ELEMENTI DI INFORMATICA

DOCENTE: FRANCESCO MARRA

INGEGNERIA CHIMICA
INGEGNERIA ELETTRICA
SCIENZE ED INGEGNERIA DEI MATERIALI
INGEGNERIA GESTIONALE DELLA LOGISTICA E DELLA PRODUZIIONE
INGEGNERIA NAVALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

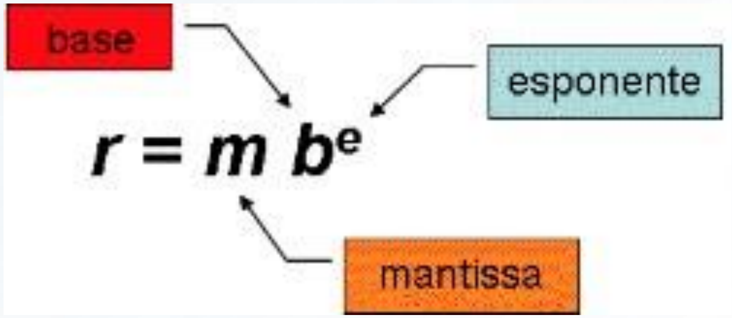
RAPPRESENTAZIONE NUMERI REALI IN BINARIO

AGENDA

- Rappresentazione dei numeri reali

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI REALI

- **Notazione scientifica = virgola mobile o floating point**
- Numeri reali rappresentati in binario attraverso la seguente notazione scientifica:
  - ***m*** numero frazionario detto *mantissa*
    - Il suo numero di cifre determina la precisione del numero
  - ***b*** numero naturale prefissato detto *base*
  - ***e*** numero intero chiamato *esponente* o *caratteristica*
    - determina l'ampiezza dell'intervallo di valori



RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI REALI

- La rappresentazione in virgola mobile consente di esprimere lo stesso valore, fissata la base, con infinite coppie (*mantissa*, *esponente*)
  - 48000 è uguale a 48×10^3, ma anche a 4.8×10^4
  - 0.1011 è uguale a 1011×2^{-4}, ma anche a 1.011×2^{-1}

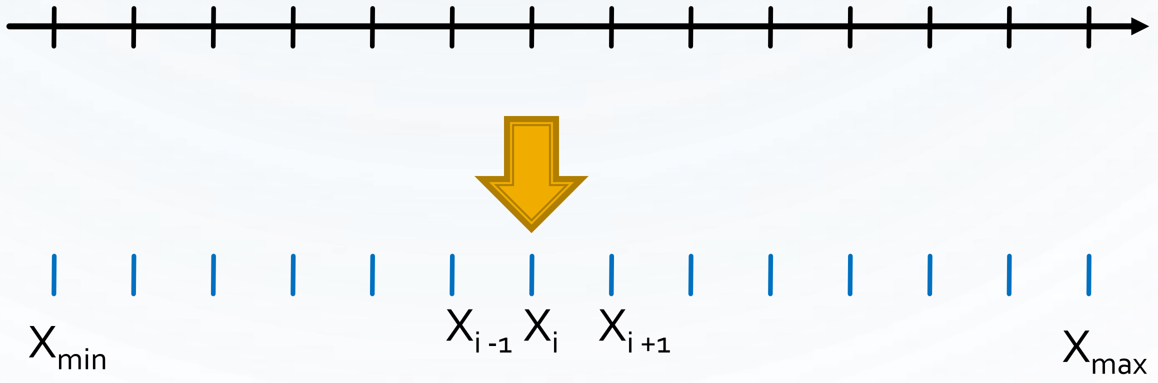
- **Mantissa normalizzata:** $\mathbf{1 \leq |m| < b}$
  - Prima cifra diversa da zero
  - Mantissa in valore assoluto minore dalla base
  - 4.8×10^4
  - 1.011×2^{-1}

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI REALI

- In un intervallo reale, comunque piccolo, esistono infiniti valori
  - i numeri reali formano un continuo
- Discretizzazione
  - Si sostituisce l'insieme infinito di valori reali (continuo) con un insieme finito di valori predefiniti (discreto)

