

Elementos de Física Universitaria

Mecánica del punto material

Mario I. Caicedo, Profesor Titular

Departamento de Física

Universidad Simón Bolívar

Prefacio

Escucho, olvido. Veo, recuerdo. Hago, aprendo.

Proverbio chino

Esto es un texto introductorio de física para ciencias e ingeniería, el material del curso requiere del uso del cálculo diferencial e integral, herramienta desarrollada independientemente por Isaac newton y Leibniz en el siglo XVIII. El texto es apropiado para un curso de doce semanas con tres reuniones semanales de dos horas.

El texto utiliza un nivel matemático algo mayor que el de otros textos introductorios, esto obedece a que luego de unos 20 años de experiencia docente universitaria en todos los niveles de pregrado y postgrado, el autor ha llegado a convencerse de que el usar las herramientas matemáticas más potentes a las que podamos echar mano es una ventaja. Esta postura suele causar cierto rechazo inicial en los estudiantes porque el uso de matemáticas de cierto nivel siempre requiere un esfuerzo adicional y resulta amenazador, sin embargo, el esfuerzo extra siempre resulta compensado con creces, y a la larga los estudiantes se adaptan sin mayor problema, sobre todo porque el libro está particularmente adaptado al curso *FS1111* dictado por el departamento de física de la Universidad Simón Bolívar (USB) y nuestros profesores típicamente presentan los temas en el aula con un nivel muy aproxiando al de este curso.

Todo el material se presenta de la manera más consisa posible para lograr una presentación minimalista en que los conceptos quedan claramente establecidos. El texto contiene un buen conjunto de ejemplos desarrollados con todo detalle, estos ejemplos difieren bastante de los que se presentan en los textos convencionales y cada uno de ellos está escojido para mostrar todos los detalles del material presentado.

Los ejemplos y problemas son fundamentales, hay una importancia interdependencia entre ellos que pretende asegurar que el estudiante pueda llevar un registro cuidadoso de la manera en que se conectan todas o casi todas las ideas que se presentan en el texto, más aún, la resolución exitosa de algunos de los problemas permite que el estudiante desarrolle por su cuenta algunos conceptos que en el texto aparecen posteriormente a los problemas. Algunos de los problemas han sido propuestos en exámenes del curso *FS1111* de la USB

El texto utiliza mayormente el sistema internacional de unidades (S.I.) pero a veces aparecen problemas formulados en el sistema imperial británico, en todos los cálculos se respeta (y se espera que el estudiante lo haga de la misma manera) el número de cifras significativas y las reglas de redondeo asociadas.

En el texto aparecen, bien indicados, algunos temas avanzados que el profesor puede presentar en clase o que el estudiante puede estudiar por su cuenta pero que no forman parte integral del texto.

Índice general

1. Introducción	8
1.1. ¿De qué trata la física?	8
1.2. Unidades de medición y cuantitividad	14
1.3. Cifras Significativas	16
1.4. Física e Intuición	21
1.5. Otra visita a nuestra pregunta inicial	22
2. Vectores	23
2.1. Para qué vectores	23
2.2. El Espacio \mathbb{R}^3	23
2.3. Espacios Vectoriales	26
2.3.1. Bases y dimensión	28
2.3.2. Transformaciones Lineales	31
2.3.3. Producto interno	33
2.4. Segmentos orientados y vectores	36
2.4.1. Álgebra con segmentos orientados	38
2.4.2. \mathbb{R}^3 y segmentos orientados	40
2.4.3. Productos en el espacio euclídeo	45

2.5. Vectores fijos y deslizantes	50
2.6. Cálculo diferencial e integral con vectores	52
2.6.1. Diferenciación con respecto a un parámetro	52
2.6.2. Integración con respecto a un parámetro	54
2.7. Complemento: Cambios de base	55
2.8. Problemas	58
3. Cinemática I: Conceptos fundamentales	61
3.1. Desplazamiento y longitud de arco	64
3.2. Velocidad y rapidez medias	67
3.3. Trayectoria	73
3.4. Velocidad instantánea	74
3.5. Aceleración	76
3.6. Ejemplos finales	81
3.7. Problemas	85
4. Cinemática II	89
4.1. Movimiento a lo largo de una recta.	89
4.2. El problema de valores iniciales: movimiento general del punto	93
4.2.1. El movimiento con aceleración constante	94
4.2.2. Otros ejemplos para su estudio	97
4.3. Transformaciones de Galileo	100
4.4. Ejemplos complementarios avanzados	102
4.5. Problemas	110
5. Leyes de Newton	116
5.1. Introducción	116

5.2.	Leyes de Newton: Formulación Original	119
5.2.1.	Definiciones	119
5.2.2.	Leyes del Movimiento	121
5.3.	Sistemas de referencia inerciales	124
5.4.	Leyes de Newton: una visión más moderna	125
5.4.1.	¿Qué establecen las leyes de Newton?	127
5.5.	Aplicacion a ejemplos de una sola partícula	131
6.	Aplicaciones de las Leyes de Newton I: problemas elementales	140
6.1.	Las fuerzas de la naturaleza	140
6.2.	Fuerzas Macroscópicas	142
6.2.1.	Fuerzas de reacción I	142
6.2.2.	Fuerzas de Acción a Distancia	143
6.3.	Fuerzas de reacción II	147
6.4.	Otra visita al problema de valores iniciales	149
6.5.	VINCULOS	150
6.6.	Dos casos de estudio	153
6.6.1.	La cuerda inextensible	159
6.7.	Vínculos e ingeniería	161
6.8.	Otras condiciones subsidiarias	162
6.8.1.	Cadena de eslabones	163
6.8.2.	La cuerda sin masa	167
6.8.3.	Poleas	168
6.9.	Más aplicaciones de las leyes de Newton	170
6.9.1.	Poleas y ventaja mecánica	175
6.9.2.	Rozamiento	177

6.10. Problemas	178
7. Cinemática III	187
7.1. Introducción	187
7.2. La Base de Vectores Móviles	188
7.3. Movimiento circular	191
7.3.1. Velocidad y aceleración en la base móvil	191
7.3.2. Ejemplos	195
7.4. Movimiento general en el plano	197
7.4.1. Coordenadas polares	197
7.5. Círculo osculador y movimiento en el plano	201
8. Aplicaciones de las Leyes de Newton II	203
8.1. Un problema importante	207
8.2. Problemas	215
9. Trabajo y Energía	219
9.1. Motivación	219
9.2. Elementos de Matemáticas	222
9.2.1. Desplazamiento Infinitesimal	222
9.2.2. Campos Vectoriales	223
9.2.3. Integrales de Línea	226
9.2.4. Dependencia de las Integrales de línea en los Caminos. Campos Conservativas	229
9.3. El Teorema del Trabajo y la Energía	231
9.4. Energía Potencial	232
9.4.1. Más acerca de U	235

10. Oscilaciones Armónicas	239
10.1. Introducción	239
10.2. Cinemática	241
10.3. Energía	242
10.4. Encontrando la ley horaria	245
10.4.1. Métodos energéticos	245
10.4.2. Resolviendo la ecuación de movimiento	247
10.5. Oscilaciones amortiguadas	249

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿De qué trata la física?

Cuando usted tenía unos cuatro a siete años muy probablemente formulaba preguntas como estas:

1. ¿como se mueve el carro?
2. ¿Papi,...la luna está lejos?
3. ¿Mami,...¿por qué es claro de día y oscuro de noche?
4. ¿Por qué mi robot se apaga cuando se *acaban las pilas*?
5. (Si papi y/o mami eran arriesgados) ¿por qué se siente algo raro en la bajada de la montaña rusa?
6. En la cocina luego de un error de alguien, woooow....que bien, las comida que estaba en la *la olla de presión* voló cuando la destapaste, ¿lo podemos repetir a ver si pasa de nuevo?

A veces había respuestas fáciles, ... “hija, estamos a cuarenta kilómetros de Valencia y vamos a cien kilómetros por hora, si seguimos así llegaremos en un poco menos de media hora”. Otras veces la cosa se ponía complicada, ... “uhmmmm, hijo, el cielo es azul...porque....bueno, porque es así, ¿qué quieres que te diga”. Otras veces la respuesta era (la abuela): ... “mija usted si pregunta tonterías, agarre un buche de aire y síéntese tranquila que su mamá está manejando y me la va a volver loca”.

La verdad simple, es que usted estaba interesado en preguntas de física, y su curiosidad era un pequeño científico sin entrenar que todos llevamos dentro. Con el paso del tiempo ese físico incipiente quizá se adormeció y quizá la educación formal masiva y la sociedad lograron hacer su trabajo convenciéndole de que esas cosas son bobadas que solo le interesan a los “nerds”, pero recuerde algo, el gusanito está allí adentro, y solo hay que liberarlo para comenzar a preguntar de nuevo y quizá obtener respuestas superinteresantes. ¿La luna?, pués¹ está lejos hija, a unos 384000 Km, eso significa que si lanzaras un rayo de luz a un espejo en la luna tardaría un poquito más de dos segundos en llegar de vuelta, el sol está mucho más lejos, unos 150 millones de Km, un rayo de luz que sale del sol tarda como ocho minutos en llegar hasta acá a la Tierra, y las estrellas, están muchísimo más lejos, tanto, que desde la estrella más cercana un rayo de luz tarda como 4 años y cuatro meses para llegar hasta acá. ¿ El color del cielo ?, hmmmm...esa sigue siendo complicada como para contestarla en esta introducción.

La ciencia en general, y la física en particular, pretende describir objetiva y **cuantitativamente** elementos de la realidad². Esta tarea es enormemente no trivial y requiere de un elevado grado de abstracción. Hasta no hace mucho (finales del siglo XIX) el campo de estudio de la física estaba relativamente limitado a ciertos ámbitos, entre ellos, la mecánica, la

¹una respuesta para una chica de unos ocho años

²debemos estar de acuerdo en que lo que medimos con nuestros instrumentos es objetivo e independiente de nuestra percepción personal. Si esto no le gusta, acéptelo para este curso y tome la discusión como lo que es, un tema filosófico acerca de la noción de realidad

termodinámica, la teoría electromagnética, la teoría de la relatividad y la teoría cuántica. Con el advenimiento de la inter y transdisciplinariedad, la física ha invadido una enorme cantidad de campos de gran interés, bioquímica, economía, neurociencias y muchos aspectos de las ciencias sociales modernas estánb recibiendo muy importantes contribuciones aportadas por físicos quienes, usando las herramientas típicas de nuestra disciplina encuentran y exploran nuevos aspectos de un sinnúmero de problemas de gran interés.

Muchos de los elementos de la realidad que interesan a la física, también interesan a otras áreas de actividad de la humanidad. La observación del cielo diurno por ejemplo es de un profundo interés tanto para un físico como, por ejemplo, para un pintor o un escritor, los tres seguramente notarán los cambios de color en el cielo y tratarán de describirlos, en sus términos particulares.



Impression, soleil levant, Claude Monet. 1872 Óleo sobre lienzo, Museo Marmottan-Monet, París

La *Impresión del Sol Naciente* de Monet nos proporciona un ejemplo de una representación de la realidad, en este caso una vista del puerto de Le Havre (Normandie) al amanecer. A pesar de la enorme belleza estética que nos sugiere muchísimas cosas, la representación que del puerto (y del amanecer) nos da Monet³ no es, bajo ninguna circunstancia, objetiva, cada uno

³“El paisaje no es otra cosa que una impresión, una impresión instantánea , de ahí el título , una impresión

de nosotros tendrá diferentes sensaciones y pensamientos al contemplar el cuadro.

A diferencia de la subjetividad asociada a la representación que de la realidad nos provee un artista, un científico, busca una descripción objetiva (independiente del observador) y cuantitativa. La objetividad que la ciencia tiene como objetivo parcial hace que no sean pocos quienes perciben a la ciencia como deshumanizada en los casos más extremos y como impersonal en algunos más moderados. Muy generalmente se piensa que la visión científica de la realidad carece de estética y emociones⁴.

Ahora bien, ¿qué se quiere significar con eso de descripción o mejor aún, **modelo** cuantitativo de la realidad?. Para contestar la pregunta consideremos un ejemplo muy sencillo que fue estudiado por Galileo, el péndulo.

que me dio. He reproducido una impresión en le Havre, desde mi ventana, sol en la niebla y unas pocas siluetas de botes destacándose en el fondo... me preguntaron por un título para el catálogo, no podía realmente ser una vista de Le Havre y dije pongan impresión” Claude Monet

⁴nada más lejos de la realidad, la ciencia es una actividad humana y por lo tanto sus practicantes son seres emocionales con valores estéticos que muchas veces orientan sus investigaciones



Un péndulo simple no es otra cosa que una masa atada por una cuerda a un punto de suspensión fijo. El período (T) del péndulo es el tiempo que toma en pasar dos veces por la misma posición (digamos el punto A del dibujo inserto en la foto). La longitud del péndulo, es por definición la longitud (ℓ) del hilo que une a la masa con el punto de suspensión.

Supongamos que estamos interesados en modelar la relación (si es que hay alguna) entre el período (T) y la longitud (ℓ) del péndulo. Pués bien, un modelo cuantitativo consiste en establecer alguna relación matemática de la forma

$$T = f(\ell), \quad (1.1)$$

pero eso no es todo, como toda ciencia la física es experimental, sus resultados (predicciones o modelos) deben ser, no solo cuantitativos, sino contrastables con la realidad, es decir, hay que efectuar mediciones y comparar las relaciones cuantitativas que constituyen nuestros modelos con los resultados de números que se obtienen luego de realizar experimentos.

En el caso de nuestro ejemplo, es menester medir el período cuando variamos la longitud de

un péndulo real⁵, manteniendo todas las otras variables constantes⁶. Al hacer los experimentos encontraremos que a medida que la longitud aumenta, el período también lo hace. Si intenta hacerlo en casa y toma valores que anota en una tabla seguramente encontrará que si dobla la longitud del péndulo el período aumentará en un factor aproximado de 1,4, y si triplica la longitud, el período aumentará en algo así como un factor 1,7, de hecho, usted encontrará que su tabla de valores para oscilaciones con ángulos no mayores a 30° indica que la fórmula que relaciona las cantidades que nos interesan tiene que ser⁷:

$$T = 0,1\sqrt{\ell} \quad (1.2)$$

De acuerdo a las ideas de Karl Popper lo único que, desde el punto de vista de la epistemología o teoría del conocimiento, podemos hacer en ciencias y por supuesto en física, es proponer modelos o teorías que pretenden describir fenómenos y dedicarnos a buscar experimentos - denominados críticos- que nos permitan falsear tales modelos. Según Popper, mientras no encontramos experimentos críticos, los modelos solo poseen un valor estadístico cuyo contenido se reduce a decirnos que nuestro modelo ajusta todos los valores experimentales dentro de cierto rango y que por tanto no son modelos demenciales.

Consideremos de nuevo nuestro ejemplo del péndulo simple y supongamos que alguien propone que el modelo que describe el período como función de la longitud del péndulo es $T = 0,1\ell$, si todos los experimentos con péndulos los llevamos a cabo con péndulos de ℓ muy cercanos a $1,0\text{ cm}$ el modelo va a parecer cierto, un experimentador Popperiano buscará cualquier manera de falsear el modelo y lo logrará sin mayor dificultad midiendo el período para longitudes grandes, tomemos $\ell = 200\text{ cm}$ para mostrar lo que ocurre, el modelo predice un período de 20 s pero las mediciones experimentales resultarán en valores cercanos a $1,42\text{ s}$ lo cual pone en evidencia de

⁵un lindo reloj como el de la foto, por ejemplo

⁶una forma de hacer eso consiste en soltar el péndulo desde el mismo ángulo inicial en cada experimento

⁷la longitud debe medirse en cm y el período en segundos

manera dramática que el modelo $T = 0,1\ell$ no tiene nada que ver con la realidad dictaminando así su invalidez. El modelo $T = 0,1\sqrt{\ell}$ es más aceptable, debe considerarse como uno de los modelos adecuados -por el momento- y requiere por supuesto de la búsqueda de un experimento crítico cuyo objetivo será invalidar el nuevo modelo

1.2. Unidades de medición y cuantitividad

Como ya comentamos en la sección anterior queremos ser cuantitativos, imagíne que no lo fuéramos en absoluto, uno iría a una conferencia de diseño -aeronáutico por ejemplo- y al preguntar el tamaño del avión que se está planeando la respuesta sería algo así como: "grandísimo". Una respuesta como esa haría extremadamente difícil el hacerse responsable del diseño de las alas del avión en cuestión. En términos más elementales, si decimos que "fulano es grande", no estamos dando una información muy buena que digamos, quiz'a en Holanda fulano es pequeño.

Así, *grande, pequeño, mucho, poco, etc.* son adjetivos que, desde el punto de vista científico, resultan escencialmente inútiles, quizá un uso no tan apropiado de tales adjetivos en el marco de la ciencia debería ser en frases como: *más grande que*, etc. pero aún eso no es tan bueno como necesitamos. El mejor uso de cualquiera de los adjetivos que estamos discutiendo estaría en frases que incluyeran la expresión *tantas veces más chico que*, esa es la idea detrás de ser cuantitativo. En efecto, al decir que algo pesa lo mismo que dos ladrillos estamos estableciendo un patrón (una unidad de medida de "peso", si al establecer un patrón de medida (el peso de un ladrillo), para el uso científico, el patrón se hace del conocimiento de un cierto grupo de la población. el de las personas que trafican con ladrillos por ejemplo, el patrón se hace convencional dentro de dicho grupo y allí puede usarse sin mayor problema. Así, por ejemplo, en venezuela todos entendemos bastante bien que al decir: *Maritza tiene una estatura de un metro setenta* estamos hablando de una dama cuya estatura es igual a 1,70 veces un cierto

patrón de longitud denominado ‘metro’, lo que la convierte en una mujer que en Venezuela se considera ‘alta’. A un estadounidense habría que explicarle (para adaptarnos a sus patrones convencionales) que Maritza mide *cinco pies y ocho pulgadas*.

En física existen ciertas magnitudes denominadas básicas a partir de las cuales se construyen o definen todas las demás que se denominan magnitudes físicas derivadas. Asociadas a estas magnitudes, existen dos tipos de patrones (ó unidades), *unidades básicas* y *unidades derivadas*, en el Sistema Internacional⁸ se utilizan siete magnitudes físicas básicas cuyos patrones están dados en el cuadro 1.2.

Las unidades derivadas son utilizadas para expresar magnitudes físicas que son resultado de combinar las magnitudes básicas, es importante destacar que los múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas no son unidades derivadas. Algunos ejemplos de magnitudes básicas y de las unidades que les corresponden aparecen en el cuadro 1.2

Magnitud física	Símbolo dimensional	nombre del patrón	Símbolo
Longitud	L	metro	<i>m</i>
Tiempo	T	segundo	<i>s</i>
Masa	M	Kilogramo	<i>Kg</i>
Temperatura	Θ	Kelvin	<i>K</i>
Cantidad de sustancia	N	mol	mol
Corriente eléctrica	I	Ampere	A
Intensidad luminosa	J	candela	cd

Cuadro 1.1: Unidades basicas SI

⁸SI <http://physics.nist.gov/cuu/Units/>

Magnitud física	Símbolo dimensional	nombre del patrón	Símbolo
Rapidez	L/T	metros por segundo	m/s
Fuerza	$M \times \frac{L}{T^2}$	Newton	N
Potencia	$M \times \frac{L^2}{T^3}$	watts	$watt$

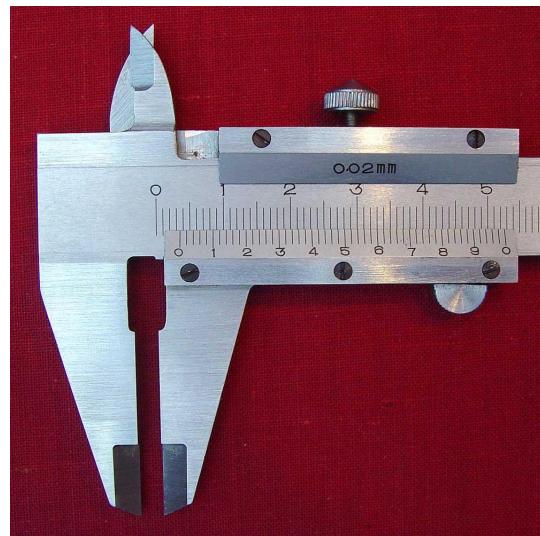
Cuadro 1.2: Unidades basicas SI

1.3. Cifras Significativas

Los modelos de la realidad que construimos en ciencia deben ser contrastados con los resultados experimentales y estos a su vez son cuantitativos, es decir, numéricos, ahora bien, las cifras que se reportan como resultado de un experimento tienen una incertidumbre (error) asociada(o) que es intrínseca(o) al proceso de medición.

Consideremos un ejemplo, la medición del diámetro del pulgar de la mano derecha de una persona utilizando una regla ordinaria de 30 cm como instrumento de medición. Supongamos que el resultado de la medición es $2,5\text{ cm}$, sería errado expresar esta cifra como $2,50\text{ cm}$ ya que una regla ordinaria solo es confiable hasta los milímetros ($0,1\text{ cm}$) y por lo tanto no es posible distinguir entre $2,52$, $2,55$ o $2,56\text{ cm}$, sin embargo, si utilizamos un nónio o calibrador vernier, podremos reportar que el diámetro del pulgar de Mario es de $2,54135\text{ cm}$.

El nonio es un refinamiento de los instrumentos de medición de longitudes que se logra añadiendo una escala secundaria. El nombre nonius refiere al portugués Petrus Nonius (1492-1577), el instrumento fue mejorado más tarde por Pierre Vernier en 1631. La figura muestra un Vernier capaz de apreciar 0,02 mm.



La diferencia entre las dos mediciones, la efectuada con la regla y la llevada a cabo con el vernier es la apreciación o incertidumbre de medida. La medición llevada a cabo con el vernier tiene una incerteza menor que la realizada con la regla, ya que es una medición de mayor apreciación. A la incertidumbre o incerteza se la llama comúnmente error de medición porque indica la máxima diferencia que se estima que podría existir entre el valor medido y el valor real de una cantidad

$$\text{error} = \delta \equiv |\text{valor}_{\text{real}} - \text{valor}_{\text{medido}}|, \quad (1.3)$$

el error en una medición depende como ya hemos visto, de la técnica de medición utilizada.

Usualmente la incertidumbre en una medición es indicada escribiendo el valor de la medida seguido por el símbolo \pm seguido por un segundo número que expresa el error experimental. Si reportamos que la estatura de Mario Sebastián es de $1,252 \pm 0,001 \text{ m}$ estamos queriendo expresar que es improbable que la estatura de MS supere los $1,253 \text{ m}$ o que se encuentre por debajo de $1,251 \text{ m}$, en una notación algo más moderna, la expresión $1,252 \pm 0,001$ se representa por el símbolo $1,252(1)$, en esta notación, la cifra entre paréntesis muestra el error en la medición de la cifra principal. La incertidumbre también suele expresarse en términos del máximo error relativo

(error fraccional ó porcentual). La estatura de Mario Sebastián reportada como $1,252 \pm 0,001\text{ m}$ se expresa en términos del error porcentual como $1,252\text{ m} \pm 0,1\%$ ya que el error fraccional en la medida es $\delta = 0,001/1,251 \times 100\%$. Una forma usual de presentar la incerteza consiste en olvidar la referencia explícita a los errores e indicándola a través del número de *cifras significativas*. Cuando reportamos que el diámetro (D) de la primera falange del pulgar de Sophia es $12,7\text{ mm}$ estamos expresando D con tres cifras significativas, esto implica que no hay incertidumbre en las dos primeras cifras y que la incertidumbre está en el valor de la tercera. En vista de que en este caso el tercer dígito se encuentra en las décimas el reportar $D = 12,7\text{ mm}$ significa que la incerteza en la medida es aproximadamente de $0,1\text{ mm}$.

Es importante destacar que dos cifras de la misma cantidad de cifras significativas pueden estar asociadas a incertidumbres muy dispares, en efecto dos longitudes, la distancia Maracay-Caracas 109 Km y la estatura del autor, $1,72\text{ m}$ reportadas con el mismo número de cifras significativas (3), tienen errores asociados de 1 Km y 1 cm respectivamente. Los errores porcentuales sin embargo $\delta_1 = 1/109$ y $\delta_2 = 1/1,72$ no son tan diferentes ($0,5 - 1\%$)

Cuando al efectuar cálculos se involucran cantidades con incertezas los valores que resultan del cálculo también poseen incertezas y existen ciertas reglas básicas para controlarlas, por ejemplo:

- Cuando se suman o restan números interesa la localización del punto decimal determina la cantidad de cifras significativas. Consideremos la suma $247,35 + 2,8$ el resultado con el número de cifras significativas es $245,35 + 2,8 = 248,1$ en efecto, la incerteza en el sumando $245,32$ es de aproximadamente una centésima, mientras que para el sumando $2,8$ la incerteza es de una décima lo que obviamente significa que la incerteza en la suma debe estar en ese orden, es decir en las décimas.
- el número de cifras significativas de un producto o división no puede ser mayor al número de ellas en el factor con la máxima incerteza o menor cantidad de cifras significativas For

example, $2,7183 \times 2,34 \times 0,4 = 26,7$.

las reglas generales para seguir la incerteza a lo largo de un cálculo se denominan normas de propagación de errores.

Una aplicación básica de estas ideas que usted debe ejercitarse en casa es la determinación de un valor experimental para π , para ello sencillamente usemos la definición de π como el cociente de la longitud de un círculo a su diámetro⁹.

Dada la definición, nos basta con dibujar un círculo (entre más grande mejor), medir su longitud y dividirla por el diámetro, al momento de escribir esta introducción el autor ha usado una mesa de comedor circular que tiene en casa y ha medido el diámetro obteniendo¹⁰ $D = 3\text{ ft }10,46'\pm0,05'$ mientras que la circunferencia de la mesa resultó ser $\ell = 12\text{ ft }1,96'\pm0,05'$, el cociente de estos números es $\pi = D/\ell = 3,14 \pm 0,05$ ó $\pi = 3,14(5)$ ó $\pi = 3,14$ en las tres formas de reportar el resultado queda claro que las incertezas en las mediciones que llevan al resultado final están adecuadamente tratadas.

El conjunto de reglas que permite identificar los guarismos significativos en una cifra dada, son:

1. Todo guarismo no cero tiene que considerarse como significativo.
2. Todos los ceros que aparezcan entre guarismos no nulos se consideran significativos. $101,23$ tiene cinco cifras significativas.
3. Ceros colocados al comienzo de una cifra no son significativos. $0,00012$, por ejemplo, tiene dos cifras significativas, 1 y 2.

⁹Sabemos que el valor verdadero de π a diez dígitos es 3,141592654

¹⁰Un pié=12 pulgadas, y si, el profesor Mario tiene y usa un flexómetro que mide longitudes en unidades imperiales

4. Los ceros al final de una cifra que contiene un punto decimal son significativos. El número 12,2300 tiene seis cifras significativas, 1, 2, 2, 3, 0 y 0. El número 0,000122300 también tiene seis cifras significativas. Esta convención de los ceros después de un punto decimal permite poner en claro la precisión con que se conoce el número dado. Si un resultado preciso hasta cuatro decimales se reporta como 45,22 parecería que solo es preciso hasta dos decimales (cuatro cifras significativas), escribir la cifra com 45,2200 deja en claro, en virtud de esta regla, que este número es conocido con cuatro decimales de precisión.
5. Los ceros al final de un número sin punto decimal son ambíguos. En un número como 1200 no está claro si la precisión es hasta la cifra no cero y que por lo tanto ocurre que la medida es casualmente un múltiplo exacto de 100 o si solo se redondeó hasta las centenas. Existen varios métodos convencionales para resolver estos casos especiales pero no los mdiscutiremos acá, solo diremos que frecuentemente resulta necesario determinar si los ceros al final de una cifra son o no significativos. En este texto trataremos de evitar la inconveniencia manejando apropiadamente el separador decimal.
6. Un número cuyos guarismos son todos cero, por ejemplo 0,0000 carece de cifras significativas ya que el error representado en esta notación es mayor que el valor de la medida.

Cuando se realizan cálculos en que se utilizan cifras significativas hay que tener algo de cuidado, hoy día usamos calculadoras y computadores para realizar los cálculos y constituye un error presentar un resultado con todos los guarismos que la aritmética de nuestro instrumento de cálculo es capaz de proveer ya que tales resultados no representan adecuadamente la incertidumbre conque conocemos las magnitudes que usamos como datos. El resultado final debe reportarse llevando adelante un redondeo al número correcto de cifras significativas. La notación científica es muy útil para estos fines ya que las reglas acerca de las cifras significativas aplican para el factor que aparece antes de la potencia de diez, así por ejemplo, el número

$6,02 \times 10^{23}$ tiene tres cifras significativas, mientras que $1,609 \times 10^{-19}$ tiene cuatro. La notación científica es muy útil para evitar la ambigüedad potencial en los ceros al final de números, consideremos por ejemplo un experimento en que un resultado de cinco cifras significativas ha sido reportado como 15000, acá tenemos la ambigüedad en los tres ceros de la cola del número quince mil, al reportar el resultado como $1,5000 \times 10^4$ y usar las reglas de reconocimiento de cifras significativas, la ambigüedad queda removida puesto que los tres ceros están colocados a la derecha del separador decimal y deben en consecuencia tomarse en cuenta como cifras significativas.

1.4. Física e Intuición

Hay quienes sostienen que la física es intuitiva, pero, en la opinión del autor, esa noción es dudosa por decir lo menos. La mecánica Aristotélica, por ejemplo, contiene elementos intuitivos que llevan a conclusiones falsas, según Aristóteles el estado natural de un cuerpo es el reposo y para que el cuerpo se mueva es menester ejercer una acción sobre él, haga un experimento y convéñase de que eso parece ser cierto. Sin embargo, hoy día sabemos que esto es falso y de hecho, la primera ley de Newton afirma lo contrario. En verdad, lo físicos al igual que los ingenieros, músicos, escritores, etc. desarrollamos una intuición asociada al ejercicio de la disciplina que nos interesa. La física es una ciencia experimental y debido a ello la intuición de un físico está profundamente asociada a fenómenos observables, el origen de la idea de que la física es muy intuitiva está en el hecho innegable de que muchos de los fenómenos que ha estudiado la física tienen que ver con el día a día de cualquier persona, empujar cosas, encender y apagar luces, mirar al cielo, oír, ver la superficie del mar y observar las olas, etc. Sin embargo, y como ya dijimos antes esta noción no es cierta, muchas veces los fenómenos físicos contradicen nuestra intuición y solo los experimentos más complejos y/o las teorías más extravagantes y

ajenas a nuestra intuición pueden dar una descripción adecuada de ellos.

1.5. Otra visita a nuestra pregunta inicial

Comenzamos esta introducción con una pregunta tentadora ¿De qué trata la física?, y justo después hicimos un conjunto de preguntas “infantiles”, en esta última sección vamos a contestar a esa pregunta con algunas de las preguntas “infantiles” que los físicos estamos interesados en contestar hoy día,

1. ¿Seremos capaces de utilizar la fusión nuclear como fuente alterna de energía?.
2. ¿Podremos construir un modelo resoluble del movimiento de los fluidos en régimen turbulento?.
3. Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, ¿podremos utilizar esos modelos para dar predicciones a largoplazo de fenómenos complejos como el clima?.
4. ¿Podemos entender la evolución como algo que se deriva naturalmente de la complejidad misma de la vida?.
5. ¿Cómo era el universo unos 10^{-43} s de haber comenzado su existencia?.
6. ¿Cómo es el espacio cuando se examina a distancias de unos 10^{-35} m ?.
7. ¿Podremos viajar grandes distancias interestelares de alguna forma?.
8. ¿Cuál es el destino del universo?, ¿se expandirá por siempre?, ¿en algún momento comenzará a contraerse?.
9. ¿Cuál es origen de ese numerito que llamamos masa?.

Capítulo 2

Vectores

2.1. Para qué vectores

La física requiere de un lenguaje básico, el de las matemáticas. En matemáticas se manejan muchos más objetos que solo los números enteros, racionales, reales e inclusive complejos o imaginarios, entre los muchos objetos que se definen, los vectores son de particular importancia y tienen características únicas que les hacen ideales para representar un buen número de magnitudes u objetos físicos. La velocidad, la aceleración y las fuerzas son ejemplos de magnitudes físicas que deben ser representadas por vectores.

2.2. El Espacio \mathbb{R}^3

Definición 1 *Considere el conjunto \mathbb{R}^3 formado por todos los tripletes ordenados de números reales¹, es decir:*

$$\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ tales que: } u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

¹a los números reales les denominaremos también escalares

Llamaremos vectores a los elementos de \Re^3 y componentes a los números reales que aparecen en las entradas de un vector.

Ejemplo 1 Las componentes del vector $\mathbf{v} = (\sqrt{2}, -1/3, 1)$ son $\sqrt{2}$, $-1/3$ y 1 (en ese orden).

Obviamente, dos vectores son iguales si y solo si sus componentes son iguales. Los vectores $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, -1/3, 1)$ y $\mathbf{v} = (-1/3, \sqrt{2}, 1)$ son distintos

Dotemos a \Re^3 , el conjunto de todos los vectores con dos operaciones, la primera de ellas es la *suma* o adición de elementos de \Re^3 , la segunda es el *producto de un escalar por un vector*, las operaciones están dadas como:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad (2.2)$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) \equiv (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \quad \alpha \in \Re. \quad (2.3)$$

Es bien fácil darse cuenta de que la adición posee un elemento neutro ($\mathbf{0} = (0, 0, 0)$), más aún, la operación es conmutativa (porque la suma de números reales sobre la que se construyó es conmutativa), adicionalmente, para cada elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Re^3$ existe un opuesto: $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Ejemplo 2 Dados los vectores $\mathbf{u} = (3, 1, 1/4)$, $\mathbf{v} = (-3, -1, 1/4)$.

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = (3, 1, -1/4) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, 0, 1/2) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (6, 2, 0) \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{3}\mathbf{u} = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}) \quad (2.7)$$

Problema 1 Demuestre (esto debería resultarle bien sencillo) que \Re^3 con las operaciones de adición y producto por un escalar que hemos definido, satisface las siguientes propiedades (ya revisamos las tres primeras):

1. Commutatividad de la suma
2. Existencia de elemento neutro o nulo de la suma
3. Existencia de elemento opuesto (o simétrico) de la suma
4. Asociatividad de la suma: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Re^3 \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
5. Distributividad del producto por un escalar respecto a la suma de vectores: $\forall \alpha \in \Re$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Re^3: \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
6. Distributividad del producto por un vector respecto a la suma de escalares $\forall \alpha, \beta \in \Re$ y $\mathbf{u} \in \Re^3: (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
7. Asociatividad mixta del producto por un escalar, $\forall \alpha, \beta \in \Re, \mathbf{u} \in \Re^3 \quad \alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
8. Existencia de elemento unidad del producto por un escalar: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Definición 2 Considérese un conjunto de N vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$, de \Re^3 y un conjunto de N escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, el vector

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_N \mathbf{u}_N \quad (2.8)$$

se denomina combinación lineal de los N vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$.

Definición 3 Un conjunto de N vectores, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ se denomina linealmente independiente (L.I.) si y solo si la única combinación lineal de los N vectores que suma al vector $\mathbf{0}$ es aquella cuyos coeficientes son todos nulos.

Definición 4 Un conjunto de vectores se denomina una base de \Re^3 si y solo si (a) es un conjunto de vectores L.I. y (b) cualquier vector \mathbf{w} se puede expresar como una única combinación lineal del conjunto de elementos de la base.

Ejemplo 3 Consideremos los siguientes tres elementos² de \mathbb{R}^3 : $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0)$ y $\hat{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)$, toda combinación lineal de estos tres vectores tiene la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \alpha_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \alpha_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = \\ &= (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Es evidente que la única combinación lineal de los $\hat{\mathbf{e}}_i$ que es igual al vector nulo es aquella que tiene $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$, lo que exhibe que los tres vectores $\hat{\mathbf{e}}_i$ $i = 1, 2, 3$ son L.I., más aun, todo elemento arbitrario de \mathbb{R}^3 , $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se puede expresar de manera única como combinación lineal de \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 poniendo:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (2.10)$$

demostrando que los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ constituyen una base de \mathbb{R}^3 . Es importante mencionar que existen infinitas bases de \mathbb{R}^3 y que todas están constituidas por 3 vectores.

2.3. Espacios Vectoriales

En la sección anterior jugamos un poquitín con algo que parece tonto y poco útil. Las matemáticas hacen de este juego algo fantásticamente poderoso porque debido a la abstracción nos permiten estudiar montones de cosas que, a pesar de lucir muy diferentes, comparten propiedades fundamentales. Una noción de uso muy general (aparece una y otra vez en diferentes aplicaciones) es la de *espacio vectorial*. En lo que sigue la idea es pensar de manera totalmente abstracta, no hace falta concentrarse en un ejemplo particular (si quiere hacerlo, recurra a la sección anterior)

Definición 5 Un espacio vectorial real³ consiste de lo siguiente:

²más adelante, en la definición 24 de la sección 2.4.2 explicaremos la introducción del sombrerito ()

³de ahora en adelante, llamaremos escalares a los números reales

1. Un conjunto \mathcal{V} cuyos elementos son llamados vectores
 2. Una operación de suma (ó adición) vectorial que a cada par de elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ asigna un tercer elemento \mathbf{w} de \mathcal{V} ($\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$) que satisface las siguientes propiedades
 - a) La adición vectorial es conmutativa, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
 - b) La suma vectorial es asociativa: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$
 - c) Existe un único elemento de \mathcal{V} denominado el vector cero ($\mathbf{0}$) que satisface $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$
 - d) Para cada vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ existe un único vector $-\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
3. Una operación denominada producto por un escalar que, a cada número real α y cada vector \mathbf{u} de \mathcal{V} le asigna un elemento $\mathbf{x} \equiv \alpha \mathbf{u}$ de \mathcal{V} y que satisface las siguientes propiedades
 - a) $1 \mathbf{u} = \mathbf{u}$
 - b) Si α y β son números reales $\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha \beta) \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$
 - c) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$ (distributividad del producto por un escalar con respecto a la suma vectorial)
 - d) $(\alpha + \beta) \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}$ (distributividad del producto por un escalar con respecto a la adición escalar).

Ejemplo 4 \mathbb{R}^3 con la suma de tripletes que introdujimos no es otra cosa que un espacio vectorial real.

Observación 1 Es extremadamente importante notar que la noción de suma en un espacio vectorial es totalmente abstracta, en el caso de \mathbb{R}^3 la suma es la suma de los elementos del triplete ordenado, pero ese no es el caso general

Ejemplo 5 El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ dx + ey + fz &= 0 \\ gx + hy + rz &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde: $a, b, c, d, e, f, g, h, r$ son constantes reales y x, y, z son las variables, constituye un espacio vectorial.

Ejemplo 6 El conjunto $\mathcal{C}^0[a, b]$ de las funciones continuas del intervalo $[a, b]$ en los reales con la suma ordinaria de funciones y la regla del producto de una función por un número real constituye un espacio vectorial real.

Ejemplo 7 El conjunto de todos los polinomios a coeficientes reales también constituye un espacio vectorial.

2.3.1. Bases y dimensión

Definición 6 Una combinación lineal de p vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ de un espacio vectorial \mathcal{V} es un vector de la forma:

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p, \tag{2.12}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ son escalares.

Definición 7 p vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ de un espacio vectorial \mathcal{V} se denominan linealmente independiente si y solo si, la única combinación lineal nula de los p vectores es aquella cuyos coeficientes son todos nulos.

Definición 8 Una base de un espacio vectorial es un conjunto de k vectores L.I. tales que cualquier elemento de \mathcal{V} se puede expresar como una única combinación lineal del conjunto de tales k vectores. El número k se denomina dimensión de \mathcal{V} .

Ejemplo 8 \mathbb{R}^3 es un espacio vectorial real de dimensión 3.

Un espacio vectorial posee infinitas bases y la escogencia de cualquiera de ellas es un ejercicio de libre albedrío, sin embargo, es importante destacar que las componentes de un vector dependen de la base que se escoja (vea el problema 2).

Problema 2 Considere las siguientes combinaciones lineales de la base $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}_3$ de \mathbb{R}^3 que hemos estado usando:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (2.13)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (2.14)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.15)$$

1. Demuestre que $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$ y $\hat{\mathbf{u}}_3$ son L.I.
2. Demuestre que los tres vectores $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$ y $\hat{\mathbf{u}}_3$ constituyen una base de \mathbb{R}^3
3. Considere al vector $\mathbf{w} = 3\hat{\mathbf{e}}_1 + 5\hat{\mathbf{e}}_2 + 7\hat{\mathbf{e}}_3$, expréselo como combinación lineal de la base $\hat{\mathbf{u}}_i$ (resp: $\frac{3+5}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{3-5}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{u}}_2 + 7\hat{\mathbf{u}}_3$)
4. Un poco más difícil. Exprese el vector $\mathbf{v} = a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2\hat{\mathbf{e}}_2 + a_3\hat{\mathbf{e}}_3$ como combinación lineal de la base $\hat{\mathbf{u}}_i$ (resp: $\frac{a_1+a_2}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{a_1-a_2}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{u}}_2 + a_3\hat{\mathbf{u}}_3$)

El interés principal en el hecho de la existencia y uso de las bases de un espacio vectorial consiste en que gracias a las bases, las operaciones abstractas de suma de vectores se traducen en operaciones ordinarias entre números reales (las componentes de los vectores). En efecto, consideremos un espacio vectorial real (\mathcal{V}) de dimensión N y tres vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} relacionados por la igualdad

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (2.16)$$

sea $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ una base de \mathcal{V} ciertamente, \mathbf{u} y \mathbf{v} admiten una única representación como combinaciones lineales de dicha base, es decir

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^N u_\ell \mathbf{u}_\ell \quad (2.17)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{\ell=1}^N v_\ell \mathbf{u}_\ell \quad (2.18)$$

al sumar \mathbf{u} , \mathbf{v} y usar las reglas que satisface la suma de los elementos de un espacio vectorial resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \sum_{\ell=1}^N u_\ell \mathbf{u}_\ell + \sum_{\ell=1}^N v_\ell \mathbf{u}_\ell = \\ &= \sum_{\ell=1}^N (u_\ell + v_\ell) \mathbf{u}_\ell \end{aligned} \quad (2.19)$$

pero, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ y como la expresión de cada vector como combinación de los elementos de una base es única, hemos probado rigurosamente, que las componentes de \mathbf{w} no son otra cosa que la suma de las componentes correspondientes de \mathbf{u} y \mathbf{v} , es decir:

Teorema 1 *Las componentes de la suma de dos vectores expresados en términos de una base de un espacio vectorial se calculan como la suma de las componentes de los vectores que se pretende sumar*

El siguiente problema va a ser de gran importancia a lo largo de todo el curso, resuélvalo de inmediato

Problema 3 *Demuestre que \mathbb{R}^2 , el conjunto de los pares ordenados de números reales es un espacio vectorial de dimensión 2, exhiba al menos dos bases distintas.*

Ejemplo 9 *El conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 0 \\ 7x + 4z &= 0 \\ 10x + 2y + 6z &= 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

es un espacio vectorial de dimensión dos

Ejemplo 10 *El conjunto $\mathcal{P}_N[-1, 1]$ de todos los polinomios de grado menor o igual a N definidos en el intervalo $[-1, 1]$ constituye un espacio vectorial de dimensión N*

2.3.2. Transformaciones Lineales

Los espacios vectoriales son conjuntos y por ser tales, es perfectamente lícito construir funciones entre ellos, entre las funciones que pueden definirse entre espacios vectoriales hay una clase muy especial debido a sus propiedades, que se establecen a continuación

Definición 9 *Dados dos espacios vectoriales \mathcal{V} y \mathcal{W} , una transformación lineal de \mathcal{V} en \mathcal{W} es sencillamente una función*

$$T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \tag{2.21}$$

tal que $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$

$$T(a\mathbf{v}) = aT(\mathbf{v}) \tag{2.22}$$

$$T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) \tag{2.23}$$

Ejemplo 11 *Considere \mathbb{R}^3 , la función $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($T(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3)$) definida por*

$$\begin{aligned} u_1 &= a v_1 + b v_2 + c v_3 \\ u_2 &= d v_1 + e v_2 + f v_3 \\ u_3 &= g v_1 + h v_2 + r v_3 \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde: $a, b, c, d, e, f, g, h, r$ son constantes reales es una transformación lineal

Ejemplo 12 La diferenciación es una transformación lineal del espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones infinitamente diferenciables de dominio \mathbb{R} que toman valores reales.

Una manera muy sencilla de expresar una transformación lineal es especificando su acción sobre los elementos de una base del espacio vectorial de salida, en efecto, dada una base $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ de \mathcal{V} y un vector arbitrario $\mathbf{v} = \sum_{\ell=1}^N v_\ell \mathbf{u}_\ell$, la acción de T sobre \mathbf{v} puede expresarse como

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= T\left(\sum_{\ell=1}^N v_\ell \mathbf{u}_\ell\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^N v_\ell T(\mathbf{u}_\ell), \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde, para arribar a la última línea hemos utilizado las propiedades de una transformación lineal, cada uno de los factores $T(\mathbf{u}_\ell)$ es sencillamente la acción de T en cada elemento de la base de \mathcal{V} .

Isomorfismos

De sus cursos de matemáticas usted debería recordar lo que es una biyección⁴

Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales que resulte ser una biyección permite asegurar que los dos espacios vectoriales son básicamente idénticos es decir, son de hecho: el mismo espacio vectorial

En pocas palabras, dos espacios vectoriales isomórficos son la misma cosa.

⁴se dice que una función es biyectiva (o que es una biyección) cuando ocurren las siguientes dos condiciones: (a) todos los elementos del conjunto de partida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada (la función es inyectiva) y (b) todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento (es decir, la función es sobreyectiva). Si una función f es biyectiva, su función inversa (f^{-1}) existe y también es una biyección.

2.3.3. Producto interno

Definición 10 Consideremos un espacio vectorial real (\mathcal{V}). Un producto interno en \mathcal{V} es una operación abstracta que satisface las siguientes propiedades

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}$
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ la igualdad se satisface si y solo si $\mathbf{u} = 0$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \alpha \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Observación 2 Es importante notar que en ningún momento se hace referencia a una base para \mathcal{V} , de manera que, el producto interno entre dos vectores es un número independiente de la base que se escoja para \mathcal{V} .

Ejemplo 13 Considere el espacio vectorial $\mathcal{P}_N[-1, 1]$ del ejemplo 10, dados dos elementos f y g de $\mathcal{P}_N[-1, 1]$, es decir, dos polinomios de grado menor o igual a N restringidos al intervalo $[-1, 1]$ la operación

$$f \cdot g \equiv \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx \quad (2.26)$$

define un producto interno para $\mathcal{P}_N[-1, 1]$

Producto interno para \mathbb{R}^3

Una forma de definir un producto interno para un espacio vectorial \mathcal{V} es a través de una base de \mathcal{V} , usaremos \mathbb{R}^3 para ejemplificar esto.

Definición 11 Consideremos \mathbb{R}^3 y la base $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)$ para la cual se define un producto interno según⁵:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.27)$$

⁵una base cuyos elementos se multiplican según estas reglas se denomina ortonormal

Teorema 2 *El producto escalar de dos vectores (\mathbf{a} y \mathbf{b}) de \mathbb{R}^3 puede calcularse en términos de las componentes de ambos vectores en la base $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)$ según la fórmula*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.28)$$

Demostración Los dos vectores se expresan en términos de sus componentes y de la base como sendas combinaciones lineales

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.29)$$

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (2.30)$$

de manera que el producto escalar se escribe como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \quad (2.31)$$

debido a las propiedades intrínsecas del producto interno podemos reescribir la fórmula anterior en la forma

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1) + a_1 b_2 (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2) + \cdots + a_3 b_2 (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2) + a_3 b_3 (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3) \quad (2.32)$$

en donde debemos observar que hay exactamente nueve sumandos. De estos, seis contienen productos entre elementos distintos de la base y en consecuencia son nulos. Los otros tres sumandos contienen los productos $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3$ cuyo valor es 1 en los tres casos lo que termina de demostrar el resultado.

Definición 12 *Dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ se denominan ortogonales con respecto al producto interno si y solo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$*

Problema 4 Considera la base usual de \mathbb{R}^3 ($\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0)$, etc.) y la base:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (2.33)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (2.34)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.35)$$

del problema 2

1. Demuestre que los tres vectores $\hat{\mathbf{u}}_i$, $i = 1, 2, 3$ son ortogonales dos a dos.
2. Considera dos vectores $\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3\hat{\mathbf{e}}_3$ y $\mathbf{w} = w_1\hat{\mathbf{e}}_1 + w_2\hat{\mathbf{e}}_2 + w_3\hat{\mathbf{e}}_3$ expréselos como combinación lineal de la base $\hat{\mathbf{u}}_i$
3. Encuentre el producto escalar de \mathbf{v} y \mathbf{w} expresados en la nueva base y observe que el resultado es el mismo que hubiera obtenido en la base original exactamente como se explicó en el comentario 2

Ejemplo 14 Los tres polinomios que se listan a continuación

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.36)$$

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \quad (2.37)$$

$$P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{3x^2 - 1}{2} \quad (2.38)$$

constituyen una base ortonormal del espacio vectorial tridimensional $\mathcal{P}_2[-1, 1]$ de los polinomios de grado menor o igual a dos con el producto escalar $f \cdot g \equiv \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$ (vea el ejemplo 10). Dos polinomios de grado menor o igual a dos se expresan en términos de P_0 , P_1 y P_2 como sendas combinaciones lineales: $f = f_0P_0 + f_1P_1 + f_2P_2$ y $g = g_0P_0 + g_1P_1 + g_2P_2$, como los P_ℓ constituyen una base ortonormal, el producto $f \cdot g$ se puede calcular sencillamente como $f \cdot g = f_0g_0 + f_1g_1 + f_2g_2$.

