ELEMENTI DI INFORMATICA

DOCENTE: FRANCESCO MARRA

INGEGNERIA CHIMICA
INGEGNERIA ELETTRICA
SCIENZE ED INGEGNERIA DEI MATERIALI
INGEGNERIA GESTIONALE DELLA LOGISTICA E DELLA PRODUZIIONE
INGEGNERIA NAVALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

SISTEMI DI NUMERAZIONE E OPERAZIONI ARITMETICHE

AGENDA

- Sistemi di numerazione
  - Non posizionale
  - Posizionale
- Diversi sistemi di numerazione
  - Decimale, Binario, Ottale, Esadecimale
- Conversioni tra diversi sistemi
- Operazioni con i numeri binari

SISTEMI DI NUMERAZIONE

- Insiemi di simboli (cifre) e regole che assegnano ad ogni sequenza di cifre uno ed un solo valore numerico
- ***Posizionali***
  - Ogni cifra ha un'importanza variabile a seconda della relativa posizione
    - nel sistema decimale la prima cifra a destra indica l'unità, la seconda le decine, la terza le centinaia e così via

3	2	1	0
1	3	4	5

- ***Non posizionali***
  - Ogni cifra esprime una quantità non dipendente dalla posizione
    - nel sistema romano il simbolo **L** esprime la quantità 50 indipendentemente dalla posizione

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE

- Stringa: una qualsiasi sequenza di cifre/simboli/bit in un sistema di numerazione posizionale
  - Ai simboli ***c*** è associato un diverso peso in base alla posizione ***i*** occupata nella stringa che compone il numero
  - Il peso dipende dalla base ***b*** di numerazione
- Rappresentazione posizionale di un ***numero reale***

$$\ldots + c_2 \cdot b^2 + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0 + c_{-1} \cdot b^{-1} + c_{-2} \cdot b^{-2} + \ldots$$

- Rappresentazione posizionale di un ***numero intero***

$$\ldots + c_2 \cdot b^2 + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0$$

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE

- Definiti dalla base (o radice) utilizzata per la rappresentazione
- In un sistema posizionale in base ***b*** servono ***b*** simboli per rappresentare i diversi valori delle cifre compresi tra ***0*** e (***b-1***)

Base	Denominazione	Valore delle cifre
10	Decimale	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
2	Binaria	0 1
8	Ottale	0 1 2 3 4 5 6 7
16	Esadecimale	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE

- Numeri rappresentati in basi diverse con un pedice indicante la base dopo aver racchiuso la stringa tra parentesi

$$(101111)_2 = (142)_5 = (47)_{10}$$

- Il significato degli altri simboli è uguale in tutte le basi
  - Il segno meno: -
  - I simboli delle operazioni: + - x /
  - La virgola: .
  - Gli zeri a sinistra possono essere omessi, così come quelli a destra se il numero è dotato di virgola.

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE

- Solo nel sistema decimale è possibile leggere i numeri
  - Ad es., “quarantasette”

- Negli altri sistemi di numerazione, cifre lette da quella di peso maggiore fino a quella di minor peso, con indicazione della base
  - Ad es., “uno quattro due” in base cinque

CONVERSIONE DI UN NUMERO IN BASE 10

- Conversione in base 10 del valore x rappresentato in una qualsiasi base ***b***
  - Si calcola la sommatoria dei prodotti delle cifre per i pesi

$$x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(c_i \cdot b^i\right)$$

- Esempi
  - $(101111)_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47$
  - $(142)_5 = 1 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 2 \times 5^0 = 25 + 20 + 2 = 47$
  - $(47)_{10} = 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 47$

SISTEMA DI NUMERAZIONE POSIZIONALE BINARIO

- Minor numero di simboli rispetto al sistema decimale
  - (2 contro 10)
- Parola codice più lunga che non in notazione decimale per rappresentare un numero
  - Per rappresentare le dieci cifre occorrono $\log_2 10$ bit ($\cong$ 3,3 bit)
  - Stringa di cifre in bit circa tre volte più lunga di quella decimale

