

**Posgrado en Ingeniería Química**

Propedéutico  
25-O

Matemáticas

Abigail Marin López

# Posgrado en Ingeniería Química

## Objetivo

Fortalecer las bases matemáticas requeridas para abordar con solvencia los cursos de nivel posgrado de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, enfatizando el razonamiento analítico y la resolución de problemas mediante métodos algebraicos, diferenciales y vectoriales.

# Contenido

Abigail Marin López

## **1.- MATEMÁTICAS**

### **a) Álgebra lineal**

- Álgebra de matrices
- Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

### **b) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales**

- Solución por métodos clásicos (variación de parámetros, coeficientes indeterminados, series de potencias, transformada de Laplace, etc.
- Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

### **c) Análisis vectorial**

- Álgebra de vectores
- Cálculo vectorial

# Álgebra de matrices

# Matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Filas de la matriz

Columnas de la matriz

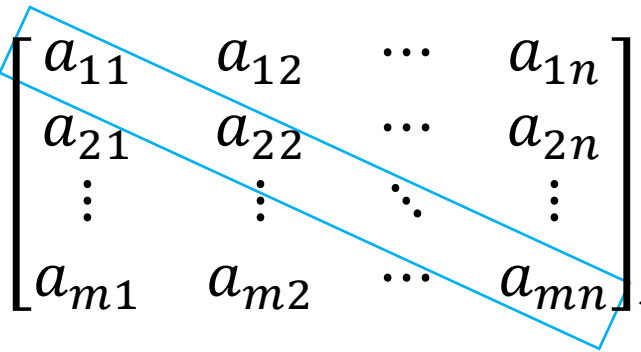
Matriz *triangular superior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

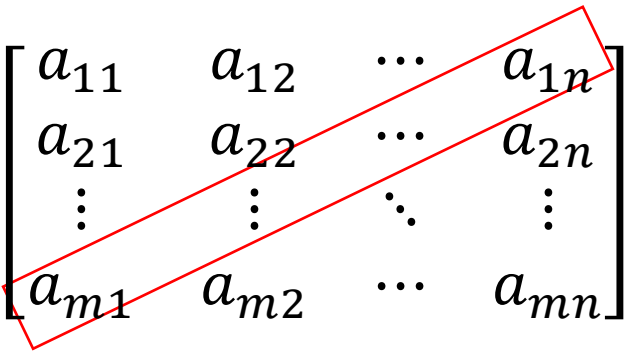
Matriz *triangular inferior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$


Diagonal secundaria

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$


Traza de un matriz

La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal

¿Cuál es la traza de **D**?

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Suma/resta de matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento por elemento

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Producto de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Tamaño de las matrices



$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \ 3 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & [2 \ 3 \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [-2 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & [-2 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$



# Ejercicios

Dadas las matrices, obtener:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- $-2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$
- $\mathbf{B}(-\mathbf{A})$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$

Dadas las matrices, ¿Qué condiciones deben cumplir  $p$ ,  $q$  y  $r$  para que se puedan efectuar las operaciones?

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn} \quad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{np} \quad \mathbf{C} = [c_{ij}]_{qr}$$

# Determinantes

Dada una matriz  $A_{2 \times 2}$ , se define el determinante de A

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dada una matriz  $A_{3 \times 3}$ , se define el determinante de A

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- - -  
+ + +

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

# Método cofactores y menores

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz cuadrada. El **menor** del elemento  $a_{ij}$  se denota como  $M_{ij}$  y corresponde al determinante que queda de borrar la fila  $i$  y la columna  $j$ .

El **cofactor** del elemento  $a_{ij}$  se denota como  $A_{ij}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

El determinante será:

$$|\mathbf{A}|_{3 \times 3} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$|\mathbf{A}|_{4 \times 4} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

$$|\mathbf{A}|_{n \times n} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (1)[(1)(-1) - (2)(-3)] = -1 + 6 = 5$$

$$\text{Cofactor de } a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)[3 - 2] = -1$$

$$\text{Cofactor de } a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = [9 - 1] = 8$$

$$|A| = (2)(5) + (-2)(-1) + (0)(8) = 12$$

# Ejercicio

Obtener el determinante de  $A$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$



- (A)  $|A| = -8$
- (B)  $|A| = 12$
- (C)  $|A| = -24$
- (D)  $|A| = 4$
- (E) Ninguno de los anteriores

## Ejercicio- solución

Obtener el  
determinante de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{14} = A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)[-(-2 \cdot 3)(-1)] = 6$$

$$\text{Cofactor de } a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)[-16] = 16$$

$$\text{Cofactor de } a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)[4] = 4$$

$$\text{Cofactor de } a_{14} = A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)[2] = -2$$

$$|\mathbf{A}|_{4 \times 4} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

$$|\mathbf{A}| = (1)(6) + (0)(16) + (2)(4) + (1)(-2) = 12$$



# Ejercicio

Sea  $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Entonces  $AA^T =$

(A)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(B)  $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$

(C) 46

(D)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

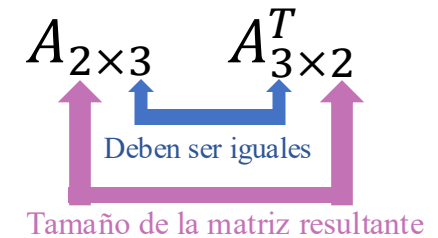
(E) Producto indefinido

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Es posible el producto?