2.4. Segmentos orientados y vectores

La base geométrica de la mecánica de Newton es la geometría euclídea, esta sin embargo, no constituye un soporte matemático suficiente para la mecánica newtoniana, para las necesidades de esta es menester introducir nuevos objetos⁶

En esta sección y hasta que establezcamos lo contrario, con el término espacio queremos referirnos al espacio Euclídeo tridimensional, es decir, a la noción geométrica del espacio como definido por las ideas de largo, ancho y profundidad. Una de las cosas interesantes que mostraremos es el hecho de que precisamente la noción de dimensiones geométricas coincide con la asociada a la noción de dimensionalidad en espacios vectoriales.

Definición 13 *Un segmento es un subconjunto de una recta limitado por dos puntos que se denominan extremos.*

Definición 14 *Un segmento orientado es un segmento de recta en el que los extremos juegan roles especiales asociados a su orden, el primero de los puntos se denomina origen y el segundo se denomina extremo. En la literatura se acostumbra denotar a un segmento orientado por el par de puntos que le delimitan con una flechita colocada encima (\vec{AB}), pero acá no seguiremos esa práctica.*

Dicho de manera más coloquial, un segmento orientado es “una flechita” cuyos extremos son los dos puntos que limitan al segmento. Un segmento orientado posee en consecuencia tres propiedades, su longitud que se denomina magnitud, su dirección (determinada por la recta de la cual es subconjunto) y su orientación que es sencillamente, el orden en que se nombran los puntos que le delimitan. Para designar a un segmento orientado utilizaremos por el momento

⁶Tambien es indispensable tener una cierta noción del tiempo como cuantificable de manera continua (el tiempo de Newton se mide con número reales)

una letra caligráfica mayúscula sobre la que colocaremos una flechita (\vec{A}), la magnitud de un vector se denota por $|\vec{A}|$ y evidentemente es un número real positivo.

Definición 15 *Un punto se considera como un segmento orientado de magnitud nula.*

Es claro que dos segmentos orientados son iguales si y solo si son congruentes sin utilizar rotaciones, es decir, si a través de traslaciones con regla y escuadra podemos llevar uno sobre el otro y hacerles coincidir exactamente punto a punto. En otros términos

Definición 16 *Dos segmentos orientados son iguales: $\vec{A} = \vec{B}$ si y solo si*

1. $\vec{A} \parallel \vec{B}$

2. La orientación de ambos segmentos es la misma. y

3. $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

La geometría euclídea garantiza que dos segmentos orientados no nulos y no paralelos (colineales) definen un plano único. Para ver esto basta con hacer trasladar los orígenes (las colitas) de ambos segmentos orientados hasta hacerles coincidir en un mismo punto y observar que: el origen común y los dos extremos de los segmentos orientados constituyen tres puntos no alineados en el espacio y que por lo tanto definen un único plano.

Como dos segmentos orientados no nulos ni colineales definen un plano, es posible definir un ángulo entre ellos que se mide en el plano formado por ambos segmentos.

Definición 17 *El ángulo entre dos segmentos orientados no nulos es el menor de los dos ángulos que aparecen cuando sus orígenes se hacen coincidir. Esta definición implica que el ángulo entre dos segmentos orientados siempre se encuentra entre cero y π radianes.*

2.4.1. Álgebra con segmentos orientados

Se pueden definir ciertas operaciones entre segmentos orientados, la más trivial es la suma de dos de ellos. Para esta operación hay dos definiciones equivalentes, consideremos una de ellas⁷

Definición 18 *Dados dos segmentos orientados \vec{A} y \vec{B} su suma, el segmento orientado $\vec{A} + \vec{B}$ se construye a través de un algoritmo de dos pasos, el primero consiste en hacer coincidir el origen de \vec{B} con el extremo de \vec{A} y el segundo en dibujar el segmento orientado que une el origen de \vec{A} con el extremo de \vec{B} .*

Es fácil convencerse de que la adición que acabamos de definir es comutativa, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ y asociativa, $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$, además, el segmento de magnitud cero (es decir, un punto), es el “elemento neutro” de la suma, es decir: $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$.

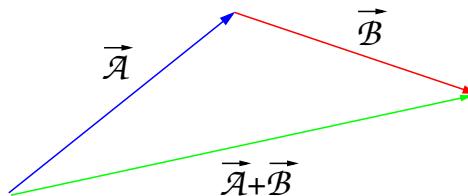


Figura 2.1: La adición de segmentos orientados como la hemos definido es totalmente equivalente a la “regla del paralelogramo”. Las pruebas de la comutatividad y asociatividad de la suma de segmentos orientados son aplicaciones sencillas de la geometría euclídea.

Además de esta operación⁸ hay otra operación interesante, el producto de un segmentos orientados por un número real no negativo.

⁷por favor consulte la otra definición denominada regla del paralelogramo en cualquier libro que le agrade y demuestre que efectivamente ambas definiciones son equivalentes

⁸que los matemáticos clasifican como una ley de composición interna

Definición 19 Para efectuar el producto $\alpha \vec{A}$, ($\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha \geq 0$) basta con construir un segmentos orientados paralelo y del mismo sentido que \vec{A} pero con magnitud $\alpha |\vec{A}|$, evidentemente $0 \vec{A} = \mathbf{0}$.

Definición 20 Dos segmentos orientados de la misma dirección y sentidos opuestos se denominan antiparalelos

Es posible introducir una operación, el producto del número -1 por unsegmento orientado.

Definición 21 El segmento orientado $-1(\vec{A})$ no es otra cosa que un segmento orientado antiparalelo a \vec{A} con la misma magnitud de \vec{A} . El segmento orientado $-1(\vec{A})$ se denota $-\vec{A}$ y se denomina opuesto de \vec{A} .

El producto por -1 induce a su vez una nueva operación entre segmentos orientados.

Definición 22 Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} su diferencia $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ es el vector que resulta de la adición de \vec{A} con el opuesto de \vec{B} .

Adicionalmente, el producto por -1 permite extender la definición de un número real cualquiera (escalar) por un segmento orientado, en efecto,

Definición 23 $\forall \alpha \in \mathfrak{R}: \alpha (\vec{V}) \equiv sign(\alpha) |\alpha| \vec{V}$.

Finalmente, es facil demostrar que el producto por un número real es distributivo con respecto a la suma de segmentos orientados, es decir, $\alpha (\vec{A} + \vec{B}) = \alpha \vec{A} + \alpha \vec{B}$

Es evidente que llevar a cabo estas operaciones debe resultar extremadamente engorroso, necesitaríamos mover flechas no coplanares en el espacio y eso además de engorroso resulta ineficaz, cabe pues preguntarse si habrá alguna otra forma de llevar a cabo las operaciones que hemos definido de tal suerte que podamos hacer algo interesante con ellas.

Pues bien, la respuesta viene del poder de la abstracción, pues podemos notar que:

Teorema 3 *El conjunto de los segmentos orientados dotado con la operación de adición y de producto por un número real que hemos introducido en esta sección constituye un espacio vectorial*

Demostración, las operaciones satisfacen los axiomas de la definición.....

Como consecuencia del teorema anterior usaremos la palabra vector y la expresión segmento orientado como cosas intercambiables.

2.4.2. \mathbb{R}^3 y segmentos orientados

En esta subsección vamos a mostrar que el espacio vectorial de los segmentos orientados con las operaciones geométricas que hemos definido es exactamente lo mismo que \mathbb{R}^3

Comencemos por introducir dos conceptos nuevos,

Definición 24 *Un segmento orientado ó vector se denomina unitario si y solo si es de magnitud 1. A los vectores unitarios los denotaremos por un sombrerito*

Definición 25 *Un triedro dextrogiro ortonormal es sencillamente un conjunto de tres segmentos orientados ($\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$) unitarios que son perpendiculares dos a dos y que están ordenados según la regla de la mano derecha.*

La propiedad de un triedro ortonormal que más nos interesa es la siguiente:

Teorema 4 *Todo triedro ortonormal dextrogiro constituye una base (la denominaremos base ortonormal) para el espacio vectorial de los segmentos orientados del espacio euclídeo.*

Corolario 1 *La dimensión del espacio euclídeo es 3.*

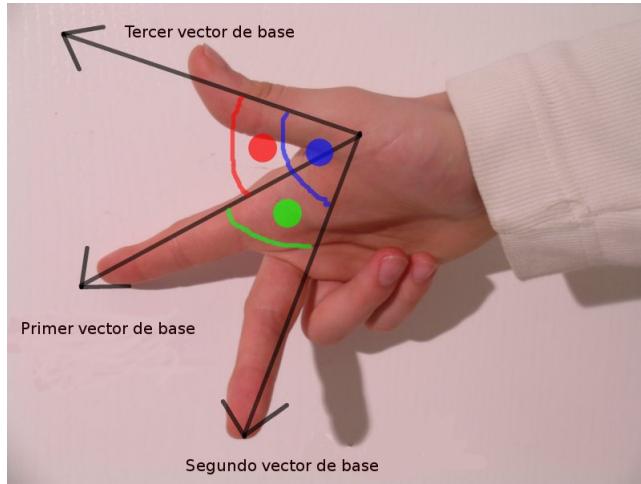


Figura 2.2: La regla de la mano derecha. Para que el triángulo ortonormal sea dextrogiro el orden en que se nombran sus vectores tiene que ser el que se muestra.

La consecuencia obvia del teorema 4 es la siguiente, dado un triángulo ortonormal y un vector arbitrario \vec{V} siempre es posible expresar \vec{V} como una única *combinación lineal* de los elementos de la base, es decir, en la forma

$$\vec{V} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.39)$$

menos obvio es el hecho siguiente, las componentes v_1 , v_2 y v_3 de \vec{V} , se pueden encontrar a través de argumentos geométricos

Ejemplo 15 *Estudiar el caso más general oscurece las cosas un poco por las complicaciones gráficas, así que consideraremos un caso simplificado: el plano. En un plano una base ortonormal solo puede poseer dos vectores. Consideremos pues una base ortonormal arbitraria ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$) del plano⁹ y un tercer vector \vec{V} coplano con la base. Al medir el ángulo que forman \vec{V} e $\hat{\mathbf{i}}$, que denotaremos por θ , resulta evidente que \vec{V} se puede expresar como (vea la figura 2.3).*

$$\vec{V} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}, \quad (2.40)$$

⁹esto es dos vectores unitarios cuya única otra particularidad consiste en ser ortogonales entre sí

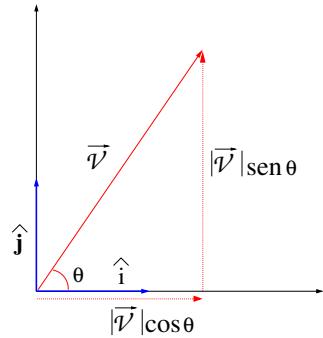


Figura 2.3: En esta figura \vec{V} es la suma de los dos vectores punteados ($\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$), donde las componentes v_x y v_y son: $v_x = |\vec{V}| \cos\theta$ y $v_y = |\vec{V}| \sin\theta$, note que dependiendo del valor del ángulo que está entre 0 y π , el signo de las componentes puede ser tanto positivo como negativo.

con

$$v_x = |\vec{V}| \cos\theta \quad y \quad (2.41)$$

$$v_y = |\vec{V}| \sin\theta. \quad (2.42)$$

VAhora bien, como \vec{V} está totalmente y únicamente determinado por su magnitud orientación y sentido y estas características están totalmente codificadas en los números θ y $|\vec{V}|$ la combinación lineal (2.40) es efectivamente única.

Veamos algo interesante, supongamos que pretendemos sumar dos vectores dados (\vec{A} y \vec{B}), siempre podremos poner

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad y \quad (2.43)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y. \quad (2.44)$$

Debido a las propiedades de la adición geométrica de segmentos orientados podemos poner

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{B}_x + \vec{B}_y \quad y \quad (2.45)$$

$$= (\vec{A}_x + \vec{B}_x) + (\vec{A}_y + \vec{B}_y), \quad (2.46)$$

donde \vec{A}_x y \vec{A}_y son ortogonales y $\vec{B}_x \parallel \vec{A}_x$ y $\vec{B}_y \parallel \vec{A}_y$.

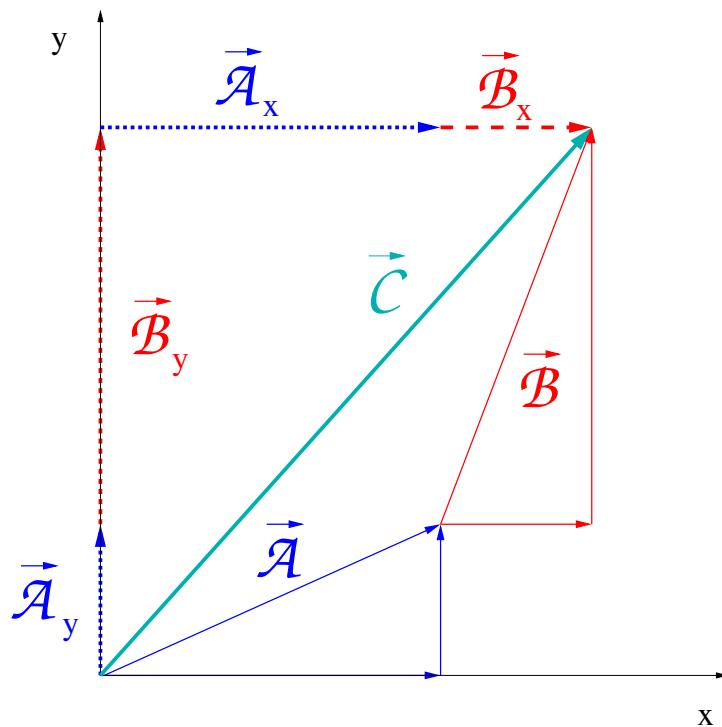


Figura 2.4:

ahora bien, si escojemos dos vectores unitarios perpendiculares $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}})$ con $\hat{\mathbf{i}} \parallel \vec{A}_x$ y $\hat{\mathbf{j}} \parallel \vec{A}_y$ podremos poner

$$\vec{A}_x = a_x \hat{\mathbf{i}} \quad \vec{A}_y = a_y \hat{\mathbf{j}} \quad y \quad (2.47)$$

$$\vec{B}_x = a_x \hat{\mathbf{i}} \quad \vec{B}_y = a_y \hat{\mathbf{j}}, \quad (2.48)$$

de esta manera, resulta finalmente que:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x) \hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y) \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.49)$$

es decir: las componentes de la adición de segmentos orientados es sencillamente la suma componente a componente.

Reflexionemos un poco acerca del caso tridimensional, es facil observar que el vector que queremos representar como combinación lineal de los elementos de la base ortonormal (\vec{A}) forma un plano distinto con cada uno de los elementos de la base, en cada uno de estos planos es posible medir el ángulo que forman el vector y cada elemento de la base ($\alpha \equiv \angle(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{i}})$, $\beta \equiv \angle(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{j}})$ y $\gamma \equiv \angle(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{k}})$) lo que lleva al resultado (figura 2.5)

$$\vec{A} = |\vec{A}| \left(\cos\alpha \hat{\mathbf{i}} + \cos\beta \hat{\mathbf{j}} + \cos\gamma \hat{\mathbf{k}} \right). \quad (2.50)$$

Los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan cosenos directores de \vec{A} y satisfacen la relación

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (2.51)$$

Usemos los elementos que tenemos a mano para construir una transformación lineal (T) entre \mathbb{R}^3 y el conjunto de los segmentos orientados, lo haremos definiendo la acción de T sobre los elementos de una base de \mathbb{R}^3 . Consideremos la basetal y cual... y definamos:

$$T(\hat{\mathbf{e}}_1) = \hat{\mathbf{i}} \quad (2.52)$$

$$T(\hat{\mathbf{e}}_2) = \hat{\mathbf{j}} \quad (2.53)$$

$$T(\hat{\mathbf{e}}_3) = \hat{\mathbf{k}} \quad (2.54)$$

Por definición,

$$T(a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3) = a_1 T(\hat{\mathbf{e}}_1) + a_2 T(\hat{\mathbf{e}}_2) + a_3 T(\hat{\mathbf{e}}_3) \quad (2.55)$$

$$= a_1 \hat{\mathbf{i}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_3 \hat{\mathbf{k}} \quad (2.56)$$

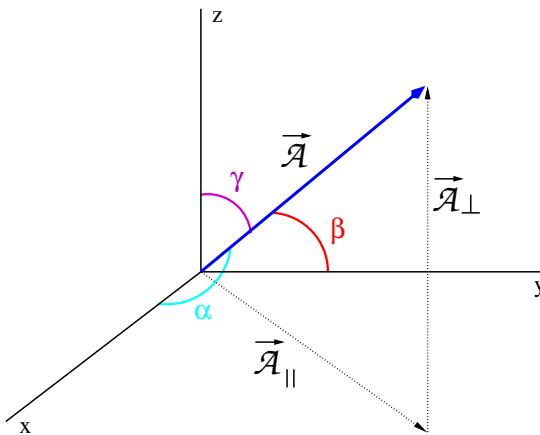


Figura 2.5: Los ángulos directores α , β y γ . Los tres vectores de base \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} determinan los tres planos xy , xz y yz . Note que en la figura, el vector aparece descompuesto como $\vec{A} = \vec{A}_{||} + \vec{A}_{\perp}$ donde $\vec{A}_{||}$ es un vector paralelo al plano xy y \vec{A}_{\perp} un vector ortogonal al plano xy .

no es muy difícil demostrar que esta función es una biyección y por lo tanto un isomorfismo, es decir:

Observación 3 *el conjunto de los segmentos orientados del espacio euclídeo tridimensional es exactamente lo mismo que \mathbb{R}^3*

2.4.3. Productos en el espacio euclídeo

Aparte de las operaciones algebraicas que hemos definido para los vectores entendidos como segmentos orientados, podemos introducir un par de operaciones adicionales, los productos escalar y vectorial. El primero de ellos no es otra cosa que el producto interno de \mathbb{R}^3 , el segundo es un producto que genera como resultado un nuevo vector. En ambos casos, hay una interesante interpretación geométrica.

Producto escalar

Ya hemos visto que \mathbb{R}^3 es lo mismo que el espacio euclídeo tridimensional, debido a esto y a la identificación de la base $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ con un triángulo ortonormal arbitrario definiremos el producto escalar sencillamente como el producto interno de la sección 2.3.3. De acuerdo a esto, el producto escalar de dos vectores $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ se calcula utilizando las componentes de ambos vectores en una base ortonormal según

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.57)$$

Es interesante notar que la definición que acabamos de dar coincide con la noción geométrica usual, en efecto,

Teorema 5 *El producto escalar entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} tiene por resultado el número*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\theta \quad (2.58)$$

donde θ es el ángulo entre ambos vectores.

Demostración: Sabemos que el producto interno es independiente de la base, esto significa que podemos elegir un triángulo ortonormal como se nos antoje, haremos nuestra elección de tal suerte que el primer vector de la base sea paralelo con \mathbf{a} de manera que $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{e}}_1$, para escoger al segundo vector de la base tomamos en cuenta que \mathbf{a} y \mathbf{b} forman un plano único y usamos este hecho para tomar a $\hat{\mathbf{e}}_2$ como un vector en ese plano que cumpla la condición de ortogonalidad con $\hat{\mathbf{e}}_1$. La dirección de \mathbf{b} no tiene porque coincidir con la de $\hat{\mathbf{e}}_2$, pero de todas maneras estamos seguros de que

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}| (\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_2) . \quad (2.59)$$

donde θ es el ángulo que \mathbf{b} forma con $\hat{\mathbf{e}}_1$ de acuerdo a esto,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \{ |\mathbf{b}| (\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_2) \} . \quad (2.60)$$

utilizando la distributividad del producto escalar y recordando que $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0$ se obtiene el resultado que queríamos demostrar.

Hay tres observaciones bastante obvias que por utilizarse extensivamente cabe resaltar.

Observación 4 *La magnitud (ó módulo) de un vector se puede calcular notando que*

$$w^2 = |\mathbf{w}|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \quad (2.61)$$

Observación 5 *El producto escalar de dos vectores no nulos perpendiculares es cero.*

Observación 6 *Las componentes de un vector en una base ortonormal se encuentran calculando el producto escalar del vector con el elemento de base correspondiente, así, por ejemplo, la segunda componente de un vector \mathbf{a} es sencillamente $a_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{a}$.*

Producto vectorial

Este producto que, como ya comentamos antes, produce como resultado vectores y admite una definición parecida a la que utilizamos con el producto escalar.

Definición 26 *Dada una base dextrogira ortonormal el producto vectorial o producto cruz entre dos vectores satisface las siguientes propiedades*

1. $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = 0$ siempre que $i = j$.
2. En los otros casos el resultado es el siguiente $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_k$ ($i \neq j \neq k$ para todas las permutaciones cíclicas de 1, 2 y 3 y $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = -\hat{\mathbf{e}}_k$ ($i \neq j \neq k$ para todas las permutaciones anticíclicas).
3. $\forall \alpha \in \Re \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Ciertamente la segunda propiedad que aparece en la definición del producto vectorial parec algo complicada, sin embargo es muy sencilla de entender. Para ello basta con explicar que son las permutaciones cíclicas y anticíclicas del conjunto ordenado $(1, 2, 3)$.

Definición 27 Considera la lista $L : 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$ una permutación cíclica del conjunto ordenado $(1, 2, 3)$ es cualquier triplete reordenamiento del conjunto en que que sus elementos aparezcan como una sublista de L que pueda leerse de izquierda a derecha. Una permutación anticíclica aparece como una sublista que tiene que ser leída de derecha a izquierda.

Según la definición que acabamos de dar, el conjunto $(3, 1, 2)$ corresponde a una permutación cíclica del conjunto $(1, 2, 3)$ mientras que $(1, 3, 2)$ se obtiene a través de una permutación anticíclica.

Aplicaremos lo que acabamos de exponer a un par de ejemplos explícitos: $\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2$ mientras que $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_2$

El resultado fundamental del producto vectorial es el siguiente

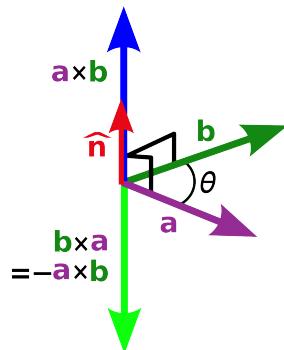


Figura 2.6: El resultado del producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, recuerde que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

Teorema 6 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \hat{\mathbf{n}}$ donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal al plano formado por los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} orientado según la regla de la mano derecha.

Demostración: Para demostrar el resultado podemos utilizar un argumento que ya nos debería ser familiar, escoger la base ortonormal de manera que permita expresar los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en la forma

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (2.62)$$

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}| (\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (2.63)$$

donde θ es el ángulo que \mathbf{b} forma con $\hat{\mathbf{e}}_1$. Al efectuar el producto se obtiene

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{e}}_1 \times [|\mathbf{b}| (\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_2)] = \quad (2.64)$$

$$= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1 + |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \quad (2.65)$$

$$= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.66)$$

como nuestra convención consiste en utilizar siempre triángulos dextrogiros, $\hat{\mathbf{e}}_3$ es el vector unitario normal al plano formado por \mathbf{a} y \mathbf{b} orientado según la regla de la mano derecha lo que completa la prueba del teorema

Como en el caso del producto escalar, vale la pena llamar la atención sobre algunas cosas

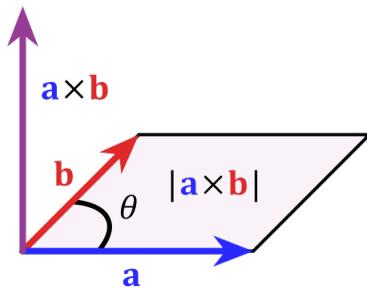


Figura 2.7: Interpretación geométrica de la magnitud del producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Observación 7 La magnitud del producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es igual al área del paralelogramo formado por \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Observación 8 Si utilizamos las reglas que definen a un determinante podemos poner

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

2.5. Vectores fijos y deslizantes

Hasta este punto deberíamos estar convencidos de que podemos utilizar técnicas de regla y escuadra para desplazar los vectores hasta donde nos plazca y es por esto que vale la pena detenerse acá para meditar sobre esto.

Ciertamente, no hay problema con desplazar los vectores a donde queramos siempre y cuando mantengamos en mente las razones por lo que lo estamos haciendo. Con el fin de mantener esto bajo control los matemáticos definen los *vectores deslizantes* como aquellos que pueden moverse libremente a cualquier punto del espacio sin preocuparnos de si podemos hacerlo o no (de hecho al conjunto de vectores con que se puede jugar de esta manera se les asigna un nombre especial: espacio afín).

Definición 28 Un vector se denomina de origen fijo si solo puede desplazarse para fines de cálculo.

Definición 29 Dos vectores de origen fijo son iguales si y solo si tienen el mismo origen y son iguales como vectores deslizantes.

Ejemplo 16 Consideremos cuatro puntos en un plano, P_1 , P_2 , P_3 y P_4 y una base ortonormal en el plano, y supongamos que los segmentos $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$ son paralelos y de la misma longitud. Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_3P_4}$ no son iguales como vectores de origen fijo ya que sus orígenes, los puntos P_1 y P_3 no son los mismos en general.

No es difícil pensar en un ejemplo físico de un vector con origen fijo, el vector de posición de un punto P en el espacio referida a un origen fijo O (que denotaremos como \overrightarrow{OP}). Utilizando coordenadas cartesianas con origen en O y usando la notación usual, las coordenadas de P se representan como un par de números reales (x_P, y_P) en que las magnitudes de los números x_P y y_P indican distancias al origen, mientras que los signos de dichos números tienen que ver con el cuadrante en que se encuentra P . Así por ejemplo, si las coordenadas de P se miden en metros las coordenadas $(-1, 2)$ indican que P se encuentra en el segundo cuadrante del sistema cartesiano cuyo origen es O .

Como ya comentamos, la posición de P define naturalmente un vector \overrightarrow{OP} que -si escogemos una base ortonormal del plano cuya orientación corresponda con la de los ejes $x - y$ - es sencillamente: $\overrightarrow{OP} = -\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2$ que debe entenderse como un vector cuyo origen es O y cuyo extremo coincide con P .

Aprovechamos estas ideas sencillas y todo el material que hemos acumulado hasta ese punto para estudiar un problema integrador.

Ejemplo 17 *Ecuación de un plano que pasa por tres puntos. Sean P , Q y R tres puntos en el espacio y sea O un punto fijo que consideraremos como origen.*

Los vectores de posición de los tres puntos son \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{OR} y por otra parte los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} están contenidos en el plano. Consideremos un nuevo punto X que también está en el plano, el vector \overrightarrow{PX} también estará contenido en el plano y puede reexpresarse como $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$. Como el vector \overrightarrow{PQ} pertenece al plano que contiene a los puntos \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} y \overrightarrow{OR} tiene que ser ortogonal a cualquier vector \mathbf{N} ortogonal a dicho plano y por lo tanto el producto escalar $\overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{N}$ debe ser nulo, de acuerdo a esto, el plano está caracterizado por la igualdad

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{PX} = 0, \quad (2.68)$$

ahora bien, podemos construir un vector ortogonal al plano a través del producto vectorial $\mathbf{N} =$

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$, de esta manera, si X es un punto arbitrario en el plano puede asegurarse

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PX} = 0, \quad (2.69)$$

y esto implica que la ecuación del plano es

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PX} = (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{OP}, \quad (2.70)$$

Si se escoje una base ortonormal orientada según los ejes coordenados la ecuación del plano toma la forma algo más familiar

$$Ax + By + Cz = D, \quad (2.71)$$

donde x, y, z son las coordenadas de un punto arbitrario que pertenece al plano.

2.6. Cálculo diferencial e integral con vectores

2.6.1. Diferenciación con respecto a un parámetro

Uno de los aspectos matemáticos fundamentales de la mecánica newtoniana es la aparición constante de vectores que dependen de un parámetro continuo (un número real). Algo como

$$\mathbf{A}(t), \quad (2.72)$$

debe entenderse como una función de variable real con valores en los vectores, ó dicho en los términos más sencillos, es un obesto se pujeto que -en una base ortonormal dada- se expresa como

$$\mathbf{A}(t) = a_1(t)\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2(t)\hat{\mathbf{e}}_2 + a_3(t)\hat{\mathbf{e}}_3, \quad (2.73)$$

donde es necesario que entendamos que las componentes $a_i(t)$ son funciones de variable real que toman valores reales.

Estas funciones vectoriales dependientes de un parámetro se tratan como cualquier otro vector aunque debemos decir que admiten una nueva operación, la diferenciación con respecto al parámetro que actúa sobre ellos de manera no trivial.

Definición 30 *Dado un vector dependiente de un parámetro, la derivada del vector con respecto al parámetro está dada por*

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \quad (2.74)$$

Esta nueva operación podría parecer algo extraño, sin embargo, está basada en operaciones que ya sabemos realizar, la única cosa con la que habría que tener cuidado es en asegurarse del comportamiento de la base con respecto al parámetro que, en lo que sigue consideraremos trivial, es decir, supondremos por el momento que la base es independiente del parámetro (está compuesta por tres vectores constantes).

Antes de llevar adelante la diferenciación estudiemos el cociente incremental finito¹⁰. El cociente incremental requiere de una sustracción de vectores que ya sabemos hacer porque los vectores de la base son constantes y de una división por el número Δt que no es otra cosa que un producto por un escalar (el número $1/\Delta t$, así, todos los ingredientes del objeto están bien definidos y por eso podemos poner

$$\frac{\Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{a_1(t + \Delta t) - a_1(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{a_2(t + \Delta t) - a_2(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (2.75)$$

Al tomar el límite para calcular la derivada resulta (porque el límite de una suma es la suma de los límites)

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_1(t + \Delta t) - a_1(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_1 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_2(t + \Delta t) - a_2(t)}{\Delta t} \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (2.76)$$

Miremos el factor

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_1(t + \Delta t) - a_1(t)}{\Delta t} \quad (2.77)$$

¹⁰lo haremos en el plano para que las expresiones luzcan más cortas

que aparece. Este no es más que la derivada usual de la función $a_1(t)$ (a usanza de los físicos es denotar esta derivada por $\dot{a}_1(t)$ y en estas notas seguiremos esa convención), en definitiva, hemos probado que la fórmula 2.76 se puede reescribir como:

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{A}} = \dot{a}_1(t) \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{a}_2(t) \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (2.78)$$

Dicho en palabras llanas, si expresamos un vector dependiente de un parámetro como combinación lineal de una base constante, su derivada con respecto al parámetro es un nuevo vector cuyas componentes con respecto a la base son las derivadas ordinarias de las componentes del vector original.

El resultado que acabamos de obtener se generaliza trivialmente a tres dimensiones para obtener que (en la hipótesis de que la base es constante)

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{a}_1(t) \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{a}_2(t) \hat{\mathbf{e}}_2 + \dot{a}_3(t) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.79)$$

2.6.2. Integración con respecto a un parámetro

Relacionada con la operación de diferenciación que discutimos en la sección anterior podemos considerar la fórmula:

$$\mathbf{u} = \int ds \mathbf{w}(s), \quad (2.80)$$

donde s representa un parámetro real. En vista de que la integración no es otra cosa que la operación inversa de la diferenciación no queda otra opción que definir:

$$\int ds \mathbf{w}(s) = \mathbf{e}_1 \int ds w_1(s) + \mathbf{e}_2 \int ds w_2(s) + \mathbf{e}_3 \int ds w_3(s), \quad (2.81)$$

en donde los vectores \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) son los elementos de una base ortonormal y las funciones $w_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ son las componentes del vector $\mathbf{w}(s)$ en dicha base.

2.7. Complemento: Cambios de base

Usted debería haberse dado cuenta de que el valor numérico de las componentes de un vector cambia al cambiar la base que se esté utilizando, en esta sección vamos a estudiar un tema algo avanzado relacionado precisamente con esta observación del cambio de componentes al cambiar la base.

Consideremos el caso plano. Demos dos bases $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2$ sea \mathbf{W} un vector arbitrario entonces

$$\mathbf{W} = w_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + w_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \quad (2.82)$$

$$\mathbf{W} = w'_1 \hat{\mathbf{e}}'_1 + w'_2 \hat{\mathbf{e}}'_2 \quad (2.83)$$

Queremos inquirir acerca de la posibilidad de alguna relación especial entre las componentes del vector en ambas bases, después de todo, deben contener la misma información.

Para comenzar con nuestro estudio notemos que podemos expresar cualquiera de las bases en términos de la otra. Por ejemplo, si expresamos la base no primada en términos de la primada tenemos que escribir dos combinaciones lineales

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = b_{11} \hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{12} \hat{\mathbf{e}}'_2 \quad (2.84)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = b_{21} \hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{22} \hat{\mathbf{e}}'_2 \quad (2.85)$$

resultado que en notación matricial se expresa como,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Si hubieramos decidido hacer lo contrario hubieramos podido poner (en notación matricial) por otro lado, tambien podemos poner a la base primada en términos de la no primada

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

Estas fórmulas implican que las matrices de coeficientes a_{ij} y b_{kl} tienen que satisfacer la condición

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

que se expresa diciendo que son inversas la una de la otra. Por otra parte, habíamos aprendido que las componentes de un vector con respecto a una base ortonormal se calculaban como los productos escalares con los elementos de la base, de acuerdo a esto

$$b_{11} = e_1 \cdot e'_1 \quad b_{12} = e_1 \cdot e'_2 \quad (2.89)$$

$$b_{21} = e_2 \cdot e'_1 \quad b_{22} = e_2 \cdot e'_2, \quad (2.90)$$

por las mismas razones la matriz de los coeficientes a_{ij} que permite expresar la base primada en términos de la base sin primar y que tiene la siguiente forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

tiene como entradas efectivas las siguientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

de manera que la matriz \mathbf{A} es la transpuesta de la matriz \mathbf{B} cuyos coeficientes son los números b_{ij} . En resumen, puede afirmarse que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (2.93)$$

donde \mathbf{I} es la matriz que solo tiene unos en la diagonal, la matriz identidad.

Volvamos a la relación que estamos buscando, podemos escribir al vector \mathbf{W} utilizando sus componentes en la base no primada y haciendo aparecer los vectores de la base primada usando

como

$$\mathbf{W} = w_1(b_{11}\hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{12}\hat{\mathbf{e}}'_2) + w_2(b_{21}\hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{22}\hat{\mathbf{e}}'_2) = \quad (2.94)$$

$$= (w_1b_{11} + w_2b_{21})\hat{\mathbf{e}}'_1 + (w_1b_{12} + w_2b_{22})\hat{\mathbf{e}}'_2. \quad (2.95)$$

si ahora usamos que la igualdad entre $b_{ij} = a_{ji}$ podemos poner

$$\mathbf{W} = (w_1a_{11} + w_2a_{12})\hat{\mathbf{e}}'_1 + (w_1a_{21} + w_2a_{22})\hat{\mathbf{e}}'_2. \quad (2.96)$$

De manera que, en definitiva, las componentes de un vector expresadas en dos bases distintas se relacionan como sigue:

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

Una regla nemotécnica para recordar esto es la siguiente:

componentes nuevas=(matriz que expresa base nueva en términos de vieja)(componentes viejas)

2.8. Problemas

1. Repase la definición de ángulo entre dos vectores. Construya (con regla, compas y **sin transportador**) pares de vectores que formen ángulos de 90° , 45° , 30° y 60° .
2. ¿Qué es un radián?, ¿qué unidades tienen los radianes?
3. Demuestre que la suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es 1
4. Calcule el ángulo que forman los vectores $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{u}}_x + \hat{\mathbf{u}}_y$ y $\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{u}}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{u}}_y$
5. Encuentre el valor de λ para que el ángulo entre los vectores $\vec{v}_1 = \hat{\mathbf{u}}_x + \hat{\mathbf{u}}_z$ y $\vec{v}_2 = 3\hat{\mathbf{u}}_x + \lambda\hat{\mathbf{u}}_z$ sean ortogonales.
6. *Encuentre el valor de λ para que los vectores $\vec{v}_1 = 3\hat{\mathbf{u}}_x + 2\hat{\mathbf{u}}_x + 5\hat{\mathbf{u}}_z$ y $\vec{v}_2 = 3\hat{\mathbf{u}}_x + \hat{\mathbf{u}}_x + \lambda\hat{\mathbf{u}}_z$ sean ortogonales.
7. **Más acerca de ángulos entre vectores**
 - a) ¿Cuál es el ángulo que con el eje x forma el vector $(1, 1)$? *Ayuda* Hay una forma de contestar a esta pregunta sin hacer cálculos.
 - b) ¿Qué ángulo forman una arista cualquiera de un cubo y una diagonal de este que pase por uno de los vértices contenidos por la arista?.
 - c) ¿Cuál es el ángulo que forman la diagonal principal de un paralelepípedo rectangular con la diagonal de una de sus caras?.
8. Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen la misma longitud, ¿qué podrá decirse de los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} - \mathbf{a}$?
9. ¿Existe alguna relación geométrica entre dos vectores y el resultado de su producto vectorial?.

10. Demuestre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ y que el resultado se puede interpretar como el volumen del paralelepípedo de la figura 2.8

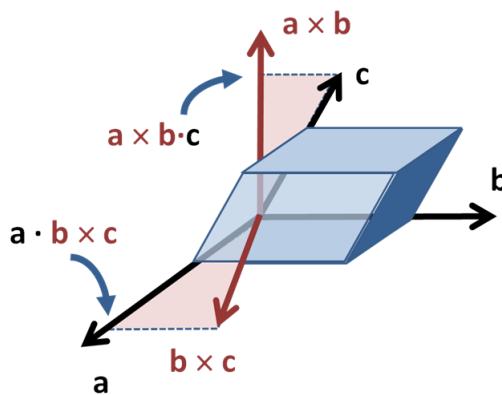


Figura 2.8: El producto triple $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ representa el volumen del paralelepípedo de esta figura

11. Seleccione la expresión falsa (justifique su respuesta)

- a) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}$
- b) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$
- c) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \neq 0$
- d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

12. Para pensar un poco:

- a) Mediante un argumento sencillo diga cual es la ecuación del plano que contiene a los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$ (**ayuda**: no hay necesidad de realizar cálculos).
- b) Construya la ecuación general de un plano que contiene a tres puntos dados y utilice su resultado para verificar la respuesta que dió a la primera parte del problema.

13. ¿Hay diferencia entre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{a} + \mathbf{b})$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
14. Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{C} ¿será posible resolver (para \mathbf{B}) la ecuación $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$? Si la respuesta es afirmativa, ¿la solución será única?.
15. Considere los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(2, 0, 1)$, ¿existirá un tercer punto R tal que las condiciones $\vec{PQ} \perp \vec{QR}$ y $\vec{PQ} \times \vec{QR} = 2\hat{\mathbf{u}}_x + 2\hat{\mathbf{u}}_z$ se satisfagan simultáneamente?.
16. Demuestre que si \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son vectores que dependen de t entonces:
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{B})$
 - Si $|\mathbf{C}| = \text{constante} \neq 0$ y $\dot{\mathbf{C}} \neq 0$ entonces \mathbf{C} y $\dot{\mathbf{C}}$ forman 90° entre sí.
17. Demuestre que si $\mathbf{r}(t)$ es un vector que depende de un parámetro y a y b son constantes:

$$\int dt (2a\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + 2b\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) = a|\mathbf{r}|^2 + b|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \text{ctte}. \quad (2.98)$$

18. Dado un vector dependiente de un parámetro $\mathbf{A}(t)$ evalúe

$$\int dt \mathbf{A} \times \ddot{\mathbf{A}} \quad (2.99)$$

Capítulo 3

Cinemática I: Conceptos fundamentales

La cinemática es una parte de la mecánica cuyo objetivo consiste en describir cuantitativamente el movimiento sin hacer referencia a las causas que lo producen. En este capítulo estudiaremos algunos elementos de la cinemática del punto material.

Antes de concentrarnos en los detalles del modelo matemático de la cinemática de un punto debemos recordar que la visión newtoniana del espacio es euclídea¹, tomando esto en cuenta y utilizando un poco la intuición tratemos de poner en claro cuales serán los objetos necesarios para describir el movimiento de un punto.

Pensemos en el espacio completamente vacío. La partícula (móvil) cuyo movimiento deseamos describir debe ser un primer elemento que debemos colocar en el espacio, sin embargo esto no es suficiente. Requerimos al menos otra partícula más que haga las veces de observador. ¿Por qué?, pues porque una de las cosas que evidencia un movimiento es un cambio de posición, y una sola partícula asilada en un espacio que no contiene nada más, no es capaz de detectar

¹esto significa que la geometría del espacio es descrita según la geometría de Euclides

ningún cambio de posición². Hemos descubierto entonces que, para describir un movimiento requerimos como mínimo de dos partículas, una de las cuales, el **observador** (O), debe poseer “conciencia”. Acá estamos usando la palabra “conciencia” de manera deliberadamente imprecisa, no estamos queriendo implicar que el observador tenga que ser un humano, ni siquiera un ser vivo. Un sistema de detectores conectados a un computador es totalmente capaz de observar un movimiento. Solo estamos queriendo decir que el observador debe ser capaz de detectar tanto a la partla (P) como a otros (no necesariamente todos) elementos del ambiente en que esta se encuentra.

Desafortunadamente estos dos únicos objetos, el móvil y el observador, aún no constituyen el conjunto mínimo de elementos que son necesarios para construir un modelo para la cinemática. Si bien es cierto que dos puntos definen una única recta en el espacio, la única cantidad de interés en que podríamos pensar con solo dos puntos P y Q , y la recta que ellos definen, es la distancia entre los dos puntos, aunque tambien podemos pensar en el sentido del segmento diciendo que el segmento OP es distinto del PO . Aún así, si los únicos objetos físicos inmersos en el espacio son O y P no puede haber una noción de orientación, se necesitan al menos dos puntos (Q y R) que nuestro observador perciba ó defina como fijos de tal suerte que el triplete de puntos O , Q y R defina un plano. Con estos elementos a la mano **si es posible** introducir una noción clara de orientación ya que con ellos es posible medir ulos del segmento orientado (vector) \vec{OP} con respecto a los segmentos orientados \vec{OQ} .

Hasta este punto la presentaci sido deliberada y ligeramente simplificada, es meneral suponer que el observador no se considera a sí mismo como localizado en el punto O , aún en tal caso, los vectores \vec{OQ} y \vec{OR} y un tercero, digamos $\vec{OQ} \times \vec{OR}$ permiten construir un triedro no necesariamente ortonormal, que constituye una base de \mathbb{R}^3 con la que podemos describir

²imagínese usted mismo en medio del mar, en los llanos o en la tundra helada sin nada que ver a su alrededor -salvo el horizonte- y medite acerca de las posibilidades que tiene de saber si su posición es fija

perfectamente al vector de posición \vec{OP} de la partícula, a tal triedro se le denomina: sistema de referencia, de ahora en adelante utilizaremos lo siguiente

Definición 31 *Un sistema de referencia es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 los orígenes de cuyos elementos están fijos en un punto que denominaremos, por convención, origen del sistema de referencia.*

La noción de movimiento está inextricablemente asociada a la noción de la posición del móvil descrita en términos de un sistema de referencia, en los términos que hemos estado estudiando la posición del móvil puede y debe identificarse con un vector, de hecho, el vector cuyos origen y extremo coinciden con el punto O y el móvil respectivamente, es decir: \vec{OP} .

Definición 32 *Dados un sistema de referencia y una partícula material localizada en un punto P , el vector de posición de la partícula, es el vector \vec{OP} donde, obviamente, O es el origen del sistema de referencia.*

Note que como consecuencia de la definición, la posición de una partícula es un concepto relativo puesto que está referido a un sistema de referencia particular que debe ser especificado.

El movimiento de una partícula se evidencia en un cambio del vector de posición de la partícula, que denominaremos vector de posición del móvil referido al origen. Con el fin de poder hacer una descripción más cuantitativa la partícula consciente tiene que tener una noción de tiempo (un relojito). Con estos elementos en la mano la posición del móvil podría describirse en términos de una lista de pares cuyos elementos son: un vector y un instante de tiempo.

Veamos las ideas anteriores en acción con un ejemplo. Imaginemos una niña (S) que gatea en una plaza y a su papá que por ser físico es un individuo a quien le gusta la cinemática. El padre (M) se sienta en un banco que será tomado como origen de un sistema de referencia. El observador escoje un par de puntos, un árbol (A) y el puesto de helados (H), observando que la distancia entre ellos es constante y que la distancia entre cada uno de ellos y el banco

del parque tambien es constante. Estamos listo para hacer cinemática. Si el padre nota que la distancia de la niña a los tres puntos cambia, tendrá todo el derecho de decir que: desde su punto de vista, la niña se está moviendo. Como ahora hay tres punicos \mathcal{M} puede definir una noción de orientación de manera muy adecuada (los tres puntos definen una superficie plana en el parque), es posible pues escoger un sistema de referencia cuyo origen (\mathcal{O}) coincide con el banco del parque y esto le permite definir el vector de posición ($\vec{\mathcal{OS}} \equiv \mathbf{S}$) de la niña con respecto al sistema de referencia cuando la niña se mueve $\vec{\mathcal{OS}}$ cambia.

Podemos ver que nuestra línea de razonamiento puede refinarse aún más. Si reflexionamos un poco, no daremos cuenta de que, para cada instante de tiempo que \mathcal{M} registra en su reloj, hay un vector $\mathbf{S}(t)$ y solo uno. En otras palabras, el vector de posición de la niña es una función de variable real (el tiempo) que toma valores vectoriales (ajá, esto ya lo conocemos de antes, $\mathbf{S}(t)$ es un vector que depende de un parámetro). Tambien debería ser intuitivamente claro que, si los instantes de tiempo (horas) consecutivas son muy seguidas las posiciones de la niña serán cercanas. Esto nos lleva a suponer (en realidad, proponer como modelo) que los vectores de posición son continuos con respecto al tiempo, más aún, supondremos que el vector de posición $\mathbf{S}(t)$ es diferenciable con respecto al parámetro t . ¡Ya estamos pues armados para hacer cinemática!.

3.1. Desplazamiento y longitud de arco

Definición 33 *El objeto fundamental en la cinemática de un punto material es el vector de posición de la partícula con respecto a algún origen: $\mathbf{r}(t)$. La forma explícita del vector de posición con respecto a algún sistema referencia se denomina: “ley de movimiento” ó “ley horaria” del punto.*

Definición 34 *Dadas las posiciones de un punto material en dos instantes de tiempo t_1 y t_2*

el desplazamiento del punto en el intervalo de tiempo $t_1 - t_2$ es el cambio

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1), \quad (3.1)$$

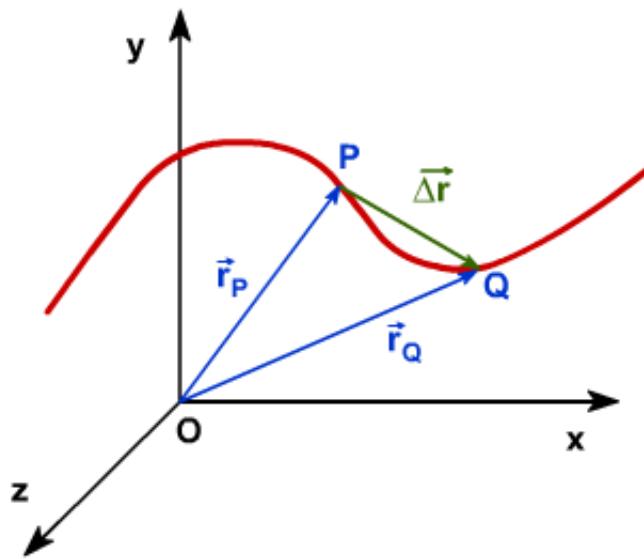


Figura 3.1: El desplazamiento entre dos instantes de tiempo es la diferencia entre los vectores de posición en dichos instantes, en este caso: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$. No es una cantidad escalar

Es conveniente hacer énfasis en el uso del lenguaje. Los objetos que hemos estado definiendo y que definiremos más adelante son entidades matemáticas muy particulares, desafortunada (ó afortunadamente) los nombres que se asignan a estas entidades coinciden con sustantivos comunes de uso diario y esto puede causar ciertos problemas. En el habla coloquial no solemos ser demasiado precisos y si bien esto puede causar algunas incomodidades estas no tienen que ser catastróficas. El lenguaje científico es otra cosa, en ciencias tenemos que transmitir ideas de manera concisa y sin ambigüedades lo que obliga a utilizar el lenguaje con propiedad.