- Esempio

$$(1001101)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$

$$= 64 + 0 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = (77)_{10}$$

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE OTTALE ED ESADECIMALE

- Introdotti per evitare di dover trattare con stringhe di bit troppo lunghe

Ottale	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE OTTALE ED ESADECIMALE

Esadecimale	Binario	Esadecimale	Binario
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE OTTALE ED ESADECIMALE

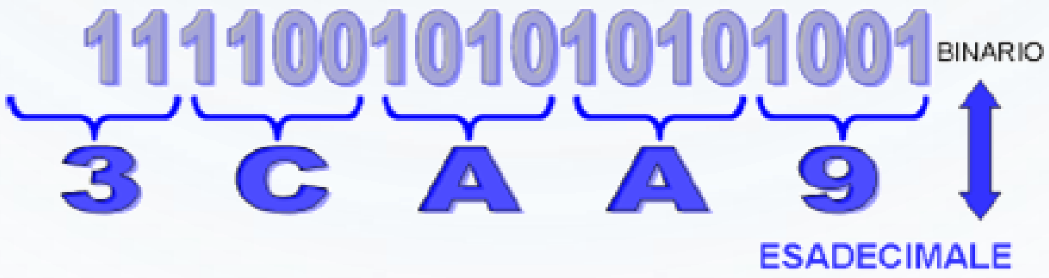
- Trasformazione di rappresentazioni di valori nella base 2 (e viceversa) immediata

- ***Binario → Ottale***
  - Cifre binarie raggruppate in gruppi di tre a partire dalla posizione di peso minore
- ***Ottale → Binario***
  - Ogni cifra ottale esplosa nelle tre cifre binarie che la rappresentano

SISTEMI DI NUMERAZIONE POSIZIONALE OTTALE ED ESADECIMALE

- ***Binario → Esadecimale***
  - Cifre binarie raggruppate in gruppi di quattro a partire dalla posizione di peso minore

- ***Esadecimale → Binario***
  - Ogni cifra esadecimale esplosa nelle quattro cifre binarie che la rappresentano



CONVERSIONE DI UN NUMERO DECIMALE IN BINARIO

- **Passo 1**
  - Separazione della parte intera da quella decimale

- **Passo 2**
  - Applicazione di due procedimenti (algoritmi) diversi per la parte intera e quella decimale

CONVERSIONE DI UN NUMERO DECIMALE IN BINARIO: PASSO 1

- Valore ***d***: scomposizione in parte intera e frazionaria

$$d = d_{pi} + d_{pf}$$

- Per ***b* = *2*** si può scrivere:

$$d_{pi} = \ \dots + c_2 \times 2^2 + c_1 \times 2^1 + c_0 \times 2^0$$

$$d_{pf} = c_{-1} \times 2^{-1} + c_{-2} \times 2^{-2} + \dots$$

- Vogliamo trovare le cifre relative a ***b* = *2***.

CONVERSIONE DI UN NUMERO DECIMALE IN BINARIO: PASSO 2 (PER LA PARTE INTERA)

- Divisione della parte intera $\boldsymbol{d_{pi}}$ per 2

$$d_{pi}/2 = \ldots + c_2 \times 2^1 + c_1 \times 2^0 + c_0 \times 2^{-1}$$

- Si ottiene:
    - $d_{pi1} = \ldots + c_2 \times 2^1 + c_1 \times 2^0$
    - con resto c_0
    - dunque il resto c_0 è proprio la cifra in posizione **0** che cercavamo

CONVERSIONE DI UN NUMERO DECIMALE IN BINARIO: PASSO 2 (PER LA PARTE INTERA)

