ELEMENTI DI INFORMATICA

DOCENTE: FRANCESCO MARRA

INGEGNERIA CHIMICA
INGEGNERIA ELETTRICA
SCIENZE ED INGEGNERIA DEI MATERIALI
INGEGNERIA GESTIONALE DELLA LOGISTICA E DELLA PRODUZIIONE
INGEGNERIA NAVALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

ALGEBRA BOOLEANA

AGENDA

- Algebra di Boole

IL RAGIONAMENTO LOGICO

- Fin dagli albori dell'umanità, vi era il sogno di creare macchine in grado di emulare le attività umane
  - robot (attività meccaniche)
  - calcolatori (attività logico matematiche)
- L'aritmetica è relativamente facile da automatizzare
  - calcolatori meccanici (e.g., Pascalina), in grande uso fino agli anni 60, specificamente realizzati per il calcolo di logaritmi, derivate, etc.
- La matematica, e più in generale il "ragionamento" logico, sono meno facili da automatizzare

IL RAGIONAMENTO LOGICO

- Sillogismo di Aristotele
  - forma fondamentale di argomentazione logica
  - tre proposizioni dichiarative connesse in modo tale che dalle prime
  - due, assunte come premesse, si possa dedurre una conclusione
  - *se A implica B, e se B implica C, allora A implica C*
- Esempio
  - tutti gli uomini sono mortali, tutti i Greci sono uomini, quindi tutti i Greci sono mortali
  - Tutti gli Ateniesi hanno la barba, Socrate è ateniese, quindi Socrate ha la barba

IL RAGIONAMENTO LOGICO

- Comporta due azioni fondamentali
    - elaborare “fatti”, verità, del mondo di interesse
    - dedurre nuove verità, sulla base di “regole logiche” → algoritmi
- Il ragionamento matematico (la capacità di dimostrare “teoremi”) è ragionamento logico
    - *se* $X > Y$, *e se* $Y > Z$, *allora* $X > Z$
- Affinché un calcolatore possa emulare l’uomo, deve possedere sia capacità aritmetiche che capacità logiche

ALGEBRA DI BOOLE: PRELIMINARI

- L’algebra tradizionale manipola entità numeriche attraverso
  - operazioni ben definite (somma e moltiplicazione)
  - chiare di regole di manipolazione
- Boole scoprì (1847) che il ragionamento logico sui fatti del mondo poteva altresì assumere la forma di un algebra
  - le entità numeriche sono sostituite da “insiemi”
  - ci sono operazioni base tra insiemi
  - le regole sono isomorfe (struttura simile) a quelle dell’algebra tradizionale

ALGEBRA DI BOOLE: PRELIMINARI

- Tali “Insiemi” contengono entità e “fatti” del mondo
- I fatti si esprimono attraverso “predicati” (frasi) veri o falsi
  - Marco è un mammifero
    - questo predicato è vero, poiché l’insieme dei mammiferi non è vuoto e Marco appartiene a tale insieme
  - Marco è un cavallo
    - questa predicato è falso

ALGEBRA DI BOOLE: PRELIMINARI

- Se denotiamo con
  - Ø l’insieme vuoto, l’insieme dei fatti che non esistono, cioè le cose false
  - 1 l’insieme totale (“universo”), cioè l’insieme dei fatti veri del mondo
  - * l’operazione ⋂ di intersezione tra insiemi
  - + l’operazione ⋃ di unione tra insiemi

Ø ⋃ Ø = Ø
Ø ⋃ 1 = 1
1 ⋃ Ø = 1
1 ⋃ 1 = 1
Ø ⋂ Ø = Ø
Ø ⋂ 1 = Ø
1 ⋂ Ø = Ø
1 ⋂ 1 = 1

Ø + Ø = Ø
Ø + 1 = 1
1 + Ø = 1
1 + 1 = 1
Ø * Ø = Ø
Ø * 1 = Ø
1 * Ø = Ø
1 * 1 = 1

A parte un singolo caso, queste operazioni logiche su predicati booleani, «sembrano» operazioni matematiche su entità numeriche

ALGEBRA DI BOOLE: PRELIMINARI

- La logica sui fatti può essere trattata come un’algebra
  - quindi anche la nostra capacità di ragionare sui fatti del mondo e
  - derivarne ulteriori fatti (verità nuove)

- L’algebra booleana può essere concettualmente considerata come un modo di operare sulle verità, i fatti del mondo

- Quindi, la logica può essere in qualche modo automatizzata!!!!