Ejemplo 18 *El desplazamiento es un concepto suficientemente sencillo como para permitirnos ejemplificar las ambigüedades que pueden surgir al usar una palabra de nuestro léxico común en un contexto científico. Imaginemos una corredora entrenando en una pista de atletismo al aire libre³, luego de 20 vueltas la atleta habrá recorrido $20 \text{ vueltas} \times (400 \text{ m/vuelta}) = 8000 \text{ m}$ o 8 Km.*

*Luego del entrenamiento, nuestra corredora podría decir a algún compañero de equipo que se desplazó ocho kilómetros y probablemente su compañero entendería que la corredora quiere decir que ha dado 20 vueltas a la pista. Sin embargo, dada la definición que estamos usando y sin importar el número de vueltas que halla dado nuestra amiga, si comenzó y terminó en el mismo punto de la pista su **desplazamiento** ($\Delta\mathbf{r}$) durante esa dura sesión de entrenamiento fue nulo (el vector 0)!*

En este caso, el remedio a la ambigüedad que acabamos de describir es sencillo y consiste en hacer un uso propio del lenguaje. A pesar de que el desplazamiento de la corredora luego de veinte vueltas exactas es nula, la distancia que recorrió la corredora denominada: *longitud de arco* es no nula e igual, de hecho a 8 Km.

Ejemplo 19 *Estudiemos un problema algo más académico que nos permitirá reforzar estas ideas, como ejercicio importante usted debe hacer todos los dibujos que crea necesarios. Consideremos una partícula que recorre una pista circular de radio R y supongamos que la partícula recorre medio círculo, el observador puede estar localizado en cualquier punto pero para este ejemplo queremos insistir en que describe a la pista como en reposo. La distancia recorrida por la partícula al culminar el movimiento es exactamente la mitad de la longitud del círculo, es decir:*

$$s = \pi R. \quad (3.2)$$

³La longitud de una pista es de 400 m

Mientras que su desplazamiento es un vector paralelo al diámetro que separa los puntos inicial y final de la trayectoria, que está orientado desde el punto inicial al final y cuya una magnitud es

$$|\Delta \mathbf{r}| = 2R. \quad (3.3)$$

este resultado debería ser totalmente esperado puesto que generaliza de manera muy natural lo que habíamos discutido en el ejemplo anterior.

Definición 35 Considerando el vector de posición de una partícula ($\mathbf{r}(t)$) y dos instantes de tiempo t_1 y t_2 , la longitud de arco s_{12} es la distancia total recorrida por la partícula entre dichos instantes de tiempo.

En el ejemplo 19 la longitud de arco es obviamente $s = \pi R$.

3.2. Velocidad y rapidez medias

Asociado al concepto de desplazamiento hay otro concepto que se introduce en casi todos los textos de física básica y que presentamos a continuación

Definición 36 Dado el desplazamiento de una partícula su velocidad media entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 es el cociente

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (3.4)$$

donde $\Delta \mathbf{r}$ es el desplazamiento de la partícula en el intervalo considerado y $\Delta t = t_2 - t_1$.

A decir verdad, el interés de este concepto: la *velocidad media* a esta altura de sus estudios es bastante limitado (por no decir cuestionable), sin embargo tiene una gran virtud, se aleja tanto de nuestro uso normal del lenguaje que las confusiones que causa su uso pueden resultar útiles para que, quienes se inicien en las ciencias y la ingeniería cometan errores catastróficos

bien temprano y aprendan a usar propiamente el lenguaje antes de que esos errores se vuelvan demasiado costosos.

Pensemos en nuestra amiga la corredora del ejemplo 18 e imaginémosla entrenando para carreras de 400 m planos. Si nuestra amiga es una atleta de alta competencia sus tiempos en 400 m planos deben rondar los 47 s . Hablando de estos números y en vista de que nuestro idioma es el castellano, nuestra tendencia sería afirmar que la “velocidad” de la atleta es de 8,55 m/s ó 30,6 Km/h . En verdad acá hay dos errores. El primer y más notable error se está cometiendo al asociar la palabra velocidad con un número (la velocidad es un vector así que de ninguna manera la velocidad puede ser igual a 30,6 Km/h). El segundo error es mucho más difícil de notar en este punto, al hablar de valores medios pueden suceder algunas cosas aparentemente paradójicas, en efecto, aun cuando todos estaremos de acuerdo en afirmar que nuestra amiga es una corredora muy rápida ya que en 10 s puede recorrer una distancia de 8,55 m su velocidad media al dar una vuelta a la pista en 47 s es nula.

El primero de los errores que hemos mencionado es típico del estudiante que se inicia en el estudio de la física, en nuestro uso diario denominamos velocidad al cociente ℓ/T en donde ℓ es la distancia (la longitud de arco) que recorre un móvil y T el tiempo en que la recorre, este cociente es un escalar y no un vector. El problema desaparece al hacer utilizar adecuadamente el lenguaje, llamando rapidez al cociente ℓ/T obtenemos dos sustantivos diferentes para nombrar a dos objetos diferentes.

Definición 37 *Sea Δs la longitud de arco que recorre una partícula entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 (que definen un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$), la rapidez media del móvil en el intervalo de tiempo entre estos dos instantes es el cociente*

$$\langle \dot{s} \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (3.5)$$

Pensándolo un poco queda claro que esta es la idea que estamos usando cuando en nuestro

lenguaje diario hablamos de velocidad⁴.

Ejemplo 20 *Revisemos el nuevo concepto hablando de algo que parece gustarnos mucho en Venezuela. Pensemos en el LXV Grand Prix de Mónaco. Las pistas de F1 son cerradas, y según los reglamentos puede tener entre 3 y 7 Km de longitud. En el caso de Mónaco, la longitud del circuito es $\ell = 3,34$ Km (ó 2,08 mi) y la carrera consta de 78 vueltas (260,52 Km).*



Figura 3.2: El auto de Fernando Alonso durante una clasificación en el circuito de Mónaco

En la temporada 2007 Fernando Alonso, tripulando un coche Mc Laren-Mercedes se llevó varios laureles,

1. *Pole con un tiempo de⁵ 1 : 15,726,*

⁴de hecho esto es lo que mide el velocímetro de nuestros autos, cuando leemos un valor como 120 Km/h en el velocímetro de nuestro carro decimos que estamos viajando rápido y lo que estamos leyendo no es la velocidad del auto

⁵1 minuto y 15,726 s

2. vuelta más rápida 1 : 15,284 y

3. primer puesto en el podio.

Podemos calcular la rapidez media del coche de Alonso en su vuelta de clasificación para el Pole Position, el resultado es (usando la definición)

$$\langle \dot{s} \rangle = \frac{3,34 \text{ Km}}{\frac{75,726 \text{ s}}{3600 \text{ s/h}}} = 158,783 \text{ Km/h}, \quad (3.6)$$

mientras que en su vuelta de carrera rápida (la vuelta 44 de la carrera) el resultado es $\langle \dot{s} \rangle = 159,715 \text{ Km/h}$.

*Las dos cantidades que acabamos de calcular son números y en consecuencia: **no son, ni podrían ser alguna vez, velocidades medias***

Ejemplo 21 Veamos otro ejemplo deportivo. Pensemos en Rafel Vidal⁶ y en la final de 200 m mariposa de los juegos olímpicos de Los Angeles en 1984. En aquella competencia, nuestro fantástico nadador detuvo los relojes en 1 : 57,51 (es decir 117,51 s). Como usted debe saber muy bien las competencias de natación olímpicas se llevan a cabo en piscinas de 50 m lo que implica que el atleta debe nadar cuatro piscinas completar para los 200 m. Durante la competencia el nadador debe saltar al agua, y dar vuelta para cambiar el sentido de su movimiento de manera que, al igual que en el caso del auto F1, el movimiento es bastante variado. Sin embargo, la rapidez media puede calcularse sin problema. Ya dijimos que Vidal detuvo los cronos en $T = 117,51 \text{ s}$, la distancia recorrida en ese tiempo fué de 400 m y por lo tanto la rapidez media de Vidal en esa competencia fué:

$$\langle \dot{s} \rangle = \frac{200}{117,51} \text{ m/s} = 6,1 \text{ Km/h}. \quad (3.7)$$

⁶6/01/1965-12/02/2005. Nadador venezolano de alta competencia

A estas alturas esto debería ser totalmente evidente, la velocidad media es un vector, la naturaleza enteramente distinta entre números y vectores hace totalmente imposible que la velocidad y la rapidez medias puedan ser iguales. Más aún, de acuerdo a la definición, la velocidad media del auto en una vuelta es cero independientemente del tiempo en que se recorra el circuito, lo que a un periodista de habla castellana experto en F1 le parecería una ridiculez⁷.

Ejemplo 22 Movimiento a lo largo de una recta: primera visita

No todo es tan malo, a veces los conceptos si coinciden. Pensemos en una competencia de piques de autos (carreras de 1/4 de milla) los tiempos típicos en estas carreras están entre 6 y 6,5 segundos. De manera que la rapidez media de un auto de piques está por los 231,7 Km/h, para calcular la velocidad media de un auto en competencia comenzemos colocando un observador en el punto en que comienza la carrera y escojamos una base de vectores de tal forma que la dirección del vector $\hat{\mathbf{e}}_1$ coincida con la dirección de la pista y que su orientación sea a lo largo del sentido en que se desplazan los autos. En estas condiciones, la posición de un auto en competencia se expresa como

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (3.8)$$

donde $x(t)$ es un número con unidades de longitud. El signo de $x(t)$ sería negativo si en el instante t el auto estuviera localizado en un punto anterior al de partida, $x(t) = 0$ en el punto de partida y $x(t)$ será un número positivo en cualquier punto de un carril en la zona de carrera. Ya dijimos que los cronos rondan $T = 6,25 s$, el desplazamiento de un auto en ese tiempo es por lo tanto el vector

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(T) - \mathbf{r}(0) = (x(T) - x(0)) \hat{\mathbf{e}}_1 = (0,25 \text{ millas}) \hat{\mathbf{e}}_1. \quad (3.9)$$

⁷un periodista no es ni ingeniero ni físico y por lo tanto hace uso del lenguaje común, nosotros tenemos que usar el lenguaje de manera técnica y por lo tanto lo que debe parecernos ridículo es hablar de velocidades medias que son números. Por cierto, toda esta discusión es innecesaria para las personas de habla inglesa, quienes utilizan *average speed* y *average velocity*



Figura 3.3: Un auto de carreras de un cuarto de milla

Por otra parte, y en virtud de la definición, la velocidad media correspondiente sería en este caso:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{x(T) - x(0)}{T} \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{0,25}{6,25} \text{ millas/s} \hat{\mathbf{e}}_1 = 231,7 \text{ Km/h} \hat{\mathbf{e}}_1 . \quad (3.10)$$

La magnitud de este vector ($|\Delta x|/T$) no es otra cosa que la rapidez media que ya habíamos calculado, de manera que, en este caso $\langle \dot{x} \rangle = |\langle \mathbf{v} \rangle|$

Ejemplo 23 Volvamos sobre las ideas que discutimos en el ejemplo 19, y supongamos que la partícula recorre el medio círculo en un tiempo T . Es evidente que la rapidez media de la partícula es

$$\langle \dot{s} \rangle = \pi R/T . \quad (3.11)$$

Mientras que su velocidad media es un vector paralelo al diámetro que separa los puntos inicial y final de la trayectoria, que está orientado desde el punto inicial al final y cuya una magnitud es

$$|\langle \mathbf{v} \rangle| = R/T , \quad (3.12)$$

3.3. Trayectoria

Esta sección introduce una noción muy importante asociada con el movimiento general de una partícula,

Definición 38 *La trayectoria de un móvil es el lugar geométrico constituido por la sucesión de los extremos de su vector de posición.*

Al pensar en esto un momento salta a la vista que la trayectoria es una curva, es de hecho la curva que corresponde al trazo de la pistas de F1 o de atletismo que hemos considerado en nuestros ejemplos. El problema con la trayectoria es que no siempre está “marcada” claramente en el espacio, si imaginamos un planeador entenderemos lo que pasa, los planeadores hacen vuelos muy lindos pero no dejan rastro de los puntos del espacio por los que pasan en un determinado vuelo, de manera, que si quisieramos visualizar la trayectoria de un planeador deberíamos atarle una fuente de humo para que este marcará el rastro (la trayectoria). Es interesante notar que



Figura 3.4: Durante una exhibición aérea cuatro aviones han dejado sendos rastros de humo que el viento aún no ha borrado. Los rastros de humo marcan las trayectorias que han seguido los aviones.

muchos movimientos distintos pueden seguir la misma trayectoria. Podemos pensar en distintos trenes siguiendo exactamente la misma ruta (trayectoria), con solo cambiar la lista de estaciones en que se va a parar cada tren o cambiar la duración de cada parada las leyes de movimiento de cada tren serán distintas entre sí.

La ley de movimiento de una partícula en un plano fijo siempre podrá expresarse en la forma

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{e}}_x + y(t) \hat{\mathbf{e}}_y , \quad (3.13)$$

donde los vectores de la base $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ son constantes. A veces es posible expresar una de las coordenadas en función de la otra, digamos $y = y(x)$, otras veces es posible encontrar una relación de la forma $f(x, y) = 0$, en cualquiera de estos casos diremos que hemos encontrado la ecuación de la trayectoria.

Ejemplo 24 Considera la ley de movimiento $\mathbf{r}(t) = v_{0x}t\hat{\mathbf{e}}_x + (v_{0y}t + \frac{at^2}{2})\hat{\mathbf{e}}_y$. Poniendo $x(t) = v_{0x}t$ y $y(t) = v_{0y}t + \frac{at^2}{2}$, podemos obtener (hágalo usted mismo) la ecuación de la trayectoria que corresponde al movimiento:

$$y(x) = \frac{av_{0y}}{2v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x \quad (3.14)$$

3.4. Velocidad instantánea

Retomemos la discusión del concepto de velocidad media. Aún considerando movimientos generales a lo largo de trayectorias curvas, las ambigüedades comienzan a disminuir notablemente si el intervalo temporal (Δt) en que pretendemos calcular la velocidad media se hace muy pequeño, para ver esto cambiemos un poco nuestra notación. Usemos t para el instante inicial del movimiento y $t + \Delta t$ para el instante final del intervalo temporal. Si Δt es chico, los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ -cuyos orígenes se encuentran en el punto en que está el observador- tienen sus extremos muy cercanos y por lo tanto la diferencia $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ es casi paralela a

la tangente a la trayectoria en el punto que coincide con la posición del móvil en el instante t y está orientado en el sentido del movimiento, más aún, la magnitud del vector de desplazamiento en ese intervalo muy corto de tiempo esencialmente igual a la del arco de curva que el móvil describe entre t y $t + \Delta t$ (exactamente lo que ocurría en el caso del auto de piques). Como consecuencia de estos hechos, la magnitud de la velocidad media en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ es igual a la rapidez media del móvil en ese intervalo de tiempo muy corto.

Evidentemente la línea de razonamiento que estamos siguiendo nos va a llevar a la situación límite en que $\Delta t \rightarrow 0$, y esto lleva a un nuevo concepto,

Definición 39 *Considérense un sistema de referencia con origen (\mathcal{O}) y una partícula cuya posición con respecto a \mathcal{O} está dada por el vector $\mathbf{r}(t)$. En el instante t la velocidad instantánea (ó sencillamente la velocidad) de la partícula según \mathcal{O} es la derivada*

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (3.15)$$

Es importante notar que en la definición 39, el instante t es de importancia fundamental, esto tiene una consecuencia geométrica importante, la velocidad es un objeto físico cuya estructura matemática es algo más compleja que un vector, la velocidad solo está bien especificada a través de un par de objetos $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ es decir, se requieren un punto P de la trayectoria, y el vector \mathbf{v} tangente a la trayectoria en P (vea la figura 3.5).

Expresado en otros términos, la velocidad instantánea en un instante t es un vector tangente a la trayectoria cuya magnitud es la rapidez media de la partícula en un intervalo infinitesimal de tiempo δt alrededor del instante t .

Repasemos un poco la definición de velocidad instantánea repensando las cosas en otros términos, consideremos una partícula en movimiento, un instante de tiempo t y un intervalo de tiempo infinitesimal dt , el vector

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) \quad (3.16)$$

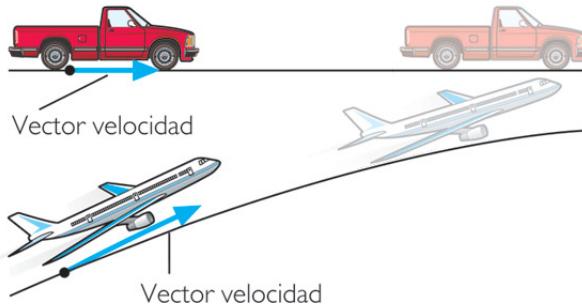


Figura 3.5: Esta figura pretende mostrar la velocidad (\mathbf{v}) como un vector cuyo origen está en la partícula en movimiento, y que en cada instante es tangente a la trayectoria.

es un vector paralelo a la tangente a la trayectoria de la partícula en el punto que esta ocupa en el instante t , $d\mathbf{r}$ no es otra cosa que el desplazamiento infinitesimal entre los instantes t y $t + dt$. En virtud de la definición de velocidad el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (3.17)$$

donde: \mathbf{v} es la velocidad de la partícula y dt el intervalo infinitesimal de tiempo.

La magnitud de $d\mathbf{r}$ no es otra cosa que la longitud de arco (infinitesimal) que la partícula recorre entre los instantes t y $t + dt$ y por lo tanto:

$$ds = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{v}| dt \quad (3.18)$$

3.5. Aceleración

Con el fin de completar la descripción de la cinemática del punto es menester introducir otra noción que tambien está asociada con cambios,

Definición 40 Considerense el origen de un sistema de referencia (\mathcal{O}) y una partícula cuya velocidad con respecto a \mathcal{O} está dada por el vector $\mathbf{v}(t)$. En el instante t la aceleración instantánea de la partícula según \mathcal{O} es la derivada

$$\mathbf{a}(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (3.19)$$

Al igual que la velocidad, la aceleración es un objeto físico cuya estructura es más compleja que la de un vector. La aceleración también está constituida por un par de objetos matemáticos, la posición de la partícula en un cierto instante y la derivada de la velocidad en ese mismo instante $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{v}}(t))$, ó dicho en otros términos, es un vector cuyo origen se encuentra (en cada instante de tiempo) localizado en el móvil.

A diferencia de la velocidad, la aceleración no es tangente a la trayectoria de la partícula y de hecho, en general no tiene ninguna relación geométrica notable con esta. El significado de la aceleración es bastante más difícil de explicar que el de la velocidad y al igual que esta, la palabra aceleración se usa en el lenguaje común de una manera que induce a errores importantes.

El lego utiliza no solo la palabra aceleración sino el vocablo “desaceleración” ó frenado con un significado que tiene una relación remota e incorrecta con el significado preciso del término. En efecto, se asocia la palabra aceleración con un aumento de la rapidez y a la desaceleración como una disminución de aquella. Si bien, esta interpretación cruda de la aceleración tiene una relación con el significado real ya que expresa una noción de cambio, la noción de aquellos que usan el lenguaje de forma impropia es demasiado simplista.

La aceleración se define como la tasa de cambio instantánea de la velocidad, como la velocidad es un vector esta tasa de cambio puede manifestarse como un cambio de dirección de la velocidad que no implique cambio en la rapidez ó un cambio en la rapidez sin requerir un cambio en la dirección de la velocidad e inclusive un cambio más radical que implique cambios tanto en la magnitud como en la dirección de la velocidad.

Así como la velocidad tiene relación con la noción de rapidez, la aceleración tiene relación con la violencia en que se puedan llevar a cabo los cambios en la velocidad. En el caso de la rapidez, la aceleración es un indicativo de que tan fuertes pueden ser los cambios de esta, así por ejemplo, aún cuando dos autos distintos puedan alcanzar una rapidez de 140 Km/h, solo autos de gran potencia pueden alcanzar tales tasas de recorrido por unidad de tiempo en corto tiempo, de hecho, uno de los parámetros que se utilizan a diario para expresar de alguna forma las bondades de un auto es el tiempo en que este pueda alcanzar los 100 Km/h. En cuanto a los cambios de dirección, podemos pensar en aviones, los aparatos más maniobrables son aquellos que pueden cambiar su dirección de vuelo con mayor facilidad, lo que corresponde a la posibilidad de realizar maniobras en que las aceleraciones pueden tener magnitudes notablemente altas (que usualmente se miden en múltiplos de la magnitud $g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

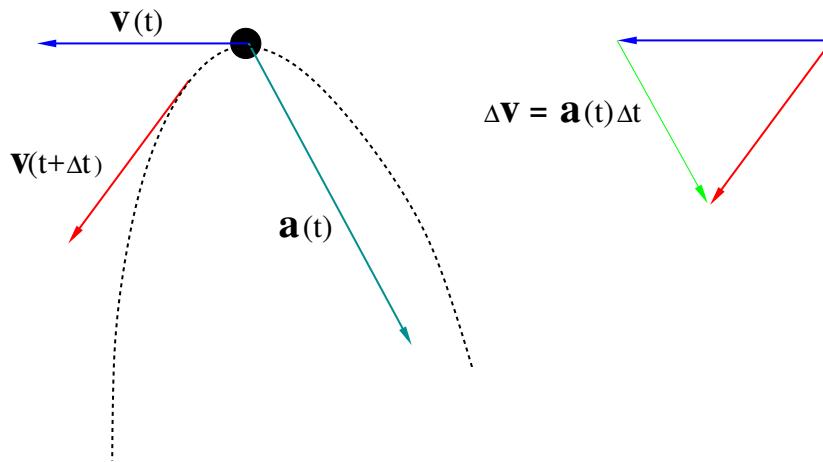


Figura 3.6: Una partícula en movimiento, el cambio en la velocidad es $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$. La línea punteada es la trayectoria de la partícula

Con el fin de entender mejor la definición de aceleración consideremos la figura 3.6, allí se muestra una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva, en la figura Δt es un

intervalo de tiempo de magnitud muy chica comparado con t , de acuerdo a esto:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) \approx \mathbf{a}(t)\Delta t, \quad (3.20)$$

donde $\mathbf{a}(t)$ es la aceleración en el instante t , de manera que la aceleración instantánea en t es **paralela al cambio de velocidad** $\Delta \mathbf{v}$, veamos ahora lo más interesante, en cada instante de tiempo siempre podemos expresar la aceleración como:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t), \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{a}_{||}(t)$ es un vector paralelo a la velocidad y $\mathbf{a}_{\perp}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{v}(t)$. Si $\mathbf{a}_{\perp}(t)$ resultara ser nulo en algún instante de tiempo esto ocurriría porque la aceleración y la velocidad son paralelos en ese instante.

Ahora bien, recordemos que dos vectores son paralelos si y solo si su producto vectorial es nulo, dicho esto observemos que $\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t$ de manera que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t + \Delta t) \times \mathbf{v}(t) &= \{\mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t\} \times \mathbf{v}(t) \\ &= \mathbf{a}_{\perp}(t) \times \mathbf{v}(t) \Delta t. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Este último resultado demuestra que:

Si en un instante la aceleración no es paralela a la velocidad, en ese instante la velocidad sufrirá necesariamente de un cambio de dirección.

¿Podremos decir algo con respecto a la relación entre la aceleración y la rapidez?, para contestar esta pregunta consideremos el cuadrado de la rapidez en el instante $t + \Delta t$, es decir, consideremos el producto

$$|\mathbf{v}(t + \Delta t)|^2 = \mathbf{v}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{v}(t + \Delta t), \quad (3.23)$$

usando los resultados que ya tenemos a mano podemos poner

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t + \Delta t)|^2 &= \{\mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t\} \cdot \{\mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t\} = \\ &= \mathbf{v}^2(t) + 2 \{\mathbf{a}_{||}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t) \cdot \mathbf{v}(t)\} \Delta t + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $O(\Delta t^2)$ representa a los términos que contienen factores $(\Delta t)^2$, que por ser Δt una cantidad muy pequeña, son despreciables con respecto a los sumandos que contienen potencias primeras de dicha cantidad, en resumen y recordando que

1. $\mathbf{a}_\perp(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ y
2. $\mathbf{a}_\parallel(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \pm |\mathbf{a}_\parallel(t)| \dot{s}(t),$

donde \dot{s} es la rapidez de la partícula, el cuadrado de la rapidez en $t + \Delta t$ (con precisión $O(\Delta t)^2$) es:

$$|\mathbf{v}(t + \Delta t)|^2 = \mathbf{v}^2(t) \pm 2 |\mathbf{a}_\parallel(t)| \dot{s}(t) \Delta t, \quad (3.25)$$

Este último cálculo nos ha enseñado algo muy interesante, los cambios en la magnitud de la velocidad, esto es, los cambios en la rapidez provienen de la componente de la aceleración paralela a la velocidad, más aún, si recordamos que tanto la rapidez como $|\mathbf{a}_\parallel(t)|$ son cantidades positivas y que en la fórmula 3.25 el signo + corresponde al caso en que la velocidad es paralela a \mathbf{a}_\perp , mientras que el signo - corresponde al caso contrario, veremos que en el primer caso la rapidez aumenta, mientras que en el segundo disminuye. En resumen:

Teorema 7 *En un movimiento con aceleración, los cambios instantáneos de dirección de la velocidad se deben a la componente de las aceleración ortogonal a \mathbf{v} ($\mathbf{a}_\perp(t)$), mientras que los cambios de la rapidez deben asociarse con la componente de la aceleración paralela a la velocidad ($\mathbf{a}_\parallel(t)$), más aún, si $\mathbf{a}_\parallel(t)$ es paralela a la velocidad la rapidez sufre un aumento instantáneo, mientras que si $\mathbf{a}_\parallel(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son antiparalelas, la rapidez instantánea disminuye*

Es bueno que observemos que el teorema 7 no solo especifica clara y explícitamente el significado de la aceleración, sino que obviamente contiene las ideas primitivas de aceleración y frenado. Al haber introducido la aceleración, y estudiado su significado, hemos completado el conjunto de definiciones que se requieren para estudiar la cinemática del punto material en el marco de la mecánica de Newton.

3.6. Ejemplos finales

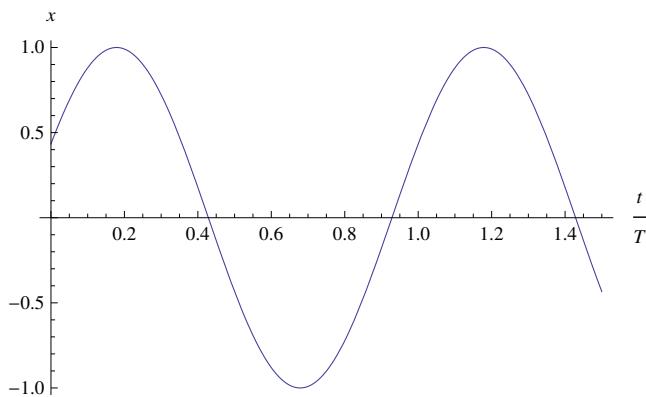


Figura 3.7: Movimiento armónico simple, la amplitud es 1, la fase inicial $\pi/7$ y $x(t)$ se grafica contra la variable adimensional t/T donde $T = 2\pi/\omega_0$ es el período del movimiento.

Ejemplo 25 El movimiento armónico simple es un movimiento limitado a un segmento recto y que, en un sistema de referencia cuyo origen corresponde con el punto $x = 0$, es descrito por la “ley horaria” $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{e}}_s$, donde el versor $\hat{\mathbf{e}}_s$ define la recta y $x(t_0)$, la componente del vector de posición a lo largo de $\hat{\mathbf{e}}_s$ está dado por⁸

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi), \quad (3.26)$$

en esta igualdad, A , ω_0 y ϕ constantes. La constante A denominada “amplitud” del movimiento tiene unidades de longitud, ω_0 que recibe el nombre de “frecuencia angular” de tiempo^{-1} y ϕ , conocida como “fase inicial” es adimensional.

El movimiento armónico simple es periódico (se repite) y el período del movimiento es $T = 2\pi/\omega_0$ como se demuestra sin mayor problema al calcular $x(t+T)$. También es fácil

⁸a veces se utiliza $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$

mostrar que la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo movimiento es armónico simple

$$\mathbf{v} = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \hat{\mathbf{e}}_s \quad (3.27)$$

$$\mathbf{a} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi) \hat{\mathbf{e}}_s \quad (3.28)$$

Ejemplo 26 Vamos a estudiar un problema que resume todos los conceptos que hemos estudiado hasta acá. Considere una partícula que se mueve en el plano cartesiano XY. Suponga que las coordenadas cartesianas del vector de posición de la partícula son

$$x(t) = R_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.29)$$

$$y(t) = R_0 [1 - \cos(\omega_0 t)] , \quad (3.30)$$

donde R_0 y ω_0 son constantes cuyas dimensiones son de longitud y tiempo^{-1} respectivamente..

1. Encuentre el vector de posición de la partícula.
2. Encuentre la velocidad de la partícula
3. Encuentre la aceleración de la partícula
4. ¿Qué ángulo forman la velocidad y la aceleración de la partícula?
5. ¿Cuál es la distancia que recorre la partícula entre 0 y T ?
6. ¿Cuál es la trayectoria de la partícula?

La respuesta a la primera cuestión es sumamente sencilla, llamando $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_y$ a los versores paralelos a los ejes coordenados podemos poner directamente:

$$\mathbf{r} = R_0 \sin(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_x + R_0 [1 - \cos(\omega_0 t)] \hat{\mathbf{e}}_y . \quad (3.31)$$

La velocidad se calcula muy facilmente a partir de la fórmula anterior, solo hay que derivar resultando

$$\mathbf{v} = R_0 \omega_0 [\cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_y], \quad (3.32)$$

vale la pena notar que $\mathbf{v}(t)$ es un vector de magnitud constante ($|\mathbf{v}| = R_0 \omega_0$) que cambia de dirección en cada instante.

La aceleración se encuentra también de manera inmediata, basta con diferenciar la velocidad y se obtiene:

$$\mathbf{a} = -R_0 \omega_0^2 [\sin(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_x - \cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_y]. \quad (3.33)$$

Hay una forma muy sencilla de encontrar el ángulo entre la velocidad y la aceleración, en efecto, como la velocidad no es constante pero la rapidez sí lo es la derivada de la velocidad tiene que formar un ángulo de 90° con \mathbf{v} . Si se quiere convencer de que esto es cierto, tome el producto escalar de los lados derechos de las fórmulas 3.32 y 3.31.

La quinta cuestión es más delicada ya que está relacionada con la longitud de arco que es algo que nunca hemos calculado. Sin embargo, en la fórmula 3.18 ya habíamos establecido que la longitud de arco infinitesimal es la longitud del vector de desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$.

Nuestros conocimientos de la “tecnología” de los vectores indican que:

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{(dt)^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt}, \quad (3.34)$$

ya hemos encontrado que la velocidad de la partícula cuyo movimiento nos ocupa en este caso de estudio es un vector de magnitud constante e igual a $|\mathbf{v}| = R_0 \omega_0$ de manera que, en definitiva, la longitud de arco en el intervalo de tiempo que nos interesa es⁹:

$$s = R_0 \omega_0 \int_0^T dt = R_0 \omega_0 T. \quad (3.35)$$

⁹El teorema fundamental del cálculo establece que: si $F(a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$ y f son tales que $F' = f$ ocurre que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(s) ds$

Para un movimiento general en el plano podemos poner:

$$ds = dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}. \quad (3.36)$$

La trayectoria se dejó como última pregunta para que los resultados se pudieran interpretar de manera directa. Sabemos que la ley horaria del movimiento se puede escribir en componentes en la forma

$$x(t) = R_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.37)$$

$$y(t) = R_0 (1 - \cos(\omega_0 t)), \quad (3.38)$$

ó

$$x(t) = R_0 \sin(\omega_0 t) \quad (3.39)$$

$$y(t) - R_0 = -R_0 \cos(\omega_0 t) \quad (3.40)$$

elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas se obtiene

$$x^2 + (y - R_0)^2 = R_0^2, \quad (3.41)$$

de manera que la trayectoria del movimiento es un círculo de radio R_0 con centro en el punto $(0, R_0)$.

3.7. Problemas

1. Para revisar algunos conceptos y numeritos. ¿cuál es la rapidez media (en Km/h) de un atleta de élite que marca 10 s para un recorrido de 100 m?. ¿Cuál es la velocidad media de un corredor de 400 m luego de completar una vuelta al estadio? [investigue los tiempos olímpicos].
2. Los portaviones poseen unos dispositivos auxiliares para el despegue de los aviones denominados *catapultas*.



Las catapultas miden unos 300 *ft* de longitud, cuando un avión se prepara a despegar de la cubierta, el piloto acelera los motores al máximo y a una señal del personal de cubierta se dispara la catapulta, que ayuda a acelerar el avión de 0 a 160 nudos en algo menos de 2 segundos. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración media del avión durante el despegue (exprese su respuesta en unidades de $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)?. Para que tenga un punto de comparación divertido, las montañas rusas *Batman and Robin: The Chiller, Shockwave* y *Magic Mountain* de los parques Six Flags poseen aceleraciones máximas de 5.0 g, 5.0 g, y 4.9 g respectivamente.

3. Grafique la posición (en función del tiempo) de un automóvil que viajando por una carretera recta viaja a 60 *Km/h* desde un punto inicial hasta otro punto que dista del primero 20 *Km*, se detiene por un intervalo de 30 min, continúa por la misma carretera por otros 40 *Km* a 100 *Km/h* deteniéndose por 10 min y regresando al punto de partida

a 80 Km/h. Sobre el mismo gráfico represente el movimiento de otro auto, que, partiendo del mismo punto 30 min después del primero viaja a 60 Km/h en la dirección original del primer automóvil. ¿Dónde y en qué instantes se encuentran los dos automóviles?.

4. Una partícula describe el siguiente movimiento armónico simple (MAS). La posición de una partícula

$$x(t) = (3 \text{ m}) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \text{ s}^{-1}}{2} t \right).$$

- a) Haga una gráfica x vs. t del movimiento y descríbalo cualitativamente.
- b) Encuentre la velocidad y aceleración de la partícula.
- c) Considere ahora otro MAS, esta vez descrito por la ley horaria

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t).$$

¿En el sistema internacional de unidades cuáles serán las dimensiones de las constantes A y ω_0 ?; ¿puede reexpresar la ley horaria en términos de la función seno? usted debe encontrar. Nota: Nuevos aspectos de este movimiento aparecerán en el problema (1) del capítulo (6)

5. Una partícula se mueve de modo que su posición en función del tiempo es $\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{e}}_x + 4t^2\hat{\mathbf{e}}_y + t\hat{\mathbf{e}}_z$. ¿Qué forma tiene la trayectoria de la partícula?.
6. El vector de posición de una partícula durante su movimiento está dado por:

$$\mathbf{r}(t) = A [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_x + \operatorname{sen}(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_y]$$

donde t es el tiempo y las cantidades A y ω son constantes. Encuentre:

- a) Las unidades de todas las constantes (en el sistema internacional).
- b) La ecuación de la trayectoria.

- c) La velocidad y aceleración del movimiento.
- d) ¿cuál es la rapidez de la partícula?, ¿cómo explica que la aceleración no es nula?.
- e) El ángulo que forman la velocidad y la aceleración.

7. *Repita el ejercicio anterior utilizando la ley horaria

$$\mathbf{r}(t) = A \cos(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_x + B \sin(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_y$$

donde ahora las cantidades constantes son A , B y ω

8. El vector de posición de una partícula durante su movimiento está dado por:

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) [\cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_y]$$

donde t está dado en segundos, ω_0 es una constante con unidades 1/seg y $\rho(t)$ es una función derivable del tiempo.

- a) Encuentre la velocidad y la aceleración del movimiento.
- b) Reduzca las expresiones para la velocidad y la aceleración en el caso especial $\rho(t) = constante = \rho_0$ y exprese, para este caso, la velocidad como un producto vectorial que contenga al vector ortogonal al plano $x - y$ ($\hat{\mathbf{e}}_z$).

9. La siguiente fórmula representa la ley de movimiento de una partícula:

$$\mathbf{r}(t) = \rho_0 [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_y] + [\nu_0 t + z_0] \hat{\mathbf{e}}_z$$

donde t está dado en segundos y los números ρ_0 , ω , ν_0 y z_0 son constantes con las dimensiones apropiadas.

- a) Describa cualitativamente el movimiento.

- b) Calcule la velocidad y la aceleración de la partícula y el ángulo que forman entre ellas.
- c) Trate de expresar a la aceleración en la forma $\vec{a} = \vec{U}(t) \times \hat{\mathbf{e}}_z$ e intente dar una interpretación física (esto le servirá más adelante en el curso de física IV).

Capítulo 4

Cinemática II

En el capítulo anterior hemos aprendido que el objeto fundamental de la cinemática de un punto material es el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ al cual asociamos dos objetos físicos de interés, la velocidad y la aceleración que se obtienen del primero por simple diferenciación. Si conocemos la ley de movimiento de una partícula podemos calcular su velocidad y aceleración de manera inmediata. Tal cálculo sin embargo es bastante sencillo y por lo tanto no resulta particularmente interesante (al menos desde el punto de vista matemático).

De mucho mayor interés por razones que estudiaremos más adelante es el problema de encontrar la ley de movimiento de una partícula a partir de su aceleración. Ese es el tema de estudio de este capítulo.

4.1. Movimiento a lo largo de una recta.

Comenzaremos el capítulo estudiando un problema sencillo desde el punto de vista geométrico, pero más complejo que los problemas que estudió durante su preparación en la escuela secundaria. Consideraremos un movimiento que se lleva a cabo a lo largo de una recta. Si escojemos

uno de los vectores de la base ortonormal ($\hat{\mathbf{e}}_x$) de forma que sea paralelo a la recta (llamémosla la recta de coordenadas x) y escojemos el origen de coordenadas para que coincida con $x = 0$ el vector de posición de la partícula será

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (4.1)$$

y evidentemente la velocidad y la aceleración de la partícula serán

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{\mathbf{e}}_x \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (4.2)$$

Para ser algo más explícitos, supongamos que estamos viajando en un auto a lo largo de una carretera muy recta y larga de manera que podamos imaginar que el auto en que viajamos coincide con la partícula de que estamos hablando, supongamos además que el auto está equipado con un sistema computarizado que permite grabar un archivo con los siguientes datos: la hora y el valor \dot{x} a esa hora, el signo de \dot{x} será positivo si el auto está viajando en el sentido paralelo a $\hat{\mathbf{e}}_x$ y negativo en caso contrario. En estas condiciones contestemos a la siguiente pregunta

Problema 5 *Si se conoce la posición del auto a alguna hora que denominaremos t_0 ¿cuál será la posición del auto a otra hora, digamos¹, t ?*

Para resolver el problema que acabamos de plantear dibujemos un gráfico de la velocidad contra el tiempo y supongamos por un momento que la velocidad del auto entre cada dos mediciones es constante. En ese caso es fácil ver que, si componente de la posición inicial es $x(t_0) = x_0$, la componente de la posición final será

$$x(t) = x_0 + v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \dots + v(t_N)\Delta t_N. \quad (4.3)$$

¹Antes de continuar debo comentar para ser honesto, que el problema en la forma que lo estoy planteando es totalmente académico ya que un auto equipado con un dispositivo GPS permite grabar un archivo con la posición y velocidad instantánea (si, el vector) del auto a ciertos intervalos de tiempo según lo especifique el usuario.

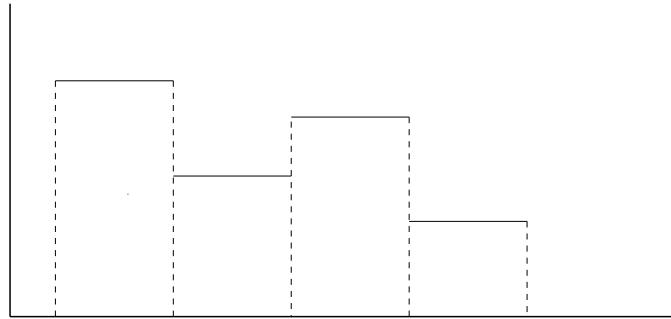


Figura 4.1: Componente de la velocidad de un móvil que se mueve a lo largo de una recta con rapidez constante en intervalos de tiempo iguales.

ahora bien, sabemos que la velocidad del auto no tiene porque ser constante, de tal manera que lo que estamos haciendo es falaz. Sin embargo, en cada intervalo de tiempo existe un objeto que si tiene un sentido físico muy adecuado para el calculito que estamos haciendo, la velocidad media en el intervalo. Como el movimiento es a lo largo de una recta, la velocidad media tiene por magnitud la rapidez media y o de la cantidad $\langle v(t_i) \rangle$ en el i -ésimo intervalo temporal refleja muy bien el sentido del movimiento del auto en ese intervalo, en definitiva, una forma adecuada de dar una respuesta aproximada a nuestra pregunta académica es

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^N \langle v(t_i) \rangle \Delta t. \quad (4.4)$$

Si reducimos el tamaño de los intervalos Δt a expensas de tener muchísimos más datos, los valores de $\langle v(t_i) \rangle$ serán cada vez más parecidos a los valores instantáneos $v(t_i)$ y al final pondremos

$$x(t) = x(0) + \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v(t_i) \Delta t, \quad (4.5)$$

ó

$$x(t) - x(0) = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v(t_i) \Delta t. \quad (4.6)$$

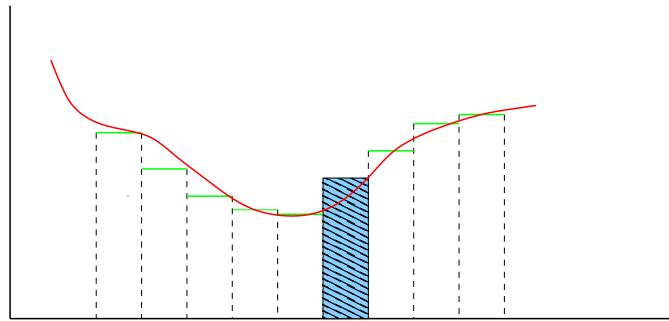


Figura 4.2: Componente de la velocidad de un móvil en $D=1$ aproximada por velocidades medias en subintervalos. Cada sumando $\langle v(t_i) \rangle \Delta t$ de la fórmula 4.4 representa el área de uno de los rectangulitos

Pero sabemos muy bien que si el límite de la derecha existe, su valor es la integral de Riemann de la componente de la velocidad instantánea $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ de manera que en ese caso escribiremos

$$x(t) - x(0) = \int_{t_0}^t ds v(s). \quad (4.7)$$

Ahora bien, ya que $v(t) = \dot{x}$ esta última fórmula no es otra cosa que el teorema fundamental del cálculo infinitesimal.

En fin, la respuesta matemáticamente exacta a nuestra pregunta es la siguiente: la posición final del auto en el instante t está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \left[x(0) + \int_{t_0}^t ds v(s) \right] \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (4.8)$$

Escribimos la respuesta en esta forma en lugar de usar la fórmula (4.7) para evitar la tentación de caer en el error de confundir las palabras velocidad, componente de la velocidad y rapidez, confusión que en un movimiento a lo largo de una recta podría no ser demasiado grave, pero que en el caso general es absolutamente inadmisible.

Por cierto que, en la fórmula 4.8, la integral representa el área algebráica bajo la curva de componente de la velocidad vs tiempo.

4.2. El problema de valores iniciales: movimiento general del punto

Problema 6 Conocida la aceleración ($\mathbf{a}(t)$) en general no constante de una partícula, y dadas su posición (\mathbf{r}_0) y velocidad (\mathbf{v}_0) en un cierto instante t_0 encuentre la posición de la partícula para cualquier otro instante $t > t_0$.

Comencemos por notar que este es precisamente el problema de encontrar la ley horaria de una partícula puntual a partir de su aceleración. Este es el problema fundamental de la cinemática y es conocido como problema de valores iniciales, en general este es un problema matemático extremadamente difícil de resolver en forma analítica, sin embargo, en ciertos casos especiales la solución del problema es, al menos en principio, sencilla.

Supongamos que conocemos la aceleración de la partícula y que la podemos escribir explícitamente como un vector que depende del tiempo², es decir, supongamos que conocemos una fórmula para $\mathbf{a}(t)$. Sabemos que la velocidad y la aceleración están relacionadas por $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)$ y por lo tanto una generalización obvia del teorema fundamental del cálculo infinitesimal implica

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t ds \mathbf{a}(s) . \quad (4.9)$$

Si podemos resolver esta integral (es decir, las tres integrales que corresponden a las tres componentes de la aceleración) habremos calculado la velocidad $\mathbf{v}(t)$. La velocidad está relacionada a su vez con el vector de posición según $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$ así que podemos concluir que

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t ds \mathbf{v}(s) . \quad (4.10)$$

y habremos terminado de resolver completamente el problema de valores iniciales.

Si estos últimos párrafos parecieron oscuros no nos preocupemos porque deberían aclararse estudiando en detalle el resto delo capítulo.

²hay casos en que esto no es posible a priori

4.2.1. El movimiento con aceleración constante

El movimiento con aceleración constante es un caso especial muy sencillo del problema que acabamos de discutir, antes de entrar en materia notemos que aún cuando a usted le mostraron varios problemas distintos de cinemática durante sus estudios de secundaria (movimiento con velocidad constante, movimiento uniformemente acelerado, ..., que se yo!), en verdad solo estudió el problema con aceleración constante considerando varios casos particulares como cosas distintas, lo que en mi opinión es una gran tontería que le llenó la cabeza de errores de concepto.

Ahora sí, volvamos a la física, consideraremos una partícula cuya aceleración con respecto a algún observador es constante, para fijar la notación pondremos $\mathbf{a} = \mathbf{a}_c = \text{vector constante}$ y queremos encontrar el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para instantes posteriores a un cierto instante inicial t_0 .

En estas condiciones estamos justo en un caso especial del problema de valores iniciales que acabamos de discutir. Como ya aprendimos, el primer paso en el proceso de hallar la ley horaria del movimiento ($\mathbf{r}(t)$) consiste en integrar la aceleración para obtener la velocidad, en vista de que el vector de aceleración es independiente del tiempo podemos extraerlo de la integral para quedar con

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t ds \mathbf{a}(s) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_c \int_{t_0}^t ds = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_c (t - t_0) . \quad (4.11)$$

Habiendo encontrado la velocidad como función del tiempo solo nos resta integrar una vez más para obtener

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t ds [\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_c (s - t_0)] , \quad (4.12)$$

notando que la integral de una suma es una suma de integrales puedo reescribir esta expresión en la forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0 \int_{t_0}^t ds + \mathbf{a}_c \int_{t_0}^t ds (s - t_0) , \quad (4.13)$$

y ahora podemos integrar sin dificultad alguna para alcanzar el resultado final

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{\mathbf{a}_c}{2}(t - t_0)^2. \quad (4.14)$$

Nuestro resultado está expresado en forma vectorial pura sin recurrir a una base. Es interesante introducir un triedro dextrogiro para comparar el aspecto de lo que acabamos de calcular con las cosas que usted estudió hace algún tiempo.

Escojamos la base de tal forma que $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ sean coplanares con la aceleración \mathbf{a}_c y la velocidad inicial \mathbf{v}_0 , $\hat{\mathbf{e}}_3$ tiene que ser perpendicular al plano que forman $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ y su orientación debe ser adecuada para satisfacer la regla de la mano derecha. Escojamos además $\hat{\mathbf{e}}_2$ como paralelo a la aceleración, esto nos permite expresar esta última como $\mathbf{a}_c = a_c \hat{\mathbf{e}}_2$ y nos obliga a poner

$$\mathbf{v}_0 = v_{01} \hat{\mathbf{e}}_1 + v_{02} \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \text{y} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{r}_0 = r_{01} \hat{\mathbf{e}}_1 + r_{02} \hat{\mathbf{e}}_2 + r_{03} \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (4.16)$$

Al sustituir en la fórmula (4.14) queda

$$\mathbf{r}(t) = [r_{01} + v_{01}(t - t_0)] \hat{\mathbf{e}}_1 + \quad (4.17)$$

$$+ \left[r_{02} + v_{02}(t - t_0) + \frac{a_c}{2}(t - t_0)^2 \right] \hat{\mathbf{e}}_2 + r_{03} \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (4.18)$$

Para que nuestro resultado se compare aún mejor con lo que usted estudió en secundaria ó lo que puede encontrar en los libros de texto de física para ciencias e ingeniería introducimos un cambio de notación. Llamemos $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$. Adicionalmente notemos que siempre puedo escoger el origen de manera de poner $r_{03} = 0$. Además llamaremos $r_{01} = x_0$, $r_{02} = y_0$, etc. de manera de poder poner finalmente

$$\mathbf{r}(t) = [x_0 + v_{0x}(t - t_0)] \hat{\mathbf{i}} + \left[y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{a_c}{2}(t - t_0)^2 \right] \hat{\mathbf{j}}, \quad (4.19)$$

y listo ya tenemos todo lo que habíamos estudiado en secundaria.

Los denominados movimientos uniformes son sencillamente movimientos en que la aceleración es nula (un caso especial de lo que acabamos de discutir).