- Divisione della parte intera d_{pi1} per 2

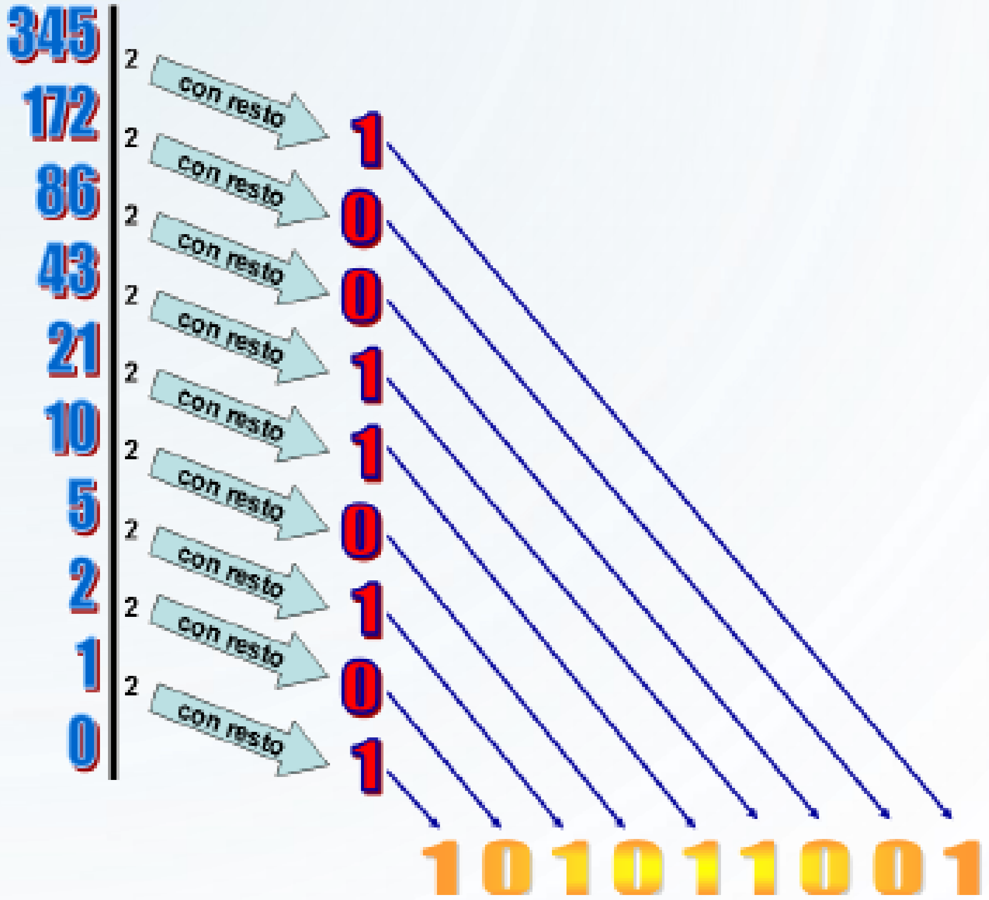
$$d_{pi1} / 2 = \ldots + c_2 \times 2^0 + c_1 \times 2^{-1}$$

- Si ottiene:
  - $d_{pi2} = \ldots + c_2 \times 2^0$
  - con resto c_1
  - dunque il resto c_1 è la cifra in posizione **1** che cercavamo

CONVERSIONE DI UN NUMERO DECIMALE IN BINARIO: PASSO 2 PER LA PARTE INTERA

- Ripetere fino a quando si ottiene un quoziente uguale a 0

- La stringa in binario della parte intera di ***d*** corrisponde a:
  - Insieme dei resti delle diverse divisioni
  - Resto della prima divisione
    - cifra binaria del bit meno significativo
  - Resto dell'ultima divisione
    - cifra binaria del bit più significativo



CONVERSIONE DI UN NUMERO DECIMALE IN BINARIO: PASSO 2 (PER LA PARTE FRAZIONARIA)

