусть параметры  $A, f, \phi$  задаются векторами-столбцами с одинаковой размерностью от 1, а параметр  $t$  - вектором-строкой размерностью от 2.

Таким образом, с помощью этой функции можно получить матрицу, строки которой будут содержать дискретные значения сигналов во все моменты времени  $t$  (количество сигналов будет соответствовать размерности векторов  $A, f, \phi$ ).

Листинг 1: Функция синусоидального сигнала

```
1 function [ y ] = signal_sin( A, f, phi, t )
2
3 % A - amplitude
4 % f - frequency, Hz
5 % phi - phase, rad
6 % t - time, s
7
8 y = A * ones(1,length(t)) .* ...
9     sin(2 .* pi .* f * t + ...
```

```

10     phi * ones(1,length(t)) );
11
12 end

```

Создадим функцию генерации нескольких сигналов со случайными параметрами  $A$ ,  $f$ ,  $\phi$ . Аргументами функции будут являться количество сигналов  $N$  и вектор  $t$ . Сгенерируем 4 синусоидальных сигнала со случайными параметрами.

Листинг 2: Функция генерации синусоидальных сигналов

```

1 function S = gen_rand_sin( N, t )
2 % N — signal num
3 % t — time
4
5 A = rand(N,1);           % amplitudes
6 f = rand(N,1) .* 20;     % frequencies
7 phi = rand(N,1) .* pi;   % phases
8
9 S = signal_sin(A,f,phi,t); % signals
10
11 end

```

Построим графики полученных сигналов.

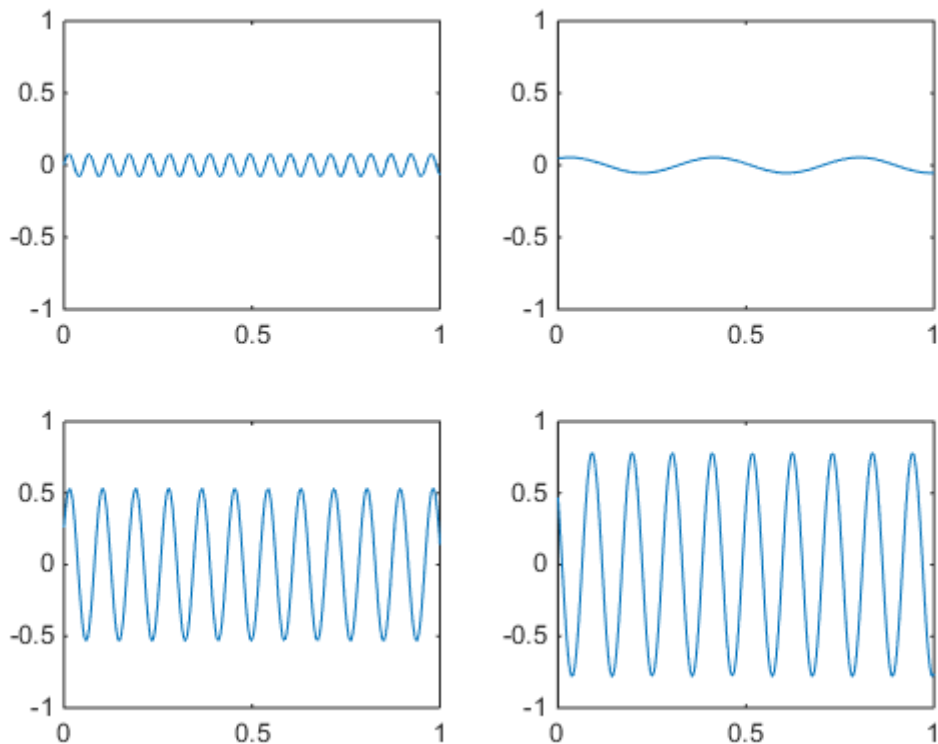


Рис. 2: Графики полученных сигналов

Создадим функцию, которая вычисляет спектр сигнала с помощью быстрого преобразования Фурье, и построим графики для спектров четырех сигналов.