El movimiento uniformemente acelerado de los libros elementales no es otra cosa que lo que ocurre si $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ y a_c tiene el mismo signo que v_{0y} , es decir, es un movimiento en que la velocidad inicial es paralela a la aceleración. En este caso, la velocidad instantánea es $\mathbf{v} = [v_{oy} + a_c(t - t_0)] \mathbf{e}_y$ de manera que al crecer $t - t_0$ la magnitud de la componente de la velocidad a lo largo de la dirección del movimiento crece.

El famoso movimiento uniformemente retardado también está descrito por nuestros resultados, es el movimiento que aparece cuando $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ y a_c tiene signo opuesto al de v_{0y} , o dicho en los términos propios, la velocidad inicial y la aceleración son antiparalelos. Durante un cierto período de tiempo³ la magnitud de la velocidad disminuye hasta alcanzar el valor 0 por eso se habla de “frenado” (se quiere insistir en mezclar el castellano cotidiano con el lenguaje científico), para intervalos de tiempo mayores la **rapidez** crece sin cota (¿cuál es la interpretación física de esto?)

Ejemplo 27 Como una aplicación directa de los resultados de esta sección vamos a estudiar el movimiento bajo la acción de la gravedad

Cuando nos encontramos cerca de la superficie terrestre esta parece ser un plano. En estas circunstancias, un objeto sobre el que no actúe nada más que la atracción gravitacional de la tierra (lo que le hace caer si se le suelta de un reposo inicial) queda sometido a una aceleración constante de magnitud $g \approx 9,8 \text{ m/s}$ dirigida hacia el plano que constituye la superficie de la tierra. Si se escoge el vector $\hat{\mathbf{j}}$ de tal manera que su orientación sea vertical hacia arriba, la aceleración de gravedad será antiparalela a $\hat{\mathbf{j}}$. Al sustituir $a_c = -g$ en la ley de movimiento 4.19 resulta

³para ser precisos durante un intervalo de tiempo $T = \text{abs}(v_{0y}/a)$

$$\mathbf{r}(t) = [x_0 + v_{0x}(t - t_0)] \hat{\mathbf{i}} + \left[y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \right] \hat{\mathbf{j}} \quad (4.20)$$

Por supuesto que esta formulita solo es válida mientras el cuerpo se encuentre libre. Así por ejemplo, si el plano que constituye en suelo se encuentra en $y = 0$ la formulita no puede utilizarse para tiempos que produzcan una segunda componente del vector de posición con valores menores a 0.

Hay un montón de problemitas asociados a la ley de movimiento (4.20) cuyo interés es más histórico y relacionado con la balística que otra cosa. Para atacar estos problemas es menester comentar que la magnitud de la velocidad inicial del movimiento a veces se denomina “velocidad del proyectil en la boca de fuego”, al ángulo que la velocidad inicial forma con el plano horizontal se le denomina “ángulo de elevación”, finalmente si se hace un lanzamiento la distancia horizontal recorrida se denomina “alcance”⁴

4.2.2. Otros ejemplos para su estudio

Ejemplo 28 Consideremos la fórmula 3.25 que describe el cambio de rapidez en períodos de tiempo muy cortos (Δt) alrededor de un instante t :

$$|\mathbf{v}(t + \Delta t)|^2 = \mathbf{v}^2(t) \pm 2 |\mathbf{a}_{||}(t)| \dot{s}(t) \Delta t, \quad (4.21)$$

cuando consideramos el movimiento a lo largo de una recta (digamos que $x(t)$ es la posición a lo largo de la recta) podemos poner

$$\dot{x}^2(t + \Delta t) = \dot{x}^2(t) + 2 a(t) \dot{x}(t) \Delta t, \quad (4.22)$$

donde hemos cambiado el símbolo \pm por un signo $+$ para dejar el signo implícito dentro del valor numérico de la aceleración. Al utilizar la fórmula en el contexto de la figura 4.3 vemos

⁴con respecto al alcance hay que tener cuidado puesto que a veces el concepto se generaliza un poco más

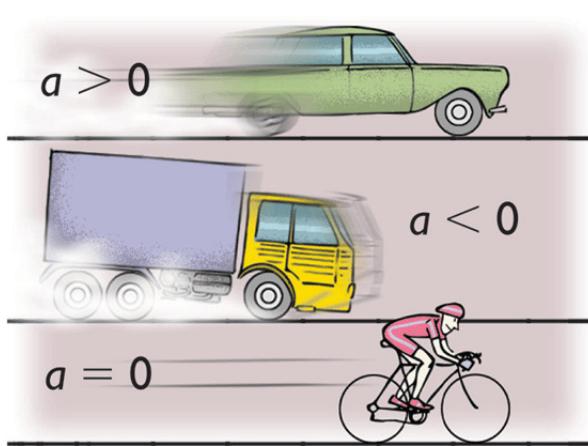


Figura 4.3: Estos diagramas muestran el efecto instantáneo de la aceleración en un movimiento rectilíneo, no se supone que la aceleración sea constante, el interés se centra en un intervalo muy corto (Δt) de tiempo, la componente de la velocidad inicial es positiva.

los efectos de cambio de rapidez asociados a los cambios de signo de la aceleración, si $a > 0$ la aceleración es paralela a la velocidad inicial y la rapidez aumenta, en el caso $a < 0$ la velocidad inicial y la aceleración son antiparalelas y vemos que la rapidez disminuya, en el caso $a = 0$ la rapidez no cambia. Por cierto, que esto debería haber resultado ser evidente en vista del teorema 7

Ejemplo 29 Consideremos otro ejemplo de movimiento a lo largo de una recta, en este caso con aceleración variable. Se quiere calcular la velocidad de un auto luego de 5 segundos de haber comenzado a variar su velocidad, el instante $t = 0$ de la figura 4.4 es el instante inicial y la velocidad inicial del auto en ese instante es $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = 10 \text{ m/s } \hat{\mathbf{e}}_1$, el gráfico representa la componente de la aceleración a lo largo del vector $\hat{\mathbf{e}}_1$, es decir, la componente de la aceleración del auto a lo largo de la recta. Ya hemos aprendido que el resultado luego de t segundos está dado por el teorema fundamental del cálculo como:

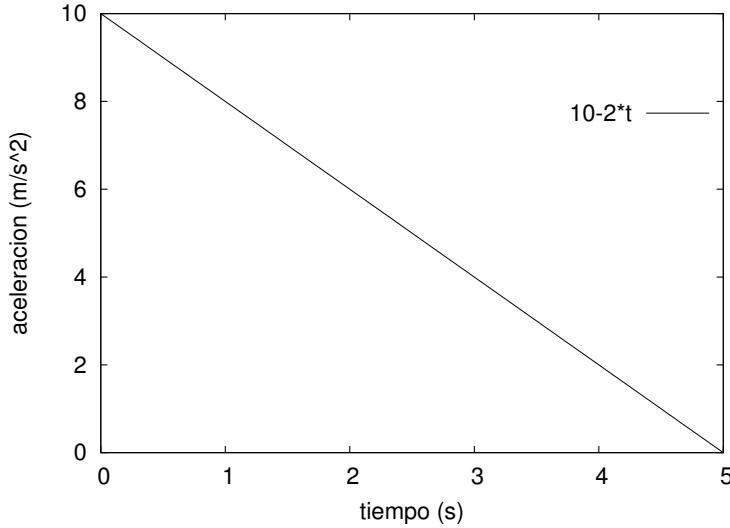


Figura 4.4: Este gráfico muestra un modelo muy simplificado de aceleración de un auto, los números no son totalmente descabellados, un auto de piques de alta competencia puede alcanzar una aceleración de hasta $3,3 g$, un auto de carreras $F1$ puede llegar a $1g$ y un Dodge Viper 1997 puede alcanzar una aceleración máxima de $0,94 g$.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{e}_1 \int_{t_0}^t ds a(s) = \left[v_0 + \int_{t_0}^t ds a(s) \right] m/s \hat{\mathbf{e}}_1 , \quad (4.23)$$

donde: $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

Ahora bien, la fórmula 4.23 nos dice que si $v(t)$ es la componente de la velocidad a lo largo de $\hat{\mathbf{e}}_1$ entonces:

$$v(t) = [10 + A] \text{ m/s } \hat{\mathbf{e}}_1 , \quad (4.24)$$

donde A es el área algebráica bajo la curva aceleración vs. tiempo entre 0 y 5 segundos. Por otra parte, la gráfica hace obvio que $A = 10 \times 5/2 = 25 \text{ m/s}$ de manera que la rapidez final del auto es de 35 m/s ó en unidades más estándar, la rapidez del auto cambió de 36 Km/h a 125 Km/h .

Lo interesante de este cálculo es que le muestra como uno puede engañado muy facil-

mente por sus primeras impresiones y preconceptos. A primera vista, es claro que la aceleración del auto está disminuyendo y uno podría tener la tendencia a decirse a sí mismo: el auto está desacelerando, es decir, está frenando. Muy al contrario, a pesar de que la magnitud de la aceleración es cada vez más chica, durante todo el intervalo de interés los signos de las componentes de la velocidad y de la aceleración son iguales y por lo tanto la rapidez tiene que aumentar que fue el resultado que se obtuvo.

Ejemplo 30 Consideré una partícula cuya velocidad está dada por

$$\mathbf{v}(t) = \nu_0 [\cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_x + \sin(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_y], \quad (4.25)$$

donde ν_0 y ω_0 son constantes con dimensiones de distancia \times tiempo $^{-1}$ y tiempo $^{-1}$ respectivamente.

La posición de la partícula se encuentra integrando la velocidad ($\mathbf{r} = \int \mathbf{v}(s) ds$), en este caso resulta, si usamos integrales indefinidas:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\nu_0}{\omega_0} [(\sin(\omega_0 t) + C_1) \hat{\mathbf{e}}_x + (C_2 - \cos(\omega_0 t)) \hat{\mathbf{e}}_y], \quad (4.26)$$

las constantes C_1 y C_2 se pueden calcular evaluando las condiciones iniciales $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$.

4.3. Transformaciones de Galileo

Usualmente este tema se presenta bajo el título de “movimiento relativo”. Este es un apelativo poco conveniente puesto que, por definición, todo movimiento es relativo (a un sistema de referencia) además el título no deja claro de qué se quiere hablar.

Estamos interesados en estudiar lo que ocurre cuando se cambia de sistema de referencia, en este curso, solo consideraremos sistema de referencia que **no** rotan. Es decir, solo consideraremos los casos en que los sistemas de referencia mantienen su orientación relativa.

Consideremos la siguiente notación: $\mathcal{O} \mathcal{O}'$ son los dos orígenes de los dos sistema de referencia que queremos relacionar, $\mathbf{r}_{\mathcal{O}}$ la posición de la partícula descrita con respecto a \mathcal{O} y claro, $\mathbf{r}_{\mathcal{O}'}$ es la posición de la misma partícula según \mathcal{O}' . Finalmente, $\mathbf{R}_{\mathcal{OO}'}$ es el vector de posición del origen \mathcal{O}' con respecto a \mathcal{O} . Un diagrama muy sencillo que usted debería dibujar permite demostrar la siguiente igualdad

$$\mathbf{r}_{\mathcal{O}} = \mathbf{r}_{\mathcal{O}'} + \mathbf{R}_{\mathcal{OO}'} , \quad (4.27)$$

de manera que, al tomar derivadas se obtiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} , \quad (4.28)$$

donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{O}}$, $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{O}'}$, $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}_{\mathcal{OO}'}$ es la velocidad de \mathcal{O}' medida por \mathcal{O} .

La fórmula 4.28 denominada fórmula de adición de velocidades, muestra como cambian las velocidades cuando se miden desde diferentes sistemas de referencia.

Ejemplo 31 *La fórmula de adición de velocidades es algo muy sencillo, pero sus consecuencias pueden ser tragicómicas. Imagine que viaja a lo largo de una autopista relativamente rectilínea y que su velocímetro marca 140 Km/h, usted está juguetando con una pelota de beisbol y por descuido se le escapa por la ventana justo antes de pasar al lado de un pequeño puesto ambulante de venta de fruta.*

La pelota es vista por dos observadores que se usan a sí mismos como orígenes de sendos sistemas de referencia, el vendedor de frutas \mathcal{O} y usted \mathcal{O}' . Su velocidad con respecto a \mathcal{O}' es: $\mathbf{V} = 90$ millas/h ê, donde el versor ê apunta a lo largo de la autopista y en el sentido que apunta hacia el puesto de fruta. Por otra parte, para usted la velocidad con que se le escapó la pelota (\mathbf{v}') es casi nula, de manera que: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} = \mathbf{V}$. Dicho en palabras, el vendedor ambulante ve que desde el carro han lanzado una tremenda recta de “noventa millas” que convierte en papilla -por no decir otra cosa- su mercancía.

Se puede diferenciar la fórmula de adición de velocidades (4.28) una vez más para obtener una relación entre las aceleraciones, que en una notación que debería ser evidente es la siguiente

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A}. \quad (4.29)$$

Consideremos por el momento el caso $\mathbf{A} = 0$, es decir, el caso en que la aceleración relativa es nula. En estas circunstancias podemos poner inmediatamente,

$$\mathbf{R}_{O'O'} = \mathbf{V}(t - t_0) + \mathbf{R}_0, \quad (4.30)$$

donde $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_{O'O'}(t = t_0)$ y así finalmente podemos expresar la siguiente relación entre los vectores de posición según los dos sistemas de referencia

$$\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{V}(t - t_0) + \mathbf{R}_0. \quad (4.31)$$

Si usamos una base ortonormal dextrogira $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ escogida de tal suerte que $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{j}}$ y escogemos $t_0 = 0$ encontramos las siguientes fórmulas para el cambio de coordenadas

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (4.32)$$

que se conocen como transformaciones de Galileo.

El caso en que la aceleración relativa es no nula es tremadamente interesante pero no lo discutiremos en este curso.

4.4. Ejemplos complementarios avanzados

Ejemplo 32 *Esta sección nos ha preparado para enfrentar problemas bien interesantes, comenzemos por uno en que, al principio, parecerá que las cosas van muy mal.*

Encuentre la velocidad \mathbf{v} de una partícula se mueve a lo largo de una recta y que la componente de su aceleración a lo largo de esa recta tiene la forma:

$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x}, \quad (4.33)$$

donde γ es una constante cuyas dimensiones son de tiempo $^{-1}$.

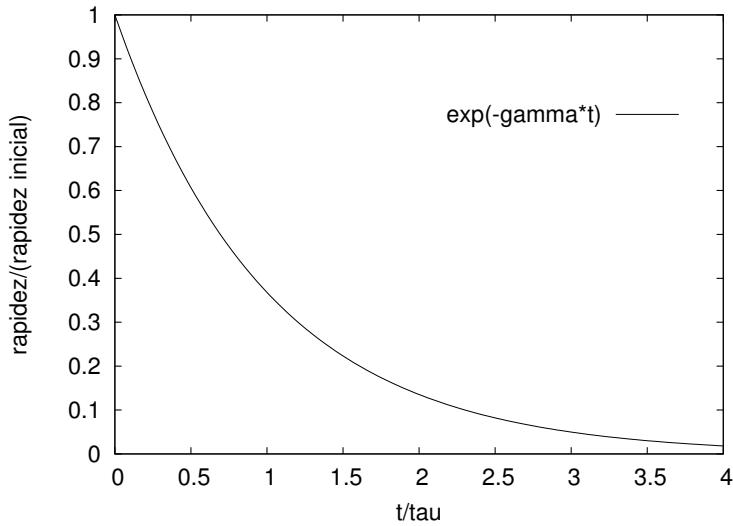


Figura 4.5: Velocidad en función del tiempo para una aceleración de la forma $-\gamma\dot{x}$, para fines de graficación se ha introducido: $\tau = \gamma^{-1}$. Nótese que la aceleración siempre se opone a la velocidad y que por lo tanto el movimiento es de frenado.

Solo estamos interesados en $v = \dot{x}$, así que comenzemos por expresar la aceleración de la partícula como

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v, \quad (4.34)$$

y notemos que en este problema no podemos integrar directamente para encontrar la velocidad, en efecto, al integrar se obtiene la fórmula

$$v(t) = -\gamma \int_{v_0}^{v(t)} ds v(s), \quad (4.35)$$

que contiene en su integrando la función incógnita: $v(t)$ que evidentemente desconocemos. ¿Qué ocurre?, ¿por qué no podemos utilizar lo que acabamos de discutir?, ¿todo lo que hicimos está mal?. La respuesta es simple, comenzamos esta sección comentando que en general el problema

de valores iniciales es un problema matemático interesante. Nuestra discusión continuó bajo una hipótesis muy particular, que la aceleración era una función explícita del tiempo. En el problema que estamos tratando en este ejemplo, la dependencia en t está implícita en la velocidad ($v(t)$) que desconocemos y queremos encontrar y por lo tanto estamos fuera de la hipótesis que utilizamos en el desarrollo de la sección.

Veamos que se puede hacer. Para comenzar aprendamos algo de matemáticas⁵, la ecuación 4.34 contiene a la incógnita v y a su derivada, una ecuación de este tipo se denomina ecuación diferencial de primer orden, y por razones que se van a hacer claras en un momento se llama más específicamente: ecuación diferencial de primer orden separable.

El apelativo de separable proviene de reescribir la ecuación 4.34 en la forma

$$dt = -\frac{dv}{\gamma v}, \quad (4.36)$$

que integrando entre un instante inicial (digamos $t = 0$) y otro instante t en un miembro y utilizando las velocidades correspondientes en el otro queda como

$$\int_0^t d\xi = - \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{\gamma s}, \quad (4.37)$$

de manera que la ecuación se llama separable porque las variables se pueden colocar sin mezclarse a ambos lados de la igualdad.

Si suponemos que $v(0) = v_0$ el resultado de la integración es

$$-\gamma t = \ln \left[\frac{v(t)}{v_0} \right], \quad (4.38)$$

exponenciando y despejando $v(t)$ se obtiene

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t}. \quad (4.39)$$

⁵por cierto, lo que aprenda acá le será útil para estudiar otros problemas físicos: circuitos RC, crecimiento y/o decrecimiento de poblaciones y muchos otros

Es facil notar que este es un movimiento de frenado ya que la magnitud de la velocidad se reduce (eso debió haber sido claro desde el principio ya que la velocidad y la aceleración eran de signo contrario). De hecho, como

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\gamma t} = 0, \quad (4.40)$$

la partícula se detiene totalmente luego de un tiempo largo (en verdad cuando $t \approx 4/\gamma$ el valor de la rapidez ya solo es 0,02 veces el valor inicial, o dicho en otros términos, ha caído al 2% de su valor inicial).

Ejemplo 33 Ahora vamos estudiar un problema algo más interesante. Consideremos una partícula que cae bajo la acción de la gravedad y tomemos en cuenta el rozamiento con el aire modelándolo su efecto en términos de una aceleración proporcional a la rapidez (vea el ejemplo 32, estaremos interesados pues, en calcular la velocidad \mathbf{v} de una partícula cuya aceleración (en el sistema de coordenadas usual) es:

$$\mathbf{a} = (-g\alpha - \gamma \dot{y}) \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (4.41)$$

donde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ y γ es una constante positiva.

Como en el ejemplo 32 solo estamos interesados en la componente de la velocidad ($v = \dot{y}$). Una vez más tenemos el problema de que el tiempo aparece implícitamente en la variable que queremos encontrar, de todas formas la ecuación

$$\ddot{y} = -g - \gamma \dot{y}, \quad (4.42)$$

es una ecuación diferencial de primer orden separable y podemos utilizar el mismo truco de antes para poner

$$-dt = \frac{dv}{g + \gamma v}, \quad (4.43)$$

que integrando entre un instante inicial (digamos $t = 0$) y otro instante t en el lado izquierdo de la ecuación y utilizando las velocidades correspondientes en el otro queda como

$$-\int_0^t d\xi = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{g + \gamma s}. \quad (4.44)$$

Nos interesa el caso en que la partícula se deja caer (esto es $v(0) = 0$) lo que resulta en

$$-\gamma t = \ln \left[\frac{g + \gamma v(t)}{g} \right], \quad (4.45)$$

exponenciando y despejando $v(t)$ se obtiene

$$v(t) = -\frac{g}{\gamma} [1 - \exp(-\gamma t)] \quad (4.46)$$

en este ejemplo hay dos límites sumamente interesantes, el primero es el límite de tiempos

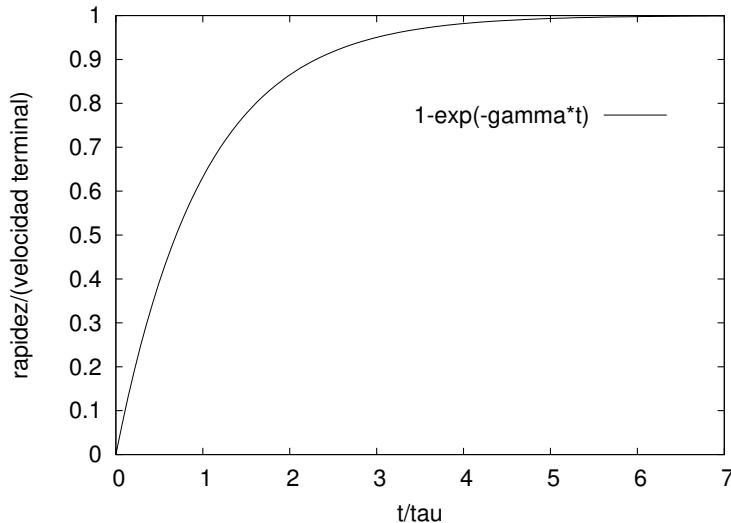


Figura 4.6: Rapidez en función del tiempo para una aceleración de la forma $-(-g - \gamma \dot{y})$ (caída vertical con frenado viscoso), nótese que la partícula acelera hasta alcanzar una rapidez máxima (la velocidad terminal) a la que el movimiento pasa a ser un movimiento con velocidad constante.

muy largos ($\gamma t \gg 1$, es decir, $t \gg \gamma^{-1}$) para tales tiempos la exponencial se hace despreciable y la rapidez alcanza un valor máximo denominado velocidad terminal

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t)| = \frac{g}{\gamma}, \quad (4.47)$$

esto podría haberse previsto de alguna manera notando que en la ecuación $\ddot{y} = -g - \gamma \dot{y}$, la aceleración se anula cuando $\dot{y} = g/\gamma$.

El otro límite de interés ocurre para tiempos muy cortos (movimiento incipiente), es decir, cuando $\gamma t \ll 1$ (o $t \ll \gamma^{-1}$, en estas condiciones recordando que

$$\exp(-\gamma t) = 1 - \gamma t + \frac{1}{2}[\gamma t]^2 - \frac{1}{3!}[\gamma t]^3 + -\frac{1}{4!}[\gamma t]^4 + \dots \quad (4.48)$$

podemos usar la aproximación de primer grado

$$\exp(-\gamma t) \approx 1 - \gamma t, \quad (4.49)$$

de manera que

$$|v(t)| = \frac{g}{\gamma} [1 - 1 + \gamma t] = g t, \quad (4.50)$$

es decir, que la partícula se comporta como si estuviera en caída libre.

•••

4.5. Problemas

1. Imagine que está ayudando a un estudiante de bachillerato. Usted intenta explicarle el movimiento rectilíneo con aceleración constante.

- a) Explique a su estudiante la gráfica que corresponde al movimiento y su relación con la formulita

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0,$$

utilice ejemplos para ilustrar a su estudiante el significado de los signos implícitos en a y v_0 .

- b) Use un argumento geométrico para mostrar a su estudiante que: si el desplazamiento $x(t) - x(t_0)$ es el área (algebraica) debajo de la curva velocidad-tiempo entre los instantes t_0 y t ocurre que

$$x(t) = \frac{a(t - t_0)^2}{2} + v_0(t - t_0) + x_0,$$

donde $v_0 = v(t_0)$ y $x_0 = x(t_0)$.

- c) Muestre a su estudiante que las fórmulas anteriores permiten demostrar que

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

explíquele el resultado.

2. Una cierta partícula se mueve a lo largo de una recta con aceleración constante $a = 5 \text{ m/s}^2$, ¿qué se puede decir de la velocidad de la partícula a los 5 s de comenzado el movimiento?.
3. * La figura 4.8 representa un gráfico “velocidad tiempo” para un vehículo que se mueve a lo largo de una recta. Si la posición inicial del vehículo es $x(0) = -2 \text{ m}$ ¿cuál será la posición al finalizar los dos segundos que dura el movimiento?.

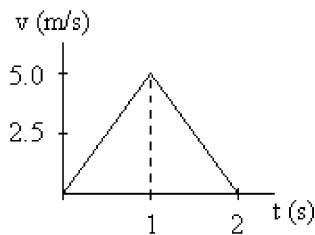


Figura 4.8: Gráfico para el problema 3.

4. La aceleración de una partícula es: $\vec{a} = \frac{A}{T} t \hat{\mathbf{e}}_x$, donde A y T son constantes y t es el tiempo.

- a) Sabiendo que las dimensiones de T son de tiempo, ¿cuáles serán las dimensiones de A ?
- b) La velocidad inicial de la partícula es $\mathbf{v}(0) = v_0 \hat{\mathbf{e}}_x$, ¿Cuál será su velocidad al cabo de T seg?.
- c) En $t = 0$ la partícula se encuentra en $x = 0$, encuentre la ley horaria de la partícula

5. El avión de la figura adjunta libera su paracaídas en $t = 0$. La velocidad del avión como función del tiempo se puede encontrar a través de la fórmula

$$v = \frac{80}{1 + 0,32t} \text{ m/s}$$

- a) ¿Cuál es la aceleración del avión 3 s después de la apertura del paracaídas.
- b) ¿Qué tanto se desplaza el avión en los primeros 10 s a partir de la apertura del paracaídas.



Figura 4.9: Gráfico para el problema 5.

6. Una estudiante Doctoral de biología está interesada en la biomecánica del vuelo, en particular en el despegue de algunas aves acuáticas. Con el fin de aprender algunas técnicas experimentales nuestra joven investigadora comienza sus estudios analizando unos videos del *Pretel de Nieve*.



Figura 4.10: El bellísimo Pretel de Nieve.

- a) Las primeras mediciones indican que el Pretel de nieve requiere de una distancia de $4,3\text{ m}$ para despegar y que cuando lo hace vuela a $6,1\text{ m/s}$. ¿Cuál sería una estimación de la aceleración del ave?

- b) Mediciones más detalladas permiten establecer que la aceleración del ave se puede expresar como

$$a = C [1 + \operatorname{sen}(\omega t)]$$

donde gracias a un análisis cuadro a cuadro se logra estimar que $\omega = 18 \text{ s}^{-1}$, que el tiempo requerido para el despegue es de $1,42 \text{ s}$ y se confirma el valor de la rapidez al despegue. ¿Cuál es el valor de C ?

7. *Desde un globo se deja caer un cuerpo que tarda 32 s en caer al suelo. Calcule la altura a que el globo se encontraba del suelo para los siguientes tres casos

- a) El globo se encuentra en reposo en el aire.
- b) El globo se mueve con una velocidad constante de $3\hat{\mathbf{e}}_x + 4\hat{\mathbf{e}}_y \text{ m/s}$.
- c) El globo desciende con una rapidez constante de 10 m/s

8. **Lanzamiento balístico.** Encuentre el ángulo de lanzamiento para el cual el alcance de un proyectil es igual al doble la máxima altura alcanzada.

9. Dos cuerpos se lanzan simultáneamente desde un mismo punto con la misma rapidez inicial pero en distintas direcciones, uno verticalmente hacia arriba y el otro formando un ángulo $\theta = 60^\circ$ con la horizontal. Conociendo que la rapidez inicial de ambos cuerpos es $v_0 = 25 \text{ m/s}$, ¿a qué distancia se encontrarán cuando hayan pasado $1,7 \text{ s}$?

10. Un rifle se apunta horizontalmente hacia un blanco alejado 130 m . La bala golpea al blanco $0,75'$ por debajo del punto de mira. ¿Cuál es la velocidad de la bala en la boca de fuego del arma?.

11. *Un avión tiene que viajar entre dos puntos A y B situados a 200 Km de distancia entre sí en un tiempo de media hora, el punto B se encuentra directamente al *este* del punto A .

El piloto es informado de que está soplando un fuerte viento de 100 Km/h en dirección Norte-Sur. ¿Cuál será la **velocidad** con respecto al viento con que tiene que volar el avión para poder cumplir con su objetivo?.

12. La fotografía muestra un avión bombardero de la segunda guerra mundial durante un



ataque. En esta situación el avión volaba horizontalmente con rapidez constante.

- a) ¿Cómo se explica que las bombas estén justo debajo del avión?.
- b) ¿Cuál será la forma de la ley horaria del avión descrita por un observador en tierra?
- c) ¿Cuál será la forma de la ley horaria de una de las bombas descrita por un observador en tierra?
- d) ¿Cuál será la forma de la ley horaria de una de las bombas descrita por un observador localizado en el avión?

13. ¿Es posible que, en un movimiento rectilíneo, la rapidez de un cuerpo aumente si la magnitud de su aceleración es decreciente?

14. En un movimiento con aceleración constante la velocidad es siempre:

- a) Paralela a la aceleración
- b) De módulo variable

- c) De dirección variable
- d) Perpendicular al vector de posición
- e) Ninguna de las opciones anteriores

Explique su respuesta

15. ¿Que puede decir de un movimiento con rapidez constante?

16. ¿Cuál es la trayectoria más general de un movimiento con aceleración constante?

Capítulo 5

Leyes de Newton

5.1. Introducción

La mecánica es, probablemente, una de las subdisciplinas más antiguas de la física. Los objetivos primarios de la mecánica consisten en: explicar el equilibrio y el movimiento de los cuerpos que observamos a nuestro alrededor pretendiendo, no solo describir los movimientos, sino comprender las causas que los producen.



Newton por William Blake.
Tinta y acuarela sobre pa-
pel. Galería Tate, Londres.

La mecánica se erige sobre dos principios básicos, el primero es el principio de “causalidad”, este es un principio filosófico basado en la experiencia según el cual, todo ocurre debido a una causa que lo precede. El otro principio filosófico fundamental es el “reduccionismo”; en términos muy simples podemos entender el reduccionismo como un enfoque al estudio de la naturaleza de lo complejo en términos del estudio de sus partes y de las interacciones entre ellas¹. Expresado en otros términos, el reduccionismo establece que un sistema complejo no es otra cosa que la suma de sus partes y que por lo tanto, para entenderlo nos basta con entender sus constituyentes y las interacciones entre estos. De acuerdo al reduccionismo, es posible estudiar los fenómenos que nos interesan desechando cualidades de los mismos que podrían ser innecesarias para la descripción. Ni el principio de causalidad ni la postura reduccionista son obvios o necesariamente ciertos pero ambos están en el corazón de la disciplina que queremos estudiar.

Galileo [15/02/1564-8/01/1642] y otros antes que él habían estudiado la cinemática, e incluso habían tratado de discutir algunas de las causas que determinaban los movimientos de las partículas. Según proponía Aristóteles en el cuarto siglo antes de nuestra era, es necesario empujar para poder mover un objeto, ó expresado de otra manera no es posible un movimiento sin una fuerza motriz que lo mantenga. A decir verdad, nuestra experiencia diaria nos empuja a compartir las ideas aristotélicas (si no lo cree trate de encontrar una caja que se desplace eternamente sin requerir que algo la empuje). Ahora bien, las enseñanzas de Aristóteles y nuestra experiencia diaria, son falaces y es menester echar mano de una buena dosis de abstracción para darnos cuenta de esto.

Galileo fue quien introdujo la noción de que la tendencia natural de los cuerpos era mantener

¹La medicina y sus especialidades constituyen un excelente ejemplo de reduccionismo. El cuerpo humano está formado por un enorme número de células cuyas interacciones las llevan a organizarse en órganos; el metabolismo no es otra cosa que el resultado de la interacción entre los órganos. La postura reduccionista consiste en pensar que si se entiende el comportamiento de cada órgano por separado se puede entender el proceso de la vida

su estado de movimiento. Pero no fué sino hasta Isaac Newton² [25/12/1642-20/3/1726/7] que esta noción se estableció de manera más precisa y que apareció un tratamiento adecuado del problema de causalidad del movimiento. En términos modernos, Newton introdujo la noción de fuerzas como causas de los cambios en el estado de movimiento de los cuerpos así como la necesidad de definir las fuerzas y otros objetos de interés como lo que hoy en día conocemos como vectores.

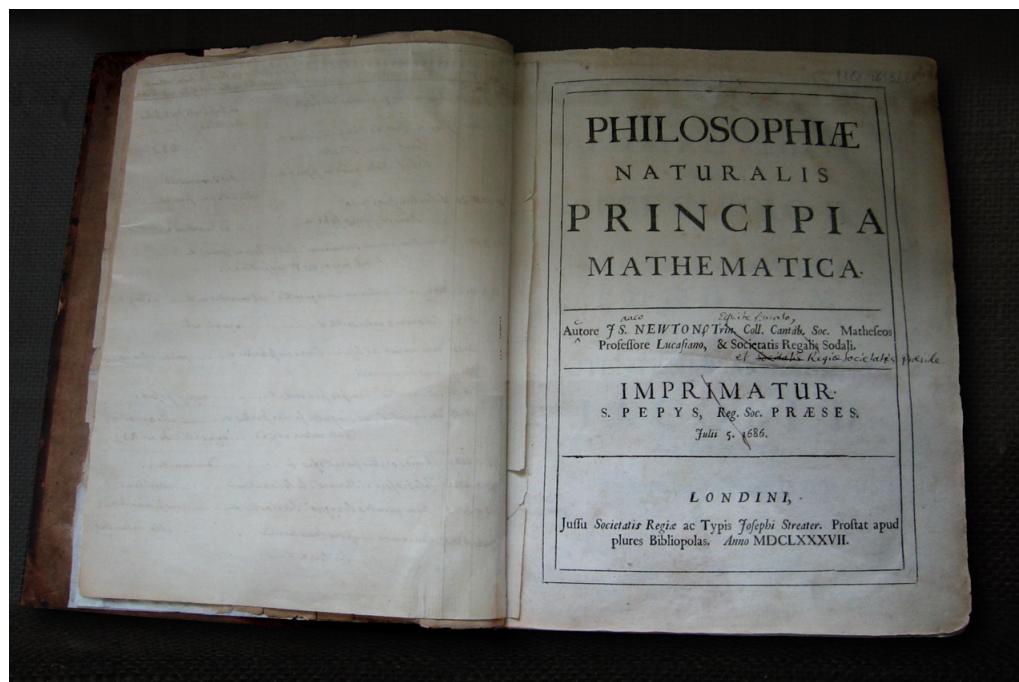


Figura 5.1: Una copia personal de Newton de la primera edición de los *Principia*, contiene notas a mano para las correcciones para la segunda. La obra fue publicada bajo los auspicios de Edmond Halley el 5 de julio de 1687

²Curiosamente Newton nació el año en que murió Galileo

5.2. Leyes de Newton: Formulación Original

El interés por la física y la curiosidad histórica nos hacen imposible resistir la tentación de comentar un poco el enunciado de las leyes de Newton tal y como aparecen en la primera edición de la obra de Newton. Los Principia están escritos en un lenguaje que recuerda mucho al de los libros de matemáticas, aprecen definiciones, axiomas (leyes), teoremas, corolarios y sus demostraciones rigurosas. De hecho, el primer capítulo introduce las definiciones básicas.

Cada idea (sea una definición, una ley, o cualquier otra cosa) es introducida con total precisión y es acompañada de algunas explicaciones que ayudan a ilustrarla. En todo caso, el grado de observación de la naturaleza, de abstracción de las observaciones y de cuidado con que se describe cada detalle son enormes y están evidentemente influenciados por Galileo. Habiendo dicho esto, demos nuestro pequeño paseo histórico.

Es necesario destacar que las definiciones asociadas a movimiento están formuladas desde el punto de vista de un observador en tierra, lo que presupone que -en términos modernos- un observador fijo en la tierra es inercial (hipótesis que, como veremos en el parágrafo 5.4.1, es falsa, aunque tiene una validez aproximada). La obra está escrita en una forma difícil de leer para los usuarios del cálculo diferencial e integral, sin embargo, si se obvia ese detalle, los razonamientos son bastante limpios y elegantes.

5.2.1. Definiciones

*PHYLOSOPIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA
DEFINITIONES*

Def. I

Quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine Conjunctim.

La cantidad de materia es la medida de esta que surge de su densidad y volumen conjuntamente.

Antes de continuar es muy importante destacarse que, en el contexto, la expresión latina *Densitate & Magnitudine Conjunctim* debe entenderse como el producto de la *Densitate* y la *Magnitudine*, de manera que la *Quantitas materiae* está dada por la fórmula: *densidad* \times *volumen*, y es por lo tanto, la masa tal y como la conocemos hoy día. Evidentemente se puede criticar que la definición es incompleta ya que requiere de haber definido la densidad, pero acá no nos ocuparemos de ese problema, lo que nos interesa es el hecho de que Newton pretende dar una definición concreta de la *Quantitas materiae*.

En la discusión que sigue inmediatamente a la definición de la *Quantitas materiae* Newton expresa “...per experimenta pendulorum...” es decir: *por experimentos en péndulos*, indicando entonces una base experimental de su trabajo.

Def. II

Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et quantitate Materiae Conjunctim.

La cantidad de movimiento es la medida de esta que surge conjuntamente de la velocidad y la cantidad de materia.

De acuerdo con lo que ya hemos aprendido de latín, la expresión *Velocitate et quantitate Materiæ Conjunctim* que aparece en la definición II de Newton es el producto de la masa del cuerpo por su velocidad. La *Quantitas motus* es pues lo que hoy día conocemos como: momentum, ímpetu, ó (respetando la escojencia de Newton), cantidad de movimiento.

Def. III

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodq; quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiscendi vel movendi uniformiter in directum.

La *vis insita*, o fuerza innata de la materia, es un poder de resistir, por el cual todo cuerpo, en tanto esta está en él, se esfuerza en perseverar en su estado presente, sea este de reposo, o de movimiento uniforme a lo largo de una recta.

Newton continua explicando y dice

“...unde tiam vis insita nomine significantissimo vis inertiae dici possit”, en castellano: “esta vis insita, puede por un nombre mas significativo, ser llamada inertiae, o fuerza de inactividad”. Newton continúa explicando:

5.2.2. Leyes del Movimiento

Los *Principia* continúan con otras definiciones a las que no haremos referencia en este momento, pasando luego a presentar las leyes de movimiento³.

LEGES MOTUS

³las traducciones al castellano de las leyes han sido tomadas de: “A Hombros de Gigantes”, edición de S. Hawking, editorial Crítica, Barcelona, España 2004. ISBN: 84-8432-568-7

Lex I

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado

Lex II

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

Este es un punto sumamente importante, en casi toda la literatura de física para ciencias e ingeniería la ley segunda ley se escribe en la forma: *fuerza=masa×aceleración*. Esto no es de modo alguno lo expresado en la Lex II, que como podemos leer claramente se refiere al cambio en el *motus*, es decir en la *Quantitas motus*, es decir: *fuerza=cambio en la Quantitas motus*. De hecho, y según entendemos hoy día, este “cambio” es en verdad la tasa de cambio instantánea, es decir, la derivada temporal del momentum.

Lex III

Actioni contrariam semper & aequalē esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales & in partes contrarias dirigi.

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

Uno de los razonamientos más sencillos y claros que el autor de estas notas ha leído alguna vez, es la demostración del Corolario I de los *Principia* que reza:

Corol. I

Corpus viribus conjunctis diagonallem parallelogrammi edom tempore describeri, quo latera separatis.

Un cuerpo recorre la diagonal de un paralelogramo bajo dos fuerzas conjuntas en el mismo tiempo en que recorrería los dos lados bajo las dos acciones por separado.

En este corolario y su demostració n podemos reconocer que las fuerzas son vectores.

A pesar de que el éxito de la mecánica de Newton es innegable, tanto desde el punto de vista puramente científico como desde el punto de vista práctico (la construcción de maquinarias, edificios, aviones, etc. utiliza la mecánica newtoniana como ingrediente fundamental), es menester criticarla. En primer lugar debemos recordar que las teorías tienen rangos en que son aplicables, la mecánica Newtoniana solo es aplicable en el dominio de los objetos macroscópicos que se mueven a velocidades pequeñas comparadas con la de la luz ($c \approx 300,000 \text{ Km/s}$). Para objetos de talla molecular ó más pequeña, esto es, de dimensiones longitudinales típicas del

orden de las décimas nanometros o más pequeñas la teoría de Newton falla miserablemente y debe ser sustituida por la mecánica cuántica. Para objetos que se mueven de tal manera que el cociente entre su rapidez (\dot{s}) y c satisface $\dot{s}/c \geq 0,1$ hay que introducir la dinámica relativista de Einstein.

En segundo lugar, desde los primeros trabajos de Poincarè hemos aprendido que, si bien bueno como principio aproximado, el reduccionismo no es adecuado para la descripción de la naturaleza, cuyos sistemas son de tal complejidad que el todo termina siendo mucho más que la suma de sus partes.

5.3. Sistemas de referencia iniciales

Si usted viviera en un sitio con noches llenas de estrellas notaría que las posiciones de la mayor parte de estas mantienen posiciones relativas entre sí, esta observación no tiene nada de novedosa y ha formado parte de los conocimientos acumulados por muchas y diversas civilizaciones previas a la nuestra.

Los pocos objetos celestes que al ojo desnudo constituyen excepciones a la regla de posición estelar fija recibieron el nombre de estrellas viajeras (planetas), desde un punto de vista relativamente primitivo resulta natural escoger a las estrellas fijas como base para crear un sistema de referencia, afortunadamente esto solo es una ilusión debida a que nuestras vidas son cortas, las estrellas cambian sus posiciones relativas y por lo tanto no pueden constituir un sistema de referencia en reposo absoluto (\mathcal{G}) que sirva de base para -utilizando las técnicas de la sección anterior- construir otros sistemas de referencia ligados a \mathcal{G} a través de transformaciones de Galileo.

De existir \mathcal{G} todo par de referenciales en movimiento uniforme con respecto a \mathcal{G} podrían relacionarse entre sí a través de transformaciones galileanas (demuestre esto). Tales sistemas se

denominan inerciales, una de las fallas fundamentales de la mecánica de Newton es la necesidad de recurrir a los sistemas de referencia inerciales.

Hoy día sabemos perfectamente que la noción de un referencial inercial absoluto es algo que no tiene sentido, sin embargo, desde todo de punto de vista práctico para la ingeniería podemos suponer que un sistema de referencia fijo a la tierra es inercial, esta es la postura que -por ser este un curso de mecánica Newtoniana- nos vemos obligados a tomar en este curso.

Para entender el problema de la existencia de los sistemas inerciales podemos tomar un punto de vista práctico, la única forma de saber si un sistema es o no inercial es preguntarse si está en movimiento uniforme con respecto a algun otro sistema del que se sabe que es inercial, ahora bien, de hacerse la pregunta y obtener una respuesta afirmativa resulta necesario averiguar si el nuevo sistema es inercial, para esto....ya sabe usted lo que va a pasar.

Por cierto, hoy día podemos saber si un sistema de referencia es localmente inercial, para ello es necesario observar el comportamiento de rayos de luz, pero esto amigos es material de cursos más avanzados.

5.4. Leyes de Newton: una visión más moderna

En términos bien precisos, y algo modernos, la mecánica Newtoniana solo estudia la mecánica del punto. Es decir, los objetos se piensan como puntos matemáticos de la geometría euclídea (así como lo está leyendo: un planeta es un punto). Los objetos con dimensiones (planetas, autos, personas, etc.) se piensan como sistemas de muchas partículas puntuales (la idea de integración está detrás de esto).

Es importante comentar que las leyes de Newton contienen una importante cantidad de información implícita. En primer lugar son leyes que permiten estudiar el movimiento de *partículas puntuales* en términos de vectores, en segundo lugar, establecen la existencia de un único tiempo

universal y de la existencia de sistemas de referencia inerciales que son los únicos en que las leyes son aplicables.

Para ser más precisos, lo que se describe como posición del punto no es otra cosa que nuestro moderno vector de posición en función del tiempo $\mathbf{r}(t)$ (que debemos entender como un vector de \Re^3 con origen en el origen del sistema de coordenadas). Dicho esto y para entrar en materia seriamente supondremos que usted maneja las ideas de la cinemática del punto: sistemas de referencia inerciales, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$, la velocidad $\dot{\mathbf{r}}(t)$, la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ y como cambian estos vectores cuando son descritos desde sistemas de referencia inerciales diferentes.

Además, suponiendo que tenemos una noción de la masa de una partícula introduciremos la definición de momentum de Newton en términos modernos.

Definición 41 *El momentum de una partícula de masa m que se desplaza con velocidad \mathbf{v} es*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (5.1)$$

claramente, esta definición depende del concepto de masa que aún no hemos dado, pero dejemos correr esta arruga un poco.

Primera ley del movimiento *Los sistemas de referencia inerciales existen y describen la misma mecánica (son equivalentes entre sí). Más aún, las leyes dos y tres solo son válidas para descripciones llevadas a cabo desde sistemas de referencia inerciales*

Segunda ley del movimiento *La derivada temporal (tasa de cambio) del momentum de una partícula está dada por*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (5.2)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

Tercera ley del movimiento *Cuando una partícula ejerce una fuerza sobre otra, esta última ejerce sobre la primera una fuerza cuya magnitud y sentido son igual y opuesto a la fuerza que la primera partícula ejerce sobre la segunda.*

Expresado en otros términos. Considérense dos cuerpos en interacción. Si \mathbf{F}_{12} es la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2, el cuerpo 2 ejercera sobre el 1 una fuerza de la misma dirección y magnitud que \mathbf{F}_{12} pero con sentido opuesto a esta.

Quizá la observación más obvia que se puede hacer acerca de la tercera ley de Newton sea la siguiente: los puntos de aplicación de las fuerzas (pares) de acción y reacción son diferentes.

5.4.1. ¿Qué establecen las leyes de Newton?

Ley de Inercia

La primera ley establece la existencia y equivalencia de los observadores inerciales. Hay que destacar el grado de abstracción de este axioma. Un observador en tierra no es inercial, la tierra rota sobre su eje a una tasa de $2\pi \text{ rad/día} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/seg}$, si bien esta rotación es lenta, sus efectos son claramente observables, basta con ver un péndulo de Focault en algún museo localizado fuera de la franja intertropical (solo para que las cosas sucedan a un ritmo apreciable) así que para establecer la primera ley hay que imaginar un movimiento como lo vería un verdadero observador inercial.

Hoy día sabemos que lo más que podemos hacer es establecer la existencia local de observadores inerciales, lo que puede efectuarse experimentalmente observando el comportamiento de rayos de luz que se propagan en el vacío. En todo caso, lo fundamental de la primera ley es lo siguiente: la física que mieden dos observadores inerciales diferentes es la misma.

Ley de Fuerza

La forma más usual de presentar la segunda ley de Newton consiste en notar que esta involucra una propiedad intrínseca de la materia (la masa) que demuestra que si se escoge un patrón y una forma de medir la aceleración puede medirse la fuerza a través de un cociente adecuado.

En estas notas queremos hacer énfasis en algo un poco más práctico, la igualdad

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (5.3)$$

puede entenderse de dos maneras.

En primer lugar, si conocemos el lado derecho (\mathbf{F}) y la masa de la partícula sometida a la fuerza, la igualdad puede ser interpretada como una ecuación diferencial que permite calcular (a menos de las condiciones iniciales) la ley de movimiento $\mathbf{r}(t)$ de la partícula. Si esto suena complicado reexpresémoslo diciendo que, al conocer \mathbf{F} y m , el cociente \mathbf{F}/m es la aceleración, que al ser conocida nos coloca en el problema planteado en la sección 4.2.

En segundo, si conocemos la ley horaria $\mathbf{r}(t)$ podremos decir cosas acerca de la naturaleza de la fuerza que actúan sobre una partícula.

Ejemplo 34 *¿Qué ocurre cuando la fuerza neta que actúa sobre una partícula es nula?*

Recordemos para empezar que, según la primera ley, la física que describen todos los sistemas de referencia inerciales será la misma, esto significa que la fuerza neta que actúa sobre la partícula es nula para todos los sistemas inerciales. Tomando esto en cuenta, consideremos algún sistema de referencia inercial cuyo origen denominaremos \mathcal{O} . La ecuación de movimiento del cuerpo será (en virtud de la segunda ley)

$$\dot{\mathbf{p}} = 0, \quad (5.4)$$

de manera que \mathbf{p} tiene que ser un vector constante llamémosle \mathbf{p}_0 . Ahora bien, como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

resulta que la constancia de \mathbf{p}_0 implica:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad (5.5)$$

donde \mathbf{v}_0 es una velocidad constante que puede ser medida por \mathcal{O} , esta es la primera ley expresaada a la Newton, de manera que no hay inconsistencia entre esta y la segunda ley de Newton al menos para el sistema de referencia \mathcal{O} .

Por otra parte, lo único que ocurre cuando se cambia de un sistema de referencia inercial a otro es la adición de la velocidad relativa \mathbf{V} entre los dos sistemas de referencia, de manera que, si \mathcal{O}' es el origen de otro sistema de referencia inercial cuya velocidad medida por (\mathcal{O}) \mathbf{V} es constante, la velocidad del móvil según (\mathcal{O}') será

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 - \mathbf{V}, \quad (5.6)$$

que de hecho también es constante. Más aún, si $\mathbf{V} = \mathbf{v}_0$, es decir, si \mathcal{O}' es comovil con la partícula, esta será descrita por \mathcal{O}' como en reposo, en definitiva:

Una partícula sobre la que no actúan fuerzas permanece en reposo o permanece en movimiento rectilíneo uniforme, que es el enunciado estándar de la primera ley de Newton.