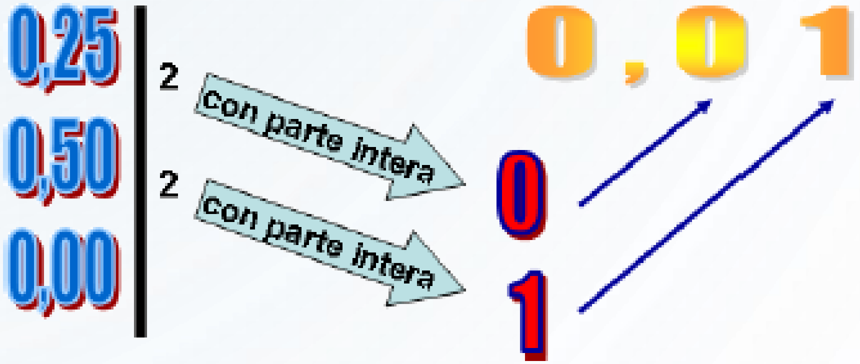
- Moltiplicazione della parte frazionaria $\boldsymbol{d_{pf}}$ per 2:

$$\boldsymbol{d_{pf} \times 2 = c_{-1} \times 2^{0} + c_{-2} \times 2^{-1} + \ldots}$$

- Si ottiene:
  - $\boldsymbol{d_{pf1} = c_{-2} \times 2^{-1} + c_{-3} \times 2^{-2} + \ldots}$
  - con $\boldsymbol{c_{-1}}$ a sinistra della virgola che diventa parte intera
  - dunque la parte intera $\boldsymbol{c_{-1}}$ è la cifra in posizione **-1** da trovare

CONVERSIONE DI UN NUMERO DECIMALE IN BINARIO: PASSO 2 PER LA PARTE FRAZIONARIA

- Ripetere fino a quando
  - La parte frazionaria $d_{pfi\text{-}esima}$ non si annulla
    - conversione senza approssimazione
  - La parte frazionaria $d_{pfi\text{-}esima}$ si ripete con periodicità
  - Si raggiunge il numero di cifre binarie prefissate
    - rappresentazione approssimata
- Stringa in binario della parte frazionaria di ***d***
  - Insieme delle parti intere ottenute dai prodotti



ESERCIZI DI CONVERSIONE

- Convertire in base binaria i numeri:
  - 382.25
  - 82.84

- Convertire in base esadecimale i numeri:
  - 84
  - 382

ESERCIZI DI CONVERSIONE

- Convertire in base binaria i numeri:

  - 382.25 $= 101111110.01$
  - 82.84 $= 1010010.\overline{11010111000010100011} \simeq 1010010.11010111$

- Convertire in base esadecimale i numeri:

  - 84 $= 54$
  - 382 $= 17E$

ESERCIZI DI CONVERSIONE: DECIMALE A BINARIO

- 382.25 da decimale a binario
  - La parte intera 382 si divide per 2 finché non si ottiene 0
  - Si prendono i resti in ordine inverso.

Quoziente	Resto
191	0
95	1
47	1
23	1
11	1
5	1
2	1
1	0
0	1

$(382)_{10} = (101111110)_2$

ESERCIZI DI CONVERSIONE: DECIMALE A BINARIO

- 382.25 da decimale a binario
  - La parte decimale 0.25 si moltiplica per 2 finché la parte decimale non si annulla o si ripete con periodicità.
  - Si prendono le parti intere nell'ordine.

Frazione	Prodotto	Parte intera
0,25	0,50	0
0,50	1,00	1

$(0.25)_{10} = (0.01)_2$

$$\boxed{(382.25)_{10} = (101111110.01)_2}$$

ESERCIZI DI CONVERSIONE: DECIMALE A BINARIO

- 82.84 da decimale a binario
  - La parte intera 82 si divide per 2 finché non si ottiene 0
  - Si prendono i resti in ordine inverso.

Quoziente	Resto
41	0
20	1
10	0
5	0
2	1
1	0
0	1

$$(82)_{10} = (1010010)_2$$

ESERCIZI DI CONVERSIONE: DECIMALE A BINARIO

- 82.84 da decimale a binario
  - La parte decimale 0.84 si moltiplica per 2 finché la parte decimale non si annulla o si ripete con periodicità.
  - Si prendono le parti intere nell'ordine.