Insieme dei numeri reali

Sottoinsieme discreto di valori



ERRORE DI APPROSSIMAZIONE

- È importante comprendere l'entità degli errori che si possono commettere:
  - **Calcolo numerico:** ricerca di algoritmi per la soluzione di problemi matematici che usano numeri reali
- L'errore che si commette sostituendo x con X:

$$\varepsilon = |x - X|$$

- ε dipende dalla rappresentazione finita (numero finito di cifre) utilizzata per i numeri reali

ERRORE DI APPROSSIMAZIONE

- Calcolatrice con quattro cifre decimali che applica le regole di arrotondamento sull'ultima cifra

Numero	Arrotondamento	Errore
0,00347	0,0035	$3 * 10^{-5} = 0.3 * 10^{-4}$
0,000348	0,0003	$48 * 10^{-6} = 0.48 * 10^{-4}$
0,00987	0,0099	$3 * 10^{-5} = 0.3 * 10^{-4}$
0,000987	0,0010	$13 * 10^{-6} = 0.13 * 10^{-4}$

- Errore massimo di 0.5 sull'ultima cifra (in tal caso: $0.5 * 10^{-4}$)
- In generale, errore massimo $\varepsilon = 0.5 * b^{-m}$
  - dove b^{-m} è il valore di una unità in posizione meno significativa

RAPPRESENTAZIONE DEI REALI IN UN CALCOLATORE

- Virgola mobile con segno e mantissa normalizzata
  - $r = \pm\, m \times b^{e}$
- Rappresentazione discreta
  - $m \in [\min(m), \max(m)]$ $(1 \le m < b)$
  - ***b*** prefissato (e.g. 10 oppure 2)
  - $e \in [\min(e), \max(e)]$

RAPPRESENTAZIONE DEI REALI: CALCOLATRICE

Calcolatrice con le seguenti caratteristiche:

- **Mantissa:**
  - Cinque cifre
  - Rappresentazione normalizzata ($1 \leq m < b$)
  - $m \in [1, 9.9999]$
- $b = 10$
- Esponente:
  - Due cifre (più il segno)
  - $e \in [-99, 99]$

Numero	Valore
0.384	3.8400×10^{-1}
13456700000	1.3457×10^{10}
64350	6.4350×10^{4}
333	3.3300×10^{2}
0.0048	4.8000×10^{-3}
0.0000001	1.0000×10^{-8}

RAPPRESENTAZIONE DEI REALI: APPROSSIMAZIONE

- Intervalli $[X_i , X_{i+1}]$ con ampiezza differente:
  - Sempre più ampi al crescere dell'esponente
    - Esempio calcolatrice: $[9.9998 \times 10^{99}, 9.9999 \times 10^{99}]$
  - Sempre più piccoli al diminuire dell'esponente
    - Esempio calcolatrice: $[1.0000 \times 10^{-99}, 1.0001 \times 10^{-99}]$

RAPPRESENTAZIONE DEI REALI: OPERAZIONI

- Le operazioni si complicano e possono generare errori di approssimazione

- Somma e sottrazione richiedono l'**allineamento** degli esponenti
  - Possono **scomparire** alcune cifre significative del numero con esponente più piccolo
    - $1.2345\times10^{1} + 9.8765\times10^{4} = 0.0012\times10^{4} + 9.8765x10^{4}$
  - Il risultato della sottrazione di numeri quasi uguali può presentare meno cifre significative
    - $1.2345x10^{1} – 1.2344x10^{1} = 1.0000x10^{-3}$

RAPPRESENTAZIONE DEI REALI: OPERAZIONI

- Operazioni si complicano e possono generare errori di approssimazione

- Prodotto e divisione richiedono **operazioni separate** su mantisse ed esponenti
    - $123\times10^{0} * 678\times10^{-2} = (123 * 678)\times10^{(0-2)}$

- Divisione per valori molto piccoli
    - Si può avere condizione di **overflow**