Ley de Acción y Reacción

El primer comentario que debemos hacer en relación a la tercera ley no tiene que ver con física sino con psicología. Cuando se comienza a estudiar una disciplina aparece una fuerte tendencia a memorizar oraciones y/o frases breves que supuestamente resumen conceptos. En el caso de la tercera ley la oración-resumen que muchos estudiantes aprenden de memoria de manera usual reza algo por el siguiente estilo: *Los pares de acción y reacción son fuerzas iguales y opuestas*. En este curso queremos ser sumamente enfáticos en solicitar a los estudiantes que no memoricen o utilicen esta expresión o alguna que se le parezca. Los pseudoresumenes

son típicamente falsos (o peor aún: totalmente erróneos), por su brevedad se incorporan muy fácilmente al conjunto de preconceptos de los estudiantes y permanecen allí en su subconsciente esperando la primera oportunidad para liberarse de su prisión, pasar al conciente y hacerles cometer errores garrafales.

Vamos a describir la idea correcta de una vez por todas, consideremos dos partículas interactuantes, y llamemos al par de fuerzas de acción-reacción⁴: \mathbf{F}_{12} y \mathbf{F}_{21} . En el capítulo 3 aprendimos que tanto la velocidad como la aceleración estaban bien definidas cuando se entendían como pares de objetos (\mathbf{r}, \mathbf{v}) y (\mathbf{r}, \mathbf{a}) . Hablando en términos menos técnicos, pero no por ello menos correctos, hay que especificar en qué punto están el origen de la velocidad y la aceleración. Las fuerzas también están bien definidas solo cuando se especifica el punto en que se aplican. Así por ejemplo, en el caso de las dos partículas en interacción los pares son $(\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_{21})$ y $(\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_{12})$, esto es, la fuerza que actúa sobre la partícula número 1 es \mathbf{F}_{21} mientras que la fuerza que actúa sobre la partícula número 2 es \mathbf{F}_{12} . La igualdad $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ debe interpretarse como una igualdad entre el segundo miembro de un par y el opuesto del segundo miembro del otro como elementos de \Re^3 .

Vamos ahora con una interpretación de la *Tercera Ley*. Una forma de entenderla es pensándola como un principio de completitud.

Consideremos el movimiento de un par de partículas aisladas del resto del universo⁵, bajo estas circunstancias, la única fuerza que podría actuar sobre una de ellas tendría que ser ejercida por la otra (y viceversa). El movimiento de las partículas se describe por las ecuaciones de

⁴recuerde que en esta notación, \mathbf{F}_{12} es la fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la partícula 2, quizás debería utilizarse algo como $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ pero eso sería exagerar las cosas

⁵si esto le parece demasiado abstracto, imagine una pelota de baseball cortada lmpíamente en dos partes iguales que apenas se mantienen unidas durante un experimento dentro de la estación espacial internacional. Cada una de las mitades ejerce una fuerza sobre la otra

movimiento:

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{21} \quad (5.7)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{12}, \quad (5.8)$$

si sumamos ambas ecuaciones obtenemos

$$\dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} \quad (5.9)$$

El lado izquierdo de esta igualdad tiene que definirse como el momentum total (\mathbf{p}) del conjunto formado por las dos partículas. como estamos pensando que el conjunto de las dos partículas está aislado del resto del universo cabe postular que \mathbf{p} es constante, esto es, se postula que

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (5.10)$$

pero esto equivale a postular la identidad (tercera ley) :

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}, \quad (5.11)$$

5.5. Aplicacion a ejemplos de una sola partícula

Algunos de los ejemplo que vamos a tratar en estas notas son algo diferentes a los ejemplos usuales que usted encontrará en otros muy respetables libros de texto para los cursos de física básica para ciencias e ingeniería. Se espera que al seguir nuestros ejemplos en términos de las técnicas que utilizaremos usted tenga una mejor oportunidad de entrenarse en las ideas físicas y abandonar sus preconceptos.

Ejemplo 35 *Un “oscilador armónico” es una partícula de masa m cuyo movimiento es armónico simple (vea el ejemplo 25 de la sección ejemplos-finales-cinematica-1. Es facil notar que*

para un movimiento de este tipo ocurre que $a(t) = -\omega_0^2 x(t)$ y por lo tanto la fuerza que actúa sobre la partícula puede escribirse como:

$$\mathbf{F} = -\kappa x \hat{\mathbf{e}}, \quad (5.12)$$

donde: $\kappa = m\omega_0^2$ es una constante con unidades de fuerza/longitud y $\hat{\mathbf{e}}$ es el vector unitario paralelo al segmento a lo largo del cual ocurre el movimiento

Ejemplo 36 Considere un objeto puntual de masa m que -descrito desde un sistema inercial- se mueve bajo la acción de una fuerza constante $\mathbf{F} = \text{constante}$.

La segunda ley de Newton nos permite encontrar aceleración de la partícula: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, que por ser constante, implica que el movimiento de la partícula obedece la “ley horaria” (vea el apartado 4.2.1)

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{F}}{2m} (t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0, \quad (5.13)$$

donde -como usted ya sabe- \mathbf{v}_0 y \mathbf{r}_0 son las condiciones iniciales de la partícula.

Ejemplo 37 El siguiente ejemplo es algo menos elemental. Considérese una partícula que se mueve a lo largo de una recta bajo la acción de una fuerza dependiente del tiempo ($\mathbf{F}(t)$). En este caso es conveniente expresar la aceleración como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t) \quad (5.14)$$

que de acuerdo al teorema fundamental del cálculo infinitesimal, esto es, integrando en ambos lados de la igualdad lleva al resultado

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s) ds, \quad (5.15)$$

donde como siempre \mathbf{v}_0 es la velocidad de la partícula en el instante t_0 .

Una vez encontrada una fórmula explícita para la velocidad ($\mathbf{v}(t)$), es posible integrar una vez más utilizando la condición inicial $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ para encontrar la ley de movimiento $\mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 38 Considérese una partícula que se mueve a lo largo de una recta considérense adicionalmente coordenadas x a lo largo de la recta y un vector unitario $\hat{\mathbf{e}}$ orientado en el sentido positivo de las x .

Bajo estas condiciones suponga que la partícula se mueve bajo la acción de una fuerza dependiente de su posición, esto decir, por una fuerza de la forma⁶

$$\mathbf{F} = F(x) \hat{\mathbf{e}}. \quad (5.16)$$

Donde $x(t)$ es la componente del vector de posición de la partícula.

La segunda ley de Newton nos permite escribir la ecuación de movimiento en términos de componentes como

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (5.17)$$

Ahora bien, de acuerdo a la regla de la cadena

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \quad (5.18)$$

donde v es la componente x de la velocidad. La igualdad 5.18 v nos permite poner

$$m v \frac{dv}{dx} = F(x). \quad (5.19)$$

o

$$m v dv = F(x) dx, \quad (5.20)$$

que luego de una integración elemental arroja el resultado:

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi, \quad (5.21)$$

donde v_0 es la componente de la velocidad de la partícula en x_0 .

⁶poga mucha atención a este ejemplo. Le ser de gran utilidad ms adelante

Ejemplo 39 Consideremos el ejemplo anterior en el caso de una fuerza constante $F(x) = F_0$. La integral resulta elemental y se obtiene

$$\int_{x_0}^x F(\xi) d\xi = F_0(x - x_0), \quad (5.22)$$

es decir, el producto de la componente de la fuerza por el cambio de posición del móvil. Despejando el lado derecho y utilizando que $F_0/m = a$ obtenemos la conocida fórmula cinemática

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (5.23)$$

Ejemplo 40 Consideremos un móvil puntual de masa m cuya ley horaria descrita por un observador inercial es⁷

$$\mathbf{r}(t) = R [\cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_2]. \quad (5.24)$$

en donde R y ω_0 son constantes. En los ejercicios y ejemplos anteriores usted ya debe haber estudiado algunos aspectos del movimiento, entre otros, debe haberse convencido de que la trayectoria es un círculo⁸ de radio R y que por lo tanto en todo momento la velocidad es ortogonal al vector de posición $\mathbf{r}(t)$, además la rapidez es constante y dada por: $\dot{s} = R\omega_0$ lo que asegura que la aceleración es ortogonal a la velocidad

Es fácil ver que

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega_0^2 \mathbf{r}(t) \quad (5.25)$$

lo que implica que la fuerza que produce este movimiento es radial, orientada hacia el centro de la trayectoria, y de magnitud (haga el calculito): $mR\omega_0^2$, por cierto, como la aceleración, la derivada de la velocidad es ortogonal a esta podemos estar seguros de que nuestro ejemplo es un movimiento de rapidez constante.

⁷¿Recuerda algún movimiento parecido a este?, volveremos a esto más adelante

⁸vea el problema 6 de la sección ??

Ejemplo 41 Estudiemos finalmente un ejemplo que por tres razones es muy poco convencional. La primera razón es que este problema no suele presentarse a este nivel, es decir, en un primer curso de física universitaria. La segunda es que trataremos de hacer el mínimo uso posible de las coordenadas (es decir, de un sistema de referencia particular).

El objetivo de estudiar este ejemplo es hacerle ver lo lejos que puede llegarse utilizando las leyes de Newton.

Este ejemplo posee un gran interés no solo para los estudiantes de física sino para los estudiantes de química e inclusive para estudiantes de medicina, ya que corresponde a la descripción del movimiento de una partícula eléctricamente cargada que se mueve bajo la acción de un campo magnético constante. Este problema es fundamental para la química analítica pues constituye la base sobre la cual funcionan los espectrómetros de masa y para la medicina porque constituye la base teórica sobre la que se construyen los ciclotrones que se utilizan hoy día en las aplicaciones médicas.

Consideremos una partícula y un vector constante \mathbf{B}_0 , y supongamos que la fuerza que actúa sobre la partícula tiene la forma:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}, \quad (5.26)$$

donde q es una constante cuyas unidades multiplicadas por las del vector constante producen dimensiones de masa/tiempo.

La aceleración de la partícula es por supuesto

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}, \quad (5.27)$$

que, por ser ortogonal a la velocidad demuestra que la rapidez de la partícula es constante. Es conveniente definir un vector unitario paralelo a \mathbf{B}_0 de manera que podamos poner: $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ donde B_0 es la magnitud de \mathbf{B}_0 .

Sus conocimientos acerca de vectores hacen evidente que la velocidad y la posición pueden

descomponerse como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp}, \quad (5.29)$$

donde $\mathbf{v}_{||}$ y \mathbf{v}_{\perp} son velocidades paralela y ortogonal a $\hat{\mathbf{e}}_z$ respectivamente, mientras que la reinterpretación de $\mathbf{r}_{||}$ y \mathbf{r}_{\perp} es similar.

La ecuación de Newton puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{v}}_{||} + \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q B_0}{m} \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp}), \quad (5.30)$$

de donde, en virtud de las propiedades del producto vectorial, sigue:

$$\dot{\mathbf{v}}_{||} = 0 \quad (5.31)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q B_0}{m} \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{v}_{\perp}, \quad (5.32)$$

La primera de estas ecuaciones y los conocimientos que ya ha adquirido en este curso implican que $z(t) = u_0(t - t_0) + z_0$, donde u_0 es el valor de $\mathbf{v}_{||} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ en $t = t_0$ y $z_0 = \mathbf{r}_{||} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ en el mismo instante. En resumen, y hasta donde hemos podido resolver hasta acá:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + (u_0(t - t_0) + z_0) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (5.33)$$

Estudiemos ahora la ecuación para \mathbf{v}_{\perp}

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{v}_{\perp}, \quad (5.34)$$

comencemos por notar que un poco de análisis dimensional nos permite asegurar que la constante

$$\omega_c = \frac{q B_0}{m} \quad (5.35)$$

tiene unidades de tiempo^{-1} esto sugiere que $1/\omega_c$ es una escala de tiempo fundamental para el problema y podemos reescribir la ecuación para \mathbf{v}_{\perp} en la forma:

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \omega_0 \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{v}_{\perp}, \quad (5.36)$$

no nos asustemos con el aspecto de esta ecuación y veamos que podemos hacer con lo que hemos estudiado hasta este punto. En primer lugar, estamos seguros de que \mathbf{v}_\perp está siempre en un plano ortogonal al vector constante $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$). Más aún, como $\dot{\mathbf{v}}_\perp$ proviene de un producto vectorial que contiene a \mathbf{v}_\perp ocurre que $\mathbf{v}_\perp \perp \dot{\mathbf{v}}_\perp$, lo que a su vez implica que la magnitud de \mathbf{v}_\perp es constante ($|\mathbf{v}_\perp| = v_0 = \text{constante}$).

En este punto no es mayor problema observar que, en vista de que $\mathbf{v}_\perp = \dot{\mathbf{r}}_\perp$, la ecuación para \mathbf{v}_\perp se puede expresar como:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\perp = \omega_c \hat{\mathbf{e}}_z \times \dot{\mathbf{r}}_\perp. \quad (5.37)$$

Y que como consecuencia, y utilizando las condiciones iniciales adecuadas,

$$\dot{\mathbf{r}}_\perp = \omega_c \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_\perp. \quad (5.38)$$

Acá vamos a pedirle que recuerde el problema 9 del capítulo 4 para que crea que esta última ecuación tiene por solución

$$\mathbf{r} = \frac{v_0}{\omega_c} [\cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_2] + (u_0(t - t_0) + z_0) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (5.39)$$

en donde hemos escogido $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ de tal suerte que (i) el conjunto de vectores $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_z)$ constituyen un triángulo ortonormal dextrogiro, y que (ii) $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ se han escogido de tal suerte que $\mathbf{r}_\perp(0) \parallel \hat{\mathbf{e}}_1$ y $\mathbf{v}_\perp(0) \parallel \hat{\mathbf{e}}_2$.

Antes de concluir, debemos comentar que el resultado final (5.39) no ha sido demostrado. La prueba es algo avanzada para este curso y la hemos omitido “por ahora”.

En la tumba de Newton en la Abadía de Westminster en Londres se puede leer la siguiente inscripción:

H. S. E. ISAACUS NEWTON Eques Auratus,
Qui, animi vi prope divinâ,
Planetarum Motus, Figuras,
Cometarum semitas, Oceanique Aestus. Suâ Mathesi facem praeferente
Primus demonstravit:
Radiorum Lucis dissimilitudines,
Colorumque inde nascentium proprietates,
Quas nemo antea vel suspicatus erat, pervestigavit.
Naturæ, Antiquitatis, S. Scripturæ,
Sedulus, sagax, fidus Interpres
Dei O. M. Majestatem Philosophiâ asseruit,
Evangelij Simplicitatem Moribus expressit.
Sibi gratulentur Mortales,
Tale tantumque exstisset
HUMANI GENERIS DECUS.
NAT. XXV DEC. A.D. MDCXLII. OBIIT. XX. MAR. MDCCXXVI

Según la traducción al inglés de G.L. Smyth⁹, la inscripción reza

Here is buried Isaac Newton, Knight, who by a strength of mind almost divine, and mathematical principles peculiarly his own, explored the course and figures of the planets, the paths of comets, the tides of the sea, the dissimilarities in rays of light, and, what no other scholar has previously imagined, the properties of the colours thus produced. Diligent, sagacious and faithful, in his expositions of nature, antiquity and the holy Scriptures, he vindicated by his philosophy the majesty of God mighty and good, and expressed the simplicity of the Gospel in his manners. Mortals rejoice that there has existed such and so great an ornament of the human race! He was born on 25th December, 1642, and died on 20th March 1726/7.

⁹ *The Monuments and Genii of St. Paul's Cathedral, and of Westminster Abbey* (1826), ii, 703-4

Capítulo 6

Aplicaciones de las Leyes de Newton I: problemas elementales

6.1. Las fuerzas de la naturaleza

En el capítulo anterior hemos estudiado las leyes de Newton y su significado y las hemos utilizado para el estudio de algunos problemas que podrían lucir algo académicos.

En este material vamos a estudiar algunas aplicaciones que seguramente le lucirán algo más convencionales. Para ello debemos familiarizarnos con la idea simplificada de fuerza, pero antes quisieramos contarle un poco lo que nos interesa a los físicos y que nos atrevemos a apostar, despertará su curiosidad.

Los físicos pensamos en la naturaleza y nos preocupamos particularmente por estudiar los constituyentes últimos (es decir, las partículas elementales) de la materia y sus interacciones mutuas. Estas inquietudes se remontan -desde el punto de vista occidental- a los griegos, siendo Leucipo y Demócrito quienes sistematizaron la idea de átomo como constituyente último e indivisible de la materia aproximadamente en el año 450 AC. Algunas personas piensan que

los constituyentes más básicos de la materia son los átomos, otros están al tanto de que la física de las últimas dos décadas del siglo *XIX* y las dos primeras del siglo *XX* dejaron claro que los átomos estaban compuestos a su vez por los electrones y los núcleos atómicos, los años 1925 a 1936 dejaron claro que este no era el caso, que en verdad los átomos estaban compuestos por electrones y núcleos y que estos a su vez estaban compuestos de protones y neutrones, también quedó claro que existían varias partículas muy pequeñas que compartían el universo subatómico. En la décadas de 1970 y 1980 los experimentos daban un fuerte soporte a las más modernas teorías acerca de la materia y la energía. Según nuestra compresión actual, existen tres clases totalmente distintas de partículas, los *Quarks* y los *Leptones* que a su vez existen en tres familias cada grupo, constituyen lo que denominamos la materia, mientras que las partículas que pertenecen al tercer grupo, denominadas colectivamente *bosones de intercambio* son los responsables de las interacciones (fuerzas) entre los quarks y leptones. Interacciones ó fuerzas de las cuales hasta donde entendemos hoy día solo existen tres tipos de fuerzas distintas: fuerza gravitacional, fuerza electro-debil y fuerza fuerte.

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Cuadro 6.1: Las tres familias de Quarks. (up, down), (charmed, strange) y (top, bottom)

La existencia de todos los leptones y quarks posee un excelente soporte experimental. La

$$\begin{pmatrix} e \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Cuadro 6.2: Las tres familias de Leptones. Electrón y antineutrino electrónico; muón y antineutrino muónico; tauón y antineutrino tau

materia ordinaria (los átomos de los elementos conocidos) están constituidos por los electrones (que pertenecen a la primera familia de leptones), mientras que los protones y neutrones están constituidos por combinaciones de tres quarks de la primera familia.

En cuanto a los bosones de intercambio, los W_{\pm} , Z_0 y los gluones también tienen un extenso soporte experimental mientras que el gravitón, la partícula responsable de la interacción gravitacional aún no ha sido confirmada.

Ahora bien, desde el punto de vista de la mecánica de Newton y sus aplicaciones que solo tratan cuerpos macroscópicos, se reconoce que, debido a la intensidad relativa de cada una de las interacciones fundamentales, las fuerzas entre cuerpos macroscópicos son todas de carácter electromagnético. Sin embargo, una descripción detallada de los fenómenos electromagnéticos que aparecen cuando una mano empuja una pared, es virtualmente imposible. Afortunadamente también es innecesaria para los propósitos de la descripción Newtoniana de la naturaleza para la cual solo es necesario algún modelo simplificado para las fuerzas de interacción entre cuerpos macroscópicos.

6.2. Fuerzas Macroscópicas

6.2.1. Fuerzas de reacción I

Las primeras fuerzas a que haremos referencia son las denominadas fuerzas de reacción o fuerzas de contacto (una mano que empuja una caja es un buen ejemplo de una fuerza de contacto que la mano ejerce sobre la caja). El contacto entre dos cuerpos se manifiesta en la aparición de fuerzas que se denominan reacciones o fuerzas de contacto.

Con el fin de tratar un ejemplo explícito que usted mismo pueda experimentar, permítanos comentar que el sentido del tacto está relacionado con la capacidad de percibir las fuerzas de contacto entre nuestro cuerpo y los objetos que tocamos. Dicho esto coloque la palma de su

mano justo en frente -pero sin tocar- la superficie de una pared. Si usted entra en contacto muy suavemente con la pared percibirá la presencia de esta a través del tacto, es decir, por la aparición de la reacción de la pared sobre su mano Λ_{mp} , la tercera ley de Newton establece que la pared ejerce sobre su mano una fuerza (Λ_{pm}) de la misma magnitud dirección y sentido que Λ_{mp} pero de sentido opuesto a esta y que, no nos cansaremos de insistir en esto, no actúa sobre la pared sino sobre su mano.

6.2.2. Fuerzas de Acción a Distancia

La mecánica Newtoniana reconoce la existencia de fuerzas que actúan sin necesidad de que exista contacto entre los cuerpos. Entre estas, la fuerza que Newton estudió personalmente es la fuerza de gravedad, la fuerza de gravedad de Newton, denominada Gravitación Universal, es universal en el sentido de que se establece entre cualesquiera par de cuerpos masivos.

Lo que denominamos nuestro peso no es otra cosa que la fuerza gravitacional con que la tierra atrae a nuestro cuerpo, en la superficie terrestre el peso de un objeto es una fuerza paralela a la dirección que indica una plomada (que denominamos: vertical), tiene sentido hacia la superficie de la tierra y tiene por magnitud mg donde m es la masa del objeto y $g \approx 9,78 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de gravedad.

Cuando un cuerpo de masa m se encuentra a una altura h (en Km) sobre el nivel del mar, la fuerza gravitacional que la tierra ejerce sobre este está dirigida muy aproximadamente hacia el centro de la tierra y tiene una magnitud muy cercana a

$$F_G = G \frac{m M_T}{(R_T + h)^2}, \quad (6.2)$$

donde $G = (6,67428 \pm 0,00067) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ es una constante denominada constante de gravedad de Newton, $R_T = 6371,0 \text{ Km}$ el radio (medio) terrestre y $M_T = 5,9736 \times 10^{24} \text{ Kg}$ la masa de la tierra.

Otros ejemplos de fuerzas a distancia son las interacciones electricas y magnéticas.

Ejemplo 42 Queremos estudiar -a la luz de las leyes de Newton- la razón que explica los resultados de Galileo según los cuales cuando dejamos caer un par de cuerpos desde la misma altura estos llegan al piso aproximadamente en el mismo tiempo.

Para resolver esta cuestión despreciamos el contacto con el aire y consideremos cuerpos que caen desde alturas pequeñas sobre el nivel del mar. Bajo tales condiciones, la única fuerza que actúa sobre un cuerpo es la atracción gravitacional de la tierra cuya magnitud es

$$F_G = G \frac{m M_T}{(R_T + h)^2}, \quad (6.3)$$

donde podemos aproximar h a cero y debemos recordar que el sentido y dirección de la fuerza es la vertical y en sentido hacia abajo. Llamando \mathbf{e}_z a un versor cuya dirección y sentido son vertical y hacia arriba respectivamente podemos expresar la fuerza que la tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m_C como

$$\begin{aligned} F_G &\approx -6,7 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2} \times \frac{m_C 6,0 \times 10^{24} Kg}{(6371,0 \times 10^3 m)^2} \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{6,7 \times 6,0}{(6,4)^2} \times 10^{-11+24-12} N \times Kg^{-1} \times m_C \mathbf{e}_z = \\ &= 9,8 N \times Kg^{-1} \times m_C \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (6.4)$$

al escribir la ecuación de movimiento para el cuerpo resulta

$$m_C \mathbf{a} = 9,8 N \times Kg^{-1} \times m_C \mathbf{e}_z, \quad (6.5)$$

de manera que la aceleración del cuerpo es

$$\mathbf{a} = 9,8 m \times s^{-2} \mathbf{e}_z, \quad (6.6)$$

independientemente de su masa. De esta manera, vemos como las leyes de la mecánica combinadas con la ley de gravitación universal de Newton permiten mostrar que los “cuerpos graves”(como diría Galileo caen de la misma manera independientemente de su masa. Por cierto

que la demostración de Galileo en los “Diálogos” sobre dos nuevas ciencias es intelectualmente mucho más elegante que lo que acabamos de presentar

Ejemplo 43 Una caja está colocada sobre una superficie horizontal cercana a la superficie terrestre (una mesa por ejemplo). ¿Cuál es la reacción de la superficie sobre la caja?

La respuesta a la pregunta ni siquiera requiere de un gráfico. Solo hay dos fuerzas que actúan sobre la caja, la atracción gravitacional que la tierra ejerce sobre la caja (el peso de la caja) y la fuerza de reacción Λ_{sc} que la superficie ejerce sobre la caja.

De acuerdo a la situación descrita, la caja se mueve a velocidad constante (nula según un observador inercial fijo a tierra) y por lo tanto la ecuación de movimiento del sistema es:

$$\Lambda_{sc} + \mathbf{W} = 0, \quad (6.7)$$

donde \mathbf{W} es el peso de la caja. En definitiva, en este caso la fuerza de reacción que la superficie horizontal ejerce sobre el piso está dada por

$$\Lambda_{sc} = -\mathbf{W}, \quad (6.8)$$

usando un sistema de referencia fijo a tierra uno de cuyos versores ($\hat{\mathbf{e}}_z$ es vertical y orientado hacia arriba resulta

$$\Lambda_{sc} = +m g \hat{\mathbf{e}}_z \quad (6.9)$$

en este caso, la fuerza de reacción que la superficie ejerce sobre la caja es: ortogonal a la superficie, en sentido hacia arriba y de magnitud igual a la del peso de la caja.

Pero hay que tener mucho cuidado, la reacción de la superficie sobre la caja es una **fuerza de contacto** eso es completamente distinto del peso que, para empezar, es una fuerza de acción a distancia

Ejemplo 44 Introduzcamos una ligera modificación al problema anterior para ver que ocurre.

Una caja permanece inmóvil sobre un plano inclinado fijo a tierra, si $\theta \leq 90^\circ$ es el ángulo que el plano inclinado forma con la horizontal ¿cuál será la fuerza de contacto que la superficie ejerce sobre la caja?.

Una vez más, solo actúan dos fuerzas, el peso y la reacción y una vez más se obtiene

$$\Lambda_{sc} = -\mathbf{W}, \quad (6.10)$$

Pues bien, parece que este curso contiene repeticiones de los mismos ejemplos (una verdadera pérdida de su tiempo), pues tenemos que decir enfáticamente que este ejemplo es dramáticamente distinto al anterior, y de hecho está formulado en este punto pensando precisamente en el beneficio de los estudiantes que suelen aprender “oraciones resumen” que solo les confunden. como por ejemplo: “la normal es igual al peso”.

Los dos ejemplos están diseñados para hacerle olvidar eso. Ya en el primero comentamos que si bien la reacción de la superficie sobre la caja resulta ser normal (perpendicular) a la superficie y de magnitud igual a la del peso de la caja, el peso y la reacción son fuerzas de naturaleza enteramente distinta y por ende no pueden ser iguales.

En este segundo ejemplo algunas cosas son idénticas. La fuerza de reacción Λ_{sc} termina siendo una fuerza vertical orientada hacia arriba y de magnitud Mg . Sin embargo, en este caso aparece una diferencia significativa: la reacción Λ_{sc} no es ortogonal a la superficie de contacto.

Consideremos una base dextrogira dos de cuyos elementos son (i) un versor ($\hat{\mathbf{e}}_\perp$) ortogonal a la superficie orientado hacia arriba y (ii) un versor ($\hat{\mathbf{e}}_\parallel$) paralelo a la dirección de máxima pendiente de la superficie y en sentido hacia abajo, esto nos permite expresar al peso como

$$\mathbf{W} = Mg (-\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_\perp + \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_\parallel), \quad (6.11)$$

y por lo tanto

$$\Lambda_{sc} = \lambda_\parallel \hat{\mathbf{e}}_\parallel + \lambda_\perp \hat{\mathbf{e}}_\perp = Mg (\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_\perp - \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_\parallel). \quad (6.12)$$

Leamos nuestro resultado interpretándolo cuidadosamente. La reacción que la superficie ejerce sobre la caja tiene una componente perpendicular a la superficie ($\lambda_{\perp} = Mg\cos\theta$) y una componente tangencial a la superficie de contacto ($\lambda_{||} = -Mg\sin\theta$). En vista de que las cantidades $Mg\cos\theta$ y $Mg\sin\theta$ son números reales positivos, los signos en $\lambda_{||}$ y λ_{\perp} tienen un importante significado físico, expresan el hecho de que la reacción debe oponerse al peso para lograr el equilibrio de fuerzas necesario para que la aceleración de la caja sea nula.

Volviendo al problema de las “oraciones resumen”, el vector $Mg\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ es lo que usualmente recibe el indeseable apelativo de normal. Y en el segundo ejemplo, no solo ocurre que el peso y la componente de la reacción orthogonal a la superficie de contacto son objetos conceptualmente distintos, sino que por añadidura tienen magnitudes diferentes. Así que recuerde (si es que insiste en memorizar oraciones resumen):

LA NORMAL NO ES, NO HA SIDO, NI SERÁ NUNCA IGUAL AL PESO

6.3. Fuerzas de reacción II

Continuemos nuestro estudio de las fuerzas de contacto, para ello consideraremos el caso más general posible, una partícula que se mueve sobre una superficie arbitraria. Nuestro estudio requiere de un resultado matemático que no podemos demostrar con las herramientas que tenemos a mano, así que enunciaremos el resultado apelando a su intuición para entenderlo y aceptarlo por el momento y esperando algún curso de matemáticas más avanzado para obtener su demostración rigurosa.

Teorema 8 *Toda superficie suave admite un plano tangente en cada uno de sus puntos.*

En vista del teorema 8, en cada punto de una superficie suave podemos conseguir un versor

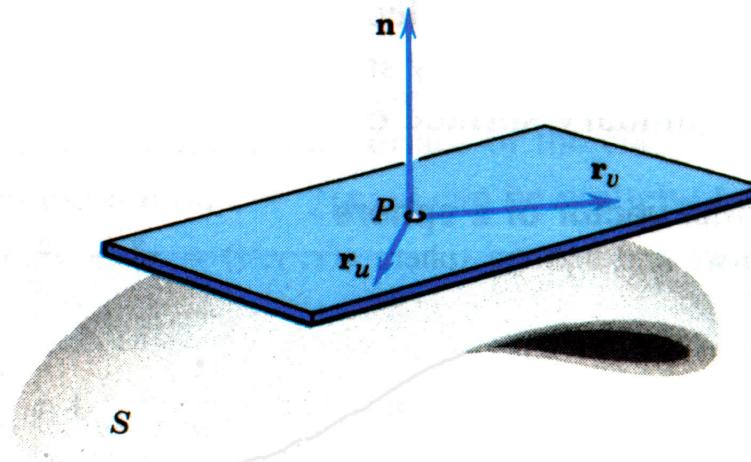


Figura 6.1: El plano tangente a la superficie S en el punto P . Los versores $\hat{\mathbf{r}}_u$, $\hat{\mathbf{r}}_v$ y $\hat{\mathbf{n}}$ forman un triedro ortonormal dextrogiro en el punto P

normal a la superficie (normal al plano tangente) y siempre podremos fijar dos vectores unitarios en el plano tangente que sean ortogonales entre si.

Como consecuencia de la existencia de los tres versores que acabamos de mencionar, cuando una partícula se mueve sobre una superficie, en cada punto de la superficie la fuerza de reacción que la superficie ejerce sobre la partícula podrá expresarse en la forma

$$\Lambda = \lambda_{||} \hat{\mathbf{e}}_{||} + \lambda_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}, \quad (6.13)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ es el versor normal a la superficie en el punto que estemos considerando, y $\hat{\mathbf{e}}_{||}$ es un versor contenido en el plano tangente a la superficie en dicho punto. Es facil darse cuenta de que esta representación de la fuerza de contacto no es más que una generalización de lo que estudiamos en el ejemplo (44)

El sumando $\lambda_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ que aparece en la fórmula (6.13) es lo que usualmente denominamos *la normal* mientras que el término $\lambda_{||} \hat{\mathbf{e}}_{||}$ es lo que conocemos como fuerza de roce.

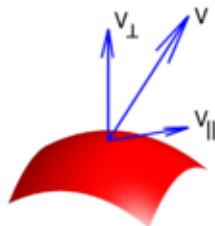


Figura 6.2: La descomposición de un vector (\mathbf{v}) con origen en un punto de una superficie en sus componentes normal (\mathbf{v}_{\perp}) y tangente (\mathbf{v}_{\parallel}) a la superficie

6.4. Otra visita al problema de valores iniciales

Antes de ir a las aplicaciones prácticas, queremos entender un poco más la estructura del siguiente problema:

Problema 7 *Conocidas la masa de una partícula, su velocidad y posición en un instante arbitrario t_0 y la naturaleza y forma de las fuerzas que actúan sobre la partícula encuentre la ley horaria de la partícula*

La resolución de este problema comienza por establecer el sistema de referencia inercial para escribir la ecuación de movimiento

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (6.14)$$

donde \mathbf{F} es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula en términos de tres ecuaciones escalares

$$\ddot{x}_1 = F_1/m \quad (6.15)$$

$$\ddot{x}_2 = F_2/m \quad (6.16)$$

$$\ddot{x}_3 = F_3/m, \quad (6.17)$$

donde obviamente los subíndices indican las componentes de los vectores aceleración y fuerza neta en la base que se haya escogido.

Desde un punto de vista matemático el problema planteado corresponde a resolver un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden sometidas a ciertas condiciones iniciales. Este es un problema sumamente difícil que en general carece de soluciones analíticas. Este es el problema fundamental de la mecánica de Newton.

6.5. VINCULOS

De vez en cuando ocurre que las ecuaciones de movimiento que obtenemos al aplicar juiciosamente las tres leyes de Newton parecieran ser insuficientes para determinar completamente el movimiento de un conjunto (sistema) de partículas. Probablemente el ejemplo más trivial de esta situación ocurra si consideramos una partícula que se mueve a lo largo de una recta, si F es la componente de la fuerza neta que actúa sobre la partícula a lo largo de la recta, la ecuación de movimiento de la partícula será

$$m \ddot{x} = F, \quad (6.18)$$

y evidentemente, si no sabemos algo más de F pues no podemos llegar más lejos.

Observación 9 *Es fundamental que se de cuenta de que acá no hay problema alguno con las leyes de Newton, sencillamente falta especificar la forma de F para poder hacer cualquier cosa más*

Otro ejemplo igual de evidente es el siguiente, supongamos que queremos conocer la fuerza neta que actúa sobre una partícula, la segunda ley de Newton nos provee con una respuesta inmediata:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}, \quad (6.19)$$

y claro, si no sabemos más nada solo podremos llegar hasta acá. Si queremos calcular \mathbf{F} totalmente, necesitamos conocer \mathbf{a} y m .

Los dos ejemplos anteriores son bastante crudos, pero nos enseñan una lección muy importante: a menos que conozcamos cierta información “extra”¹que podamos incorporar , las ecuaciones de movimiento no resulten suficientes para describir el movimiento porque, por ejemplo, el número de incógnitas que aparezca en las ecuaciones de movimiento sea mayor al número de ecuaciones.

Cuidado, no estamos diciendo que las leyes de Newton no constituyan una descripción completa de la mecánica, lo que ocurre es que a veces nuestra descripción del sistema que estamos estudiando es incompleta. En el primer ejemplo de esta sección tenemos que proveer información acerca de la fuerza para poder encontrar $x(t)$, en el segundo, si no tenemos idea de como es la aceleración de la partícula solo podemos escribir la segunda ley de Newton. Ahora bien, si supieramos que en el segundo ejemplo la aceleración es constante y la masa de la partícula es M podríamos concluir por supuesto que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t) = \frac{\mathbf{a}}{M} = \text{vector constante} \quad (6.20)$$

Así, pues, al estudiar problemas físicos a veces se hace necesario introducir algunas condiciones subsidiarias que modelen adecuadamente algunas características del sistema.

El conjunto más obvio de condiciones subsidiarias en que se puede pensar es en alguno que establezca algunas condiciones cinemáticas a priori. Por ejemplo, que la distancia entre las partículas del sistema que se está estudiando se mantiene constante en el tiempo. Las condiciones subsidiarias de tipo cinemático se denominan vínculos, ligaduras ó restricciones.

Definición 42 *Las variables x_1, x_2, \dots que se requiere para determinar totalmente las posiciones de un conjunto de partículas se denominan grados de libertad.*

En el caso más elemental posible, una partícula, los grados de libertad son las componentes (x_1, x_2, x_3) de su vector de posición.

¹en verdad no es información extra, es información básica que debe conocerse a priori

Definición 43 *Un vínculo (ligadura o restricción) es una relación*

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0 \quad (6.21)$$

entre los grados de libertad y sus derivadas.

En este curso nos limitaremos a estudiar el caso en que los vínculos solo dependen de los grados de libertad² $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$

Ejemplo 45 *El ejemplo más trivial que puede concebirse es en un punto del que se sabe que se mueve a lo largo de una línea recta. En efecto, dar esa información nos permite escoger una base ortonormal de tal suerte que el que el movimiento de la partícula está caracterizado por obedecer las condiciones $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = 0$ de manera que la ley horaria de la partícula será de la forma $\vec{r}(t) = x_1(t) \hat{\mathbf{e}}_1$.*

En este caso los vínculos son el par de condiciones

$$x_2(t) = 0, \quad x_3(t) = 0. \quad (6.22)$$

Es interesante notar que en este ejemplo, la partícula solo tiene un grado de libertad (la posición a lo largo de la recta), otra cosa (aparentemente ridícula) para notar es la igualdad:

$$1 = 3 - 2, \quad (6.23)$$

esta última igualdad interpretada en el contexto que estamos hablando expresa el hecho de que el número de grados de libertad de un sistema es igual al número aparente de grados de libertad del sistema menos el número de vínculos. Una partícula tienen en principio tres grados de

²los vínculos que relacionan a las coordenadas suelen llamarse ligaduras holónomas, como ejemplo consideremos una partícula que se mueve sobre la superficie de una esfera de radio R cuyo centro coincide con el origen de un sistema de coordenadas, el vector de posición de la partícula será $\mathbf{r}(t) = x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z$, y las componentes de \mathbf{r} satisfacen el vínculo holónomo: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

libertad, sin embargo, si la partícula se mueve a lo largo de una recta aparecen dos vínculos y por tanto el número de grados de libertad correspondiente es 1.

Ejemplo 46 *La generalización más obvia del ejemplo anterior consiste en discutir la dinámica de una partícula que se mueve en un plano, en este caso hay un solo vínculo, que escogiendo el sistema de referencia de manera adecuada se expresa como*

$$x_3(t) = 0. \quad (6.24)$$

Si por alguna razón el sistema de referencia no fuera el más adecuado, podemos escoger un vector (\vec{A}) perpendicular al plano del movimiento y un punto (\vec{r}_0) en el plano, objetos en términos de los cuales, el vínculo adquiere la forma:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (6.25)$$

que no es otra cosa que la ecuación que asegura que el movimiento de la partícula ocurra en el plano ortogonal al vector \mathbf{A} que contiene al punto \mathbf{r}_0 .

6.6. Dos casos de estudio

Con el objetivo de exhibir el significado del concepto de vínculo, es interesante estudiar un problema físico de manera totalmente explícita. Nos vamos a embarcar en el estudio de un problema relativamente sencillo. Le rogamos que estudie detalladamente todo el procedimiento, le pediremos algo de paciencia, ya que con fines pedagógicos vamos a presentar todo el desarrollo con profusión de detalles de forma que usted pueda seguir toda la línea argumental.

Por favor no se aburra por lo tedioso del razonamiento y por favor no entre en pánico pensando que la solución de hasta los problemas más sencillos requieren de desarrollos muy largos

No resoveremos el problema totalmente, sino que le llevaremos de la mano hasta el punto en que el problema sea muy cercano a ser soluble y en que aparecerán ante nosotros el conjunto de condiciones que harían falta convertirlo en un problema casi-soluble.

Ejemplo 47 *Imagine una situación física típica de lo que puede encontrar en un laboratorio.*

Considere un experimento en que dos carritos de masas m_1 y m_2 se deslizan a lo largo de un riel sin rozamiento. Sobre el carrito de masa m_1 actúa una fuerza horizontal de magnitud³ F . Ambos carritos están unidos por una barrita horizontal.

Conociendo que de no estar la barrita, la fuerza aplicada sobre el primer cochechito trataría de alejarle del segundo, ¿cuales serán las fuerzas que la barrita ejerce sobre cada carrito?.

Para comenzar a estudiar la situación debemos escoger un sistema de referencia al que asociaremos unos ejes cartesianos. La información concerniente a la geometría del riel y al movimiento de los cochechitos nos permite escoger el eje x_1 a lo largo del riel, lo que trae como consecuencia que las aceleraciones de ambos carritos tengan la forma⁴:

$$\mathbf{a}^{(1)} = a_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad y \quad \mathbf{a}^{(2)} = a_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1 , \quad (6.26)$$

en donde $a_1^{(1)}$ y $a_1^{(2)}$ las componentes de las aceleraciones de ambas partículas son números reales cuyos valores desconocemos totalmente. Dicho en otros términos, la información geométrica suministrada es equivalente al conjunto de restricciones⁵: $x_2^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = 0$ y $x_2^{(2)} = 0$ y $x_3^{(2)} = 0$.

Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre el primer cochechito son: la atracción que la tierra ejerce sobre este (es decir, el peso $\mathbf{W}^{(1)}$ de m_1), la fuerza de contacto $\Lambda^{(1)}$ (reacción) de la pista sobre el carrito, la fuerza \mathbf{F} que se ejerce directamente sobre el mismo, y claro, la que la barrita ejerce sobre el carrito $\mathbf{F}^{(b1)}$.

³recuerde que como F es una magnitud es un número real intrínsecamente positivo

⁴en esta notación, $\mathbf{a}^{(1)}$ es la aceleración de la partícula 1 y $\mathbf{a}^{(2)}$ es la de la partícula 2

⁵tres ligaduras holónomas

Un razonamiento análogo, nos lleva a concluir que las fuerzas que actúan sobre el segundo carrito son el peso $\mathbf{W}^{(2)}$, la reacción del riel $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$ y la fuerza ejercida por la barra $\mathbf{F}^{(b2)}$.

De acuerdo a esto, las ecuaciones de movimiento de ambos cochecitos son

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)} + \mathbf{W}^{(1)} + \mathbf{F}^{(b1)} + \mathbf{F} = m_1 a_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (6.27)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(2)} + \mathbf{W}^{(2)} + \mathbf{F}^{(b2)} = m_2 a_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (6.28)$$

sin temer ser aburridores, debemos insistir en que, en estas ecuaciones $a_1^{(1)}$ y $a_1^{(2)}$ son incógnitas que representan las componentes de las aceleraciones de los carritos, y que por lo tanto son números reales, lo que implica que al final del cálculo resultaran siendo nulas o teniendo algún signo algebráico con respecto al cero.

Para proseguir nuestro estudio escogeremos al vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_1$ en sentido paralelo al de la fuerza horizontal que se está aplicando sobre m_1 , y al versor $\hat{\mathbf{e}}_2$ con sentido opuesto al de la gravedad, de esta manera, debemos reescribir las ecuaciones de movimiento en la forma:

$$\left(\lambda_1^{(1)} + F_1^{(b1)} + F \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\lambda_2^{(1)} + F_2^{(b1)} - m_1 g \right) \hat{\mathbf{e}}_2 = m_1 a_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (6.29)$$

$$\left(\lambda_1^{(2)} + F_1^{(b2)} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\lambda_2^{(2)} + F_2^{(b2)} - m_2 g \right) \hat{\mathbf{e}}_2 = m_2 a_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (6.30)$$

Veamos en detalle toda la información que, hasta el momento, hemos integrado a nuestro modelo matemático de la situación física.

En primer lugar, hemos utilizado el hecho de que la fuerza \mathbf{F} es horizontal, de magnitud F y orientada a lo largo de $\hat{\mathbf{e}}_1$. Hemos incorporado los cuatro vínculos $x_2^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = 0$ y $x_2^{(2)} = 0$ y $x_3^{(2)} = 0$ asociados a que sabemos a priori que los cochecitos se moverán a lo largo del riel. Por otra parte, de las reacciones y las fuerzas que la barrita ejerce sobre las masas solo hemos utilizado que son vectores que deben estar en el plano que contiene a los vectores $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ lo que es evidente.

De esta manera, el sistema de ecuaciones escalares de movimiento es

$$\lambda_1^{(1)} + F_1^{(b1)} + F = m_1 a_1^{(1)} \quad (6.31)$$

$$\lambda_2^{(1)} + F_2^{(b1)} - m_1 g = 0 \quad (6.32)$$

$$\lambda_1^{(2)} + F_1^{(b2)} = m_1 a_1^{(2)} \quad (6.33)$$

$$\lambda_2^{(2)} + F_2^{(b2)} - m_2 g = 0 \quad (6.34)$$

Este es un sistema de 4 ecuaciones cuyas incógnitas: $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, $F_1^{(b1)}$, $F_2^{(b1)}$, $a_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$, $F_1^{(b2)}$, $F_2^{(b2)}$ y $a_1^{(2)}$ constituyen un total de diez cantidades. En verdad debería haber seis (6) incógnitas más, pero el uso de los vínculos hizo desaparecer cuatro de ellas, mientras que la suposición acerca de que las reacciones se encuentran en el plano formado por los versores $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ las eliminó.

Ahora bien, los rieles no producen rozamiento sobre los carritos (esta es una condición aproximada que se debe al montaje experimental), sabemos bien que el rozamiento es solo la componente de la fuerza de reacción paralela a la superficie de contacto, lo que nos permite colocar de inmediato: $\lambda_1^{(1)} = 0$ y $\lambda_1^{(2)} = 0$. Tenemos que destacar que esto no es una suposición extra, es una condición del problema y estaba dada desde el principio, solo estamos escribiendo la expresión matemática de la expresión “sin roce”.

Por otra parte, debemos insistir en que: de las fuerzas que la barra ejerce sobre los carritos solo podemos decir que sus componentes deben ser $F_1^{(b1)}$, $F_2^{(b1)}$, $F_1^{(b2)}$ y $F_2^{(b2)}$. No hay ninguna razón a priori para decir algo más. Sin embargo, veamos lo que ocurre si introducimos la siguiente hipótesis, las fuerzas ejercidas por la barra sobre los carritos son paralelas a la barra, esto es equivalente a decir que las fuerzas ejercidas por la barra sobre los carritos son horizontales, en cuyo caso deberíamos poner⁶ $F_2^{(b1)} = 0$ y $F_2^{(b2)} = 0$. Acá si hay algo extra, estamos introduciendo un modelo matemático para las fuerzas ejercidas por la barra, de nuevo, esto no es extra y en

⁶Más adelante veremos que condiciones físicas permiten justificar esta hipótesis

principio se puede justificar.

Tras introducir el argumento de ausencia de rozamiento y la hipótesis acerca de las fuerzas ejercidas por la barra hemos logrado eliminar cuatro de las diez incógnitas (en verdad no hemos eliminado las incógnitas, hemos encontrado sus valores usando las condiciones físicas del problema) dejándonos con el siguiente sistema de 4 ecuaciones con 6 incógnitas

$$F_1^{(b1)} + F = m_1 a_1^{(1)} \quad (6.35)$$

$$\lambda_2^{(1)} - m_1 g = 0 \quad (6.36)$$

$$F_1^{(b2)} = m_1 a_1^{(2)} \quad (6.37)$$

$$\lambda_2^{(2)} - m_2 g = 0 \quad (6.38)$$

Antes de continuar debemos hacer un comentario sumamente importante. Las condiciones sobre las reacciones y las fuerzas ejercidas por las barras que ya hemos utilizado no son vínculos ya que no son condiciones cinemáticas. Las condiciones sobre las fuerzas aparecen asociadas a nuestro entendimiento acerca de la naturaleza de las fuerzas y no de razonamientos cinemáticos.

Dos de las ecuaciones que hemos obtenido (las que nos permiten calcular las componentes no nulas de la reacción del riel sobre los carritos) se resuelven trivialmente resultando (aquí si estamos encontrando incógnitas)

$$\lambda_2^{(1)} = m_1 g \quad (6.39)$$

$$\lambda_2^{(2)} = m_2 g \quad (6.40)$$

Hemos reducido el problema al siguiente sistema de 2 ecuaciones con cuatro incógnitas (hemos colocado del lado derecho de las ecuaciones las cantidades conocidas, y del izquierdo las

desconocidas (por supuesto que las masas son conocidas)

$$F_1^{(b1)} - m_1 a_1^{(1)} = F \quad (6.41)$$

$$F_1^{(b2)} - m_1 a_1^{(2)} = 0 \quad (6.42)$$

El sistema de ecuaciones que hemos logrado establecer es todo lo que podemos decir de la situación física que se nos planteó al principio. Como el número de incógnitas es mayor al de ecuaciones no podemos hacer nada más. Harían falta al menos dos condiciones subsidiarias extra que nos permitieran reducir el número de incógnitas a cuatro. Más adelante veremos que es posible conseguir estas condiciones subsidiarias introduciendo un vínculo (la inextensibilidad de la barra), y una condición dinámica que permite relacionar $F_1^{(b1)}$ con $F_1^{(b2)}$ y que está asociada a modelar la barra

Este ejemplo contiene una lecciónes importantísima adicional. Si se siguen las reglas del juego (las leyes de Newton) juiciosa y disciplinadamente, no hay manera de equivocarse. Usted llegará limpiamente a la solución de cualquier problema que le propongan -si este tiene solución. Un colega nuestro suele decir que para triunfar como científico no hay que ser inteligente, basta con ser bruto pero disciplinado.