Листинг 3: Функция вычисления спектра с помощью БПФ

```

1 function plot_4_range( t,S )
2
3 % Анализ спектра сигнала — БПФ преобразование на fftL отсчетов
4 N = length(t);           % Размерность вектора t
5 Fd = N-1;                % Частота дискретизации
6 fftL = 2^nextpow2(N);    % Количество отсчетов
7

```

```

8 Y1 = abs(fft(S(1,:),fftL)); % Амплитуды преобразования Фурье сигнала
9 Y1 = 2*Y1./N; % Нормировка спектра по амплитуде
10 Y1(1) = Y1(1)/2; % Нормировка постоянной составляющей в спектре
11
12 Y2 = abs(fft(S(2,:),fftL)); % Амплитуды преобразования Фурье сигнала
13 Y2 = 2*Y2./N; % Нормировка спектра по амплитуде
14 Y2(1) = Y2(1)/2; % Нормировка постоянной составляющей в спектре
15
16 Y3 = abs(fft(S(3,:),fftL)); % Амплитуды преобразования Фурье сигнала
17 Y3 = 2*Y3./N; % Нормировка спектра по амплитуде
18 Y3(1) = Y3(1)/2; % Нормировка постоянной составляющей в спектре
19
20 Y4 = abs(fft(S(4,:),fftL)); % Амплитуды преобразования Фурье сигнала
21 Y4 = 2*Y4./N; % Нормировка спектра по амплитуде
22 Y4(1) = Y4(1)/2; % Нормировка постоянной составляющей в спектре
23
24 F = 0 : Fd/fftL : Fd/2-1/fftL; % Массив частот вычисляемого спектра Фурье
25
26 end

```

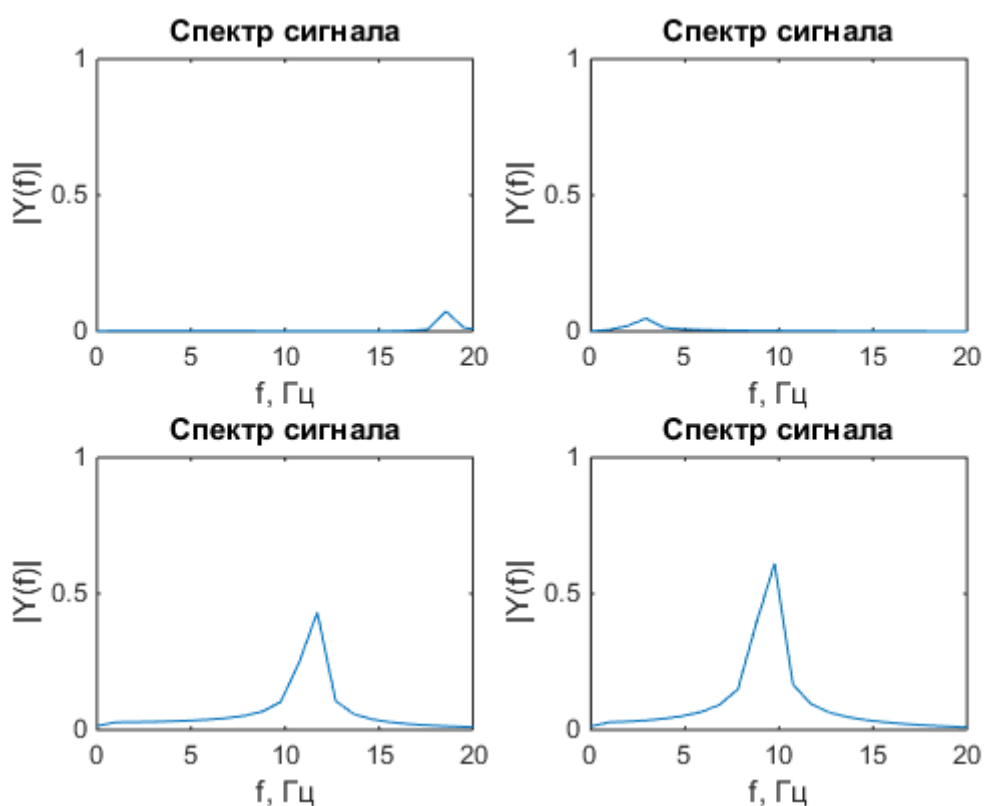


Рис. 3: Спектры полученных сигналов

Сравнивая сигналы и их спектры, можно сделать вывод, что БПФ верно определяет частоту и амплитуду сигнала.

### 5.1.2 Исследование прямоугольных сигналов

Создадим функцию прямоугольного сигнала аналогично предыдущему пункту.