ALGEBRA DI BOOLE: PRELIMINARI

- Un’algebra booleana opera su fatti rappresentati tramite variabili, dette “logiche” o “booleane”, che possono assumere solamente due valori
  - 1/0, vero/falso, on/off, chiuso/aperto
  - il valore 1 è associato alla condizione logica vero (true, on, chiuso)
  - il valore 0 è associato alla condizione logica falso (false, off, aperto)
- Un’algebra booleana è adatta per rappresentare e ragionare su “eventi binari”, che possono assumere solo due valori
  - ad esempio, una lampadina può essere accesa (a questa condizione si associa il valore 1, o vero) oppure spenta (valore 0, o falso)

ALGEBRA DI BOOLE: DEFINIZIONI

- Un insieme non vuoto V contenente almeno i due elementi logici 0 ed 1 si definisce un'algebra di Boole se tra i suoi elementi sono definite le seguenti operazioni logiche:
  - un'operazione binaria (V×V → V) di somma (indicata con +)
  - un'operazione binaria (V×V → V) di prodotto (indicata con •)
  - un'operazione unaria (V → V) di inversione (indicata con ┌)
- … e se tali operazioni soddisfano i seguenti assiomi:
  - proprietà commutativa
  - proprietà distributiva
  - esistenza dell'elemento neutro di + e •
  - esistenza del complemento

ASSIOMI DI UN'ALGEBRA DI BOOLE

- Proprietà commutativa
  - $a + b \Leftrightarrow b + a$
  - $a \bullet b \Leftrightarrow b \bullet a$
- Proprietà distributiva
  - $a \bullet (b+c) \Leftrightarrow a \bullet b + a \bullet c$
  - $a + (b \bullet c) \Leftrightarrow (a+b) \bullet (a+c)$

ASSIOMI DI UN'ALGEBRA DI BOOLE

- Esistenza dell'elemento neutro
  - $a + 0 \Leftrightarrow a$
  - $a \bullet 1 \Leftrightarrow a$
- Esistenza del complemento
  - $a + a' \Leftrightarrow 1$ con $a' = \bar{a}$
  - $a \bullet a' \Leftrightarrow 0$

ALTRE PROPRIETÀ DI UN'ALGEBRA DI BOOLE

- Associativa
  - della somma $x + (y + z) = (x + y) + z$
  - del prodotto $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
- Idempotenza
  - per la somma $x + x = x$
  - per il prodotto $x \bullet x = x$
- Assorbimento
  - Della somma $x + (x \bullet y) = x$
  - Del prodotto $x \bullet (x + y) = x$
- Esistenza del minimo e del massimo
  - per il minimo $x \bullet o = 0$
  - per il massimo $x + 1 = 1$

ALTRE PROPRIETÀ DI UN'ALGEBRA DI BOOLE

- Tutti gli assiomi di un'algebra di Boole sono caratterizzati dal **principio di dualità**
  - da una qualsiasi identità booleana se ne ricava un'altra sostituendo *l'operatore* **+** con • e l'elemento logico **0** con **1**, e viceversa
- **Relazioni di De Morgan**
  - $\overline{(x + y)} = \bar{x} \bullet \bar{y}$
  - $\overline{(x \bullet y)} = \bar{x} + \bar{y}$

ALTRE ALGEBRE DI BOOLE

- Esistono diverse algebre di Boole
  - modelli di algebra di Boole con diverse interpretazioni degli elementi e degli operatori

- Esempi
  - Algebra booleana binaria
  - Algebra degli insiemi
  - Algebra delle proposizioni
  - Algebra delle reti

ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI

Algebra di Boole		Algebra delle proposizioni	
Insieme di sostegnoV	{0, 1}	Insieme di sostegnoV	{falso, vero}
Somma	+	Disgiunzione	OR
Prodotto	•	Congiunzione	AND
Complemento	¬	Negazione	NOT
Minimo	0	Contraddizione	falso
Massimo	1	Tautologia	vero

ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI

- Esempio:
  - In questo momento sta piovendo (a)
  - In questo momento non sta piovendo (b)
  - In questo momento sta piovendo oppure non sta piovendo (c)
  - In questo momento sta piovendo e non sta piovendo (d)
- NB
  - la proposizione b è la negazione della proposizione a, e viceversa
  - c è una tautologia, infatti c = a OR b = a OR (NOT a) = vero
  - d è una contraddizione, infatti c = a AND b = a AND (NOT a) = falso

ALGEBRA BINARIA

Algebra di Boole		Algebra Binaria	
Insieme di sostegno V	{0, 1}	Insieme di sostegno V	{0, 1}
Somma	+	Somma logica	OR
Prodotto	•	Prodotto logico	AND
Complemento	¬	Negazione	NOT
Minimo	0	Zero	0
Massimo	1	Uno	1

OPERATORI LOGICI

- Le variabili booleane possono essere combinate per mezzo di operatori (o connettivi) logici booleani, che restituiscono anch'essi un valore logico booleano
- Gli operatori logici principali sono:
  - AND
  - OR
  - NOT
  - NAND
  - NOR
  - (E)XOR – (E)XNOR

OPERATORI LOGICI

- Operatore AND di congiunzione logica
  - tale operatore viene denotato dai simboli • o ∧, spesso sottintesi
    - attenzione a non confondere • con il prodotto aritmetico
  - si applica a due operandi logici e produce un valore in accordo alla seguente tabella di verità

a	b	a ∧ b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Quindi, la congiunzione logica tra due operandi è vera **se e solo se** entrambi gli operandi sono veri

OPERATORI LOGICI

- Operatore OR di inclusione logica
  - tale operatore viene denotato dai simboli + o V
    - attenzione a non confondere + con la somma aritmetica
  - si applica a due operandi logici e produce un valore in accordo alla seguente tabella di verità

a	b	a ∧ b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Quindi, la inclusione logia tra due operandi è vera **se almeno uno** degli operandi è vero

OPERATORI LOGICI

- Operatore NOT di negazione logica
  - tale operatore viene denotato dal simbolo ¯ sopra la variabile da negare (ad esempio, $\bar{a}$)
    - oppure tramite il simbolo prima ¬ della variabile (ad esempio, ¬a)
  - si applica a un solo operando logico (operatore unario) e produce un valore in accordo alla seguente tabella di verità

a	a
0	1
1	0

- il risultato della negazione logica è il valore logico opposto a quello dell'operando
  - ovvero, se l'operando è falso l'uscita è vera e viceversa

OPERATORI BOOLEANI BINARI

- Lavorano bit a bit sulle stringhe binarie
  - OR (o somma logica)
    - dati due bit restituisce il valore "0" se e solo se i bit erano entrambi posti a "0", in tutti gli altri casi il risultato è "1"
  - AND (o prodotto logico)
    - dati due bit restituisce il valore "1" se e solo se i bit erano entrambi posti a "1", in tutti gli altri casi il risultato è "0"
  - NOT (operatore di negazione o di complementazione)
    - dato un bit restituisce il valore "0" se esso era posto a "1", restituisce invece "1" se il bit era posto a "0"

OPERATORI BOOLEANI BINARI: ESEMPI

0	0	0	0	1	1	0	1	AND
1	1	1	0	1	1	0	0	=
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	

0	0	0	0	1	1	0	1	OR
1	1	1	0	1	1	0	0	=
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	

0	0	0	0	1	1	0	1	NOT
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	

FUZIONI BOOLEANE

- Funzioni booleane operano su variabili booleane e possono produrre anch'esse solo valori 0 o 1
- Una funzione booleane F, funzione di *n* variabili booleane, si indica con:

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n): \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