Ejemplo 48 Repitamos el ejemplo anterior, solo que esta vez lo presentaremos tal y como aparecería en la literatura usual. A partir de un par de dibujitos y sin dar mayores explicaciones, el conjunto inicial de ecuaciones para el sistema hubiera tenido el siguiente aspecto

$$\lambda_1^{(1)}\hat{\mathbf{e}}_1 - M_1 g \hat{\mathbf{e}}_2 + F_1^{(b1)} \hat{\mathbf{e}}_1 + F \hat{\mathbf{e}}_1 = m_1 a_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (6.43)$$

$$\lambda_1^{(2)}\hat{\mathbf{e}}_1 - M_2 g \hat{\mathbf{e}}_2 + F_2^{(b2)} \hat{\mathbf{e}}_1 = m_2 a_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1. \quad (6.44)$$

Por supuesto que este resultado está bien, es solo que en el ejemplo anterior quisimos hacerle ver el detalle de todas las consideraciones que llevan a este primer conjunto de ecuaciones. De

acá basta con reescribir el par de ecuaciones vectoriales en cuatro ecuaciones escalares y presto:

$$F_1^{(b1)} + F = m_1 a_1^{(1)} \quad (6.45)$$

$$\lambda_2^{(1)} - m_1 g = 0 \quad (6.46)$$

$$F_1^{(b2)} = m_1 a_1^{(2)} \quad (6.47)$$

$$\lambda_2^{(2)} - m_2 g = 0, \quad (6.48)$$

Todo muy corto y muy lindo. Entonces... ¿para que fastidiar con el ejemplo anterior?. Pues para mostrarle todos y cada uno de los aspectos del razonamiento que llevó hasta este punto.

6.6.1. La cuerda inextensible

Continuemos estudiando una variación del ejemplo 47, la variante consiste en cambiar la barra que une los carritos por una *cuerda inextensible*. Para los fines de este curso, la diferencia entre barras y cuerdas consiste en que las primeras sirven para halar y empujar, mientras que las segundas solo sirven para halar, ciertos detalles⁷ hacen que la discusión del segundo caso sea más sencilla.

Nuestro nuevo problema comienza por hacernos meditar acerca de la siguiente pregunta: ¿Qué contenido físico (si es que hay alguno) tiene el adjetivo “inextensible” cuando se aplica a la cuerda?.

Para contestar esta pregunta observemos que, si la longitud de la cuerda es ℓ , y las posiciones de las partículas son $x^{(1)}\hat{\mathbf{e}}_1$ y $x^{(2)}\hat{\mathbf{e}}_1$, las componentes de los vectores de posición de ambas partículas deben satisfacer la condición (una vez más, estamos frente a una ligadura holónoma)

$$x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t) = \ell. \quad (6.49)$$

⁷hay que introducir cierto lenguaje extra para distinguir entre tensión (extensión) y compresión

En otras palabras, la condición de inextensibilidad de la cuerda constituye un vínculo. Ahora bien, la condición de inextensibilidad de la cuerda se puede expresar como un vínculo⁸ Podemos tomar la derivada del vínculo de inextensibilidad para obtener

$$\dot{x}^{(1)}(t) - \dot{x}^{(2)}(t) = 0. \quad (6.50)$$

Derivando una vez más terminamos demostrando que

$$a_1^{(1)}(t) = a_1^{(2)}(t), \quad (6.51)$$

en definitiva, el vínculo de inextensibilidad nos permite eliminar una de las cuatro incógnitas del sistema de ecuaciones para quedar con el siguiente sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas (una discreta pero definitiva mejora con respecto a lo que ocurría en el ejemplo 47)

$$F_1^{(b1)} - m_1 a = F \quad (6.52)$$

$$F_1^{(b2)} - m_1 a = 0, \quad (6.53)$$

en donde, por claridad de la escritura, hemos puesto: $a_1^{(1)}(t) = a_1^{(2)}(t) = a$

En conclusión, la hipótesis de inextensibilidad de una cuerda es equivalente a un vínculo entre las aceleraciones de las partículas unidas por la cuerda. En el caso del ejemplo 47 en que estamos hablando de una barra tenemos la posibilidad de imaginar tanto extensiones como compresiones de la barra, la hipótesis de inextensibilidad debe sustituirse por la de absoluta rigidez (inextensibilidad e incompresibilidad) de la barra.

completamente esta sección con datos de elongación de cuerdas...para mostrar que tan razonable es la hipótesis de inextensibilidad

⁸otra forma de expresar el vínculo consiste en notar, que como la cuerda tiene longitud constante, los desplazamientos que sufren las partículas deben ser iguales, esto es:

$$\Delta x^{(1)}(t) = \Delta x^{(2)}(t)$$

6.7. Vínculos e ingeniería

Los vínculos no son solamente “trucos fastidiosos que los profesores de física 1 queremos preguntar en un examen”, de hecho son elementos fundamentales en el diseño en ingeniería,

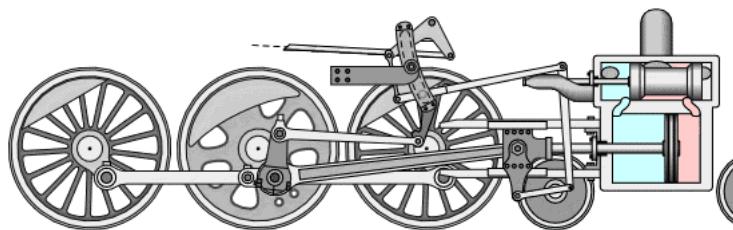


Figura 6.3: Elementos de una locomotora a vapor. Nótense las articulaciones y las barras que unen las ruedas.

Examinemos algunos elementos de una locomotora a vapor, hay un cilindro que se puede llenar con vapor a alta presión proveniente de la caldera. Dentro del cilindro se encuentra un pistón circular que se mueve hacia atrás y hacia adelante en el interior del cilindro. El vapor es admitido en el cuerpo de bomba por una válvula que obedece a la acción del maquinista y empuja al pistón hacia atrás. Hay otra válvula que no aparece en el dibujo y que permite que el vapor escape del cilindro cuando ha obligado al pistón a pasar desde un extremo al otro del cilindro. El cilindro está conectado con una barra recta denominada “tallo”. El tallo del pistón se articula con una biela que a su vez actúa sobre un perno de una de las ruedas motrices, de forma que el movimiento de vaivén del pistón y su tallo pone en movimiento a la biela y el desplazamiento de ésta provoca el movimiento rotatorio de su rueda motriz. Cuando la locomotora lleva más de un juego de ruedas motrices, todas las ruedas de cada lado se hallan acopladas entre sí por medio de una barra lateral que las obliga a girar al unísono.

Podemos pensar en algo mucho más moderno, para el diseño de un brazo robótico articulado se imponen restricciones a los movimientos de cada uno de los elementos móviles del brazo a

través de un conjunto adecuado de ejes....



Figura 6.4: En un robot articulado, los ejes y brazos se constituyen en vínculos que permiten al diseñador controlar los movimientos

6.8. Otras condiciones subsidiarias

En el ejemplo 47 y su variante que estudiamos en la sección anterior utilizamos vínculos (relaciones entre las variables cinemáticas) para eliminar algunas de las incógnitas del sistema, además utilizamos la ausencia de rozamiento para eliminar las componentes de las reacciones del riel paralelas a este ($\lambda_{||}^{(1)}$ y $\lambda_{||}^{(2)}$) e introdujimos una hipótesis acerca de las componentes verticales de las fuerzas que la barra (o la cuerda) ejercen sobre los carritos, condiciones que no constituyen ligaduras porque involucran variables dinámicas.

6.8.1. Cadena de eslabones

En esta sección vamos a estudiar en detalle un conjunto de condiciones subsidiarias que aparecen como consecuencia de condiciones físicas que por asociarse a variables dinámicas, no constituyen vínculos pero son necesarias para poder completar la resolución -al menos algebráica- de las ecuaciones de Newton. Imaginemos a un astronauta que, en estado de ingrávida, jueguea con una cadena hal'andola por sus extremos, y sean \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_N las fuerzas que el astronauta ejerce sobre los extremos de la cadena.

Ciertamente, en las condiciones que estamos describiendo, la cadena estará tensa y por lo tanto, los eslabones se alinearán a lo largo de alguna dirección. Para la situación que estamos considerando supondremos que la cadena consta de N eslabones de masas idénticas (M) y asignaremos a cada eslabón un índice identificador entero definido de tal suerte que el eslabón que constituye uno de los extremos será el eslabón #1, el que está en contacto con este será el número dos, continuando el orden creciente hasta llegar al N -ésimo eslabón que evidentemente constituye el otro extremo de la cadena.



Figura 6.5: Las fuerzas que el astronauta ejerce en los extremos de la cadena son \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_N .

En la notación que vamos a utilizar, la fuerza que el un eslabón (el m -ésimo) ejerce sobre uno de sus vecinos será $\mathbf{F}_{m,m\pm 1}$ dependiendo de si estamos considerando la fuerza ejercida sobre el eslabón que le sigue o el que le precede en la cadena. En correspondencia con esta notación las

fuerzas que se ejercen sobre el m -ésimo eslabón son las reacciones a $\mathbf{F}_{m,m\pm 1}$ y las denotaremos por $\mathbf{F}_{m\pm 1,m}$

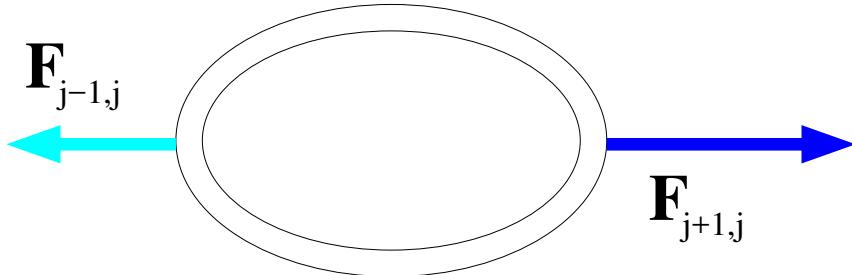


Figura 6.6: Los eslabones $j - 1$ y $j + 1$ ejercen fuerzas sobre el j -ésimo eslabón, dichas fuerzas no son necesariamente iguales y de acuerdo a la notación que seguimos en el texto son: $\mathbf{F}_{j-1,j}$ y $\mathbf{F}_{j+1,j}$.

Consideremos ahora la dinámica de un eslabón del interior de la cadena (es decir, no estamos pensando en los eslabones que constituyen los extremos de la cadena), según la notación que hemos introducido,

$$\mathbf{F}_{j-1,j} + \mathbf{F}_{j+1,j} = M \mathbf{a}_j , \quad (6.54)$$

escojamos un versor $\hat{\mathbf{u}}$ paralelo a la dirección de la cadena y orientado en el sentido en que aumenta la numeración de los eslabones. Es evidente que, dadas las condiciones del experimento (el astronauta está tensando la cadena y no hay aceleración transversal a la cuerda) podemos asegurar que:

$$\mathbf{a}_j = a_j \hat{\mathbf{u}} \quad (6.55)$$

también puede asegurarse que como la cadena está bajo tensión, las fuerzas que se ejercen sobre cada eslabón tienen la misma dirección que \mathbf{u} , y son antiparalelas entre sí, esta observación nos permite poner:

$$F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = M a_j . \quad (6.56)$$

Como consecuencia inmediata de lo que acabamos de escribir y tomando que sobre el primer eslabones actúan \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , mientras que sobre el último lo hacen \mathbf{F}_{2N} y $\mathbf{F}_{N-1,N}$ podemos construir las ecuaciones de movimiento para todos los eslabones de la cadena, en efecto, recordando que los extremos son casos especiales podemos poner:

$$F_{2,1} - F_1 = Ma_1 \quad (6.57)$$

$$F_{3,2} - F_{1,2} = Ma_2 \quad (6.58)$$

$$F_{4,3} - F_{2,3} = Ma_3 \quad (6.59)$$

...

$$F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = Ma_j \quad (6.60)$$

...

$$F_{N-1,N-2} - F_{N-3,N-2} = Ma_{N-2} \quad (6.61)$$

$$F_{N,N-1} - F_{N-2,N-1} = Ma_{N-1} \quad (6.62)$$

$$F_N - F_{N-1,N} = Ma_N, \quad (6.63)$$

Hasta acá no hay nada más que un lindo conjunto de ecuaciones.

Antes de seguir con el tema que nos interesa, notemos que la cadena es inextensible, lo que implica $a_1 = a_2 = \dots = a_N$, usando este conjunto de igualdades podemos sumar todas las ecuaciones para obtener

$$\begin{aligned} & F_N - F_{N-1,N} + F_{N,N-1} - F_{N-2,N-1} + F_{N-1,N-2} + \\ & \quad \dots + F_{j+1,j} - F_{j-1,j} + \dots \\ & \quad + F_{4,3} - F_{2,3} + F_{3,2} - F_{1,2} + F_{2,1} - F_1 = NMa. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Debido a la tercera ley de Newton esta larguísima suma contiene montones de cancelaciones, por ejemplo $F_{N,N-1} - F_{N-1,N} = 0$, al seguir este conjunto de cancelaciones terminamos con

$$F_N - F_1 = NM. \quad (6.65)$$

Este último resultado es muy bello en verdad, expresa que, la cadena en su conjunto se comporta como una sola partícula de masa NM sobre la que actúan las dos fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2

Volvamos nuestra atención al tema en que estamos realmente interesados: la construcción de condiciones subsidiarias. Con este objetivo introducimos una hipótesis física, digamos que la masa de los eslabones de la cadena es despreciable ($M \approx 0$). Bajo esta hipótesis el sistema de ecuaciones asociado a la dinámica de los eslabones se simplifica y solo queda

$$F_{2,1} - F_1 = 0 \quad (6.66)$$

$$F_{3,2} - F_{1,2} = 0 \quad (6.67)$$

$$F_{4,3} - F_{2,3} = 0 \quad (6.68)$$

...

$$F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = 0 \quad (6.69)$$

...

$$F_{N-1,N-2} - F_{N-3,N-2} = 0 \quad (6.70)$$

$$F_{N,N-1} - F_{N-2,N-1} = 0 \quad (6.71)$$

$$F_N - F_{N-1,N} = 0, \quad (6.72)$$

Acaba de ocurrir algo muy bonito, la hipótesis física que introdujimos tiene como consecuencia que las magnitudes de todas las fuerzas del interior de la cadena son iguales ya que $\forall j$ $F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = 0$ ó $F_{j+1,j} = F_{j-1,j}$. Como antes podemos sumar todas las ecuaciones para obtener finalmente

$$F_N - F_1 = 0. \quad (6.73)$$

En otras palabras, la hipótesis de ausencia de masa de los eslabones ha llevado a concluir que las fuerzas que el astronauta ejerce en los extremos de la cadena tienen que ser de la misma magnitud y de sentidos opuestos.

Pensando en las reacciones a estas fuerzas, es decir, en las fuerzas que los extremos de la cadena ejercen sobre las manos del astronauta, podemos concluir que

Teorema 9 *Cuando una cadena tensa sin masa ejerce fuerzas sobre dos objetos colocados en sus extremos estas fuerzas serán de igual magnitud y sentidos opuestos.*

Para terminar nuestro estudio de la cadena de eslabones ligeros Es necesario enfatizar que,

Observación 10 *las fuerzas que los extremos de la cadena ejercen sobre los objetos a que están unidos no constituyen pares de acción y reacción.*

6.8.2. La cuerda sin masa

Los resultados de la sección anterior se pueden repetir casi exactamente con una cuerda. Sin embargo, hay un par de modificaciones sobre la que queremos llamar la atención.

La primera de las modificaciones comienza por notar que una cuerda de longitud ℓ se puede pensar como una cadena de eslabones cuyo número crece indefinidamente ($N \rightarrow \infty$) mientras que su longitud ($\Delta\ell$) se hace cada vez menor de manera que el producto $N\Delta\ell$ permanezca constante ($N\Delta\ell = \ell$). Dicho en otros términos, la longitud de cada eslabón se hace infinitesimal y la masa de cada eslabón por separado desaparece como concepto siendo sustituida por una cantidad (μ) que representa la masa por unidad de longitud de cuerda⁹, en términos de μ , la masa de un elemento infinitesimal cuerda de longitud $d\ell$ es infinitesimal y está dada por

$$dm = \mu d\ell. \quad (6.74)$$

La otra modificación también est'a relacionada con el cambio de un conjunto discreto de eslabones por un conjunto continuo de puntos en la cuerda. En lugar del índice entero para nombrar a cada eslabón se hace necesario pensar en un número real para asignar un nombre, o

⁹ μ se denomina densidad lineal de masa

lo que es lo mismo, para localizar a cada punto de la cuerda. Sea x este número real. x deberá ser 0 en un extremo de la cuerda y ℓ en el otro. Ahora podemos pensar en un elemento infinitesimal de cuerda uno de cuyos extremos está en la coordenada x mientras que el otro se encuentra en la coordenada $x + dx$, podemos considerar las fuerzas que actúan sobre el elemento de cuerda, escribir las ecuaciones de movimiento para este compararlas con las expresiones que utilizamos para la cadena. Observando que la longitud del elemento de cuerda es dx y considerando que la cuerda se encuentra en un ambiente libre de gravedad, la ecuación de movimiento para la cuerda es

$$\mathbf{T}(x) + \mathbf{T}(x + dx) = \mu \mathbf{a}(x; t)dx . \quad (6.75)$$

En esta expresión \mathbf{T} es la “tensión” y $\mathbf{a}(x; t)$ es la aceleración del elemento de cuerda.

hay que decir más cosas acerca de la tensión...es una fuerza distribuída...como se ejerce...pintar el dibujito...etc

Utilizando una base adecuada los argumentos asociados a la alineación de la cuerda llevan de inmediato a

$$T(x + dx) - T(x) = \mu a dx , \quad (6.76)$$

ahora bien, podemos reescribir esta ecuación como

$$\frac{T(x + dx) - T(x)}{dx} = \mu a , \quad (6.77)$$

el lado izquierdo de la igualdad es la derivada de T , de manera, que si la masa por unidad de longitud de la cuerda es cero (aproximación de cuerda sin masa) resulta

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0 , \quad (6.78)$$

es decir, la magnitud de la tensión es la misma a lo largo de toda la cuerda.

6.8.3. Poleas

Las poleas son “máquinas simples” de gran aplicabilidad. En primera aproximación podemos modelar a las poleas como objetos no solo carentes de radio sino carentes de masa, esta

aproximación tiene una consecuencia que no es posible demostrar con los elementos a nuestra disposición pero que será explicada con todo detalle cuando estudiemos la mecánica de los cuerpos rígidos. La consecuencia es la siguiente:

Una polea sin masa permite modificar la dirección en que una cuerda ideal que pasa a través de la polea puede aplicar tensión sin causar cambio alguno en la magnitud de la tensión en punto alguno de la cuerda.

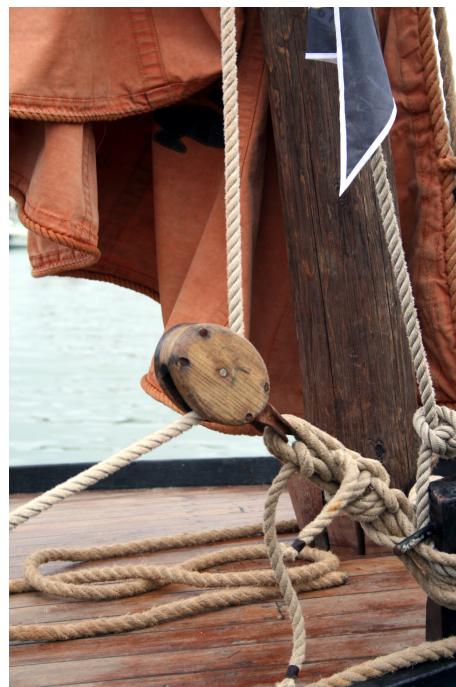


Figura 6.7: Las poleas son máquinas simples de uso sumamente extendido, en esta figura vemos una aplicación náutica en que la polea se está utilizando para cambiar la dirección de una tensión

6.9. Más aplicaciones de las leyes de Newton

En esta sección presentaremos varios ejemplos en que aplicaremos todas las ideas que hemos discutido hasta este punto, vínculos y condiciones dinámicas. Como siempre, le recomendamos seguir estos ejemplos juiciosamente.

Ejemplo 49 *En la figura no hay roce entre la mesa y la masa que se encuentra colocada sobre ella. Encuentre la aceleración del bloque atado a la cuerda Sobre m_1 solo actúan la atracción*

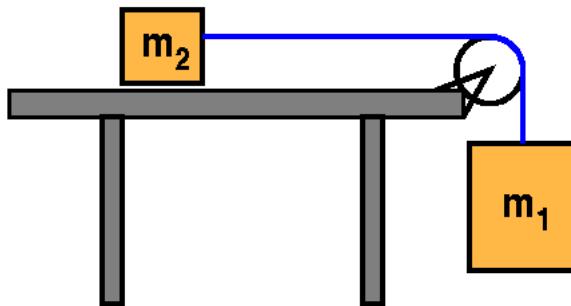


Figura 6.8:

gravitacional de la tierra (\mathbf{T}_1) y la tensión \mathbf{T}_1). Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre el bloque que se encuentra sobre la mesa son: la tensión (\mathbf{T}_2) que la cuerda ejerce sobre el bloque, su peso (\mathbf{W}_2) y la fuerza de contacto que la mesa ejerce sobre m_2 ($\mathbf{\Lambda}$). En consecuencia, las ecuaciones de movimiento vectoriales de ambos cuerpos son

$$\mathbf{\Lambda} + \mathbf{W}_2 + \mathbf{T}_2 = m_2 \mathbf{a}_2 \quad (6.79)$$

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{W}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 . \quad (6.80)$$

Consideremos ahora un par de vectores ortonormales $\hat{\mathbf{e}}_{||}$ (paralelo a la mesa y orientado hacia la derecha de la figura) y $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ vertical y orientado hacia arriba. Con esta base del plano las

fuerzas y aceleraciones se expresan como

$$\mathbf{a}_2 = a_2 \hat{\mathbf{e}}_{||} \quad (6.81)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_{||} \hat{\mathbf{e}}_{||} + \lambda_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (6.82)$$

$$\mathbf{W}_2 = -m_2 g \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (6.83)$$

$$\mathbf{T}_2 = T_2 \hat{\mathbf{e}}_{||} \quad (6.84)$$

$$\mathbf{a}_1 = a_1 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (6.85)$$

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (6.86)$$

$$\mathbf{W}_1 = -m_1 g \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (6.87)$$

Donde las componentes T_1 , T_2 , $\lambda_{||}$, λ_{\perp} a_1 y a_2 son números reales por determinar.

Ahora bien, como no hay fricción entre el bloquecito y la superficie $\lambda_{||} = 0$, además, al considerar el vínculo de inextensibilidad $a_1 = -a_2 = a$, finalmente, la hipótesis de cuerda muy ligera (sin masa) implica $T_2 = T = T_1$. Sustituyendo estos resultados intermedios obtenemos

$$\Lambda_{\perp} - m_2 g = 0 \quad (6.88)$$

$$T = m_2 a \quad (6.89)$$

$$T - m_1 g = -m_1 a; \quad (6.90)$$

en definitiva,

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g. \quad (6.91)$$

En términos vectoriales, la aceleración de la masa que cuelga de la cuerda es

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} g \hat{\mathbf{e}}_{\perp}, \quad (6.92)$$

vale la pena discutir algunos límites, si $m_2 \rightarrow 0$ la masa que cuelga (m_1) se comporta como si estuviera en caída libre. Mucho más interesante es el caso en que m_2 se hace muy grande, en

efecto, reescribiendo a en la forma

$$a = \frac{m_1}{m_2(1 + \frac{m_1}{m_2})} g, \quad (6.93)$$

se hace evidente que si m_2 se hace muy grande muy respecto a m_1 la expresión queda como

$$a = \frac{m_1}{m_2} g \rightarrow 0, \quad (6.94)$$

resultado que es esperable porque la masa no es otra cosa que la resistencia a ser acelerado.

Podemos pensar en muchísimas variantes del ejemplo anterior. Comentaremos algunas.

Ejemplo 50 En la situación de la figura 6.8 el sistema permanece en reposo. ¿Cuál será la fuerza de roce que la masa m_1 ejerce sobre la mesa?

En este caso, las ecuaciones de movimiento en forma vectorial son exactamente iguales a las del ejemplo 49. Ahora bien, las aceleraciones de ambas partículas son nulas y tenemos que mantener la componente $\lambda_{||}$ de la reacción sobre la masa m_1 , de acuerdo a esto, las ecuaciones de movimiento en forma escalar son

$$\Lambda_{\perp} - m_2 g = 0 \quad (6.95)$$

$$T + \lambda_{||} = 0 \quad (6.96)$$

$$m_1 g - T = 0 \quad (6.97)$$

y de allí podemos encontrar de inmediato:

$$\lambda_{\perp} = m_2 g \lambda_{||} = -m_1 g \quad (6.98)$$

ahora bien Λ es la reacción que la mesa ejerce sobre m_2 , de manera que $-m_1 g \hat{\mathbf{e}}_1$ es el roce que la mesa ejerce sobre m_2 , en consecuencia el roce que m_2 ejerce sobre la mesa es $m_1 g \hat{\mathbf{e}}_1$

Ejemplo 51 Otra variante del ejemplo 49 en que podemos pensar consiste en sustituir la mesa por una superficie sin rozamiento que forma un ángulo θ con la horizontal. Una vez más las ecuaciones vectoriales son idénticas

$$\Lambda + \mathbf{W}_2 + \mathbf{T}_2 = m_2 \mathbf{a}_2 \quad (6.99)$$

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{W}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 \quad (6.100)$$

la modificación se hace manifiesta al utilizar la forma escalar de estas ecuaciones. Al descomponer la primera ecuación en sus componentes paralela y ortogonal a la superficie ($\mathbf{e}_{||}$ es en sentido de subida y \mathbf{e}_{\perp} apunta hacia la “arriba” resulta

$$\lambda_{||} - m_2 g \operatorname{sen} \theta + T = m_2 a_{||} \quad (6.101)$$

$$\lambda_{\perp} - m_2 g \cos \theta = 0 \quad (6.102)$$

$$T - m_1 g = m_1 a_1 \quad (6.103)$$

Acá hemos usado que la magnitud de las tensiones es la misma en ambos extremos de la cuerda y hemos sido consistentes en que $\hat{b}f\mathbf{e}_y$ es un versor antiparalelo a la gravedad.

Una vez más, el vínculo de inextensibilidad implica $a_{||} = -a_1 = a$ lo que nos deja con

$$\lambda_{||} - m_2 g \operatorname{sen} \theta + T = m_2 a \quad (6.104)$$

$$\lambda_{\perp} - m_2 g \cos \theta = 0 \quad (6.105)$$

$$T - m_1 g = -m_1 a \quad (6.106)$$

al imponer la condición de roce cero obtenemos finalmente:

$$m_1 g - m_2 g \operatorname{sen} \theta g = (m_1 + m_2) a \quad (6.107)$$

es decir

$$a = \frac{m_1 - m_2 \operatorname{sen} \theta}{m_1 + m_2} g. \quad (6.108)$$

Acá hay dos casos límites de interés, cuando $\theta \rightarrow 0$ se recupera el ejemplo 49, el caso $\theta \rightarrow 90^0$ debería corresponder a dos masas que cuelgan de una cuerda que pasa por una polea (estudie ese problema y verifique lo que acabamos de decir).

Ejemplo 52 La figura xxhx Muestra un sistema compuesto por dos bloques y un par de poleas. Las masas de los bloques son M_1 (el bloque que desliza sobre el plano inclinado) y M_2 blah blah...

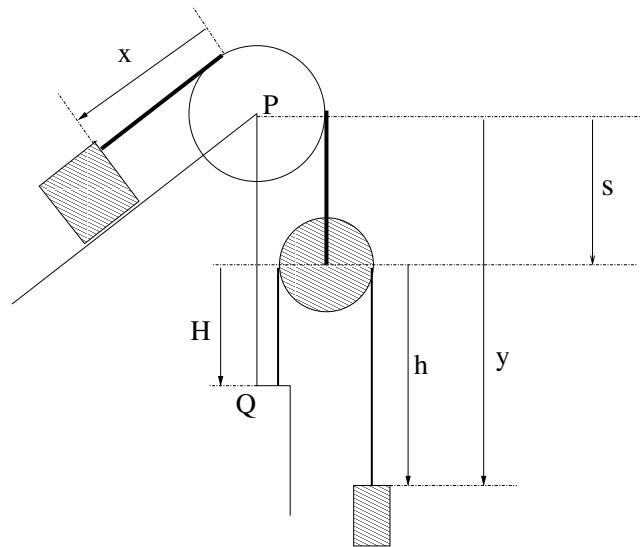


Figura 6.9: xxxxxx

Para resolver el problema debemos comenzar por notar ciertas relaciones geométricas

$$h + H = \ell_2 \quad (6.109)$$

$$x + s = \ell_1 \quad (6.110)$$

$$H + s = PQ \quad y \quad (6.111)$$

$$y - s = h \quad (6.112)$$

Al sustituir 6.109 y 6.111 en 6.112 obtenemos

$$y = 2s + \ell_2 - PQ \quad (6.113)$$

que gracias a 6.110 implica el vínculo

$$y = -2x + \ell_2 - \ell_1 - PQ \quad (6.114)$$

que tratado adecuadamente da como resultado la siguiente relación

$$\ddot{y} = -2\ddot{x} \quad (6.115)$$

xxxxxxxx

$$M_1 g \operatorname{sen} \theta - T_1 = M_1 \ddot{x} \quad (6.116)$$

$$M_2 g - T_2 = M_2 \ddot{y} \quad (6.117)$$

$$T_1 - 2T_2 = M_p \ddot{s} \quad (6.118)$$

En la aproximación en que la masa de la polea ($M_p = 0$), las tensiones obedecen la relación. Finalmente, utilizando que $M_2 = \eta M_1$

$$M_1 g \operatorname{sen} \theta - T_1 = M_1 \ddot{x} \quad (6.119)$$

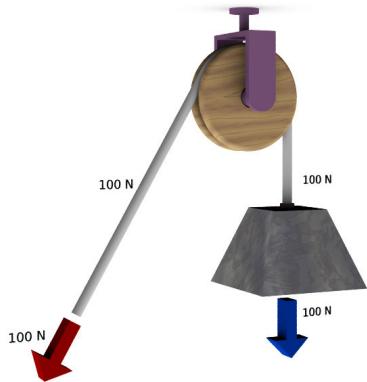
$$\eta M_1 g - \frac{T_1}{2} = -2\eta M_1 \ddot{x} \quad (6.120)$$

de donde obtenemos finalmente,

$$\ddot{x} = -\frac{2\eta - \operatorname{sen} \theta}{4\eta + 1} g \quad (6.121)$$

6.9.1. Poleas y ventaja mecánica

Como ya hemos comentado, las poleas son máquinas simples (en el mismo sentido en que lo son las palancas).



La polea fija es la configuración más elemental que existe. Un cálculo elemental demuestra que (en la aproximación de polea sin masa) la fuerza con que hay que halar de la cuerda es igual al peso del objeto que se desea elevar, a pesar de esto el uso de la polea permite aplicar la fuerza en una dirección más conveniente que la vertical pura que habría que utilizar para levantar el peso sin el uso de la polea.

La polea móvil es una configuración mucho más interesante que de hecho ya estudiamos en el ejemplo 52. Una vez más la aproximación de ausencia de masa permite demostrar que la fuerza que se requiere para levantar un peso de magnitud W es de magnitud $F = W/2$. A la relación W/F se le denomina ventaja mecánica, y para la polea simple móvil es 2 (podemos levantar algo cuyo peso supere en un factor de 2 a la mayor fuerza que podamos ejercer).



La idea de la polea móvil puede generalizarse conectando varias poleas en una configuración sumamente interesante conocida como polipasto (del latín *polyspaston*) o aparejo, un polipasto consiste en dos grupos de poleas, uno de poleas fijas y otro de poleas móviles del que se cuelga la carga que deseamos levantar. No debería ser difícil notar que la ventaja mecánica de un polipasto es igual al número de segmentos de cuerda que pasan por las poleas móviles. Por supuesto que uno debe pagar un precio por la ventaja mecánica, el precio está relacionado con el vínculo de inextensibilidad de la cuerda, la velocidad con la que sube la carga está en

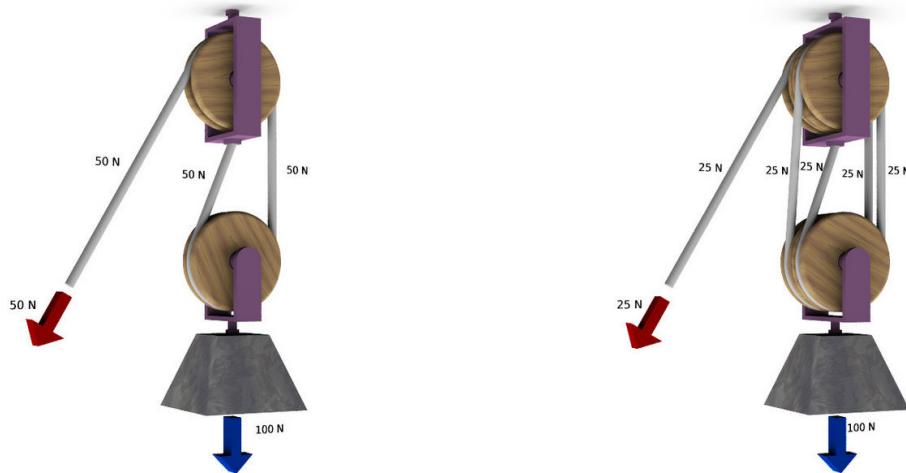


Figura 6.10: Un polipasto simple y uno doble. Las ventajas mecánicas son 2 y 4 respectivamente

proporción inversa a la ventaja mecánica (porque para que la carga se eleve una longitud s el punto de aplicación de la fuerza debe desplazarse N veces s donde N es el número de segmentos de cuerda que pasan por el grupo móvil).

6.9.2. Rozamiento

6.10. Problemas

1. Un cuerpo de masa m se mueve a lo largo del eje X de acuerdo a la *ley horaria*

$$\mathbf{r}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \hat{\mathbf{e}}_x ,$$

(donde A , ω_0 y ϕ) son constantes.

- a) Calcule la fuerza que actúa sobre el cuerpo en función de su posición.
 - b) ¿Cuál es el sentido de la fuerza cuando x es (i) positivo y (ii) negativo?.
 - c) ¿Puede encontrar alguna relación entre la fuerza y la posición?
2. Un cuerpo se mueve a lo largo del eje X . La componente x de la fuerza resultante sobre un objeto de masa m es $F = F_0 - \kappa t$, donde F_0 y κ son constantes positivas con las dimensiones adecuadas y t es el tiempo. Encuentre fórmulas para la velocidad y la posición si las condiciones iniciales del movimiento son $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$.
3. Sobre una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta (que tomaremos como eje x) actúa una fuerza cuya única componente depende de la posición de la partícula, esto es: $F_x = f(x)$.

- a) Utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{dx}{dt}$$

- b) Usando la segunda ley de Newton y el resultado anterior para que demuestre que

$$m \frac{v^2}{2} = \int_{x_0}^x f(s) ds + m \frac{v_0^2}{2}$$

donde v_0 es la velocidad de la partícula en el punto x_0 .

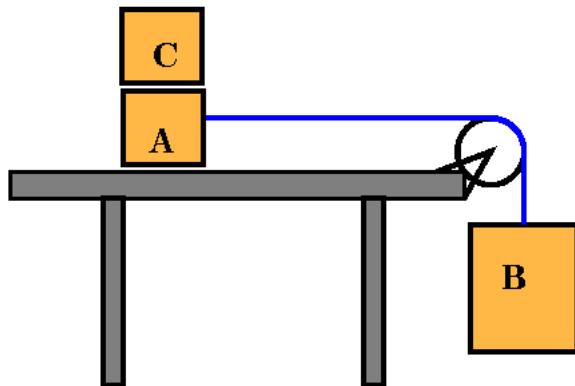
4. Un cuerpo inicialmente en reposo en $x_0 > 0$ se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza $\mathbf{F} = -k/x^2 \hat{\mathbf{e}}_x$ (donde k es una constante positiva) y $x > 0$.
- ¿Cuáles son las dimensiones SI de k ?
 - Demuestre que, su rapidez en la posición $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{e}}_x$ es
- $$v^2 = \frac{2k}{m} [1/x - 1/x_0] .$$
5. Un cuerpo cuya masa es de 2 kg se desplaza sobre una superficie horizontal sin rozamiento bajo la acción de una fuerza horizontal de magnitud $F = 55 + t^2$ donde F se expresa en Newtons y t en segundos. Si el cuerpo parte del reposo y la fuerza es paralela al vector $\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y)$, ¿Cuál será su velocidad a los 5 s de iniciado el movimiento?
6. Un hombre cuya masa es de 90 kg se encuentra en un ascensor. Determine la fuerza que ejerce el piso sobre el hombre cuando:
- El ascensor asciende con velocidad uniforme,
 - El ascensor baja con velocidad uniforme
 - El ascensor acelera hacia arriba a 3 m/s^2
 - El ascensor acelera hacia abajo a 3 m/s^2
 - El cable se rompe y el ascensor cae libremente
7. Un objeto puntual se sujetó al techo de un vagón de tren por medio de un hilo. Cuando el tren comienza a moverse la partícula se desplaza de manera tal que -al alcanzar el equilibrio- el ángulo que el hilo forma con la vertical es θ .
- ¿cuál es la aceleración del tren?.

- b) El metro de Caracas alcanza su velocidad de crucero (unos 70 Km/h) en aproximadamente 10 s, ¿cuál sería el valor aproximado de θ si se hace el experimento?.

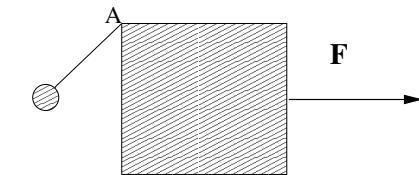
Nota: Como siempre, hay que tratar de hacer contacto con la realidad. El experimento se puede hacer y es muy sencillo, vale la pena probar solo para convencerse de que la física es bastante más que *fórmulas*. Para no ser tildado de *loquito* se puede usar una bolso con una agarradera larga. Uno puede guardar los “dáticos ^{experimentales} obtenidos para -más adelante, en este mismo curso- estimar la potencia de los motores del metro y ver cuánto se gasta solo en la electricidad que hay que usar para moverlo.

8. *Sobre un bloque de masa M situado en un plano inclinado (no hay fricción entre el bloque y el plano inclinado) actúa una fuerza horizontal de tal magnitud que el bloque remonta la pendiente con velocidad constante. Conociendo que el ángulo que el plano inclinado hace con la horizontal es de θ calcule la magnitud de la fuerza.
9. *Dos cuerpos de masas M_1 y M_2 están colocados sobre una mesa horizontal sin rozamiento están unidos por una cuerda ideal. Otro cuerpo de masa M_3 cuelga unido al cuerpo de masa M_2 por medio de otra cuerda que pasa a través de una *polea sin masa*. Encuentre
- la aceleración del cuerpo que cuelga.
 - las tensiones en las cuerdas.
10. En la figura adjunta la masa del bloque A es de 4,4 kg y la de B es de 2,9 kg. Los coeficientes de fricción estático y cinético entre el bloque A y la mesa son 0,18 y 0,15 respectivamente.
- ¿Cuál debe ser la mínima masa de C que permite que el sistema permanezca en reposo?.

- b) El bloque C se levanta súbitamente, ¿cuál es la aceleración del bloque A ?



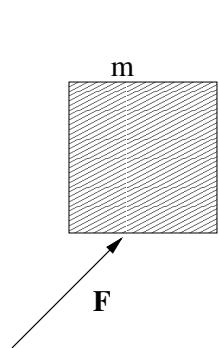
11. *Una caja de masa $M = 10 \text{ Kg}$ se desplaza sobre un plano horizontal sin rozamiento. Sobre M actúa una fuerza horizontal \vec{F} como se muestra en la figura. Una cuerda inextensible y de masa despreciable tiene un extremo sujeto al punto A de la caja, mientras que de su otro extremo se sujetó una masa $m = 2 \text{ Kg}$.



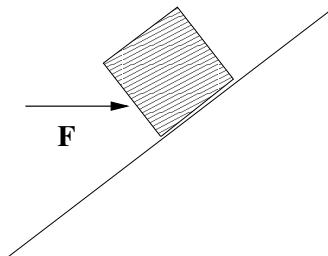
- a) Hallar el módulo de la fuerza \vec{F} para que durante el movimiento, la cuerda permanezca tensa formando un ángulo de 60° con la vertical.
- b) Calcular la fuerza que ejerce la cuerda sobre M .

12. *Un cuerpo de masa $m = 5 \text{ Kg}$ puede deslizar sin rozamiento a lo largo de una pared vertical. Sobre m se aplica una fuerza de módulo 200 N que forma un ángulo de 30° con

la horizontal como muestra la figura. Inicialmente m tiene una velocidad hacia arriba de módulo $||\vec{v}_0|| = 4 \text{ m/s}$

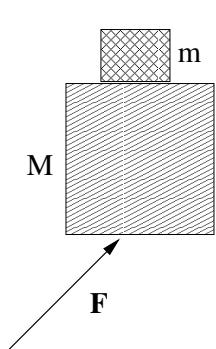


- a) Hallar la fuerza que ejerce la pared sobre m .
- b) Hallar la velocidad de m después de transcurridos 2 s .
13. *Un cuerpo de masa $m = 8 \text{ Kg}$ se desplaza sin rozamiento sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. Sobre m actúa una fuerza horizontal de módulo 100 N . Sabiendo que inicialmente m tiene una velocidad de 4 m/s hacia arriba

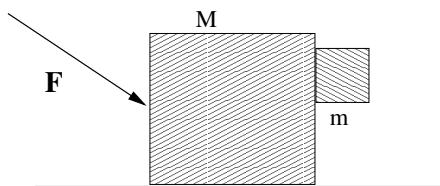


- a) Halle la fuerza que ejerce el plano inclinado sobre m .
- b) Halle la velocidad de m después de transcurridos 5 s .
14. *El cuerpo de masa $M = 10 \text{ Kg}$ puede desplazarse sobre una pared vertical rugosa sujeto a la acción de una fuerza \vec{F} de módulo 200 N como indica la figura. Sobre M se apoya otro

cuerpo de masa $m = 2 \text{ Kg}$, separado de la pared. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre la pared y M son $\mu_e = 1/2$ y $\mu_d = 1/4$ respectivamente. **Inicialmente el sistema se encuentra en reposo.**



- a) Hallar la fuerza de rozamiento que ejerce la pared sobre M y la reacción de m sobre M cuando el ángulo $\phi = 30^\circ$
- b) Calcular la aceleración de m cuando $\phi = 60^\circ$.
15. *Un cuerpo de masa $M = 5 \text{ Kg}$ puede deslizar sin rozamiento sobre un plano horizontal. Sobre M actua una fuerza de módulo 200 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. M empuja a otro cuerpo de masa m que se encuentra separado del plano horizontal. Entre m y M hay rozamiento de coeficientes estático y dinámico $\mu_e = 1/2$ y $\mu_d = 1/4$ respectivamente. **Inicialmente el sistema parte del reposo.**

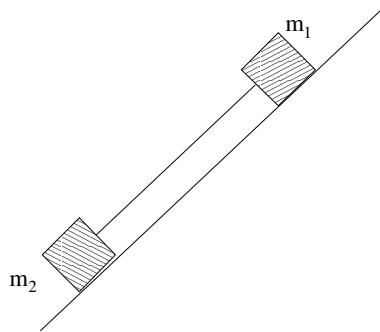


- a) Hallar la aceleración de M y las fuerzas que ejerce m sobre M cuando $m = 1 \text{ Kg}$.

- b) Hallar la aceleración de m en el instante inicial cuando $m = 3 \text{ Kg}$
16. *Un bloque de masa $M = 4 \text{ Kg}$ puede deslizar sin rozamiento sobre un plano horizontal. Sobre los extremos de M se apoyan dos cuerpos de masas iguales $m = 2 \text{ Kg}$, como se indica en la figura. Sobre el bloque de la derecha se aplica una fuerza de módulo 20 N que forma 60° con la horizontal. Entre el bloque de la izquierda y M no hay rozamiento, mientras que entre el bloquero de la izquierda y M hay rozamiento de coeficientes estático y dinámico $\mu_e = 1/2$ y $\mu_d = 1/4$ respectivamente. Inicialmente el sistema se encuentra en reposo.
-
- a) Demostrar que el bloque de la izquierda se desprende de M , mientras que el de la derecha se mueve solidariamente con M .
- b) Hallar la aceleración de M .
- c) Calcular la reacción del cuerpo de la izquierda sobre M .
17. *Un sistema formado por dos masas ($m_1 = 6 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ Kg}$) unidas por una cuerda ideal se está deslizando hacia la base de un plano inclinado que forma un ángulo de 60° con la horizontal. Los coeficientes de fricción entre las masas m_1 y m_2 y el plano inclinado son μ_1 y μ_2 respectivamente.

Encuentre la tensión en la cuerda en los casos

a) $\mu_1 = 0,4$ y $\mu_2 = 0,2$



- b) $\mu_1 = 0,1$ y $\mu_2 = 0,4$
- c) Interprete físicamente sus resultados.
18. Una plomada está unida a un punto de soporte en un techo por una cuerda inextensible y sin masa, inicialmente la plomada está en reposo y la cuerda hace un ángulo distinto de cero con la posición de equilibrio. La plomada se libera y comienza a moverse controlada tanto por la gravedad como por la cuerda, cuando la plomada pase por la posición de equilibrio puede afirmarse que el módulo de la tensión en la cuerda
- Es igual a la magnitud del peso de la plomada.
 - Es mayor a la magnitud del peso de la plomada.
 - Es menor a la magnitud del peso de la plomada.
 - No es posible establecer alguna comparación con la magnitud del peso de la plomada.
19. **Para los Aficionados al Paracaidismo:** Un paracaidista se deja caer desde un helicóptero suspendido en el aire. Experimentalmente se ha determinado que la magnitud de la fuerza de roce entre el aire y el paracaidista es proporcional a la rapidez de este último (la constante de proporcionalidad se denomina k).

- a) Encuentre una fórmula para la velocidad del paracaidista en función del tiempo.
- b) Demuestre que el paracaidista alcanza una rapidez máxima.

Capítulo 7

Cinemática III

hay que modificar este capítulo para unificarlos con el teorema 7 (significado de las componentes longitudinal y transversa de la aceleración) del capítulo 3 (cinemática)

también hay que unificar con la vaina de que la velocidad es tangente a la trayectoria

7.1. Introducción

Hasta este momento hemos estudiado la cinemática y la dinámica de unos cuantos problemas en los cuales lo sencillo de la geometría nos ha sido de gran ayuda. En aplicaciones más realistas, el modelado de situaciones físicas puede complicarse enormemente y una de las causas de las complicaciones puede ser algo tan simple como un cambio en la geometría de una trayectoria. En los ejemplos y problemas que hemos estudiado hasta este punto siempre ha resultado que aquellos más engorrosos han sido los asociados a movimientos curvilíneos (circulares por ejemplo).

En este capítulo vamos a estudiar una técnica que permite simplificar muchos de estos problemas con el sencillo mecanismo de utilizar un sistema de coordenadas adaptado especialmente a la geometría de los movimientos que queremos estudiar.

7.2. La Base de Vectores Móviles

Consideremos una partícula puntual que describe una trayectoria circular de radio R como muestra la figura 7.2

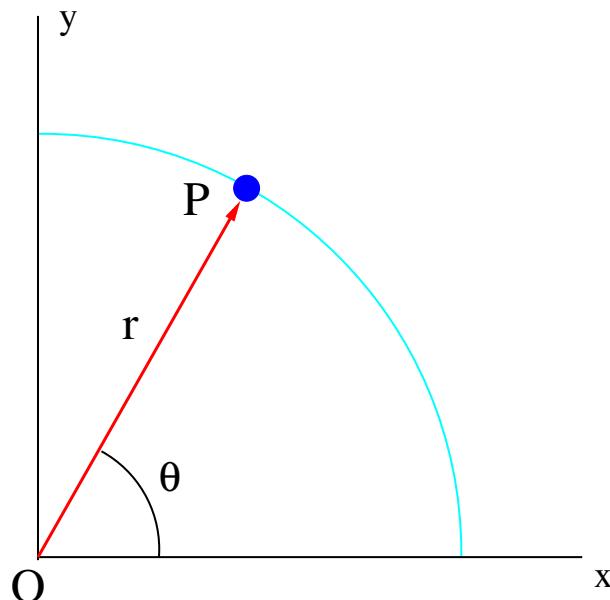


Figura 7.1: $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula P que se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio R , como la magnitud de $\mathbf{r}(t)$ es constante ($|\mathbf{r}(t)| = R$), toda la dependencia en el tiempo debe aparecer únicamente en el ángulo (θ que en el diagrama hemos escogido como el ángulo que el vector de posición de P hace con el eje x .

