Posgrado en Ingeniería Química

Propedéutico
25-O

Matemáticas

Abigail Marin López

Objetivo

Fortalecer las bases matemáticas requeridas para abordar con solvencia los cursos de nivel posgrado de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, enfatizando el razonamiento analítico y la resolución de problemas mediante métodos algebraicos, diferenciales y vectoriales.

Contenido

Abigail Marin López

1.- MATEMÁTICAS

a) Algebra lineal

- Algebra de matrices
-Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

b) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

- Solución por métodos clásicos (variación de párametros, coeficientes indeterminados, series de potencias, transformada de Laplace, etc.
-Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

c) Análisis vectorial

- Algebra de vectores
-Cálculo vectorial

Álgebra de matrices

Matrices

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} \text{Filas de la matriz}$$

Matriz ***triangular superior*** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz ***triangular inferior*** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Abigail Marin López

Diagonal principal

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Diagonal secundaria

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Traza de un matriz

La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal

¿Cuál es la traza de **D**?

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suma/resta de matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento por elemento

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abigail Marin López

Producto de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{\mathbf{2 \times 3}} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{\mathbf{3 \times 2}}$$

Tamaño de las matrices

Deben ser iguales

Tamaño de la matriz resultante

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios

Dadas las matrices, obtener:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- -2A+3B
- B(-A)
- A·A-B · B

Dadas las matrices, ¿Qué condiciones deben cumplir ***p***, ***q*** y ***r*** para que se puedan efectuar las operaciones?

- A · C ·B
- A· (B + C)

$$\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{mn} \qquad \boldsymbol{B} = \left[b_{ij}\right]_{np} \qquad \boldsymbol{C} = \left[c_{ij}\right]_{qr}$$

Abigail Marin López

Determinantes

Dada una matriz A_{2x2}, se define el determinante de A

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dada una matriz A_{3x3}, se define el determinante de A

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\boxed{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}} \boxed{- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}}$$

Abigail Marin López

Método cofactores y menores

Sea **A** una matriz cuadrada. El **menor** del elemento a_{ij} se denota como M_{ij} y corresponde al determinante que queda de borrar la fila i y la columna j.

El **cofactor** del elemento a_{ij} se denota como $\mathbf{A_{ij}}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

El determinante será:

$$|\boldsymbol{A}|_{3\times 3} = \mathrm{a}_{11}\cdot A_{11} + \mathrm{a}_{12}\cdot \mathrm{A}_{12} + \mathrm{a}_{13}\cdot \mathrm{A}_{13}$$

$$|\boldsymbol{A}|_{4\times 4} = \mathrm{a}_{11}\cdot A_{11} + \mathrm{a}_{12}\cdot \mathrm{A}_{12} + \mathrm{a}_{13}\cdot \mathrm{A}_{13} + \mathrm{a}_{14}\cdot \mathrm{A}_{14}$$

$$|\boldsymbol{A}|_{n\times n} = \mathrm{a}_{11}\cdot A_{11} + \mathrm{a}_{12}\cdot \mathrm{A}_{12} + \mathrm{a}_{13}\cdot \mathrm{A}_{13} + \cdots + \mathrm{a}_{1n}\cdot \mathrm{A}_{1n}$$

Abigail Marin López

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \mathrm{a}_{11} \cdot A_{11} + \mathrm{a}_{12} \cdot \mathrm{A}_{12} + \mathrm{a}_{13} \cdot \mathrm{A}_{13}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

$$Cofactor\ de\ a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \text{=(1)[(1)(-1)-(2)(-3)]= -1+6 = 5}$$

$$Cofactor\ de\ a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{=(-1)[3-2] = -1}$$

$$Cofactor\ de\ a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{= [9-1] = 8}$$

$$|A| \text{=(2)(5) + (-2)(-1) + (0)(8) =12}$$

Ejercicio

Obtener el determinante de **A**

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(A) $|A| = -8$
(B) $|A| = 12$
(C) $|A| = -24$
(D) $|A| = 4$
(E) Ninguno de los anteriores

Ejercicio- solución

Obtener el determinante de **A**

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

$$Cofactor\ de\ a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cofactor\ de\ a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cofactor\ de\ a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cofactor\ de\ a_{14} = A_{14} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Abigail Marin López

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cofactor\ de\ a_{11} = A_{11} = (-1)^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1)[-(2*3)(-1)] = 6$$

$$Cofactor\ de\ a_{12} = A_{12} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1)[-16] = 16$$

$$Cofactor\ de\ a_{13} = A_{13} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1)[4] = 4$$

$$Cofactor\ de\ a_{14} = A_{14} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (-1)[2] = -2$$

$$|\boldsymbol{A}|_{4\times 4} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{A}| = (1)(6) + (0)(16) + (2)(4) + (1)(-2) = 12}$$

Ejercicio

Sea $\boldsymbol{A}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Entonces $AA^T =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$

(C) 46

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(E) Producto indefinido

$$\boldsymbol{A}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^T_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Es posible el producto?

$$A_{2\times3} \quad A^T_{3\times2}$$

Deben ser iguales

Tamaño de la matriz resultante

Sí, por lo tanto,
realizamos el producto.