CONDIZIONI DI OVERFLOW

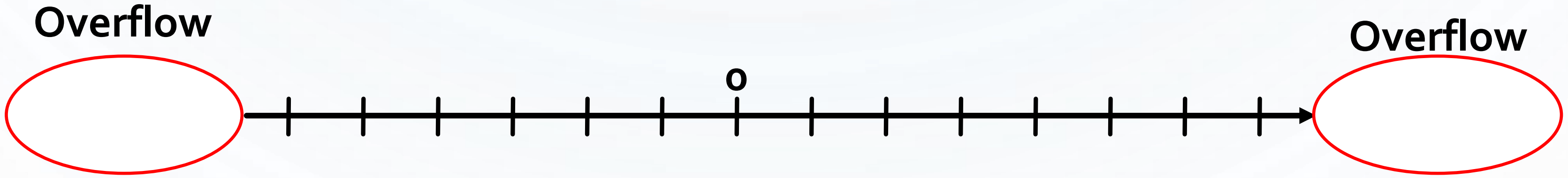
- **Overflow:** Numeri reali grandi in valore assoluto non sono rappresentabili, se non compresi in un insieme limitato con estremi predefiniti [*minreal*, *maxreal*]:

$$r = m \times b^{e}$$

$$r \notin [-\max(m) \times b^{\max(e)}, \max(m) \times b^{\max(e)}] \rightarrow \textbf{Overflow}$$

Es. b**=10 :** $[-9.99 \times 10^{99}, 9.99 \times 10^{99}]$

Es. b**=2 :** $[-1.11 \times 2^{11}, 1.11 \times 2^{11}]$



CONDIZIONI DI UNDERFLOW

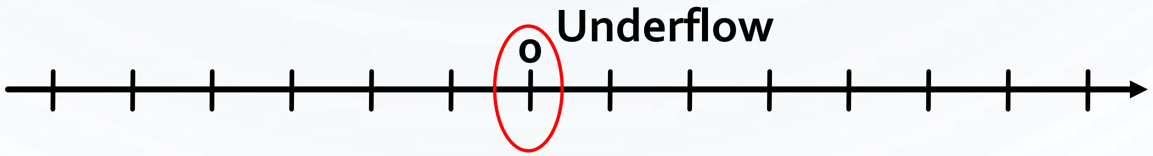
- **Underflow**: Numeri reali piccoli in valore assoluto non sono rappresentabili, se compresi in un insieme limitato con estremi predefiniti (valore confuso con lo zero, per effetto delle approssimazioni)

$$r = m \times b^{e}$$

$$r \in (-\min(m) \times b^{\min(e)}, \min(m) \times b^{\min(e)}) \rightarrow r \approx 0$$

Es. b=10: $(-1.00 \times 10^{-99}, 1.00 \times 10^{-99})$

Es. b=2: $(-1.00 \times 2^{-11}, 1.00 \times 2^{-11})$



CONDIZIONI DI UNDERFLOW E OVERFLOW: ESEMPIO

- Calcolatrice con le seguenti caratteristiche:
  - $b = 10$
  - Cinque cifre per la mantissa < 10
  - Due cifre per l'esponente
  - Rappresentazione normalizzata con la prima cifra diversa da zero
- **Overflow**
  - $x > 9.9999 \times 10^{99}$
  - $x < -9.9999 \times 10^{99}$
- **Underflow**
  - $-1.0000 \times 10^{-99} < x < 1.0000 \times 10^{-99}$

RAPPRESENTAZIONE VIRGOLA MOBILE IN UN CALCOLATORE

- Un numero reale in virgola mobile può essere facilmente rappresentabile nella memoria di un calcolatore
- Rappresentazione in virgola mobile normalizzata nel caso binario

$$s\ 1.xxxxxx * 2^{yyyy}$$

  - s (segno): + → 0 - → 1
  - "1." non si rappresenta nel calcolatore
  - 0.xxxxxx (parte significativa della mantissa) → rappresentazione in base 2
  - "* 2" non si rappresenta nel calcolatore
  - yyyy (esponente) → rappresentazione per eccesso

RAPPRESENTAZIONE VIRGOLA MOBILE: STANDARD 754 IEEE

- 1980: ogni calcolatore con i propri numeri float
  - Formati numerici e convenzioni di calcolo proprietarie