Un ejercicio elemental de geometría, con el que ya deberímos tener bastante experiencia, nos permite expresar el vector de posición en la forma:

$$\mathbf{r}(t) = R \{ \cos[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_x + \sin[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_y \} . \quad (7.1)$$

Es facil darse cuenta de que podemos reescribir el vector de posición en la forma

$$\mathbf{r}(t) = R \hat{\mathbf{u}}_r(t) \quad (7.2)$$

donde el vector $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$ está dado por

$$\hat{\mathbf{u}}_r(t) \equiv \cos[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_x + \sin[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_y , \quad (7.3)$$

arriesgándonos a estar llamando la atención sobre algo obvio notemos que $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$ es un vector que tiene tres propiedades:

1. *es un vector unitario*
2. *en cada instante de tiempo $\hat{\mathbf{u}}_r$ es paralelo al vector de posición \mathbf{r} y en consecuencia:*
3. *es un vector variable (su dependencia en el tiempo es implícita ya que está asociada al hecho de que $\hat{\mathbf{u}}_r$ depende en forma explícita del angulo θ).*

En vista de la última de estas propiedades tiene sentido plantearse el cálculo de la derivada temporal de $\hat{\mathbf{u}}_r$, cuyo resultado es el siguiente:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \{ -\sin[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_x + \cos[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_y \} , \quad (7.4)$$

esta expresión contiene dos factores. El primero ($\dot{\theta}$) proviene de la aplicación de la regla de la cadena para la diferenciación de funciones compuestas, mientras que el segundo, a saber, el vector:

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \equiv -\sin[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_x + \cos[\theta(t)] \hat{\mathbf{e}}_y \quad (7.5)$$

es un nuevo versor variable que tambien posee propiedades bonitas, a saber

1. al igual que su pariente $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$, es un vector unitario dependiente del tiempo.
2. $\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)$ es ortogonal al vector $\hat{\mathbf{u}}_r(t)$
3. La orientación de $\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)$ es en el sentido en que aumenta el ángulo θ .

La segunda de estas propiedades es la más evidente y podemos verificarla de dos maneras. En primer lugar y recordando lo que ya hemos estudiado en varios problemas $\hat{\mathbf{u}}_r$ es un vector de módulo constante y por lo tanto su derivada ($\dot{\mathbf{u}}_r$) tiene que ser ortogonal a $\hat{\mathbf{u}}_r$, como $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ es proporcional a la derivada de $\hat{\mathbf{u}}_r$ tiene que ser ortogonal a este. La otra prueba consiste en calcular el producto escalar entre ambos versores y se deja como ejercicio.

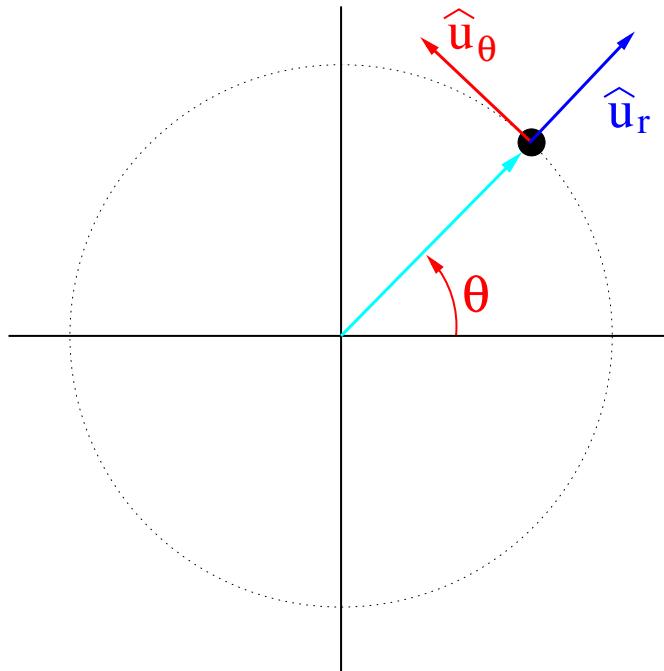


Figura 7.2: Los vectores polares $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$. Nótese que se deben entender como vectores móviles cuyo origen está localizado en el punto en que se encuentra la partícula

Ahora bien¹, como $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ son vectores ortonormales constituyen una base del plano, de manera que todo vector \mathbf{B} en el plano $x - y$ puede escribirse como combinación lineal de ambos vectores, es decir, en la forma

$$\mathbf{B} = b_r \hat{\mathbf{u}}_r + b_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (7.6)$$

En este punto vale la pena calcular la derivada temporal de $\hat{\mathbf{u}}_\theta$, el resultado es sencillo,

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} [\cos\theta \hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_y] = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (7.7)$$

En resumen, la base de vectores del plano que hemos construído, denominada base de vectores polares, está constituida por un par versores ortogonales dependientes del tiempo $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ que satisfacen las siguientes relaciones diferenciales.

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}}_r = \dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (7.8)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (7.9)$$

Por cierto, estas propiedades son válidas independientemente de la manera de escoger el ángulo polar (θ), podríamos haberlo definido como el ángulo que el vector de posición forma con el eje y o cualquier otra cosa (con sentido, por supuesto).

7.3. Movimiento circular

7.3.1. Velocidad y aceleración en la base móvil

Estamos interesados en encontrar expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula en movimiento circular. Para ello utilizaremos los vectores que acabamos de introducir y las relaciones entre ellos. Recordando que la posición de la partícula está dada por

$$\mathbf{r} = R \hat{\mathbf{u}}_r \quad (7.10)$$

¹de ahora en adelante y solo para simplificar las fórmulas no escribiremos explícitamente la dependencia en t

y diferenciando obtenemos:

$$\mathbf{v} = R \dot{u}_r = R \dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (7.11)$$

como bien sabemos, la velocidad es tangente a la trayectoria lo que queda claramente evidenciado en la fórmula que acabamos de encontrar, en que la velocidad es proporcional al vector $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ que efectivamente es tangente al círculo de radio R . La cantidad $R \dot{\theta}$ no es otra cosa que la componente de la velocidad a lo largo del vector $\hat{\mathbf{u}}_\theta$, la cantidad $\dot{\theta}$, la tasa de cambio instantánea del ángulo θ se denomina *velocidad angular*, y el producto $R \dot{\theta} \mathbf{u}_r$ a veces se denomina *velocidad tangencial*².

Derivando la velocidad (\mathbf{v}) se obtiene la siguiente expresión para la aceleración de un movimiento circular:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = R \frac{d\dot{\theta}}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta + R \dot{\theta} \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\theta, \quad (7.12)$$

es decir,

$$\mathbf{a} = -R \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{u}}_r + R \ddot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (7.13)$$

El primer término ($-R \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{u}}_r$) radial y con sentido hacia el centro de coordenadas, es denominado *aceleración centrípeta*, mientras que el segundo ($R \ddot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta$) es conocido como aceleración tangencial, por cierto la magnitud de la aceleración centrípeta también se puede expresar como v^2/R de manera que la aceleración en un movimiento circular se puede expresar como

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{u}}_r + R \ddot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (7.14)$$

Es muy interesante comparar los resultados que hemos obtenido con la interpretación de la aceleración que presentamos en la sección 3.5, para ello, queremos dar una interpretación física a cada uno de los términos que aparecen en la fórmula 7.13, en aquella sección aparecían

²este nombre es bastante desafortunado porque la velocidad siempre es tangente a la trayectoria, y en movimientos más generales la velocidad también tiene una componente radial, es decir, a lo largo del vector $\hat{\mathbf{u}}_r$

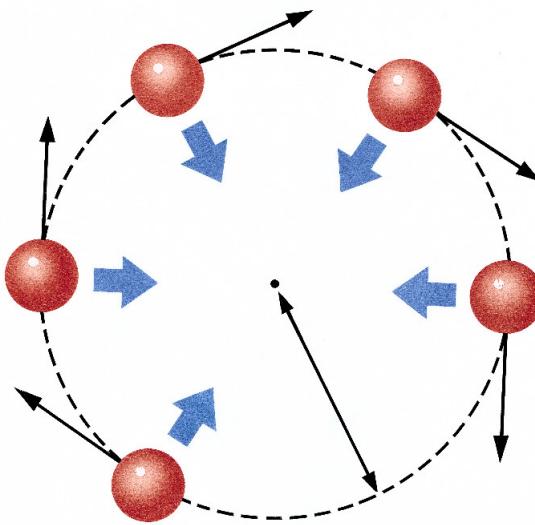


Figura 7.3: Aun cuando la tasa de rotación ó velocidad angular $\dot{\theta}$ sea constante, el cambio en dirección de la velocidad implica que en un movimiento a lo largo de una trayectoria circular siempre hay aceleración

dos objetos que puden haber parecido algo oscuros en ese momento, a saber las aceleraciones paralela ($\mathbf{a}_{||}$) y ortogonal (\mathbf{a}_{\perp} a la velocidad, en el caso del movimiento circular estos objetos son naturales, de hecho podemos leerlos directamente de la fórmula 7.13,

$$\mathbf{a}_{\perp} = -R \dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r \quad (7.15)$$

$$\mathbf{a}_{||} = R \ddot{\theta} \mathbf{u}_{\theta} \quad (7.16)$$

Lo primero que salta a la vista es que la cantidad $R \dot{\theta}^2$ que aparece en \mathbf{a}_{\perp} son no negativos, y por lo tanto, la aceleración centrípeta no solo es radial, sino que su sentido es hacia el centro del movimiento, por lo tanto, y de acuerdo a lo ya habíamos aprendido en la sección 3.5 el efecto de la aceleración centrípeta esnicamente cambiar la dirección del movimiento para mantener la trayectoria circular, la aceleración tangencial por otra parte, es la responsable de los posibles

cambios en la magnitud de la velocidad. Veamos el cálculo que exhibe explícitamente estas afirmaciones, con este fin, y al igual que hicimos en el caso general, es menester comparar la velocidad de la partícula en dos instantes muy cercanos t y $t + \Delta t$

En vista de que \mathbf{a} es la aceleración instantánea y de que Δt es un intervalo temporal muy corto podemos poner

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t + \Delta t) &\approx \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(t) \Delta t = \\ &= \mathbf{v}(t) + \left\{ -R(\dot{\theta}(t))^2 \hat{\mathbf{u}}_r(t) + R\ddot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \right\} \Delta t,\end{aligned}\quad (7.17)$$

reagrupando los términos de manera adecuada podemos poner

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = R \left\{ \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t) \Delta t \right\} \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) - R(\dot{\theta}(t))^2 \Delta t \hat{\mathbf{u}}_r(t)$$

en esta fórmula resulta evidente que $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ y $\mathbf{v}(t)$ no son paralelos debido a la presencia del término $-R(\dot{\theta}(t))^2 \Delta t \hat{\mathbf{u}}_r(t)$, dicho en otros términos, la aceleración centrípeta es efectivamente la componente de la aceleración responsable del cambio de dirección de la velocidad instantánea.

Por otra parte, si calculamos el cuadrado de la rapidez en el instante $t + \Delta t$ ($v^2(t + \Delta t)$):

$$v^2(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{v}(t + \Delta t) \quad (7.19)$$

resulta:

$$v^2(t + \Delta t) = R^2 \left\{ \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\Delta t \right\} + (\text{términos})(\Delta t)^2 \quad (7.20)$$

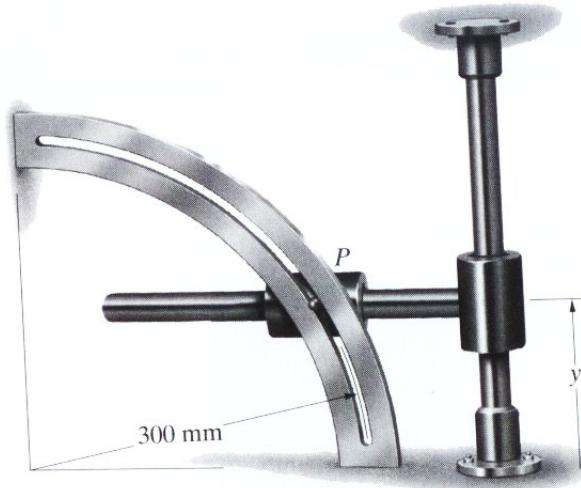
donde la expresión $(\text{términos})(\Delta t)^2$ engloba a todos los términos con un factor Δt^2 que -por ser Δt un intervalo muy corto- son despreciables. En definitiva

$$v^2(t + \Delta t) \approx R^2 \left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\Delta t \right) \quad (7.21)$$

fórmula en que se aprecia que los cambios en la rapidez provienen única y exclusivamente de la aceleración tangencial (si $\ddot{\theta} = 0$ no hay modificación en la magnitud de la velocidad).

7.3.2. Ejemplos

Ejemplo 53 El objetivo de este ejemplo consiste en convencerle de las ventajas de utilizar las coordenadas polares. La figura muestra dos collarines conectados entre si. Uno de ellos está obligado a moverse a lo largo de una guía circular por medio de un pasador. En el instante que se muestra (t_0), $y(t_0) = y_0 = 150 \text{ mm}$, $\dot{y}(t_0) = v_{0y} = 300 \text{ mm/s}$ y $\ddot{y}(t_0) = a_{0y} = 0$. ¿Cuales son las magnitudes de la velocidad y la aceleración del pasador que obliga al primer collarín a moverse sobre un círculo?. Es evidente que si echamos mano de la geometría del dispositivo y



colocamos el origen en el centro de la pieza, el vector \mathbf{r} de posición del pasador que se mueve en arco y el ángulo θ que \mathbf{r} hace con la horizontal podemos utilizar coordenadas polares para expresar la posición del pasador como

$$\mathbf{r} = R \hat{\mathbf{u}}_r, \quad (7.22)$$

donde $R = 300 \text{ mm}$.

Por otra parte, debido a los vínculos impuestos por las guías, la altura del pasador (y) que se mueve a lo largo de la guía vertical es igual a la del primer pasador, es decir:

$$y(t) = R \sin\theta(t). \quad (7.23)$$

por lo tanto, en el instante que nos interesa ($\theta(t_0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t_0) = \omega_0$ y $\ddot{\theta}(t_0) = \alpha_0$)

$$y_0 = R \sin \theta_0 = 150 \quad (7.24)$$

$$v_{0y} = -R \omega_0 \cos \theta_0 = 200 \text{ mm/seg} \quad (7.25)$$

$$a_{0y} = -R (\alpha_0 \cos \theta_0 + \omega_0^2 \sin \theta_0) = 0 \quad (7.26)$$

Estas ecuaciones nos permiten determinar los valores de θ_0 , ω_0 y α_0 . Evidentemente, $\sin \theta_0 = 1/2$ (lo que implica que $\cos \theta = \sqrt{3}/2$ y quedamos con

$$\omega_0 = -\frac{v_{0y}}{R \cos \theta_0} \quad (7.27)$$

$$\alpha_0 = -\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \omega_0^2 \quad (7.28)$$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$\omega_0 = -\frac{300 \times 2}{300 \sqrt{3}} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,73 \text{ s}^{-1} \quad (7.29)$$

$$\alpha_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{4}{3} = 0,77 \text{ s}^{-2} \quad (7.30)$$

Ahora bien, ya hemos aprendido a calcular las expresiones polares para la velocidad y la aceleración de un movimiento circular utilizando la base de vectores móviles: fórmulas 7.11 y 7.13. De dichas fórmulas se obtienen sin problema los valores de la rapidez y la magnitud de la aceleración del pasador que se encuentra en la guía circular

$$v = |R\dot{\theta}| \quad (7.31)$$

$$|\mathbf{a}|^2 = R^2 \ddot{\theta}^2 + R^2 \dot{\theta}^4 \quad (7.32)$$

Sustituyendo los valores numéricos que hemos encontrado antes, encontramos que las magnitudes de la velocidad y la aceleración del pasador que se mueve en la guía circular son $\dot{s} = 519 \text{ mm/s}$ y $a =$

Observe cuidadosamente que, a pesar de que el pasador que se encuentra en la guía vertical no esta acelerando en el instante que nos interesa, el otro si acelera aun cuando hay un vínculo entre ambos (sus alturas respecto al piso son las mismas en todo instante). Esto le podría parecer extraño, pero no lo es. Recuerde que el pasador de que nos estamos ocupando se mueve en una trayectoria circular y que esto obliga (aún si no hubiera acelercación angular) a un cambio de la velocidad en cada instante es decir a la presencia de aceleración.

7.4. Movimiento general en el plano

7.4.1. Coordenadas polares

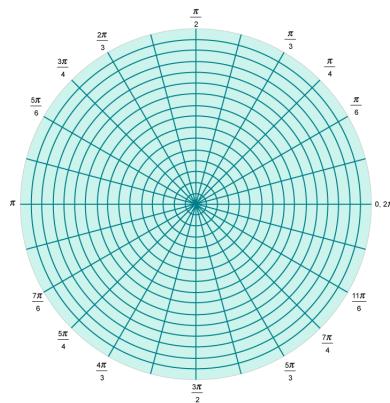


Figura 7.4: Las coordenadas polares en el plano no son más que una malla constituida por círculos concéntricos y líneas radiales. Al dar un par de números r y θ estamos localizando el punto de intersección entre un círculo y una línea radial. Los vectores de la base polar son tangentes a estas líneas coordenadas curvas

Consideremos ahora un movimiento general en el plano. Es claro que si se escoge un origen fijo, la posición de la partícula expresada en los sistemas de coordenadas cartesiano y polar

será:

$$\mathbf{r} = x(t)\hat{\mathbf{e}}_x + y(t)\hat{\mathbf{e}}_y = r \hat{\mathbf{u}}_r \quad (7.33)$$

donde ahora debemos entender que el factor r (la magnitud del vector de posición de la partícula) es variable en general. Este es el momento adecuado para destacar que las coordenadas cartesianas (x, y) están siendo sustituidas por un nuevo conjunto de variables (r, θ) que se conocen como coordenadas polares de la partícula.

Usando las propiedades de la base polar estudiadas en la sección 7.2 podemos expresar la velocidad de la partícula en la forma

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (7.34)$$

el factor \dot{r} que aparece en el primer término de la igualdad 7.34 es la tasa de cambio de la distancia entre la partícula y el origen de coordenadas. Derivando una vez más y reordenando un poco los términos, encontramos que la aceleración en coordenadas polares está dada por:

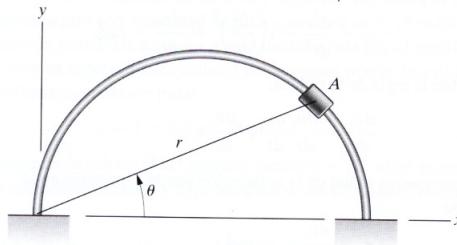
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{u}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (7.35)$$

Vale la pena observar que si el módulo del vector de posición es constante es decir si consideramos un movimiento circular $r(t) = R$ las fórmulas que acabamos de encontrar se reducen a las que encontramos en la sección 7.3.

Ejemplo 54 El collarín (*A*) de la figura se desliza sobre una guía circular. La posición radial del collarín está dada por $r = 2 \cos \theta$ m. En el instante representado $\theta = 25^\circ$ y $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$, y $\ddot{\theta} = 0$.

Encuentre la velocidad y la aceleración del pasador.

Esta situación física es muy divertida, a pesar de que el movimiento del pasador es circular no se ha escogido al centro del círculo como origen de coordenadas, lo que trae como consecuencia que el radio no sea constante. De todas maneras, la posición del collarín está dada por



la fórmula

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r , \quad (7.36)$$

con $r = R \cos \theta$ ($R = 2\text{ m}$). También conocemos la expresión general para la velocidad (fórmula 7.34) que al sustituir $\dot{r} = -R\dot{\theta} \sin \theta$ produce el resultado:

$$\mathbf{v} = -R\dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = R\dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta = R\dot{\theta} (-\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) . \quad (7.37)$$

A primera vista este resultado es algo extraño, el movimiento es circular y uno espera que la velocidad sea tangente a la trayectoria y... hasta donde sabemos $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es el vector tangente al círculo, ¿qué está pasando?

La respuesta es sencillísima, estamos cometiendo la “torpeza” de utilizar coordenadas polares cuyo centro no coincide con el centro del arco circular constituido por la guía sobre la que se desplaza el collarín y por lo tanto, ni el vector radial $\hat{\mathbf{e}}_r$ corresponde con las radiales de la guía ni el vector $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ a su vector tangente. De hecho, el vector unitario tangente a la guía no es otro que

$$\hat{\mathbf{e}}_{||} = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta . \quad (7.38)$$

Podemos calcular \ddot{r} sin mayor dificultad para sustituirlo en la fórmula general 7.35 obteniéndose

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta} (-\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) - 2R\dot{\theta}^2 (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) . \quad (7.39)$$

De nuevo tenemos algo inusual, el vector que acompaña al segundo sumando de esta expresión. Ahora bien, una inspección rápida nos convencerá de que este vector es ortogonal a $\hat{\mathbf{e}}_{||}$, y

por lo tanto paralelo a los radios de la guía, mientras que una investigación algo más cuidadosa nos hará notar que además el vector está orientado hacia afuera. Estas consideraciones nos permiten expresar la aceleración como:

$$\mathbf{a} = -2R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + R\ddot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_{||}. \quad (7.40)$$

Sin duda alguna esta última fórmula se parece mucho a nuestra vieja fórmula para un movimiento circular, sin embargo aún hay algo raro, en el primer término no aparece R sino $2R$ mientras que el segundo término si tiene una apariencia convencional.

Una vez más las cosas simples siempre tienen explicaciones simples. El ángulo θ que se define en la figura no está medido desde el centro del círculo. Denotemos por ϕ al ángulo que forman el eje x y un radio de la guía que pase por el collarín, no es difícil demostrar que θ y ϕ están relacionados por el vínculo

$$\phi = 2\theta, \quad (7.41)$$

por otra parte, la cantidad R que aparece en la fórmula $r = R \cos\theta$ no es el radio de la guía, de hecho, es su diámetro (basta con notar que cuando $\theta = 0$ el collarín está a distancia R del origen de las coordenadas polares y que tal distancia es el diámetro de la guía).

En vista de nuestras observaciones más recientes, si llamamos R_G al radio de la guía, podemos cambiar R por $2R_G$ y θ y sus derivadas por $\phi/2$ y sus derivadas en todas las fórmulas para obtener finalmente:

$$\mathbf{a} = -2(2R_G)\left(\frac{d\phi/2}{dt}\right)^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + (2R_G)\frac{d^2\phi/2}{dt^2} \hat{\mathbf{e}}_{||}, \quad (7.42)$$

es decir,

$$\mathbf{a} = -R_G\dot{\phi}^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + R_G\ddot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{||}. \quad (7.43)$$

expresión en que reconocemos perfectamente los términos de aceleración tangencial y centrípeta de un movimiento circular de radio R_G .

7.5. Círculo osculador y movimiento en el plano

El ejemplo 54 nos permite llamar la atención sobre un resultado general muy interante sobre el que queremos llamar la atención. Puede demostrarse que en cada punto (Q) de una curva suave en el plano puede construirse un único círculo tangente que se caracteriza por constituir el círculo tangente a la curva que mejor la aproxima en Q , este objeto geométrico es denominado *círculo osculador* a la curva en Q . En cada punto de su trayectoria el movimiento

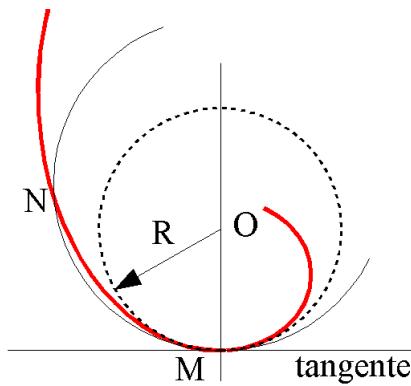


Figura 7.5: En la figura se muestran dos círculos tangentes a la curva coloreada. El círculo de centro O y radio R que toca a la curva en M es el círculo osculador, el otro, que corta a la curva en N es de radio mayor y no aproxima tan bien a la curva como el círculo osculante

de una partícula puede describirse en términos de cantidades asociadas al círculo osculador de la trayectoria en el punto (P) considerado de manera que la velocidad y la aceleración de la partícula pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_T \quad (7.44)$$

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + \dot{v} \hat{\mathbf{e}}_T . \quad (7.45)$$

donde v y R son la rapidez de la partícula y el radio del círculo osculador en P (denominado radio de curvatura de la curva en P) mientras que $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ y $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ son el versor tangente a la curva

que es paralelo a la velocidad de la partícula y un vector ortogonal que es paralelo al radio del círculo osculador que une su centro con la partícula.

Capítulo 8

Aplicaciones de las Leyes de Newton II

Ejemplo 55 El ejemplo anterior es de cinemática pura, en este nuevo ejemplo vamos a emplear la tecnología que estamos estudiando para atacar un problema de dinámica.

Un péndulo simple no es otra cosa que una masa suspendida de un techo por un cable ideal y que realiza un movimiento en un plano.

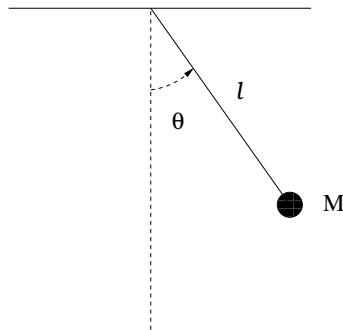


Figura 8.1: El Péndulo. Observe que ya hemos escogido el sentido en que mediremos el ángulo θ .

Es claro que las únicas fuerzas que actúan sobre el péndulo son el peso y la fuerza ejercida

por el cable, de manera que la segunda ley de Newton para este sistema es sencillamente:

$$\mathbf{T} + \mathbf{w} = M\mathbf{a} \quad (8.1)$$

Para enfrentar el problema debemos expresar la tensión, el peso y la aceleración como combinaciones lineales de una base del plano del movimiento. Con este fin escogemos el origen de coordenadas en el punto de suspensión del péndulo y utilizamos coordenadas polares. La ten-

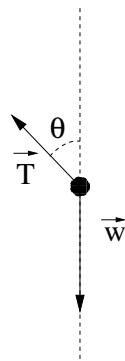


Figura 8.2: El diagrama de cuerpo libre para M

sión está dirigida a lo largo del cable de suspensión, y en consecuencia es radial, por lo tanto: $\mathbf{T} = T \hat{\mathbf{u}}_r$ donde T es una incógnita del problema. El peso se puede descomponer en la base polar sin mayor problema y se obtiene:

$$\mathbf{w} = M g (\cos\theta \hat{\mathbf{u}}_r - \sin\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta) \quad (8.2)$$

Por otra parte, si usamos el argumento de que la cuerda es inextensible podemos asegurar que el movimiento de la masa es a lo largo de un arco de círculo de radio ℓ , de manera que su aceleración está dada por la fórmula

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{u}}_r + \ell\ddot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (8.3)$$

En definitiva, en la base polar la segunda ley de Newton para M se expresa como:

$$(T + M g \cos\theta) \hat{\mathbf{u}}_r - M g \sin\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta = M \left[-\ell\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{u}}_r + \ell\ddot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right] \quad (8.4)$$

de donde siguen inmediatamente las ecuaciones de movimiento

$$T + Mg \cos\theta = -M\ell\dot{\theta}^2 \quad (8.5)$$

$$-Mg \sin\theta = M\ell\ddot{\theta} \quad (8.6)$$

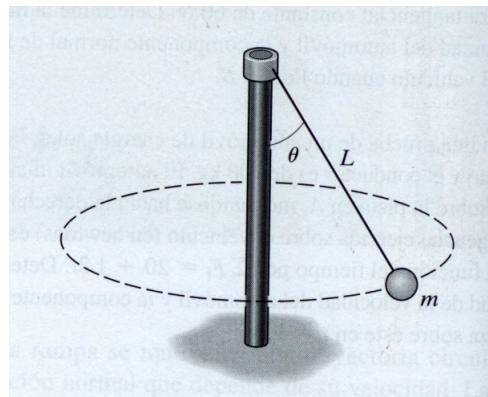
que se pueden reescribir en la forma:

$$T = -M \left(g \cos\theta + \ell\dot{\theta}^2 \right) \quad (8.7)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta \quad (8.8)$$

que son las ecuaciones de movimiento para el péndulo

Ejemplo 56 La figura adjunta muestra un pequeño cuerpo que, suspendido por un cable, lleva a cabo un movimiento circular con velocidad angular constante ω . Encuentre (i) la velocidad angular que permite que ángulo que forman el cable de suspensión y la vertical sea θ y (ii) la tensión en el cable.



Para resolver el problema es conveniente introducir un triángulo ortonormal móvil muy conectado con la base $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta)$ con que hemos estado trabajando. En la notación que vamos a utilizar

el triedo está formado por los vectores $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}, \hat{\mathbf{z}})$. El tercer vensor corresponde al vector unitario a lo largo del eje z , y los otros dos tienen la misma interpretación que $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta)$, con la salvedad de que el ángulo de giro alrededor del eje z se denomina convencionalmente ϕ .

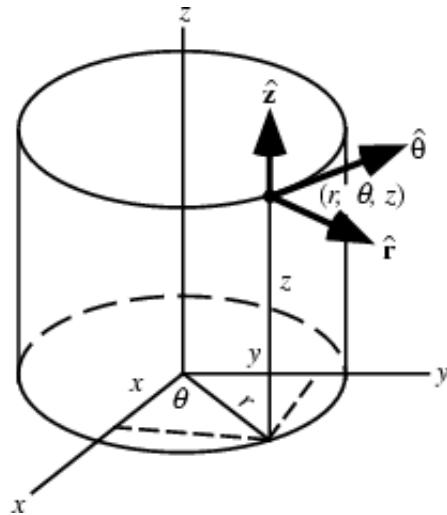


Figura 8.3: La base móvil cilíndrica $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}, \hat{\mathbf{z}})$

El movimiento del cuerpo que estamos estudiando es circular, ocurre en un plano de altura z constante y la velocidad angular es constante, por lo tanto la aceleración de m es: $R\omega^2\hat{\mathbf{r}}$ donde R es el radio del círculo. Por otra parte, las únicas fuerzas que actúan sobre m son solo el peso y la tensión ejercida sobre el cable de manera que podemos asegurar que:

$$-mR\omega^2\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + \mathbf{W}, \quad (8.9)$$

donde R está dado por $R = L \sin\theta$. Al descomponer las fuerzas en términos de la base móvil resulta

$$\mathbf{W} = -mg\hat{\mathbf{z}} \quad (8.10)$$

$$\mathbf{T} = T(\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}). \quad (8.11)$$

De acuerdo a nuestros resultados parciales, la ecuación de movimiento del cuerpo es sencillamente

$$T (\operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{r}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}) - mg \hat{\mathbf{z}} = -m R \omega^2 \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.12)$$

esto implica

$$T \cos\theta = -mg \quad (8.13)$$

$$T \operatorname{sen}\theta = -m L \operatorname{sen}\theta \omega^2. \quad (8.14)$$

De acá se obtiene que para que el ángulo que el cable hace con la vertical sea θ se requiere una tasa de rotación

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos\theta}}, \quad (8.15)$$

este resultado es muy interesante ya que se nota claramente que si se pretende que θ se acerque a los 90° es menester que la tasa de rotación (ω) sea enorme.

Finalmente, la fuerza que el cable ejerce sobre el cuerpo es

$$\mathbf{T} = -mg [\tan(\theta) \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{z}}], \quad (8.16)$$

este resultado también resulta muy interesante, cuando $\omega = 0$ (es decir, si no hay movimiento), la magnitud de la tensión es igual a mg , esto es esperable ya que en tal caso el cable compensa exactamente la gravedad. Ahora bien, cuando ω crece también lo hace el ángulo y en consecuencia la magnitud de la tensión crece sin cota haciéndose infinita en el límite en que $\theta = 90^\circ$

8.1. Un problema importante

Este problema-ejemplo le dotará de nuevas herramientas matemáticas que serán de utilidad cuando estudie el oscilador armónico (el último tema de este curso).

Imagine un experimento educativo realizado en el interior del transbordador espacial durante un viaje orbital. Una guía recta está adaptada a un mecanismo que la hace rotar en un plano a tasa uniforme ω_0 . Un collarín colocado en la guía puede deslizarse a lo largo de esta sin rozamiento. Nuestra intuición nos dice que la tendencia del collarín es moverse alejándose del centro de rotación.

No tenemos al transbordador espacial a nuestra disposición, pero podemos llevar a cabo un *Gedankenexperiment* (un experimento mental), utilizando nuestros conocimientos de mecánica Newtoniana para “observar” el movimiento del collarín y confirmar (ó desechar) nuestra intuición.

Nuestras primeras observaciones teóricas son las siguientes,

1. Desde el punto de vista cinemático, el movimiento el collarín solo tiene una variable independiente: la distancia al centro de rotación de la guía porque el ángulo polar que podría interesarnos está restringido, es decir, hay un vínculo ya que el movimiento del collarín ocurre con velocidad angular constante: $\dot{\theta} = \omega_0$
2. Desde el punto de vista dinámico, la única fuerza que actúa sobre el collarín es la reacción que sobre dicho objeto ejerce la guía (Λ).

Recurriendo a las coordenadas polares y recordando que no hay roce podemos expresar la reacción como $\Lambda = \lambda_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta$ lo que lleva nos permite escribir inmediatamente las ecuaciones de movimiento (m es la masa del collarín):

$$0 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (8.17)$$

$$\lambda_\theta = 2m\dot{r}. \quad (8.18)$$

Al sustituir $\dot{\theta} = \omega_0$ en la primera de las ecuaciones queda

$$\ddot{r} = \omega^2 r. \quad (8.19)$$

Ahora bien, esta es una ecuación en que la incógnita es una función ($r(t)$) aparece diferenciada, una ecuación así se denomina ecuación diferencial, de hecho,

Definición 44 *Seam $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_n$ constantes reales, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable a todo orden, la ecuación*

$$a_N \frac{d^N u}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = f(t) \quad (8.20)$$

se denomina ecuación diferencial ordinaria lineal ordinaria no homogénea de orden N a coeficientes constantes. Si $f = 0$ la ecuación se llama homogénea

El estudio de las ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes es fundamental en muchas áreas de las ciencias y la ingeniería. Se utilizan por ejemplo en los circuitos eléctricos, teoría de control, algunos modelos biológicos, ingeniería mecánica, etc.

De acuerdo con la definición 44, la ecuación 8.19 es una *ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea a coeficientes constantes*

Existe varias técnicas¹ estandar para resolver las ecuaciones que obedecen la definición 44. Una de dichas técnicas proviene de notar que la única manera de que una función sea solución de 8.19 es que su derivada segunda sea, al menos, proporcional a la función. La función más sencilla (no constante) que posee esta característica es por supuesto la función exponencial.

De acuerdo a la idea que acabamos de exponer se propone una solución de la forma $r(t) = e^{\lambda t}$ en calidad de prueba. La segunda derivada temporal de esta función es $\lambda^2 e^{\lambda t}$, así que al sustituir la solución “adivinada” en la ecuación 8.19 obtenemos:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = \omega_0^2 e^{\lambda t}. \quad (8.21)$$

¹Los métodos operatoriales de O. Heaviside, el método del polinomiocharacterístico, la reducción de orden, transformada de Laplace, T. de Fourier, etc.

Ahora bien, las exponenciales no se anulan nunca lo que permite asegurar que la igualdad solo es posible si

$$\lambda^2 = \omega_0^2. \quad (8.22)$$

Es decir, $\lambda = \pm\omega_0$, esto tiene una implicación algo curiosa, las funciones

$$r_+(t) = e^{\omega_0 t} \quad \text{y} \quad (8.23)$$

$$r_-(t) = e^{-\omega_0 t}, \quad (8.24)$$

son dos soluciones muy distintas de la ecuación diferencial 8.19 lo que lleva a las preguntas: ¿cuál solución utilizaremos? y ¿cómo decidimos?.

Afortunadamente los matemáticos han estudiado estos problemas desde hace varios siglos, de hecho, los mismísimos Newton y su rival Leibniz se toparon con las ecuaciones diferenciales. De hecho, usted ya ha tenido algún encuentro con ellas cuando ha calculado una primitiva, ya que al poner $f(x) = \int dx u(x) + C$ usted está resolviendo la ecuación diferencial $f'(x) = u(x)$.

Examinemos lo que los matemáticos han descubierto usando las herramientas de que disponemos. La primera observación que podemos hacer es la siguiente, si A y B son constantes la función $r(t) = A r_+(t) + B r_-(t)$ también es una solución de la ecuación 8.19, esto nos lleva directamente a una segunda observación, si tuviéramos un conjunto de varias soluciones $r_1(t)$, $r_2(t)$, ... $r_N(t)$ la combinación lineal de soluciones

$$r(r) = A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t) + \dots + A_N r_N(t), \quad (8.25)$$

formada con las N constantes A_1, A_2 , también sería una solución. ¡Que lindo!, hemos demostrado que el conjunto de las soluciones de la ecuación 8.19 constituyen un espacio vectorial. Más aún, los matemáticos han demostrado rigurosamente que el conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes de orden p constituyen un espacio de vectores de dimensión p .

El resultado general de matemáticas aplicado a la ecuación

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0, \quad (8.26)$$

constituye un espacio vectorial de dos dimensiones. En otra palabras, si conseguimos dos soluciones $r_1(t)$ y $r_2(t)$ de la ecuación que no sean proporcionales² podremos expresar la solución más general posible de la ecuación 8.26 en la forma:

$$r(r) = A_1 r_1(t) + A_2 r_2(t). \quad (8.27)$$

¡Caray! esto ya lo hicimos, las soluciones $r_{\pm}(t) = e^{\pm\omega_0 t}$ no son proporcionales así que de acuerdo con los descubrimientos rigurosos que acabamos de comentar, la solución más general posible de la ecuación de movimiento radial del collarín que estamos estudiando es:

$$r(r) = A_+ e^{\omega_0 t} + A_- e^{-\omega_0 t}. \quad (8.28)$$

Ahora que ya conocemos una fórmula general para el movimiento radial del collarín volvamos a nuestro experimento mental.

¿Qué es lo único que podemos hacerle al collarín que nos interesa?, pues lanzarlo desde alguna posición de la guía, esto es, darle un empujón en algún punto de la guía. Matemáticamente esto se expresa diciendo que lo único que podemos hacer al collarín es asignarle un par de condiciones iniciales:

$$r(0) = r_0 \quad v(0) = v_0. \quad (8.29)$$

Al evaluar la posición y la velocidad radiales en $t = 0$, es decir, al sustituir $t = 0$ en la solución general 8.28 e igualar a las condiciones iniciales 8.29 obtenemos

$$A_+ + A_- = r_0 \quad (8.30)$$

$$A_+ - A_- = v_0/\omega_0 \quad (8.31)$$

²es decir, si encontramos una base del espacio vectorial

de este sistema de ecuaciones se obtiene

$$A_+ = \frac{r_0 + v_0/\omega_0}{2}, \quad A_- = \frac{r_0 - v_0/\omega_0}{2} \quad (8.32)$$

de acuerdo a estos resultados parciales, la solución completa al problema de condiciones iniciales que nos hemos planteado es

$$r(t) = \frac{r_0 + v_0/\omega_0}{2} e^{\omega t} + \frac{r_0 - v_0/\omega_0}{2} e^{-\omega t}, \quad (8.33)$$

que podemos reexpresar en la forma

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{senh}(\omega_0 t). \quad (8.34)$$

Esta fórmula contiene los resultados de nuestro *Gedankenexperiment*. Para hacer las observaciones experimentales debemos recordar que dada la formulación del problema que estamos estudiando, el radio r_0 no puede ser negativo (representa la distancia al centro de rotación) adicionalmente, el tiempo también debe ser no negativo, es decir: $t \geq 0$. Dicho esto, notemos que para $r \neq 0$ existen tres posibilidades para el movimiento, (i) $v_0 = 0$, (ii) $v_0 > 0$ y claro $v_0 < 0$.

El primer caso corresponde a colocar al collarín en un punto de la guía sin dotarle de velocidad radial y la solución se reduce a

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega_0 t). \quad (8.35)$$

pero el coseno hiperbólico es una función creciente no negativa para todos los valores de $t > 0$ así que con estas condiciones iniciales el collarín se aleja del centro con rapidez radial $\dot{r} = r_0 \omega_0 \operatorname{senh}(\omega_0 t)$ que también es una función de crecimiento exponencial, es decir, el collarín se aleja del centro con rapidez creciente.

En el segundo caso, las cosas no cambian mucho ya que tanto el seno como el coseno hiperbólico son exponencialmente crecientes para valores positivos de t y sencillamente ocurre que el movimiento del collarín es centrífugo pero con rapidez inicial no nula.

El tercero y último caso es el más interesante, y corresponde a lanzar al collarín hacia el centro. En esta primera versión de este texto en que no vamos a incluir gráficos del problema en estudio hay que poner unos grafititos para poder explicar las cosas en detalle nos limitaremos a que: independientemente de la rapidez inicial, no es posible hacer llegar el collarín al centro. La prueba es sencilla. Sea t_c el instante en que el collarín alcance el centro de rotación. En ese caso

$$r_0 \cosh(\omega_0 t_c) + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{senh}(\omega_0 t_c) = 0 \quad (8.36)$$

$$r_0 \omega_0 \operatorname{senh}(\omega_0 t_c) + v_0 \cosh(\omega_0 t_c) = u \quad (8.37)$$

con algún valor no negativo de u .

Podemos despejar v_0 de la primera ecuación para obtener

$$v_0 = -r_0 \omega_0 \frac{\cosh(\omega_0 t_c)}{\operatorname{senh}(\omega_0 t_c)}, \quad (8.38)$$

este resultado es negativo y por lo tanto luce prometedor (claro, para hacer llegar el collarín hasta el centro hay que tratar de lanzarlo hacia allá, al sustituir este resultado en la segunda ecuación resulta

$$r_0 \omega_0 \operatorname{senh}(\omega_0 t_c) - r_0 \omega_0 \frac{\cosh^2(\omega_0 t_c)}{\operatorname{senh}(\omega_0 t_c)} = u \quad (8.39)$$

ó

$$\frac{r_0 \omega_0 \operatorname{senh}^2(\omega_0 t_c) - r_0 \omega_0 \cosh^2(\omega_0 t_c)}{\operatorname{senh}(\omega_0 t_c)} = u \quad (8.40)$$

la identidad hiperbólica $\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a = 1$ implica que

$$u = -\frac{r_0 \omega_0}{\operatorname{senh}(\omega_0 t_c)} \quad (8.41)$$

que es un resultado no positivo. Pero u tiene que ser no negativo (ya que las distancias radiales negativas no están definidas). La única posibilidad que queda es pues colocar $r_0 = 0$ que

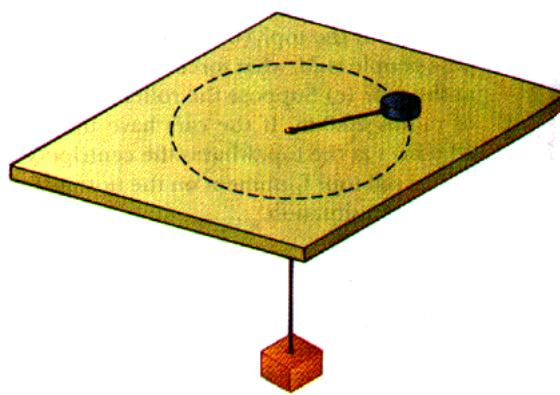
corresponde al caso en que el collarín se coloca inicialmente en reposo en el centro y permanece allí permanentemente.

En resumen, nuestro *Gedankenexperiment* demuestra -si la mecánica de Newton es correcta- lo que nos dice nuestra intuición: la tendencia del collarín será siempre moverse hacia afuera.



8.2. Problemas

1. El transbordador espacial se mueve en una trayectoria circular con una rapidez de $7,8 \text{ km/s}$ y un período de 87 min . Para regresar a la tierra el transbordador enciende sus motores apuntándolos en sentido contrario al de su movimiento, la magnitud de la aceleración ejercida por los motores es de 20 m/s^2 . ¿cuál es la aceleración total de acelerador?.
2. Una partícula se mueve en un plano de tal suerte que su radio vector con respecto a un punto fijo barre ángulos iguales en tiempos iguales, mientras que la distancia al punto fijo es variable con el tiempo. Escriba las componentes radial y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula mostrando explícitamente cualquier cantidad que se mantenga constante durante el movimiento.
3. Un disco de masa m situado sobre una mesa lisa está atado un cilindro de masa M por medio de un cordón que pasa por un orificio de la mesa. Halle la velocidad angular (ω) con que debe moverse el disco para que se pueda mantener en un movimiento circular de radio r



4. *Un dispositivo mecánico está colocado en el borde de una plataforma circular de 4 m de diámetro que se encuentra a ras del piso y que está girando con una velocidad angular

constante de 3 rad/s .

El dispositivo lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez de 5 m/s .

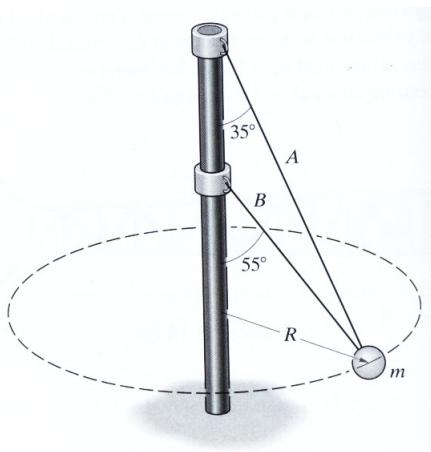
- a) ¿Cuál será la velocidad de la pelota al caer al piso?
 - b) ¿A qué distancia del centro de la plataforma caerá la pelota?.
5. La plataforma de un sistema similar al que acabamos de estudiar de 2 m de radio está girando uniformemente a razón de una (15) vueltas por minuto.

El dispositivo lanza una pelota verticalmente hacia arriba de tal suerte que al caer las componentes horizontal y vertical de la velocidad son 6 y 1 m/s (hacia abajo) respectivamente.

- a) ¿Cuál es la velocidad angular de rotación del disco?.
 - b) ¿Cuál es la aceleración de la pelota justo antes de ser lanzada?.
6. La masa ($m = 10 \text{ Kg}$) de la figura adjunta gira alrededor del poste en una trayectoria circular horizontal de radio $R = 1 \text{ m}$.

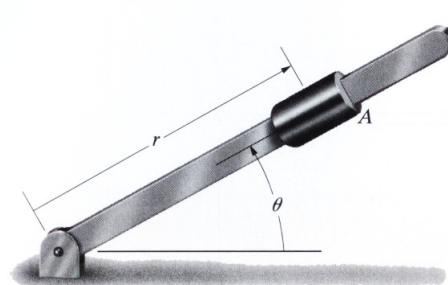
¿Cuál es el rango de valores de rapidez para los cuales es posible el movimiento descrito?.

7. * Una partícula se mueve en el interior de un vasito de helado que tiene la forma de un cono recto de semiángulo α . El cono gira respecto a su eje de simetría (que está colocado en posición vertical con el vértice del cono en el punto más bajo) con rapidez angular ω , la partícula se adhiere a la pared del cono de tal forma que su movimiento es solidario con este. Conociendo los coeficientes de roce estático (μ_s) y dinámico (μ_k) entre la partícula y la superficie del vasito, calcule el mínimo valor de ω que permite el movimiento, ?cuál es máximo valor de ω ? de una interpretación física de su resultado.



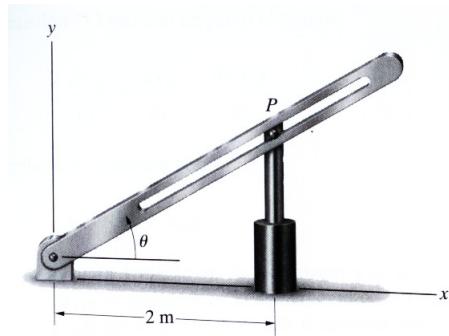
8. Formule y resuelva el problema 8 del capítulo ?? utilizando coordenadas polares.
9. Las coordenadas polares del collarín de la figura tienen la siguiente dependencia temporal:
 $r(t) = (1 + 0,2t^2) \text{ ft}$ y $\theta = 2t \text{ rad}$.

Encuentre la magnitud de la velocidad y la aceleración del collarín en $t = 2 \text{ s}$. El collarín tiene una masa de 50 g , encuentre una expresión en coordenadas polares para la fuerza neta que actúa sobre el collarín en cualquier instante de tiempo.



10. El actuador hidráulico de la figura mueve al pasador P hacia arriba con rapidez constante $v = 2 \text{ m/s}$. Encuentre la aceleración del pasador en términos de coordenadas polares centradas en el eje de rotación de la barra ranurada y la aceleración angular de esta

última cuando $\theta = 35^\circ$.