- **N.B.**: a differenza di quanto accade per le funzioni reali di variabili reali, il numero di funioni booleane definibili su *n* variabili booleane è un insieme finito

TABELLA DELLA VERITÀ

- Un modo per definire una funzione booleana $F(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è quella di specificare i suoi valori per tutte le 2^n possibili combinazioni delle n variabili booleane da cui dipende. Tale elenco viene chiamato **tabella della verità**

v_3	v_2	v_1	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

TABELLA DELLA VERITÀ: ESEMPIO

- Descrizione di un evento mediante una funzione booleana
- Un allievo passa l'esame se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:
  - supera sia il compito di esonero dallo scritto sia la prova orale
  - non supera l'esonero, ma è sufficiente alla prova scritta di un appello regolare e supera la prova orale
- Si può assegnare ad ogni evento una variabile booleana
  - a → esonero
  - b → scritto regolare
  - c → prova orale

TABELLA DELLA VERITÀ: ESEMPIO

- Con 3 variabili booleane ci sono 8 (23) possibili combinazioni
- La tabella della verità della funzione booleana “superamento esame” S(a,b,c) sarà:

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

TABELLA DELLA VERITÀ: ESEMPIO

- Osservazioni
  - si noti che per superare l'esame, cioè S=1, bisogna aver sostenuto e superato l'orale e l'esonero e/o lo scritto regolare
  - a stretto rigore di logica la condizione a=0, b=0, c=1 non può verificarsi, in quanto si può accedere all'orale solo dopo aver superato una delle prove precedenti (o entrambe)
  - il valore di S per quella combinazione si potrebbe più correttamente non specificare (valore detto don't care e solitamente rappresentato con il simbolo "–")

a → esonero

b → scritto regolare

c → prova orale

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ESPRESSIONI LOGICHE

- Un altro modo di definire una funzione booleana è tramite espressioni logiche che si ottengono combinando variabili logiche mediante i connettivi logici
- Sono espressioni composte da:
  - variabili booleane
  - le costanti logiche False (0) e True (1)
  - altre espressioni combinate tramite gli operatori logici
- Esempi:
  - $(a+b) \cdot c$
  - $ab + c(d+ae) + c \oplus e$

PRECEDENZA OPERATORI LOGICI

- NOT ha precedenza più alta di AND e OR
  - $\neg a \land \neg b \lor \neg c \Leftrightarrow (\neg a) \land (\neg b) \lor (\neg c)$
- AND ha precedenza più alta di OR
  - $a \land b \lor c \Leftrightarrow (a \land b) \lor c$
- Le parentesi si usano per imporre una particolare precedenza nel calcolo di un’espressione logica
  - ad esempio, $a \land (b \lor c)$

DALLE ESPRESSIONI LOGICHE ALLA TABELLE DI VERITÀ

- Si calcolano le tabelle di verità dei connettivi logici rispettando la precendeza

- Ad esempio, $F(a, b, c) = (a \land b \lor \neg c)$
  - si determina il numero di variabili non ripetute presenti nell'espressione (tre variabili in questo caso)
  - si costruisce una tabella elencando tutte le possibili combinazioni dei valori che le variabili possono assumere
  - a partire dai valori che possono assumere la variabili, si cominciano a valutare le espressioni secondo l'ordine di precedenza degli operatori

a	b	c	F(a, b, c)

DALLE ESPRESSIONI LOGICHE ALLA TABELLE DI VERITÀ

- Si calcolano le tabelle di verità dei connettivi logici rispettando la precendeza

- Ad esempio, $F(a, b, c) = (a \land b \lor \neg c)$
  - si determina il numero di variabili non ripetute presenti nell'espressione (tre variabili in questo caso)
  - si costruisce una tabella elencando tutte le possibili combinazioni dei valori che le variabili possono assumere
  - a partire dai valori che possono assumere la variabili, si cominciano a valutare le espressioni secondo l'ordine di precedenza degli operatori

a	b	c	F(a, b, c)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

DALLE ESPRESSIONI LOGICHE ALLA TABELLE DI VERITÀ

- Si calcolano le tabelle di verità dei connettivi logici rispettando la precendeza
- Per $F(a, b, c) = (a \land b \lor \neg c)$

a	b	c	$a \land b$	$\neg c$	F(a, b, c)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			

a	b	c	$a \land b$	$\neg c$	F(a, b, c)
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