Frazione	Prodotto	Parte intera
0,84	1,68	1
0,68	1,36	1
0,36	0,72	0
0,72	1,44	1
0,44	0,88	0
0,88	1,76	1
0,76	1,52	1
0,52	1,04	1
0.04	…	…

$$\Rightarrow \quad (0.84)_{10} \approx (0.11010111)_2$$

ESERCIZI DI CONVERSIONE: DECIMALE A BINARIO

- 82.84 da decimale a binario

$$\boxed{(82.84)_{10} \approx (1010010.11010111)_2}$$

ESERCIZI DI CONVERSIONE: DECIMALE A ESADECIMALE

- 382 da decimale a esadecimale
  - Si converte 382 in binario
  - Si prendono 4 cifre alla volta

$$\underbrace{1}_{1}\,\underbrace{0111}_{7}\,\underbrace{1110}_{E}$$

$$\boxed{(382)_{10} = (101111110)_2 = (17E)_{16}}$$

OPERAZIONI ARITMETICHE SU NUMERI BINARI

- Algoritmi di somma e sottrazione, prodotto e divisione applicabili in modo del tutto analogo ai numeri in base 10
- Tabella di somma e prodotto per cifre binarie

a	b	a + b	a * b
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	10	1

ADDIZIONE

- Si deve tener conto del riporto
  - Si propaga a sinistra come nell'aritmetica decimale

	1	0	0	1	0	1	0	+
			1	1	0	1	1	=
	1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	

SOTTRAZIONE

- In presenza dell'operazione “0 – 1”, attivare il prestito dalle cifre più a sinistra

1	0	1	0	0	0	0	1	-
	1	0	1	0	1	0	1	=
	1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	

MOLTIPLICAZIONE

		1	0	1	0	0	0	0	1	*
							1	0	1	=
		1	0	1	0	0	0	0	1	+
	0	0	0	0	0	0	0	0		+
1	0	1	0	0	0	0	1			=

MOLTIPLICAZIONE

		1	0	1	0	0	0	0	1	*
							1	0	1	=
		1	0	1	0	0	0	0	1	+
	0	0	0	0	0	0	0	0		+
1	0	1	0	0	0	0	1			=
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	

DIVISIONE

DIVISIONE

1 0 0 0 1 | 1 1

DIVISIONE

1 0 0 0 1	1 1

DIVISIONE

$$\begin{array}{ccccc|cc}
\multicolumn{3}{c}{\overline{1\quad 0\quad 0}} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cline{6-7}
 & & & & & 1 &
\end{array}$$

DIVISIONE

1	0	0	0	1	|	1	1
	1	1			|	1	

DIVISIONE

$$\begin{array}{ccccc|cc}
\cline{1-3}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\cline{6-7}
 & 1 & 1 & & & 1 & \\
\cline{1-3}
= & = & 1 & & & &
\end{array}$$