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio-solución

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices será:

$$\mathbf{AA^T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \;\; 2 \;\; 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \;\; 2 \;\; 0]\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [3 \;\; -1 \;\; 4]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & [3 \;\; -1 \;\; 4]\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Para a_{11} $\qquad \boldsymbol{a_{11} = (1)(1) + (2)(2) + (0)(0) = 5}$

$$\boxed{\mathbf{AA^T} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}}$$

Abigail Marin López

Inversa de una matriz

La inversa de una matriz cuadrada **A** es otra matriz $\mathbf{A}^{-1}$ que cumple la propiedad:

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)}$$

Una matriz **tiene inversa** si y solo si su **determinante es distinto de cero**.

Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Si el det(A) $\neq 0$ la matriz se llama **no singular** o **invertible**.

Si el det(A) $= 0$ la matriz es **singular** o **no invertible**.

1. Obtener el determinante

2. Calcular la matriz de cofactores

3. Obtener la matriz de adjunta
(Transponer la matriz de cofactores)

Abigail Marin López

Inversa de una matriz

Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det(A)}} \cdot \boldsymbol{Adj(A)}$$

1. Obtener el determinante $$\boldsymbol{det(A) = -1}$$

2. Calcular la matriz de cofactores $$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Obtener la matriz de adjunta
(Transponer la matriz de cofactores)

$$Adj(A) = CT = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Abigail Marin López

Inversa de una matriz

Ejercicio

- Si **A** es invertible, pruebe que $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

  Dado que **A** es cuadrada e invertible, existe $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$

  $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1})^T = \boldsymbol{I}^T \Longrightarrow (\boldsymbol{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T = \boldsymbol{I}$

- ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

Inversa de una matriz

Ejercicio

Obtenga la inversa de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

¿Cuál de las siguientes matrices corresponde a $\mathbf{A}^{-1}$?

$(A) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Abigail Marin López

Rango de una matriz

El rango de una matriz (*rank*) es el número máximo de filas o columnas linealmente independientes.

Eliminación gaussiana

Reducir la matriz a forma escalonada y contar el número de filas no nulas.

Ejercicio

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Identificar el primer pivote
2. Eliminar elementos debajo del pivote

Para eliminar el elemento de la segunda fila (posición a_{21}), hacemos:

$F_2 = F_2 - 2F_1$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio- rango de una matriz

Eliminación gaussiana

2. Eliminar elementos debajo del pivote

Para eliminar el elemento de la segunda fila (posición a_{21}):

$F_2 = F_2 - 2F_1$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar a_{31}:

$F_3 = F_3 - F_1$

$F_3 = -F_3$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz **C** tiene 2 filas no nulas → ***Rango (C) =2***

Abigail Marin López

Ejercicios propuestos

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

El determinate de la matriz anterior es:

(A) -6
(B) 3
(C) 0
(D) 6
(E) -3

Use la definición del determinante para obtener los valores para x^3 y x^4

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Ejercicios propuestos

El rango de **B** es:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Hallar el rango de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

Gauss-Jordan

Dar solución al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

1. Escribir la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

2. Obtener un 1 en la primera posición (pivote)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

3. Hacer ceros debajo del pivote (columna 1)

$F_2 = F_2 - 2F_1$

$F_3 = F_3 - 3F_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Abigail Marin López

Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

4. Obtener un 1 en el pivote (2, 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

$F_2 = F_2 / -3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

5. Hacer ceros arriba y debajo del pivote (2, 2)

$F_1 = F_1 - 2F_2$

$F_3 = F_3 + 5F_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

6. Obtener un 1 en el pivote (3, 3)

$F_3 = F_3 / 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 \end{array}\right]$$

7. Hacer ceros arriba del pivote (3, 3)

$F_1 = F_1 + F_3$

$F_2 = F_2 - F_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 & 1.25 \end{array}\right]$$

$$\boxed{x = 1.25, y = 0.75, z = 1.25}$$

Abigail Marin López

Solución de sistemas de ecuaciones algebraicas

Regla de Cramer

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = -2$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

1. Escribir la matriz de coeficientes y el vector de términos constantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Obtener el determinante "mayor" D

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = -3$$

Si el det(A) $\neq 0$ se puede aplicar la regla

3. Obtener los determinantes "menores" D_n

$$D_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -3$$

D_1 se obtiene al cambiar la primera columna por los términos constantes

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = -9$$

4. Obtener

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = -2 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

$$\boxed{x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3}$$

Abigail Marin López

Ejercicios propuestos

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x + 3y + 7z &= 23 \\ 3x + 3y + 4z &= 18 \end{aligned}$$

(A) $x = 1, y = 2, z = 3$
(B) $x = 3, y = 2, z = 1$
(C) $x = 2, y = 1, z = 2$
(D) $x = 1, y = 2, z = 1$
(E) No tiene solución

Obtenga λ del sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

¿Cuándo un sistema tiene solución única?

(A) Cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.
(B) Cuando todas las ecuaciones son proporcionales.
(C) Cuando el rango de la matriz de coeficientes es menor al de la ampliada.
(D) Nunca.

En el método de Gauss-Jordan, el objetivo es:

(A) Obtener ceros por debajo de la diagonal.
(B) Obtener la matriz identidad.
(C) Calcular determinantes.
(D) Sumar ecuaciones.

Bibliografía recomendada

- Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.
- Cullen, C. G. (2012). *Matrices and linear transformations*. Courier Corporation.
- Axler, S. (2024). *Linear algebra done right* . Springer Nature.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal*. Cengage Learning.
- Lay, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson educación.
- Kreyszig, E. (2001). Matemáticas avanzadas para ingeniería.

Gracias

amarin@xanum.uam.mx

Abigail Marin López