

Posgrado en Ingeniería Química

Propedéutico 25-O

Matemáticas

Abigail Marin López





Posgrado en Ingeniería Química

Objetivo

Fortalecer las bases matemáticas requeridas para abordar con solvencia los cursos de nivel posgrado de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, enfatizando el razonamiento analítico y la resolución de problemas mediante métodos algebraicos, diferenciales y vectoriales.

Contenido



1.- MATEMÁTICAS

a) Álgebra lineal

- Álgebra de matrices
- Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

b) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

- Solución por métodos clásicos (variación de parámetros, coeficientes indeterminados, series de potencias, transformada de Laplace, etc.
- Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

c) Análisis vectorial

- Álgebra de vectores
- Cálculo vectorial

Álgebra de matrices

Matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Filas de la matriz

Columnas de la matriz

Matriz *triangular superior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz *triangular inferior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

Diagonal secundaria

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Traza de un matriz

La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal

¿Cuál es la traza de **D**?

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suma/resta de matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento por elemento

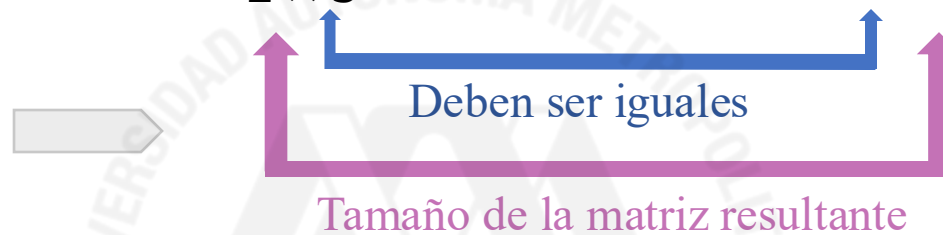
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Tamaño de las matrices



$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \ 3 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & [2 \ 3 \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [-2 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & [-2 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios

Dadas las matrices, obtener:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- $-2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$
- $\mathbf{B}(-\mathbf{A})$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$

Dadas las matrices, ¿Qué condiciones deben cumplir p , q y r para que se puedan efectuar las operaciones?

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn} \quad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{np} \quad \mathbf{C} = [c_{ij}]_{qr}$$

Determinantes

Dada una matriz $A_{2 \times 2}$, se define el determinante de A

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dada una matriz $A_{3 \times 3}$, se define el determinante de A

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} - & - & - \\ + & + & + \end{matrix}$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

Método cofactores y menores

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada. El **menor** del elemento a_{ij} se denota como M_{ij} y corresponde al determinante que queda de borrar la fila i y la columna j .

El **cofactor** del elemento a_{ij} se denota como A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

El determinante será:

$$|\mathbf{A}|_{3 \times 3} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$|\mathbf{A}|_{4 \times 4} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

$$|\mathbf{A}|_{n \times n} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (1)[(1)(-1) - (2)(-3)] = -1 + 6 = 5$$

$$\text{Cofactor de } a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)[3 - 2] = -1$$

$$\text{Cofactor de } a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = [9 - 1] = 8$$

$$|A| = (2)(5) + (-2)(-1) + (0)(8) = 12$$

Ejercicio

Obtener el determinante de A

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$



- (A) $|A| = -8$
- (B) $|A| = 12$
- (C) $|A| = -24$
- (D) $|A| = 4$
- (E) Ninguno de los anteriores

Ejercicio- solución

Obtener el
determinante de \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