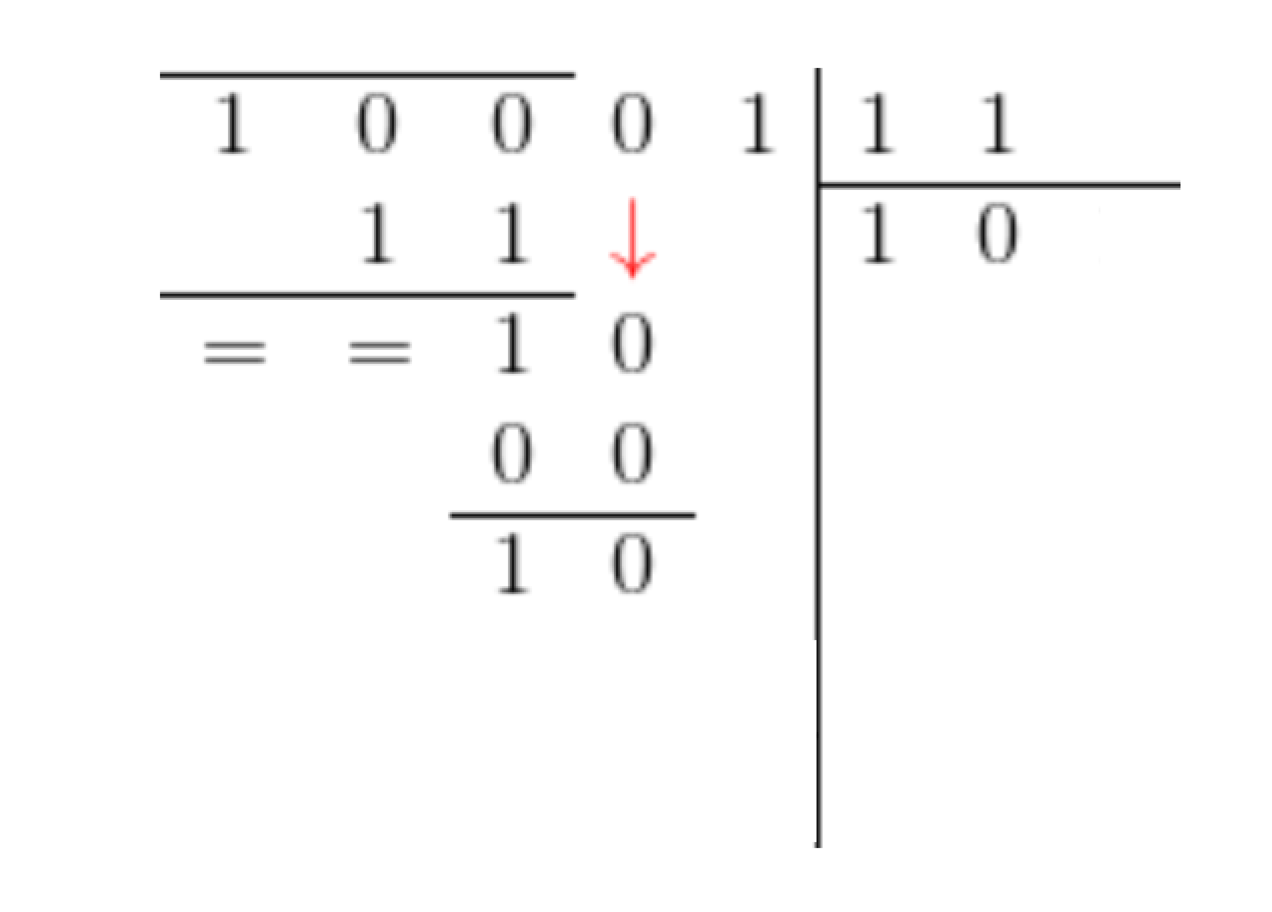
DIVISIONE

1	0	0	0	1	|	1	1
	1	1	↓		|	1	
=	=	1	0		|		

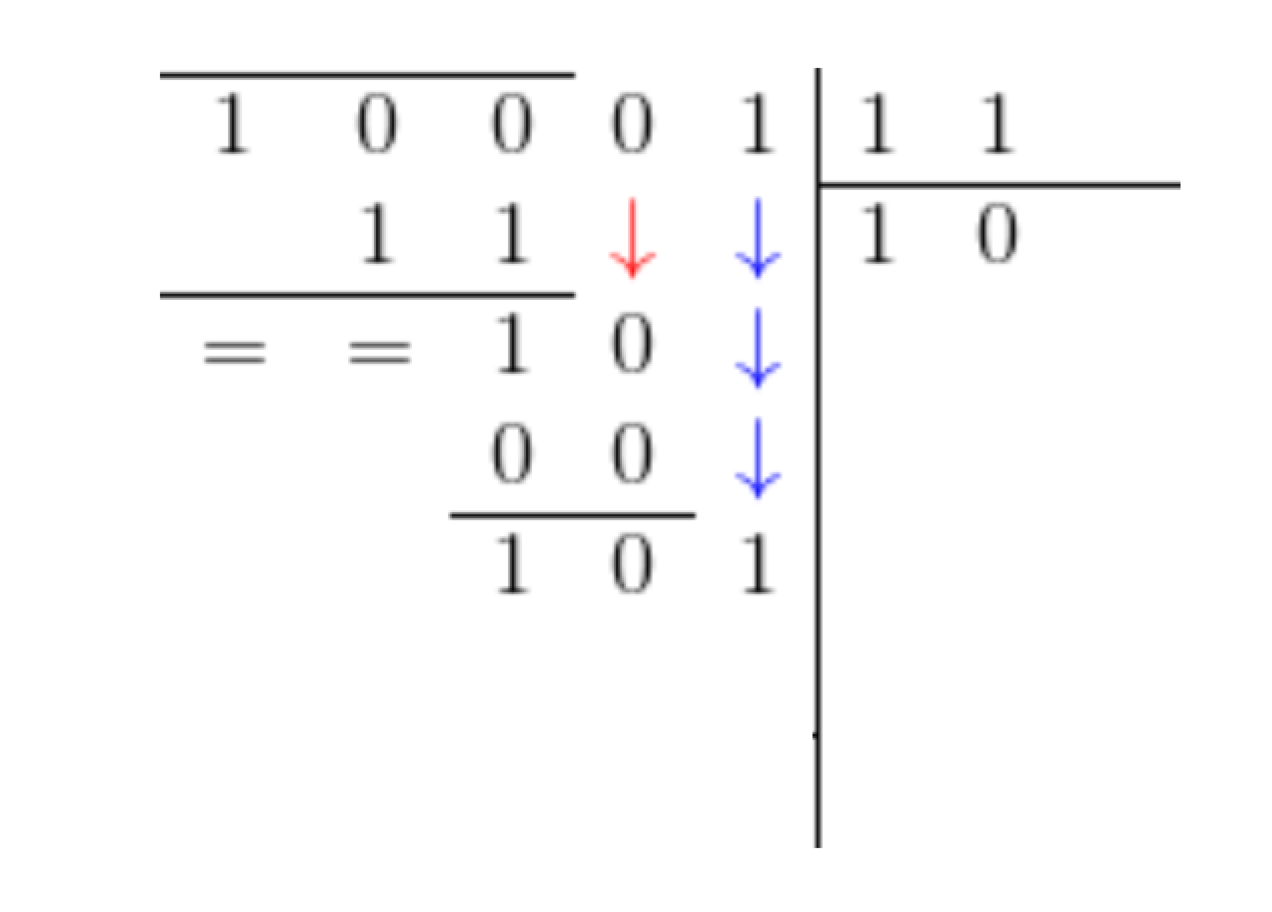
DIVISIONE

1	0	0	0	1	1	1
	1	1	↓		1	0
=	=	1	0			
		0	0			

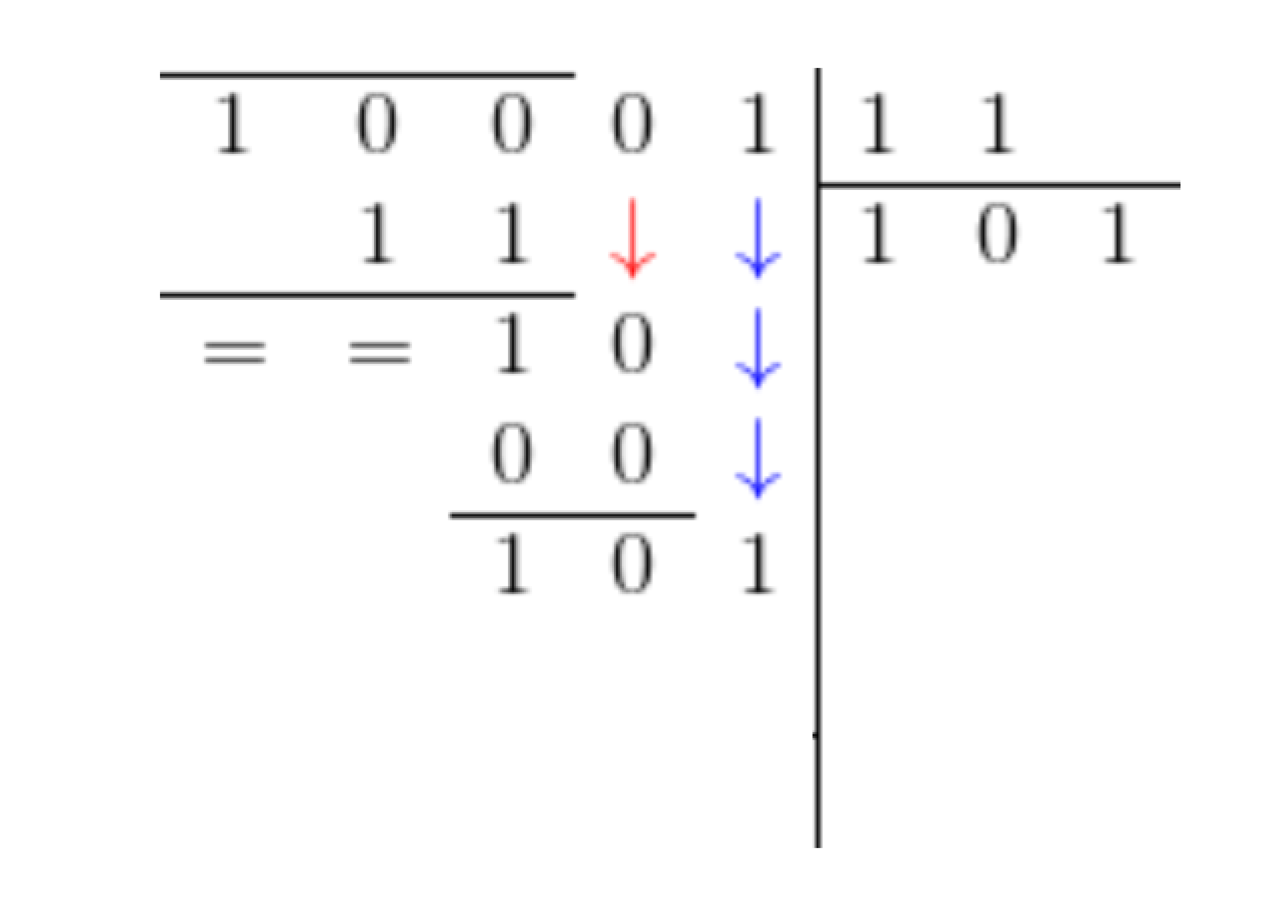
DIVISIONE



DIVISIONE



DIVISIONE



DIVISIONE

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
\overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\cline{6-8}
 & 1 & 1 & \downarrow & \downarrow & 1 & 0 & 1 \\
\cline{1-3}
= & = & 1 & 0 & \downarrow & & & \\
 & & 0 & 0 & \downarrow & & & \\
\cline{3-4}
 & & 1 & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & &
\end{array}
$$

DIVISIONE

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
\cline{1-3}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\cline{6-8}
 & 1 & 1 & \downarrow & \downarrow & 1 & 0 & 1 \\
\cline{1-3}
= & = & 1 & 0 & \downarrow & & & \\
 & & 0 & 0 & \downarrow & & & \\
\cline{3-4}
 & & 1 & 0 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 1 & 0 & & & \\
\end{array}
$$

ESERCIZI

- Per fare le seguenti operazioni:
  - Convertire in binario
  - Effettuare l’operazione in binario
  - Convertire il risultato in decimale
  - Verificare il risultato
    - 85 + 98
    - 24.12 – 16.219
    - 34 * 9
    - 156 / 12

ESERCIZI

- Per fare le seguenti operazioni:
  - Convertire in binario
  - Effettuare l'operazione in binario
  - Convertire il risultato in decimale
  - Verificare il risultato
    - 85 + 98 = 183
    - 24.12 – 16.219 = 7.901
    - 34 * 9 = 306
    - 156 / 12 = 13

DOMANDE, DUBBI, PERPLESSITÀ