Sí, por lo tanto,  
realizamos el producto.



$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$



# Ejercicio-solución

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices será:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \ 2 \ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [3 \ -1 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & [3 \ -1 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Para  $a_{11}$   $a_{11} = (1)(1) + (2)(2) + (0)(0) = 5$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$$



# Inversa de una matriz

La inversa de una matriz cuadrada  $A$  es otra matriz  $A^{-1}$  que cumple la propiedad:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$$

Una matriz **tiene inversa** si y solo si su **determinante es distinto de cero**.

## Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Si el  $\det(A) \neq 0$  la matriz se llama **no singular** o **invertible**.

Si el  $\det(A) = 0$  la matriz es **singular** o **no invertible**.

1. Obtener el determinante
2. Calcular la matriz de cofactores
3. Obtener la matriz de adjunta  
(Transponer la matriz de cofactores)

# Inversa de una matriz

## Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$$

1. Obtener el determinante

$$\det(A) = -1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calcular la matriz de cofactores

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Obtener la matriz de adjunta

(Transponer la matriz de cofactores)

$$\text{Adj}(A) = CT = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

# Inversa de una matriz

## Ejercicio

- Si  $\mathbf{A}$  es invertible, pruebe que  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ .

Dado que  $\mathbf{A}$  es cuadrada e invertible, existe  $\mathbf{A}^{-1}$  tal que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}^T \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

- ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

# Inversa de una matriz

## Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$   
¿Cuál de las siguientes matrices  
corresponde a  $A^{-1}$ ?

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Rango de una matriz


El rango de una matriz (*rank*) es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes.

## Eliminación gaussiana

Reducir la matriz a forma escalonada y contar el número de filas no nulas.

## Ejercicio

1. Identificar el primer pivote
2. Eliminar elementos debajo del pivote

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$


Para eliminar el elemento de la segunda fila (posición  $a_{21}$ ), hacemos:

$$F_2 = F_2 - 2F_1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejercicio- rango de una matriz

## Eliminación gaussiana

### 2. Eliminar elementos debajo del pivote

Para eliminar el elemento de la segunda fila (posición  $a_{21}$ ):

$$F_2 = F_2 - 2F_1 \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar  $a_{31}$ :

$$\begin{aligned} F_3 &= F_3 - F_1 \\ F_3 &= -F_3 \end{aligned} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz **C** tiene 2 filas no nulas



***Rango (C) = 2***

# Ejercicios propuestos

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

El determinate de la matriz anterior es:

- (A) -6
- (B) 3
- (C) 0
- (D) 6
- (E) -3

Use la definición del determinante para obtener los valores para  $x_3$  y  $x_4$

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$



# Ejercicios propuestos

El rango de **B** es:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Hallar el rango de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

# Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

## Gauss-Jordan

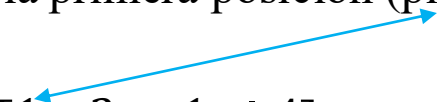
Dar solución al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 4 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 7\end{aligned}$$

1. Escribir la matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

2. Obtener un 1 en la primera posición (pivote)


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

3. Hacer ceros debajo del pivote (columna 1)

$$F_2 = F_2 - 2F_1$$

$$F_3 = F_3 - 3F_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

# Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

4. Obtener un 1 en el pivote (2, 2)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

$$F_2 = F_2 / -3 \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

5. Hacer ceros arriba y debajo del pivote (2, 2)

$$F_1 = F_1 - 2F_2$$

$$F_3 = F_3 + 5F_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right]$$

6. Obtener un 1 en el pivote (3, 3)

$$F_3 = F_3 / 4$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 \end{array} \right]$$

7. Hacer ceros arriba del pivote (3, 3)

$$F_1 = F_1 + F_3$$

$$F_2 = F_2 - F_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 \end{array} \right]$$

$$x = 1.25, y = 0.75, z = 1.25$$

# Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

## Regla de Cramer

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -5 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6\end{aligned}$$

1. Escribir la matriz de coeficientes y el vector de términos constantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Obtener el determinante “mayor”  $D$

$$D = \det(A) = -3$$

Si el  $\det(A) \neq 0$  se puede aplicar la regla

3. Obtener los determinantes “menores”  $D_n$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -3$$

$D_1$  se obtiene al cambiar la primera columna por los términos constantes

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = -9$$

4. Obtener

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -2 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$$

# Ejercicios propuestos

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 9 \\2x + 3y + 7z &= 23 \\3x + 3y + 4z &= 18\end{aligned}$$

- (A)  $x = 1, y = 2, z = 3$
- (B)  $x = 3, y = 2, z = 1$
- (C)  $x = 2, y = 1, z = 2$
- (D)  $x = 1, y = 2, z = 1$
- (E) No tiene solución

Obtenga  $\lambda$  del sistema:

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda\end{aligned}$$

# Ejercicios propuestos

¿Cuándo un sistema tiene solución única?

- (A) Cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.
- (B) Cuando todas las ecuaciones son proporcionales.
- (C) Cuando el rango de la matriz de coeficientes es menor al de la ampliada.
- (D) Nunca.

En el método de Gauss-Jordan, el objetivo es:

- (A) Obtener ceros por debajo de la diagonal.
- (B) Obtener la matriz identidad.
- (C) Calcular determinantes.
- (D) Sumar ecuaciones.

# Gracias

amarin@xanum.uam.mx

*Abigail Marin López*