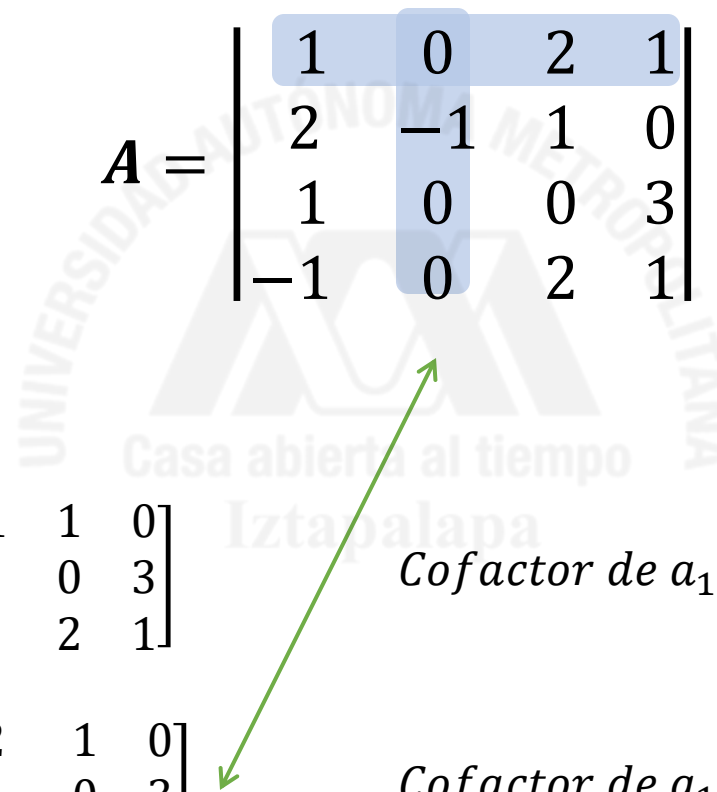
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{14} = A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)[-(-2 \cdot 3)(-1)] = 6$$

$$\text{Cofactor de } a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)[-16] = 16$$

$$\text{Cofactor de } a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)[4] = 4$$

$$\text{Cofactor de } a_{14} = A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)[2] = -2$$

$$|\mathbf{A}|_{4 \times 4} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

$$|\mathbf{A}| = (1)(6) + (0)(16) + (2)(4) + (1)(-2) = 12$$



Ejercicio

Sea $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Entonces $AA^T =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$

(C) 46

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(E) Producto indefinido

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

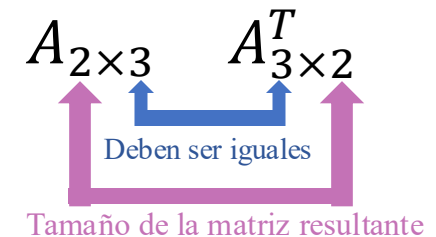
$$A_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Es posible el producto?

Sí, por lo tanto,
realizamos el producto.

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$



Ejercicio-solución

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{3 \times 2}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices será:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para a_{11} $a_{11} = (1)(1) + (2)(2) + (0)(0) = 5$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$$



Inversa de una matriz

La inversa de una matriz cuadrada A es otra matriz A^{-1} que cumple la propiedad:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$$

Una matriz **tiene inversa** si y solo si su **determinante es distinto de cero**.

Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si el $\det(A) \neq 0$ la matriz se llama **no singular** o **invertible**.

Si el $\det(A) = 0$ la matriz es **singular** o **no invertible**.

1. Obtener el determinante
2. Calcular la matriz de cofactores
3. Obtener la matriz de adjunta
(Transponer la matriz de cofactores)

Inversa de una matriz

Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$$

1. Obtener el determinante

$$\det(A) = -1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calcular la matriz de cofactores

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Obtener la matriz de adjunta

(Transponer la matriz de cofactores)

$$\text{Adj}(A) = CT = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Inversa de una matriz

Ejercicio

- Si \mathbf{A} es invertible, pruebe que $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Dado que \mathbf{A} es cuadrada e invertible, existe \mathbf{A}^{-1} tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}^T \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

- ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

Inversa de una matriz

Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes matrices corresponde a A^{-1} ?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Rango de una matriz

El rango de una matriz (*rank*) es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes.

Eliminación gaussiana

Reducir la matriz a forma escalonada y contar el número de filas no nulas.

Ejercicio

1. Identificar el primer pivote
2. Eliminar elementos debajo del pivote

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar el elemento de la segunda fila (posición a_{21}), hacemos:

$$F_2 = F_2 - 2F_1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio- rango de una matriz

Eliminación gaussiana

2. Eliminar elementos debajo del pivote

Para eliminar el elemento de la segunda fila (posición a_{21}):

$$F_2 = F_2 - 2F_1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar a_{31} :

$$F_3 = F_3 - F_1$$

$$F_3 = -F_3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz **C** tiene 2 filas no nulas



Rango (C) = 2

Ejercicios propuestos

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Use la definición del determinante para obtener los valores para x^3 y x^4