- 1985: nascita dello Standard 754 IEEE per tre formati numerici in virgola mobile
  - singola precisione o precisione semplice (32 bit)
  - doppia precisione (64 bit)
  - precisione estesa (80 bit)

RAPPRESENTAZIONE VIRGOLA MOBILE: STANDARD 754 IEEE

- Singola precisione (32 bit)

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

$$(-1)^{b_{31}} * 2^{b_{30}b_{29}\dots b_{24}b_{23}} * 1.b_{22}b_{21}\dots b_{1}b_{0}$$

- Numero di bit per il segno: **1**
- Numero di bit per l'esponente: **8**
- Rappresentazione esponente: **Base 2 per eccesso 127**
- Valori esponente: **[-126, 127]**
  - le parole codice 0_{10} (-127_{10}) e 255_{10} (128_{10}) sono riservate per funzioni speciali
- Numero di bit per la mantissa: **23**
- Rappresentazione (mantissa-1): **Binaria**
- Cifre decimali mantissa: **≅7 (23 / 3.3**)

RAPPRESENTAZIONE VIRGOLA MOBILE: STANDARD 754 IEEE

- Singola precisione (32 bit)

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

- I valori assunti dall'esponente e e dalla mantissa *m* determinano l'appartenenza del numero ad una di queste categorie:
  - zeri
  - numeri in forma normale
  - numeri in forma denormalizzata
  - infiniti
  - NaN (not a number)
- l'esponente distingue i numeri in modo primario

  la mantissa in modo secondario

Categoria	Esp.	Mantissa
Zeri	0	0
Numeri denormalizzati	0	non zero
Numeri normalizzati	1-254	qualunque
Infiniti	255	0
Nan (not a number)	255	non zero

RAPPRESENTAZIONE VIRGOLA MOBILE: STANDARD 754 IEEE

- Doppia precisione (64 bit)

S	Esponente (11 bit)			Mantissa (52 bit)		
63	62		52	51		0

$$(-1)^{b_{63}} * 2^{b_{62}b_{61}\dots b_{53}b_{52}} * 1.b_{51}b_{50}\dots b_{1}b_{0}$$

- Numero di bit per il segno: **1**
- Numero di bit per l'esponente: **11**
- Rappresentazione esponente: **Base 2 per eccesso 1023**
- Valori esponente: **[-1022, 1023]**
  - le parole codice 0_{10} (-1023_{10}) e 255_{10} (1024_{10}) sono riservate per funzioni speciali
- Numero di bit per la mantissa: **52**
- Rappresentazione (mantissa-1): **Binaria**
- Cifre decimali mantissa: **≅15 (52** / **3.3**)

ESEMPI DI CONVERSIONE DA VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione decimale del seguente numero in virgola mobile a singola precisione

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

1 10000001 01000000000000000000000

$(-1)^{s} * M * 2^{E} = ?$

ESEMPI DI CONVERSIONE DA VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione decimale del seguente numero in virgola mobile a singola precisione

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

1 10000001 01000000000000000000000

$$(-1)^{s} * M * 2^{E} = ?$$

$s = 1 \longrightarrow$ segno negativo

$M = (1.01)_2 = (1*2^0+0*2^{-1}+1*2^{-2}) = 1,25$

$E = (10000001)_{2\ \text{eccesso}\ \mathbf{127}} = (1*2^7+1*2^0) - \mathbf{127} = 2$

ESEMPI DI CONVERSIONE DA VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione decimale del seguente numero in virgola mobile a singola precisione

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

1 10000001 01000000000000000000000

$$(-1)^{s} * M * 2^{E} = -\,1{,}25 * 2^{2} = -5$$

$s = 1 \longrightarrow$ segno negativo

$M = (1.01)_2 = (1*2^0+0*2^{-1} + 1*2^{-2}) = 1{,}25$

$E = (10000001)_{2\ \text{eccesso}\ \mathbf{127}} = (1*2^7+1*2^0) - \mathbf{127} = 2$

ESEMPI DI CONVERSIONE DA VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione decimale del seguente numero in virgola mobile a singola precisione