DALLE ESPRESSIONI LOGICHE ALLA TABELLE DI VERITÀ

- Si calcolano le tabelle di verità dei connettivi logici rispettando la precendeza
- Per $F(a, b, c) = (a \wedge b \vee \neg c)$

a	b	c	$a \wedge b$	$\neg c$	F(a, b, c)
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0

a	b	c	$a \wedge b$	$\neg c$	F(a, b, c)
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

ESPRESSIONI LOGICHE EQUIVALENTI

- Due funzioni/espressioni logiche F_1 e F_2 sono equivalenti (o logicamente equivalenti) se il loro valore di verità è identico per ogni assegnazione delle variabili:
  - tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 0 sono tali per cui anche F_2 vale 0, e viceversa
  - tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 1 sono tali per cui anche F_2 vale 1, e viceversa

- Ossia, ad ingressi uguali F_1 e F_2 danno uscite uguali

ESPRESSIONI LOGICHE EQUIVALENTI

- L'eguaglianza tra due espressioni logiche F_1 e F_2 può essere verificata tramite le rispettive tabelle di verità
- Ad esempio $F_1 = x+xy$ e $F_2 = x$ sono tra loro equivalenti

x	y	xy	x+xy
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

ESPRESSIONI LOGICHE COMPLEMENTARI

- Due funzioni/espressioni logiche F_1 e F_2 sono complementari quando si verificano entrambe le seguenti condizioni:
  - tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 0 sono tali per cui anche F_2 vale 1, e viceversa
  - tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 1 sono tali per cui anche F_2 vale 0, e viceversa

- Ossia, ad ingressi uguali F_1 e F_2 danno uscite opposte
  - ad esempio, $F_1 = ab$ e $F_2 = a$ NAND b, sono complementari fra loro

ESPRESSIONI LOGICHE DUALI

- Due funzioni/espressioni logiche F_1 e F_2 si dicono duali quando si verificano entrambe le seguenti condizioni:
  - tutti gli OR di F_1 corrispondo a AND di F_2, e viceversa
  - tutti gli 1 di F_1 corrispondo a 0 di F_2, e viceversa

- Esempio:
  - F_1=a+b(c+1) e F_2=ab+c•0 sono tra loro duali

ALGEBRA DI BOOLE: ESERCIZIO

- Esercizio
  - Calcolare la tabella di verità della seguente espressione logica

$$F(a, b) = (a \land \neg b) \lor (b \land \neg a)$$

ALGEBRA DI BOOLE: ESERCIZIO

- Esercizio
  - Calcolare la tabella di verità della seguente espressione logica

$$F(a, b) = (a \land \neg b) \lor (b \land \neg a)$$

a	b	F(a, b)

ALGEBRA DI BOOLE: ESERCIZIO

- Esercizio
  - Calcolare la tabella di verità della seguente espressione logica

$$F(a, b) = (a \land \neg b) \lor (b \land \neg a)$$

a	b	¬a	¬b	a ∧ ¬b	b ∧ ¬a	F(a, b)
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

ALGEBRA DI BOOLE: ESERCIZIO

- Esercizio
  - Calcolare la tabella di verità della seguente espressione logica

$$F(a, b) = (a \land \neg b) \lor (b \land \neg a)$$

a	b	¬a	¬b	a ∧ ¬b	b ∧ ¬a	F(a, b)
0	0	1	1	0	0	
0	1	1	0	0	1	
1	0	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	0	

ALGEBRA DI BOOLE: ESERCIZIO

- Esercizio
  - Calcolare la tabella di verità della seguente espressione logica

$$F(a, b) = (a \land \neg b) \lor (b \land \neg a)$$

a	b	¬a	¬b	a ∧ ¬b	b ∧ ¬a	F(a, b)
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

DOMANDE, DUBBI, PERPLESSITÀ