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

El determinante de la matriz anterior es:

- (A) -6
- (B) 3
- (C) 0
- (D) 6
- (E) -3

Ejercicios propuestos

El rango de **B** es:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Hallar el rango de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

Gauss-Jordan


Dar solución al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 4 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 7\end{aligned}$$

1. Escribir la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

2. Obtener un 1 en la primera posición (pivote)



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

3. Hacer ceros debajo del pivote (columna 1)

$$F_2 = F_2 - 2F_1$$

$$F_3 = F_3 - 3F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

4. Obtener un 1 en el pivote (2, 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

$$F_2 = F_2 / -3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

5. Hacer ceros arriba y debajo del pivote (2, 2)

$$F_1 = F_1 - 2F_2$$

$$F_3 = F_3 + 5F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right]$$

6. Obtener un 1 en el pivote (3, 3)

$$F_3 = F_3 / 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 \end{array} \right]$$

7. Hacer ceros arriba del pivote (3, 3)

$$F_1 = F_1 + F_3$$

$$F_2 = F_2 - F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 \end{array} \right]$$

$$x = 1.25, y = 0.75, z = 1.25$$

Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

Regla de Cramer

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6\end{aligned}$$

1. Escribir la matriz de coeficientes y el vector de términos constantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Obtener el determinante “mayor” D

$$D = \det(A) = -3$$

Si el $\det(A) \neq 0$ se puede aplicar la regla

3. Obtener los determinantes “menores” D_n

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

D_1 se obtiene al cambiar la primera columna por los términos constantes

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -9$$

4. Obtener

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -2 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$$

Ejercicios propuestos

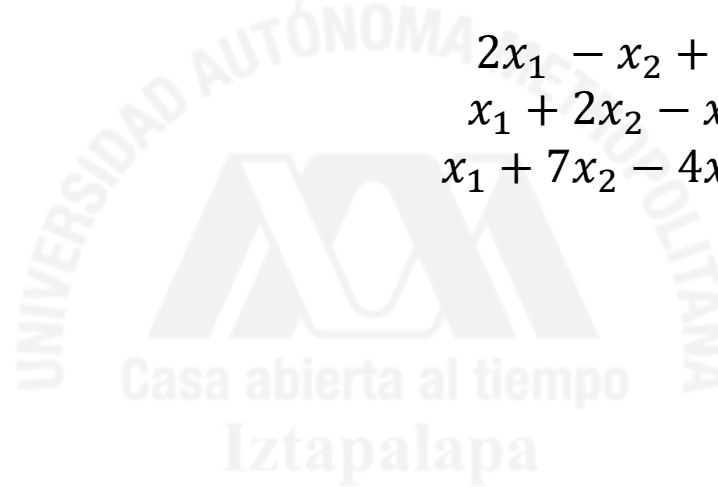
La solución del sistema es:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x + 3y + 7z &= 23 \\ 3x + 3y + 4z &= 18\end{aligned}$$

- (A) $x = 1, y = 2, z = 3$
- (B) $x = 3, y = 2, z = 1$
- (C) $x = 2, y = 1, z = 2$
- (D) $x = 1, y = 2, z = 1$
- (E) No tiene solución

Obtenga λ del sistema:

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda\end{aligned}$$



Ejercicios propuestos

¿Cuándo un sistema tiene solución única?







- (A) Cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.
- (B) Cuando todas las ecuaciones son proporcionales.
- (C) Cuando el rango de la matriz de coeficientes es menor al de la ampliada.
- (D) Nunca.

En el método de Gauss-Jordan, el objetivo es:

- (A) Obtener ceros por debajo de la diagonal.
- (B) Obtener la matriz identidad.
- (C) Calcular determinantes.
- (D) Sumar ecuaciones.

Bibliografía recomendada



-  Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.
-  Cullen, C. G. (2012). *Matrices and linear transformations*. Courier Corporation.
-  Axler, S. (2024). *Linear algebra done right*. Springer Nature.
-  Poole, D. (2011). *Álgebra lineal*. Cengage Learning.
-  Lay, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson educación.
-  Kreyszig, E. (2001). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*.

Gracias



amarin@xanum.uam.mx

Abigail Marin López