Листинг 4: Функция прямоугольного сигнала

```

1 function y = signal_sqr( A, f, phi, t )
2
3 % A — amplitude
4 % f — frequency, Hz
5 % phi — phase, rad
6 % t — time, s

```

```

7
8 y = A * ones(1,length(t)) .* ...
9     square(2 .* pi .* f * t + ...
10         phi * ones(1,length(t)) );
11
12
13 end

```

Создадим функцию генерации нескольких сигналов со случайными параметрами аналогично предыдущему пункту. Сгенерируем 4 синусоидальных сигнала со случайными параметрами.

Построим графики полученных сигналов.

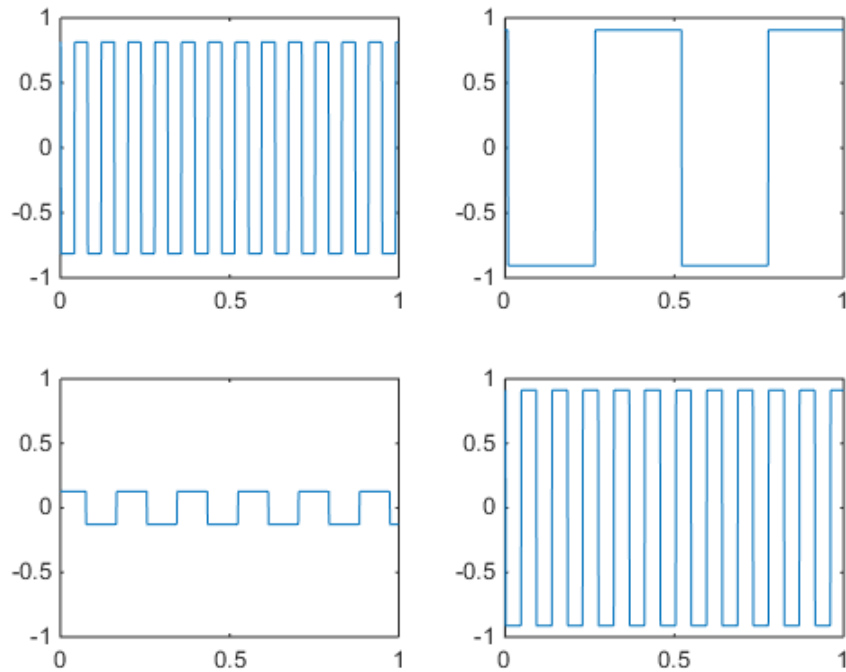


Рис. 4: Графики полученных сигналов

Вычислим с помощью БПФ спектры полученных сигналов и построим графики:

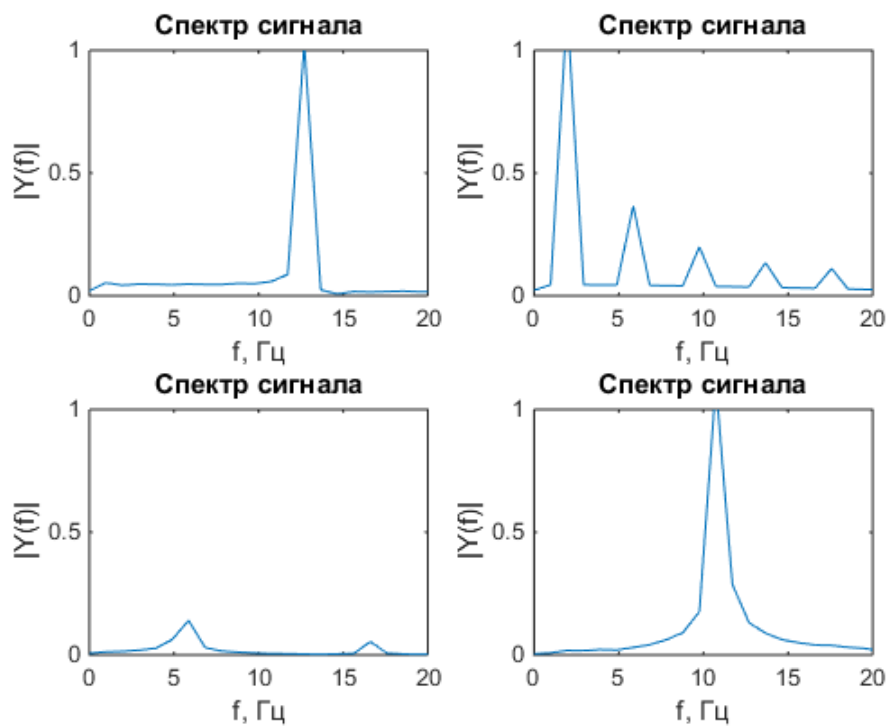


Рис. 5: Спектры полученных сигналов

## 5.2 Simulink

### 5.2.1 Исследование синусоидальных сигналов

Создадим модель синусоидального сигнала в Simulink из блоков Sine Wave и Scope:

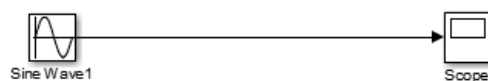


Рис. 6: Модель синусоидального сигнала

Получим графики различных сигналов:



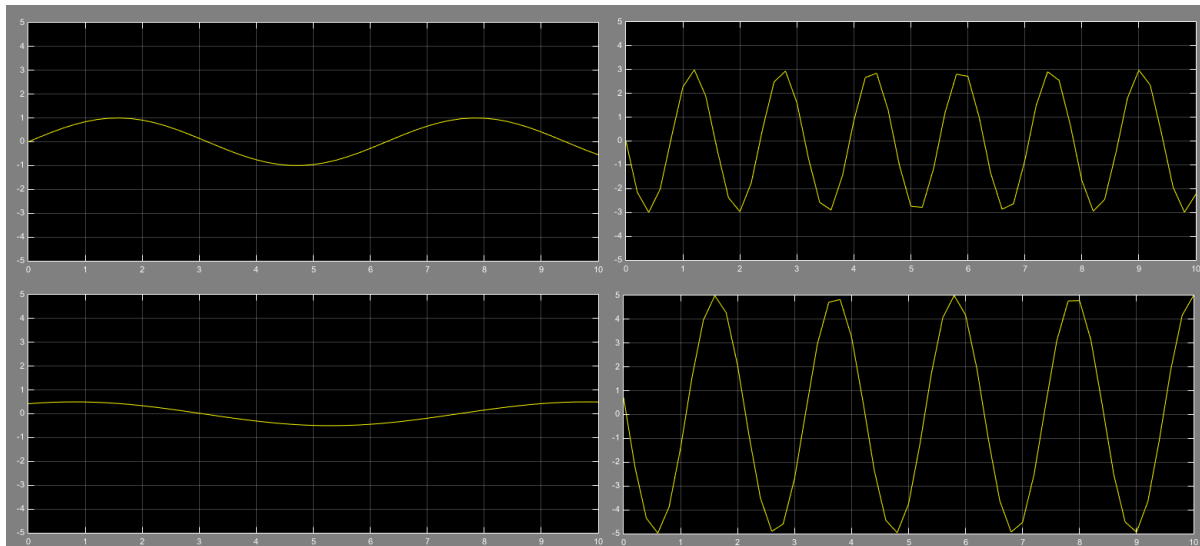


Рис. 7: Графики полученных сигналов

Создадим модель, которая вычисляет спектр сигнала (блок Spectrum Analyzer), и построим графики для спектров четырех сигналов:



Рис. 8: Модель вычисления спектра сигнала

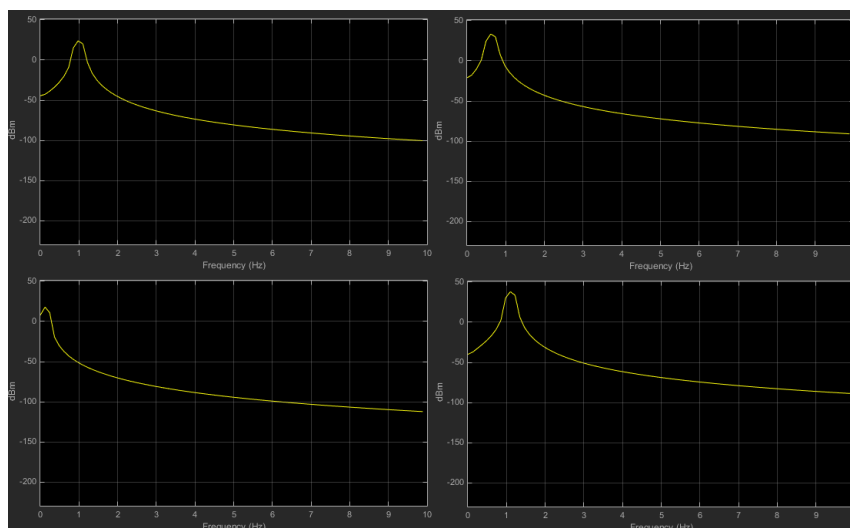


Рис. 9: Спектры полученных сигналов

### 5.2.2 Исследование прямоугольных сигналов

Создадим модель прямоугольного сигнала в Simulink из блоков Pulse Generator и Scope:



Рис. 10: Модель прямоугольного сигнала

Получим графики различных сигналов:

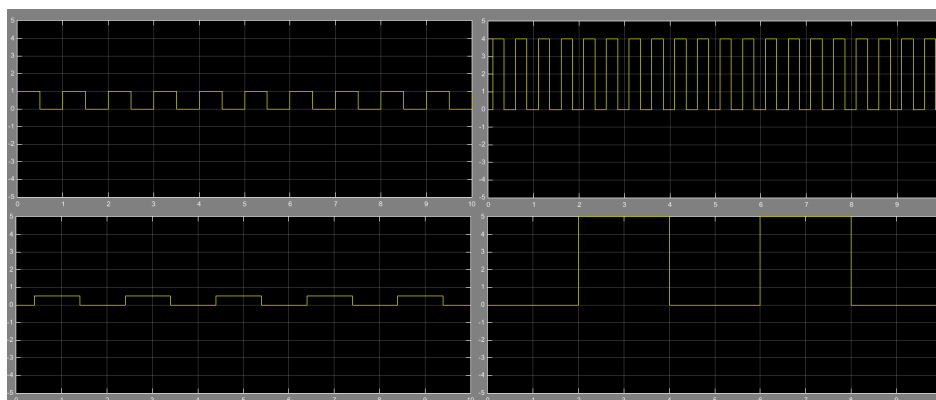


Рис. 11: Графики полученных сигналов

Создадим модель, которая вычисляет спектр сигнала (блок Spectrum Analyzer), и построим графики для спектров четырех сигналов:

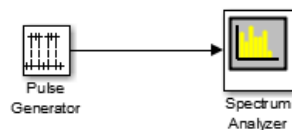


Рис. 12: Модель вычисления спектра сигнала

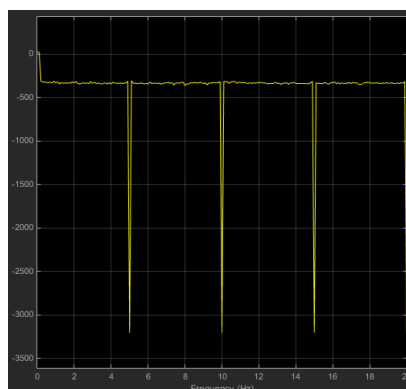


Рис. 13: Спектр прямоугольного сигнала

## 5.3 Корреляция

### 5.3.1 Прием пакета данных

Имеется дискретный сигнал [0001010111000010] и синхропосылка [101]. Найдем позицию синхропосылки в сигнале с помощью функции корреляции, вычисляемой прямым методом:

$$r_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_1(n)s_2(n)$$

Листинг 5: Функция корреляции

```
1 function [ cr ] = corr_straight( s1, s2 )
2
3 n1 = length(s1);
4 n2 = length(s2);
5 nc = n1 - n2 + 1;
6 cr = zeros(1, nc);
7
8 for i = 1 : nc
9     v = s1(i : i + n2 - 1)';
10    cr(i) = s2 * v;
11 end
12
13 cr = cr ./ n2;
14
15 end
```

Проанализировав корреляцию, получим возможные позиции синхропосылки в сигнале: 4 и 6. Графики:

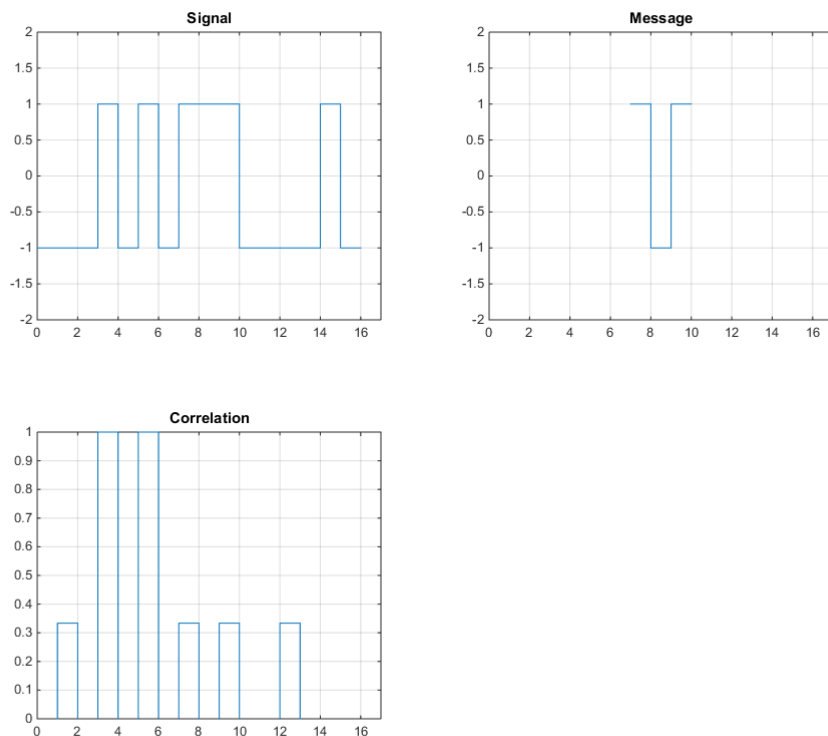


Рис. 14: Корреляция для данных сигналов

Получим пакет данных длиной 8 бит без учета синхропосылки.

### 5.3.2 Сравнение алгоритмов быстрой и прямой корреляции

Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции:

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N} F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]$$

где  $F_D^{-1}$  обозначает обратное дискретное преобразование Фурье.  
Реализуем функции корреляции:

Листинг 6: Прямой метод

```
1 function [ cr ] = corr_str( s1, s2 )
2
3 ns1 = length(s1);
4 cr = zeros(1, ns1);
5
6 for i = 1 : ns1
7     cr(i) = (s1 * s2') ./ ns1;
8     s2 = [ s2(ns1), s2(1:ns1-1) ];
9 end
```

Листинг 7: Быстрый метод

```
1 function [ cr ] = corr_fast( s1, s2 )
2
3 S1i = conj(fft(s1));
4 S2 = fft(s2);
5 S1iS2 = S1i .* S2;
6 cr = ifft(S1iS2) / length(s1);
7
8 end
```

Для двух сигналов  $x_1(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$ ,  $x_2(t) = [0.5 \ 1 \ 1 \ 0.5]$  найдем корреляцию: приведенные функции получают ряд  $[0.250 \ 0.375 \ 0.500 \ 0.375]$ .

Сгенерируем два достаточно продолжительных сигнала одинаковой длины для оценки быстродействия функций поиска корреляции (от 100 до 100 000).

N	Прямой метод, с	Быстрый метод, с
100	0.0003	0.0002
1000	0.0064	0.0002
10000	0.3255	0.0005
20000	1.1266	0.0008
50000	6.7023	0.0019
100000	28.067	0.0243

Таблица 1: Результаты измерения быстродействия

По результатам измерения быстродействия методов видно, что при малом объеме выборки (100) прямой метод работает незначительно медленнее. Однако при объеме от 1000 быстродействие быстрого метода заметно лучше, например, для выборки объемом 100 тысяч быстрый метод работает примерно в 1000 раз быстрее.

## 6 Выводы

В ходе выполнения работы были изучены средства создания сигналов и их анализа в среде MatLab и Simulink: был выполнен анализ спектра синусоидальных и прямоугольных сигналов.

Классификация сигналов осуществляется по признакам: детерминированность (можно ли реализовать сигнал математически или он случайный), периодичность, количество гармоник (гармонические и полигармонические сигналы).

Преобразование Фурье служит позволяет получить спектр сигнала - представление сигнала без зависимости от времени. Анализ спектра сигнала используется в телекоммуникационных технологиях, основой которых является обработка сигнала, и в частности, цифровая обработка сигнала. Примером применения преобразования Фурье служит восстановление расфокусированного изображения. Зная, что

с математической точки зрения тонкая линза выполняет преобразование Фурье изображений, размещённых в фокальных плоскостях, можно создать алгоритмы обработки изображений, являющихся аналогами обработки изображений классической оптической системой.