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

0 10000011 10011000000000000000000

$(-1)^{S} * M * 2^{E} = ?$

ESEMPI DI CONVERSIONE DA VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione decimale del seguente numero in virgola mobile a singola precisione

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

0 10000011 10011000000000000000000

$(-1)^{s} * M * 2^{E} = ?$

$s = 0 \longrightarrow$ segno positivo

$M = (1.10011)_2 = (2^0+2^{-1}+2^{-4}+2^{-5}) = 1{,}59375$

oppure $(1.10011)_2 = (110011)_2 * 2^{-5} = 51 * 2^{-5}$ $E = (10000011)_{2\ \text{eccesso}\ \mathbf{127}} = (2^7+2^1+2^0) - \mathbf{127} = 4$

ESEMPI DI CONVERSIONE DA VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione decimale del seguente numero in virgola mobile a singola precisione

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

0 10000011 10011000000000000000000

$$(-1)^{s} * M * 2^{E} = 51*2^{-5} * 2^{4} = 51*2^{-1} = 25{,}5$$

$s = 0 \longrightarrow$ segno positivo

$M = (1.10011)_2 = (2^0+2^{-1}+2^{-4}+2^{-5}) = 1{,}59375$

oppure $(1.10011)_2 = (110011)_2 * 2^{-5} = 51*2^{-5}$ $E =$ $(10000011)_{2\ \text{eccesso}\ \mathbf{127}} = (2^7+2^1+2^0) - \mathbf{127} = 4$

ESEMPI DI CONVERSIONE A VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione in virgola mobile a singola precisione del numero reale 8.5

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

ESEMPI DI CONVERSIONE A VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione in virgola mobile a singola precisione del numero reale 8.5

$(8,5)_{10} = (1000.1)_2 = 1.0001 * 2^3 = (-1)^s * M * 2^E$

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

ESEMPI DI CONVERSIONE A VIRGOLA MOBILE

Determinare la rappresentazione in virgola mobile a singola precisione del numero reale 8.5

$(8,5)_{10} = (1000.1)_2 = 1.0001 * 2^3 = (-1)^s * M * 2^E$

segno positivo $\rightarrow s = 0 \qquad \rightarrow b_{31} = 0$

$M = (1.0001)_2 \qquad \rightarrow b_{22}b_{21}\ldots b_1 b_0 = 0001000\ldots000$

$E = (10000010)_{2\ \text{eccesso}\ \mathbf{127}} \qquad \rightarrow b_{30}b_{29}\ldots b_{24}b_{23} = 10000010$

Risultato: **0 10000010 00010000000000000000000**

S	Esponente (8 bit)			Mantissa (23 bit)		
31	30		23	22		0

ESERCIZI

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(40.125)_{10}$

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(-67.25)_{10}$

ESERCIZI

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(40.125)_{10}$

[0 10000100 01000000100000000000000]

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(-67.25)_{10}$

[1 10000101 00001101000000000000000]

ESERCIZI

- Determinare la rappresentazione decimale numero in virgola mobile a singola precisione:

1 10000010 10111010000000000000000

- Determinare la rappresentazione decimale numero in virgola mobile a singola precisione:

0 10000010 11000000000000000000000

ESERCIZI

- Determinare la rappresentazione decimale numero in virgola mobile a singola precisione:

1 10000010 10110100000000000000000

[-13.625]

- Determinare la rappresentazione decimale numero in virgola mobile a singola precisione:

0 10000010 11000000000000000000000

[14]

ESERCIZI

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(61.5)_{10}$

[0 10000100 11101100000000000000000]

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(29.3125)_{10}$

[0 10000011 11010101000000000000000]

ESERCIZI

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(61.5)_{10}$

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(29.3125)_{10}$

ESERCIZI

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(61.5)_{10}$

[0 10000100 11101100000000000000000]

- Rappresentare secondo lo standard 754 IEEE a singola precisione, il numero decimale reale $(29.3125)_{10}$

[0 10000011 11010101000000000000000]

DOMANDE, DUBBI, PERPLESSITÀ