11. Repita el problema 9 del capítulo ?? utilizando coordenadas cilíndricas.
12. ¿Es posible escoger un sistema de referencia de tal forma que el movimiento del problema 9 se describa en tal sistema por la ley horaria $\mathbf{r}(t) = \rho_0 \mathbf{u}_r$?
13. Un esquimal, inicialmente en reposo se desliza desde el tope de su igloo que tiene la forma de un hemisferio y que ha sido construido enteramente de hielo mágico -totalmente liso-. ¿En qué punto de la superficie el esquimal abandonará la superficie del igloo?³

³recuerde su viejo amigo el truquito: $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$

Capítulo 9

Trabajo y Energía

9.1. Motivación

Uno de los problemas fundamentales relacionados con las leyes de Newton es el de encontrar la posición de una partícula en función del tiempo a partir de la fuerza neta aplicada sobre ella y de las condiciones iniciales del movimiento. Desde el punto de vista matemático, este problema consiste en resolver tres *ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas*¹ y en general es un problema que no posee soluciones cerradas². En esta sección queremos introducir las ideas fundamentales que soportan el concepto de energía y que elaboraremos con mayor detalle en el resto de este capítulo, por cierto, usted ya ha explorado estas ideas en el ejemplo 38 del capítulo 5.

Consideremos una partícula de masa m que se mueve a lo largo de una recta bajo la influencia de una fuerza neta F , caso en el cual la ecuación de movimiento para la partícula será

¹una para cada coordenada de la partícula

²es decir, en términos de funciones elementales

sencillamente

$$m \ddot{x} = F, \quad (9.1)$$

supongamos adicionalmente que la fuerza depende de la posición de la partícula, esto es: $F = F(x)$, de manera que podemos reescribir la ecuación de movimiento como

$$m \dot{x} \frac{dx}{dx} - F(x) = 0 \quad (9.2)$$

donde hemos utilizado la regla de la cadena para expresar la aceleración como

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \quad (9.3)$$

lo que en definitiva nos permite reexpresar la segunda ley de Newton en forma diferencial como sigue:

$$m v dv - F(x) dx = 0. \quad (9.4)$$

Ahora bien, si suponemos que $U(x)$ es una función³ tal que

$$-\frac{d U(x)}{d x} = F(x), \quad (9.5)$$

y observamos adicionalmente que

$$d(m v^2 / 2) = m v dv \quad (9.6)$$

la forma diferencial de la segunda ley de Newton puede reexpresarse como

$$d \left(\frac{m v^2}{2} + U(x) \right) = 0 \quad (9.7)$$

ó

$$\frac{m v^2}{2} + U(x) = constante \quad (9.8)$$

³cuando la fuerza solo depende de la posición, siempre es posible encontrar una tal función $U(x)$

La constante que aparece en el miembro derecho de la igualdad (9.8) puede y debe pensarse como una de las dos constantes de integración asociadas al problema de integración de la ecuación de movimiento, es a esta constante lo que denominamos *energía mecánica total* (E) de la partícula. Debemos destacar que la existencia de E depende de la existencia de la función $U(x)$ que a su vez recibe el nombre de *energía potencial*.

Recapitulando lo que acabamos de hacer y reexpresándolo en el lenguaje usual de los matemáticos podemos afirmar que hemos demostrado lo siguiente

Teorema 10 *Si en un movimiento a lo largo de una recta existe una función $U(x)$ relacionada con la fuerza que actúa sobre la partícula como*

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (9.9)$$

la energía mecánica total de la partícula

$$E \equiv \frac{mv^2}{2} + U(x) \quad (9.10)$$

es una constante del movimiento.

Podemos construir un teorema relacionado volviendo directamente sobre la ecuación de Newton, en efecto, integremos la ecuación de movimiento entre dos puntos espaciales A y B para escribir

$$\int_{v_A}^{v_B} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_A^B F(x) dx \quad (9.11)$$

definiendo el trabajo realizado por la fuerza F entre los puntos A y B como

$$W_{AB} \equiv \int_A^B F(x) dx \quad (9.12)$$

se obtiene luego de integrar el lado izquierdo de la ecuación $T_B - T_A = W_{AB}$ donde la cantidad $T \equiv Mv^2/2$ es denominada energía cinética de la partícula.

La fórmula (9.1) y su derivación para los problemas limitados al movimiento a lo largo de una recta constituyen una versión elemental del denominado *teorema del trabajo y la energía*.

Como veremos más adelante este teorema es más general que el teorema de conservación de la energía ya que existen fuerzas -el roce por ejemplo- que no pueden obtenerse a partir de un potencial.

En el resto de estas notas nos vamos a dedicar a extender estas ideas a movimientos mas generales.

9.2. Elementos de Matemáticas

9.2.1. Desplazamiento Infinitesimal

Consideremos una curva en el espacio -que denotaremos por: C - y una partícula en movimiento cuya trayectoria coincide con C . En coordenadas cartesianas el vector de posición de la partícula es:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{u}}_x + y(t) \hat{\mathbf{u}}_y + z(t) \hat{\mathbf{u}}_z \quad (9.13)$$

donde las funciones: $x(t), y(t), z(t)$, representan las coordenadas de la partícula dadas en “fórmula paramétrica”. El desplazamiento de la partícula durante un intervalo de tiempo infinitesimal es por definición (véase la figura 9.2.1):

$$d\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) \quad (9.14)$$

Figura 9.1: El desplazamiento de una partícula entre los instantes t y $t + \Delta t$ se denomina desplazamiento infinitesimal cuando $\Delta t \rightarrow 0$

Desde el punto de vista geométrico, el vector $d\mathbf{r}$ constituye un desplazamiento infinitesimal (ó diferencial de camino) a lo largo de la curva C , que de acuerdo con las fórmulas usuales del

cálculo infinitesimal debe representarse con la fórmula:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (9.15)$$

donde: \mathbf{v} es la velocidad de la partícula y dt el intervalo infinitesimal de tiempo. Así, en coordenadas cartesianas el diferencial de camino se expresa en la forma

$$d\mathbf{r}(t) = (\dot{x} \hat{\mathbf{u}}_x + \dot{y} \hat{\mathbf{u}}_y + \dot{z} \hat{\mathbf{u}}_z) dt = dx \hat{\mathbf{u}}_x + dy \hat{\mathbf{u}}_y + dz \hat{\mathbf{u}}_z \quad (9.16)$$

Evidentemente, en dos dimensiones la expresión para el desplazamiento infinitesimal se reduce a⁴

$$d\mathbf{r}(t) = dx \hat{\mathbf{u}}_x + dy \hat{\mathbf{u}}_y \quad (9.19)$$

A partir de este punto vamos a introducir diversos objetos matemáticos que a primera vista pueden resultar extraños, pero que son totalmente necesarios para dar una definición precisa de lo que es el trabajo y que por lo tanto están relacionados con las versiones generales de los teoremas del trabajo y la energía y de conservación de la energía.

9.2.2. Campos Vectoriales

Comenzaremos con introducir una interesante generalización al concepto de las funciones de variable real que toman valores reales ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

⁴Utilizando que en coordenadas polares la velocidad se expresa como

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{u}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (9.17)$$

se puede demostrar fácilmente (*ejercicio*) que en estas coordenadas la expresión general para el desplazamiento infinitesimal adopta la siguiente forma

$$d\mathbf{r}(t) = dr \hat{\mathbf{u}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (9.18)$$

Definición 45 *Un campo vectorial es una función que a cada punto del espacio le asigna un vector.*

En el caso de dos (2) dimensiones y se pensamos en coordenadas cartesianas, la definición anterior significa que para cada punto del plano (identificado por sus coordenadas (x, y)), un campo vectorial es un objeto definido por la siguiente fórmula general:

$$\mathbf{F} = F_x(x, y)\hat{\mathbf{u}}_x + F_y(x, y)\hat{\mathbf{u}}_y \quad (9.20)$$

Para entender lo que es un campo vectorial es bueno pensar en un primer ejemplo físico. Imaginemos un riachuelo que corre sin turbulencias, si miramos en punto determinado de la superficie veremos que todas las partículas en suspensión que pasan por ese punto llevan siempre la misma velocidad, si nos fijamos en otro punto veremos algo parecido; de esta manera, se puede saber la velocidad de una partícula en suspensión con solo saber el sitio en que se encuentra, o dicho en formulitas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \quad (9.21)$$

Otro ejemplo menos sencillo es el campo vectorial

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \quad (9.22)$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura 9.2.2

Figura 9.2: El campo $\mathbf{v}(x, y)$ se visualiza como un conjunto de vectores cuyos orígenes coinciden con cada uno de los puntos (x, y) del plano

El Peso cerca de la Tierra:

Si se piensa en una partícula de masa M que se encuentra cerca de la superficie terrestre, el peso, esto es, la fuerza que la tierra ejerce sobre la partícula, resulta ser un campo vectorial uniforme que en el sistema de referencia usual (el eje y positivo apunta hacia arriba) está dado por:

$$\mathbf{F}(x, y) = -Mg\hat{\mathbf{u}}_y \quad (9.23)$$

La Fuerza de Interacción Electrostática:

Este es un ejemplo mucho menos trivial que el anterior. La ley de Coulomb establece que entre dos partículas cargadas electricamente que portan cargas q_1 y q_2 se establece una fuerza cuya magnitud está dada por: $F = kq_1q_2/r^2$ donde k es una constante (que en el sistema internacional de unidades tiene el valor: $9 \times 10^9 \text{ Newton} \times \text{m}^2/\text{coul}^2$) y r es la distancia entre ambas partículas. En estos términos y si suponemos que la partícula de carga q_1 está fija en el origen de coordenadas, la fuerza sobre la partícula de carga q_2 es un campo vectorial que en coordenadas polares se escribe en la forma

$$\mathbf{F}_{Coulomb}(r, \theta) = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (9.24)$$

Como ejercicio interesante muestre que la fórmula (9.24) se escribe de la siguiente forma en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F}_{Coulomb}(x, y) = kq_1q_2 \left(\frac{x\hat{\mathbf{u}}_x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y\hat{\mathbf{u}}_y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (9.25)$$

9.2.3. Integrales de Línea

Vamos a introducir la integral de línea de un campo de fuerzas \mathbf{F} a lo largo de una curva C como un objeto simbólico dado por la fórmula (**fig 5**):

$$I(C) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.26)$$

En el caso bidimensional y utilizando la expresión general para un campo vectorial la fórmula simbólica anterior adopta la forma

$$I(C) = \int_C (F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy) \quad (9.27)$$

Antes de adentrarnos más en el significado de esta hagamos algunas observaciones:

1. La fórmula (9.26) tambien puede expresarse en terminos de la velocidad y el tiempo como

$$I(C) = \int \mathbf{F} \mathbf{v} dt \quad (9.28)$$

2. La fórmula para $I(C)$ contiene dos vectores, pero como hay un producto escalar de por medio el resultado es un escalar.
3. El resultado de calcular $I(C)$ debería depender de los puntos inicial y final de la curva.
4. En principio $I(C)$ debería depender de la curva C . y finalmente:
5. ¿Cómo se calculará el número $I(C)$?.

Técnicas de cálculo

En este parágrafo responderemos la última pregunta que formulamos en la subsección anterior referente a la forma de calcular $I(C)$. Con este fin debemos considerar los ingredientes que aparecen en la definición.

1. La curva C y su objeto asociado $d\mathbf{r}$.
2. El campo de fuerzas \mathbf{F} y
3. Los extremos de C .

típicamente la curva está dada en términos de una parametrización. En los casos más sencillo la parametrización sería o bien una fórmula del tipo $y = f(x)$, o bien una expresión de la forma $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{u}}_x + y(t)\hat{\mathbf{u}}_y$

Consideremos el caso en que la curva está dada por la fórmula $y = f(x)$ (esto es: $\mathbf{r}(t) = x\hat{\mathbf{u}}_x + y(x)\hat{\mathbf{u}}_y$) en este caso la receta de cálculo es evidente: donde aparezca y sustituiremos por $f(x)$ y luego calcularemos dy de acuerdo a la fórmula estándar: $dy = f'(x)dx$. Si hacemos esto la misteriosa integral (9.27) adopta la pavorosa apariencia:

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} [F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)]dx \quad (9.29)$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas x de los puntos inicial $(x_1, f(x_1))$ y final $(x_2, f(x_2))$ de la curva C . Si pensamos un momento en la fórmula (9.29) veremos $I(C)$ no es mas que una integral ordinaria, es decir, que se calcula según

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \quad (9.30)$$

donde: $g(x) = F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)$.

Cuando la curva esta expresada con una formula del tipo $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{u}}_x + y(t)\hat{\mathbf{u}}_y$, la integral de linea tambien termina siendo una integral ordinaria. En este caso la expresión para $I(C)$ es

$$I(C) = \int_{t_1}^{t_2} h(t)dt \quad (9.31)$$

donde t_1 y t_2 son los valores del parametro t en los puntos inicial y final de la curva, y

$$h(t) = F_x(x(t), y(t))x(t) + F_y(x(t), y(t))y(t) \quad (9.32)$$

A veces la curva se especifica en la forma $x = h(y)$, se deja al lector el ejercicio de encontrar una expresión en términos de integrales “normales”. Antes de continuar es importante comentar que los conceptos introducidos aquí serán revisados en detalle en el curso de matemáticas 6.

Ejemplo 57 Como primer ejemplo de cálculo encontraremos la integral de línea de un campo vectorial constante: $\mathbf{F} = F_0 \hat{\mathbf{u}}_x$ a lo largo de la curva $C : y = x$ (fig 6) y entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Es claro que el producto escalar que define el integrando para el cálculo de la integral de línea ($\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$) resulta ser

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_0 dy$$

de esta forma, al utilizar la relación: $y = x$ que implica la igualdad $dy = dx$ la integral buscada es:

$$I(C) = \int_{x=0}^{x=1} F_0 dx = F_0 \int_{x=0}^{x=1} dx = F_0 \quad (9.33)$$

Ejemplo 58 Ahora vamos a calcular $I(C)$ entre los mismos dos puntos pero definiendo la trayectoria por $C : y = x^2$ (fig 7). Una vez más encontramos: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_0 dy$. Sin embargo, en esta oportunidad la forma de la curva: $y = x^2$ implica una nueva relación entre los diferenciales, a saber: $dy = 2x dx$, en definitiva, $I(C)$ resulta ser:

$$I(C) = \int_C F_0(dy) = \int_{x=0}^{x=1} F_0(2x dx) = 2F_0 \int_{x=0}^{x=1} x dx = 2F_0 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = F_0 \quad (9.34)$$

Es interesante observar que el resultado numérico es el mismo que en el caso anterior.

Ejemplo 59 En este ejemplo usaremos un campo de fuerzas no uniforme: $\mathbf{F} = F_0(x^2 \hat{\mathbf{u}}_x + y^2 \hat{\mathbf{u}}_y)$. Si calculamos la integral de línea entre los mismos puntos de los ejemplos anteriores y usando

las mismas curvas obtendremos en el primer caso ($C_1 : y = x$):

$$I(C_1) = \int_{C_1} F_0(x^2\hat{\mathbf{u}}_x + y^2\hat{\mathbf{u}}_y) \cdot (dx\hat{\mathbf{u}}_x + dy\hat{\mathbf{u}}_y) = \int_{C_1} F_0(x^2dx + y^2dy) = \quad (9.35)$$

$$= F_0 \int_{x=0}^{x=1} 2x^2 dx = 2F_0 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}F_0 \quad (9.36)$$

donde hemos usado explícitamente que $dy = dx$.

En el segundo caso: ($C_2 : y = x^2$) el resultado es:

$$\begin{aligned} I(C_2) &= \int_{C_2} F_0(x^2\hat{\mathbf{u}}_x + y^2\hat{\mathbf{u}}_y) \cdot (dx\hat{\mathbf{u}}_x + dy\hat{\mathbf{u}}_y) = F_0 \int_{x=0}^{x=1} (x^2 + 2x^5) dx = \\ &= F_0 \left(\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}F_0 \end{aligned} \quad (9.37)$$

9.2.4. Dependencia de las Integrales de línea en los Caminos. Campos Conservativas

Como ya se ha comentado (y de acuerdo a lo que hemos visto en los ejemplos), el valor de una integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria depende en general del camino que se utilice para calcularla. Debido a esto los campos vectoriales se dividen en dos clases aquellos en que $I(C)$ depende de C y aquellos en que $I(C)$ es independiente de C . De acuerdo a esta observación introduciremos la siguiente:

Definición 46 *Un campo vectorial \mathbf{F} se denomina conservativo si la integral*

$$I(C) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.38)$$

es independiente de la curva C . En caso contrario diremos que el campo de fuerzas no es conservativo.

En este punto aparecen naturalmente dos preguntas:

1. ¿Cómo podremos averiguar si una fuerza es conservativa o no? y
2. ¿Qué es lo que se conserva?.

La respuesta a la primera de estas preguntas es el tema de esta sección, para responder la segunda pregunta esperaremos un pco más hasta la sección 9.4.

Es obvio que de acuerdo a la definición (46) para reconocer un campo no conservativo basta con encontrar un par de puntos del espacio y un par de curvas (C_1 y C_2) entre ellos tales que: $I(C_1) \neq I(C_2)$. Desgraciada (y evidentemente) en la práctica el método de reconocimiento asociado a la definición resulta totalmente inadecuado. En efecto, supongamos que estamos estudiando un campo vectorial \mathbf{F} con el fin de descubrir si es o no conservativo. Podría ocurrir que escogieramos un par de puntos en el espacio (plano) y que probáramos calcular la integral de línea $I(C)$ entre tales puntos con miles y miles de curvas diferentes y que obtuvieramos siempre el mismo resultado. A una persona no acostumbrada a los razonamientos matemáticos podría parecerle que el campo de fuerzas es conservativo, sin embargo si seguimos probando (y si \mathbf{F} no es conservativo) tal vez luego de diez años encontremos una curva a lo largo de la cual la integral de linea arroje un valor diferente.

Luego de haber pensado un poco en el párrafo anterior es claro que no hemos respondido la pregunta: cómo reconocemos si un campo es o no conservativo?. Lamentablemente para responder a esta pregunta tenemos que recurrir a un teorema cuya demostración está completamente fuera del alcance de este curso. Sin embargo, lo propondremos sin demostración (habrá que esperar hasta matemáticas VI).

Teorema 11 (caso 2D) *Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$ es conservativo si y solo si:*

$$\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} \quad (9.39)$$

9.3. El Teorema del Trabajo y la Energía

Comenzaremos esta sección introduciendo la “noción” de TRABAJO.

Definición 47 *El trabajo (W_{AB}) que realiza una fuerza (\mathbf{F}) para mover una partícula entre dos puntos (A y B) del espacio a lo largo de una trayectoria dada C está dado por:*

$$W_{AB} = I(C) \quad (9.40)$$

donde C es la trayectoria que estamos considerando y que obviamente tiene por extremos a los puntos A y B .

Continuemos ahora considerando una partícula sobre la cual actúan varias fuerzas de tal forma que la resultante de estas fuerzas es \mathbf{F}_{tot} . Calculemos el trabajo que realiza \mathbf{F}_{tot} al mover la partícula entre dos puntos A y B a lo largo de una cierta trayectoria C . Aplicando la definición resulta:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.41)$$

en vista de la definición del vector de desplazamientos infinitesimales $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ y de la segunda ley de Newton $\mathbf{F}_{tot} = \dot{\mathbf{p}}$ podemos escribir:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_C \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{m\mathbf{v} dt}{m}, \quad (9.42)$$

ó

$$W = \frac{1}{m} \int_C \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} dt = \frac{1}{m} \int_C \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \frac{1}{m} \int_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}. \quad (9.43)$$

Observando que: $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = d(\frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})$ y utilizando las reglas de integración usuales obtenemos finalmente:

$$W = \frac{1}{2m} \int_C d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) = T(B) - T(A), \quad (9.44)$$

donde la función

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad (9.45)$$

$(p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p})$ recibe el nombre de energía cinética de la partícula⁵.

Con este cálculo, llevado a cabo sin mayor esfuerzo, hemos demostrado el **Teorema del Trabajo y la Energía** que enunciaremos a continuación:

Teorema 12 *El trabajo total realizado sobre una partícula cuando es llevada entre dos puntos A y B es igual al cambio en su energía cinética evaluado entre dichos puntos extremos de la trayectoria.*

9.4. Energía Potencial

Para motivar la construcción general de la cantidad que denominaremos *energía potencial* recordemos la ley de Newton para una partícula que se mueve en una dimensión bajo la acción de una fuerza que solo depende de la posición expresada en la forma

$$v \frac{dv}{dx} - F(x) = 0 \quad (9.46)$$

que integrando entre dos posiciones x y x_0 de la partícula y sus velocidades asociadas: $v = v(x)$ y $v_0 = v(x_0)$ adopta la forma

$$\int_{v_0}^{v(x)} u du - \int_{x_0}^x F(s) ds = 0 \quad (9.47)$$

ó

$$T(x) + U(x) = T(x_0) + U(x_0) \quad (9.48)$$

donde hemos definido la energía potencial asociada a $F(x)$ como

$$U(x) \equiv - \int_{x_0}^x F(s) ds \quad (9.49)$$

lo que implica que $U(x_0) = 0$.

⁵por favor observe que como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ la energía cinética se puede reexpresar en la forma $mv^2/2$

En verdad podríamos haber escogido cualquier otro valor para $U(x_0)$ ya que como veremos luego, la escogencia del punto x_0 es totalmente arbitraria.

Como diuscutimos en la primera sección de estas notas, la igualdad (9.48) dice que la cantidad

$$E = T(x) + U(x) \quad (9.50)$$

es una constante del movimiento de la partícula.

Ya hemos comentado que esta es la expresión de la versión elemental del teorema de la conservación de la energía, y como hemos visto no es más que la consecuencia directa de la 2^a ley de Newton aplicada al caso en que las fuerzas solo dependan de la posición. Es en este caso, y solo en este, que es posible introducir la energía potencial $U(x)$.

A veces en un problema de mecánica en que una partícula se mueve a lo largo del eje x tenemos un conocimiento a priori de la energía potencial, y en esos casos, podemos calcular la fuerza sin mayor problema a través de la fórmula:

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{\mathbf{u}}_x \quad (9.51)$$

Ahora queremos generalizar los resultados anteriores a los casos de dos y tres dimensiones. Supongamos que \mathbf{F} es una fuerza conservativa, entonces, dados dos puntos A y B la cantidad

$$-W_{AB} \equiv - \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (9.52)$$

es independiente de la trayectoria que se utilize para ir de A hasta B . Más aún, escogiendo un punto X_0 arbitrario podemos definir una función *La Energía Potencial* asociada a la fuerza \mathbf{F} que solo depende de un punto X según:

$$U(X) \equiv - \int_{X_0}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.53)$$

en términos de esta función, podemos decir que la expresión (9.52) no es más que la *diferencia de energía potencial* entre los puntos A y B ($U(B) - U(A)$). Con estas pocas herramientas en la mano ya podemos generalizarlos resultados que habíamos estudiado para el caso unidimensional, para ello comencemos por introducir la idea de energía mecánica.

Definición 48 *Dados una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa y un punto X , la cantidad*

$$E(X) = T(X) + U(X) \quad (9.54)$$

se denomina energía mecánica total de la partícula en el punto X .

Observemos que el hecho de que las fuerzas sean conservativas es absolutamente necesario (de lo contrario no podemos definir U). En las condiciones que permiten definir la energía mecánica total se puede demostrar el teorema de la conservación de la energía que enunciamos a continuación

Teorema 13 *Si sobre una partícula solo actúan fuerzas conservativas la energía mecánica total es constante*

Demostración: de acuerdo a la definición de energía potencial, para cualquier par de puntos A y B la variación de energía potencial está dada por la fórmula

$$U(B) - U(A) = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.55)$$

por otra parte, el teorema del trabajo y la energía asegura que:

$$T(B) - T(A) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.56)$$

resultado que podemos sustituir en el lado derecho de la fórmula para la variación de energía potencial para obtener

$$U(B) - U(A) = -(T(A) - T(B)) \quad (9.57)$$

de donde sigue inmediatamente la constancia de la energía mecánica

$$U(A) + T(A) = U(B) + T(B) \quad (9.58)$$

9.4.1. Más acerca de \mathbf{U}

La función energía potencial $U(X)$ es una función que depende del punto X , de manera que si identificamos a este por sus coordenadas cartesianas (x, y, z) podemos poner

$$U = U(x, y, z) \quad (9.59)$$

es decir, una función de tres variables reales que toma valores reales, ó como escriben nuestros amigos los matemáticos: una función

$$U : \Re^3 \rightarrow \Re \quad (9.60)$$

Ya hemos aprendido que U solo existe si el campo \mathbf{F} es conservativo, y que en ese caso

$$U(x, y, z) = - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9.61)$$

donde, ya sabemos que (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas de un punto arbitrario del espacio. Esta relación integral entre la fuerza y la energía potencial puede expresarse en forma diferencial introduciendo una operación (el gradiente)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\text{grad}(U) \quad (9.62)$$

cuya definición (en coordenadas cartesianas) damos a continuación.

Definición 49 *Dado un campo escalar $V(x, y, z)$ el gradiente de V es un campo vectorial construido como:*

$$\text{grad}(V) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z \quad (9.63)$$

La versión en dos dimensiones es evidente, y por supuesto, en una dimensión, el gradiente es sencillamente la derivada ordinaria.

Problemas

1. Demuestre que toda fuerza constante es conservativa.
2. Considere los siguientes campos de fuerza: $\vec{F}_1(x, y) = x^2\hat{j}$ y $\vec{F}_2(x, y) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j}$. Decida si alguno de ellos (o ambos) es conservativo, y en caso afirmativo construya una función de energía potencial.
3. *Una piedra de peso w es arrojada verticalmente hacia arriba en el aire con una rapidez inicial v_0 . Suponga que la fuerza de roce con el aire \vec{F}_r disipa fy joules cuando la piedra recorre una distancia y (f es una constante)
 - a) Demuestre que la altura máxima alcanzada por la piedra es:
$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$
 - b) ¿Cuál será la rapidez de la piedra cuando regrese al suelo?
4. *Un esquimal, inicialmente en reposo se desliza desde el tope de su igloo que tiene la forma de un hemisferio y que ha sido construido enteramente de hielo mágico -totalmente liso-. ¿En qué punto de la superficie el esquimal abandonará la superficie del igloo?⁶
5. Sobre una partícula se aplica una fuerza de la forma

$$\vec{F} = \kappa\hat{u} \times \dot{\vec{r}} \quad (9.64)$$

donde \hat{u} es un vector unitario arbitrario.

- a) Demuestre que la energía cinética de la partícula permanece constante.

⁶Obsérvese como un problema difícil (recuerde el problema 13 del capítulo ??) se puede hacer sencillo al utilizar una técnica adecuada.

- b) En el caso en que κ y \hat{u} sean constante describa el movimiento. **Ayuda:** recuerde el problema (9c) del capítulo (3).

6. **Problema Guiado:** Considere una partícula de masa m que se puede mover sobre una mesa lisa horizontal y que está unida a un punto fijo por un resorte, la ley de Hooke establece que la fuerza ejercida por el resorte es:

$$\vec{F} = -kx\hat{i}, \quad (9.65)$$

donde k es una constante y x la distancia de separación entre la partícula y el punto de equilibrio del resorte.

En el problema (1) del capítulo (6) hemos aprendido que si la posición de una partícula está dada por

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (9.66)$$

entonces la fuerza que actúa sobre la partícula tiene la forma (9.65).

El objetivo de este problema consiste en utilizar métodos de energía para demostrar la afirmación recíproca, es decir, vamos a probar que si la fuerza que actúa sobre una partícula está dada por (9.65) entonces la posición de la partícula en función del tiempo ($x(t)$) está dada por (9.66).

Para lograr la prueba utilizaremos el siguiente proceso (que puede generalizarse para otras fuerzas en una dimensión).

Comience por probar que la energía potencial elástica del resorte está dada por la fórmula:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (9.67)$$

(¿dónde debe colocarse el origen de la energía?).

Dado el resultado anterior escriba una expresión general para la energía mecánica total (E) del sistema y encuentre una fórmula general para la velocidad en función de la posición (usted ya aprendió a hacer esto en el problema 3 del capítulo ??).

Utilice la expresión que acaba de encontrar y la definición de la velocidad ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$) para “despejar” dt . Debería obtener algo de la forma:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{A - Bx^2}},$$

donde las constantes A y B son cantidades que se pueden expresar en términos de la masa, la constante elástica del resorte y la energía mecánica total (E) de la partícula.

Finalmente integre y despeje $x(t)$ para obtener la fórmula general:

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (9.68)$$

donde: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ evalúe las constantes C y ϕ .

Si llegó hasta este punto usted está trabajando muy bien. El capítulo (??) está dedicado a entender en detalle las características del movimiento armónico simple.

Capítulo 10

Oscilaciones Armónicas

este bicho aparece en el ejemplo 25 del capitulo 3

10.1. Introducción

Este es el último tema que vamos a tratar en esta primera parte, podría haber estado en algún otro punto del del texto pero hay un importante propósito pedagógico para estudiarlo ahora, el oscilador armónico nos va a permitir integrar todas las destrezas que hemos desarrollado hasta acá. Este es un objetivo importante en sí mismo, la integración de destrezas es fundamental para el aprendizaje, sin embargo, esta no es la única razón para haber escogido el tema de oscilaciones, quizás se pudo haber pensado en otra cosa así que en el próximo párrafo trataremos de explicarle la razón de haber escogido precisamente este tema y no otro para concluir el curso.

El oscilador armónico es uno de los sistemas físicos no triviales más sencillos que se pueden concebir. A pesar de su sencillez, este sistema aparece una y otra vez en problemas de ciencias e ingeniería, aparece relacionado en una multitud de dispositivos mecánicos, en teoría de circuitos aparece en el análisis de los circuitos RLC, también aparece cuando se consideran los

movimientos de los átomos en una red cristalina (esto es, en temas asociados a la ingeniería de materiales), también surge en medicina, en donde aparece como modelo para describir ciertos problemas relacionados con la concentración de insulina en la sangre [ref....Brfaun]. Así pues, el estudio del oscilador armónico dista mucho de ser un problema puramente académico y es de hecho un tema de estudio fundamental para un sinnúmero de aplicaciones prácticas.

En varios de los ejemplos y problemas propuestos usted ha tenido la oportunidad de estudiar diversos aspectos de la ley horaria¹

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t), \quad (10.1)$$

entre otras cosas usted debe haber quedado convencido de lo siguiente: si se define un vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_x$ orientado en el sentido de las x crecientes, la ley horaria representada en la fórmula 10.1 tiene como causa la acción sobre una partícula de masa m de la fuerza neta:

$$\mathbf{F} = -k x \hat{\mathbf{e}}_x \quad \text{con:} \quad k = m \omega_0^2, \quad (10.2)$$

en estos apuntes vamos a estudiar varios aspectos interesantes del problema.

Entre otros, vamos a mostrar (hasta donde sea posible dar una demostración rigurosa) que la segunda ley de Newton implica que si la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m tiene la forma 10.2 la única posibilidad es que la ley horaria de la partícula tenga la forma general

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (10.3)$$

donde A y ϕ son constantes que deben determinarse a partir de condiciones físicas, de hecho, mostraremos este resultado al menos de dos formas distintas.

¹refiérase al ejemplo 25 de la sección 3.6, problema 4 en la sección 3.7 y problema 1 del capítulo 6

10.2. Cinemática

El movimiento descrito por la ley horaria

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (10.4)$$

es conocido como movimiento armónico simple (abreviado MAS), vamos a empezar por discutir algunos aspectos puramente cinemáticos que usted podría haber descubierto en problemas asociados a los temas anteriores.

En primer lugar, notemos que si en 10.4 sustituimos t por $t + 2\pi/\omega_0$ resulta que

$$x(t) = x(t + 2\pi/\omega_0), \quad (10.5)$$

de manera que el MAS es un movimiento periódico de período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (10.6)$$

al recíproco del período (es decir a la cantidad $f = 1/T$) se le denomina frecuencia y sus dimensiones son ciclos/tiempo (en el SI serían ciclos/s ó Hertz). La cantidad A representa la máxima distancia que la partícula puede alejarse de la posición $x = 0$, esta cantidad se denomina amplitud el ángulo ϕ se denomina fase inicial y la cantidad $A \cos(\phi)$ es la posición de la partícula en $t = 0 + 2n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Finalmente una observación en que se hace mucho énfasis en la literatura es la siguiente: desde un punto de vista cinemático un MAS corresponde exactamente con la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular uniforme de frecuencia angular ω_0 y radio A

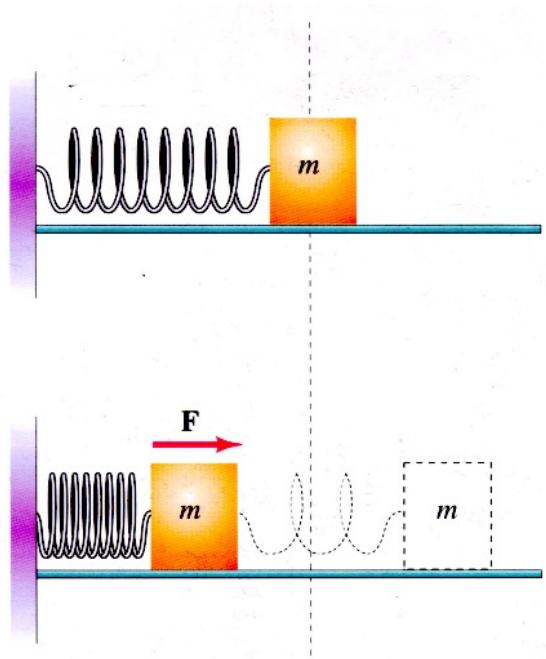
De mucho menor importancia es el hecho de que si ψ es el ángulo complementario de ϕ (es decir: $\phi + \psi = \pi/2$) podemos expresar la ley de horaria MAS como

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \psi), \quad (10.7)$$

otra forma de la expresar la ley horaria que representa al MAS es

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \quad (10.8)$$

10.3. Energía



Resorte ideal: la fuerza que el resorte ejerce sobre la masa es restauradora (está dirigida hacia la posición natural ó de equilibrio del resorte) y proporcional a la elongación (distancia hasta el punto de equilibrio), de manera que podemos modelar a un resorte ideal a través de la ley de Hooke: $\mathbf{F} = -\kappa x \hat{\mathbf{e}}_x$

Ya hemos estudiado la cinemática del movimiento armónico simple. Estudiemos ahora sus aspectos energéticos, para ello comencemos por establecer un modelo de mecanismo que produzca la fuerza $\mathbf{F} = -k x \hat{\mathbf{e}}_x$, el modelo físico más sencillo posible se conoce como *resorte ideal*, un resorte ideal no es otra cosa que un resorte sin masa de longitud ℓ_0 y que para ser estirado o encogido por un agente externo, este debe ejercer sobre los extremos del resorte una fuerza de magnitud proporcional a la elongación.

Es fácil ver que, definiendo la referencia de energía potencial como $U(0) = 0$, la fuerza $\mathbf{F} = -k x \hat{\mathbf{e}}_x$ se deriva del potencial

$$U(x) = \frac{k x^2}{2}, \quad (10.9)$$

debido a este hecho, la energía mecánica total de una partícula sometida a la acción de la fuerza

10.2 está dada por

$$E = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{k x^2}{2}. \quad (10.10)$$

ó

$$E = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \omega_0^2 x^2}{2}. \quad (10.11)$$

Cuando se alcanza la máxima elongación, esto es, cada vez que la partícula alcanza las posiciones $x = \pm A$ su velocidad es nula ($\dot{x} = 0$), sustituyendo esto en la expresión general para la energía se obtiene sin esfuerzo alguno

$$E = \frac{k A^2}{2} \quad (10.12)$$

Podemos mostrar este resultado utilizando un método de fuerza bruta mucho menos elegante que consiste en sustituir la ley de movimiento en la expresión general de la energía lo que lleva a

$$\begin{aligned} E &= \frac{m A^2 \omega_0^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)}{2} + \frac{k A^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2} = \\ &= k A^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2(\omega_0 t)}{2} + \frac{\cos^2(\omega_0 t)}{2} \right) = \frac{k A^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

que por supuesto es el resultado que habíamos encontrado anteriormente.

Ejemplo 60 *Hay un sistema mecánico sumamente sencillo que también reproduce un movimiento armónico simple, a saber: el péndulo simple. Un péndulo simple no es más que una masa que cuelga de un techo suspendida por un hilo ó barrita de masa despreciable y que oscila en ángulos pequeños.*

Para estudiar el problema consideremos la figura ?? y la notaqción que allí se introduce. Es claro que la tensión no realiza trabajo y que por tanto podemos utilizar argumentos de conservación de energía para trabajar de manera escalar. Escogiendo el punto más bajo de la

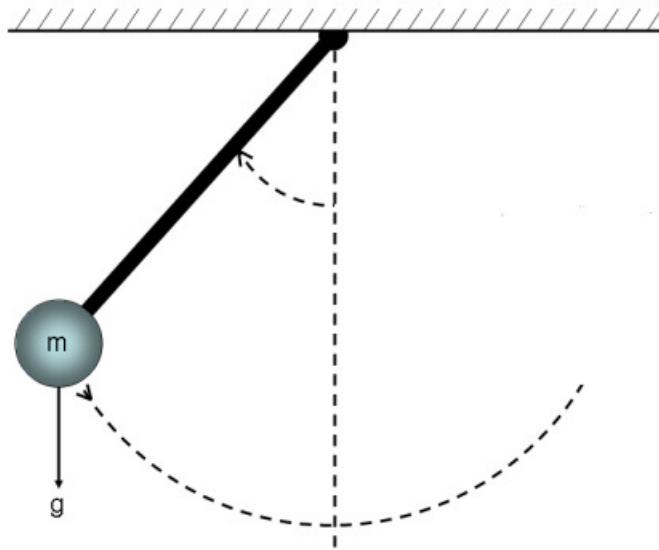


Figura 10.1: El péndulo simple, en esta figura denominaremos θ al ángulo que la barrita hace con la vertical y ℓ a la longitud de la barra

trayectoria de m como punto de energía potencial gravitacional nula podemos poner de inmediato (solo vea el dibujito)

$$U(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta) \quad (10.14)$$

de manera que

$$E = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\theta), \quad (10.15)$$

ahora bien, si el ángulo de oscilación es pequeño podemos sustituir $\cos(\theta)$ por su aproximación de segundo orden: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, de manera que, en esta aproximación la energía puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{m(\ell\dot{\theta})^2}{2} + \frac{mg\ell\theta^2}{2} = \frac{m(\ell\dot{\theta})^2}{2} + \frac{mg(\ell\theta)^2}{2\ell} = \\ &= \frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 s^2}{2} \end{aligned} \quad (10.16)$$

donde $s = \ell\theta$ y $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$, comparando el último resultado con la fórmula 10.11 reconocemos efectivamente la energía de un oscilador armónico de período $T = \sqrt{\ell/g}$

10.4. Encontrando la ley horaria

Esta sección está dedicada a demostrar que una partícula de masa m sometida a la fuerza de Hooke

$$\mathbf{F}(x) = -k x \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (10.17)$$

tiene que moverse necesariamente bajo la ley horaria

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (10.18)$$

en las siguientes subsecciones nos vamos a dedicar a demostrar que $x(t)$ res lo que es!!!

10.4.1. Métodos energéticos

La expresión general para la energía (fórmula 10.11) permite expresar la componente de la velocidad como

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2}, \quad (10.19)$$

esto no es otra cosa que una ecuación diferencial de primer orden separable. La integraremos con el mismo procedimiento que utilizamos con el problema del paracaidista.

Comencemos por separar las variables reexpresando la ecuación en la forma

$$\pm dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2}}, \quad (10.20)$$

podemos integrar esta igualdad entre dos instantes de tiempo (pensemos en que el instante

inicial es $t = 0$) para obtener

$$\pm \int_0^t ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\chi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} \chi^2}}, \quad (10.21)$$

o

$$\pm t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\chi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} \chi^2}}. \quad (10.22)$$

Para tratar la integral del lado derecho transformándola en una integral elemental² introducimos el cambio de variables $\sqrt{k}m\chi = u$ que nos deja con

$$I(x(t)) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\chi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} \chi^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\sqrt{m/k}x_0}^{\sqrt{m/k}x(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m} - u^2}}, \quad (10.23)$$

es decir:

$$I(x(t)) = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\sqrt{m/k}x_0}^{\sqrt{m/k}x(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m} - u^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsen \left(\sqrt{\frac{m}{2E}} u \right) \Big|_{\sqrt{m/k}x_0}^{\sqrt{m/k}x(t)} \quad (10.24)$$

Sustituyendo en $\pm t = I(x(t))$ resulta

$$\pm \sqrt{\frac{k}{m}} t = \arcsen \left(\frac{m}{\sqrt{2kE}} x(t) \right) - \arcsen \left(\frac{m}{\sqrt{2kE}} x_0 \right), \quad (10.25)$$

de acá es sencillo obtener finalmente a x como función de t (la ley horaria)

$$x(t) = \frac{\sqrt{2kE}}{m} \sen \left(\omega_0 t + \arcsen \left(\frac{m}{\sqrt{2kE}} x_0 \right) \right), \quad (10.26)$$

con el fin de presentar el resultado en la forma usual definimos $A = \frac{\sqrt{2kE}}{m}$, $\phi = \arcsen \left(\frac{m}{\sqrt{2kE}} x_0 \right)$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ que lleva al resultado final:

$$x(t) = A \sen (\omega_0 t + \phi). \quad (10.27)$$

² $\int \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}} = \arcsen \left(\frac{u}{A} \right) + constante$

10.4.2. Resolviendo la ecuación de movimiento

Consideremos la segunda ley de Newton

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad (10.28)$$

Ya hemos aprendido anteriormente (vea los apuntes de cinemática y dinámica del movimiento circular) que la anterior es una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes, de hecho, hemos aprendido una técnica³ para resolverla, colocar $x(t) = e^{\lambda t}$ para sustituir la ecuación diferencial por la búsqueda de las soluciones de la ecuación algebráica

$$\lambda^2 = -\omega_0^2, \quad (10.29)$$

que son dos raíces imaginarias puras, a saber: $\lambda = \pm i\omega_0$ ($i = \sqrt{-1}$).

De manera que tenemos dos soluciones posibles,

$$x_{\pm}(t) = e^{\pm i\omega_0 t}, \quad (10.30)$$

Ahora bien, uno de los resultados más bellos de las matemáticas es la fórmula⁴

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (10.31)$$

lo que en nuestro caso trae un problema, las soluciones que hemos encontrado son de una variable real pero tienen valores complejos, y claro, nadie ha visto jamás una distancia compleja. Sin embargo, no nos preocupemos demasiado de esto e intentemos utilizar la solución compleja

$$x(t) = z_1 e^{i\omega_0 t} + z_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (10.32)$$

donde $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ son números complejos (es decir, que tenemos cuatro números reales a nuestra disposición) solo para divertirnos y tratar de resolver nuestro problema de una

³vea la sección 8.1

⁴que por supuesto generaliza la fórmula de Euler $e^{i\pi} = -1$

posición compleja. Comencemos expresando la solución general 10.32 en forma explícita

$$x(t) = (a_1 + ib_1)(\cos(\omega_0 t + i \operatorname{sen}(\omega_0 t))) + (a_2 + ib_2)(\cos(\omega_0 t - i \operatorname{sen}(\omega_0 t))), \quad (10.33)$$

que reordenando términos se escribe como

$$\begin{aligned} x(t) &= (a_1 + a_2)\cos(\omega_0 t) + (b_2 - b_1)\operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ &+ i[(b_1 + b_2)\cos(\omega_0 t) + (a_1 - a_2)\operatorname{sen}(\omega_0 t)], \end{aligned} \quad (10.34)$$

la última línea de esta fórmula muestra nuestro problema de manera explícita, efectivamente, $x(t)$ tiene una parte imaginaria ($\operatorname{Im}(x(t)) \neq 0$) que debería ser nula. Ahora bien, ya comentamos que los dos números complejos z_1 y z_2 contienen cuatro números reales, por otra parte la solución de una ecuación dinámica de segundo orden solo requiere dos números reales (las condiciones iniciales) así que utilicemos dos de los cuatro reales que tenemos a nuestra disposición para cancelar $\operatorname{Im}(x(t))$, esto puede hacerse sin problema imponiendo $a_1 = a_2$ y $b_1 = -b_2$ con lo que nuestra solución general adopta solo valores reales quedando como

$$x(t) = 2a_1\cos(\omega_0 t) + 2b_2\operatorname{sen}(\omega_0 t), \quad (10.35)$$

redefiniendo las cosas poniendo $a = 2a_1$ y $b = 2b_2$ quedamos con

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\operatorname{sen}(\omega_0 t). \quad (10.36)$$

Para llegar a la representación amplitud-fase introducimos un truquito, podemos factorizar la cantidad $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ en la forma

$$x(t) = A \left[\frac{a}{A}\cos(\omega_0 t) + \frac{b}{A}\operatorname{sen}(\omega_0 t) \right]. \quad (10.37)$$

En este punto podemos imaginar un triángulo rectángulo de catetos a y b cuya hipotenusa por lo tanto sería A , obviamente, el seno y el coseno de uno de los ángulos agudos de este triángulo (denotémosle con la letra griega ϕ) están dados por

$$\cos\phi = b/A \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\phi) = a/A \quad (10.38)$$

lo que nos permite reescribir la solución general real para la ley horaria en la forma

$$x(t) = A [\operatorname{sen}\phi \cos(\omega_0 t) + \cos\phi \operatorname{sen}(\omega_0 t)] = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi). \quad (10.39)$$

Escogiendo las cosas de otra manera podemos obtener

$$x(t) = \pm A [\cos\phi \cos(\omega_0 t) - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(\omega_0 t)] = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (10.40)$$

10.5. Oscilaciones amortiguadas

Modifiquemos un poquitín el sistema que estamos estudiando añadiéndole una fuerza de frenado viscosa (que modelaremos como proporcional a la rapidez y opuesta a la velocidad), esto es $\mathbf{F}_v = -\gamma \dot{x} \mathbf{e}_x$ donde γ es una constante positiva, la ecuación de movimiento de la partícula resultante es

$$m \ddot{x} = -k x - \alpha \dot{x} \quad (10.41)$$

que podemos reescribir como

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10.42)$$

Una vez más podemos proponer una solución exponencial para obtener que la condición necesaria y suficiente para que esta sea solución es que la cantidad λ sea solución de la ecuación

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (10.43)$$

donde $2\beta = \gamma/m$ y $\omega_0^2 = k/m$. Obviamente

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\Delta}, \quad (10.44)$$

donde el discriminante de la ecuación polinómica es $\Delta = \beta^2 - \omega_0^2$. Hay tres casos de interés:

$$\Delta < 0 \quad \text{amortiguamiento subcrítico} \quad (10.45)$$

$$\Delta = 0 \quad \text{amortiguamiento crítico, y} \quad (10.46)$$

$$\Delta > 0 \quad \text{sobreamortiguamiento} \quad (10.47)$$

En el caso del amortiguamiento subcrítico, se obtienen dos soluciones independientes,

$$x_{\pm}(t) = e^{-\beta t} e^{i\omega t}, \quad (10.48)$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Estas soluciones pueden combinarse en una estructura tipo amplitud-fase

$$x(t) = e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi). \quad (10.49)$$

En estas soluciones o en las figuras adjuntas se observa claramente que el movimiento resultante es un movimiento de oscilación alrededor de la posición de equilibrio del resorte pero con amplitud cada vez más pequeña.

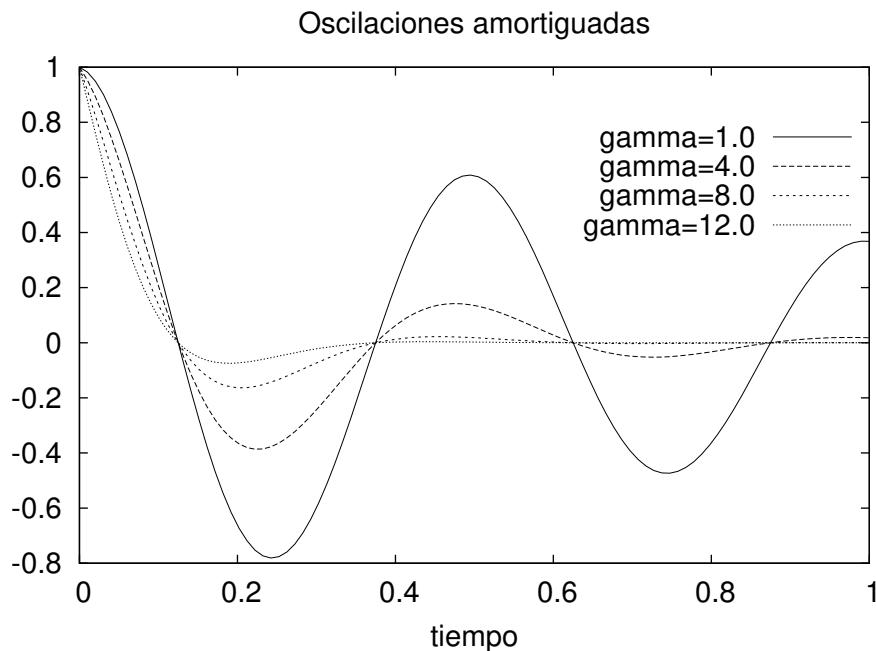


Figura 10.2: Oscilaciones amortiguadas, el caso (a) corresponde a un amortiguamiento débil, mientras que los casos (b) y (c) corresponden a amortiguamientos muy fuertes pero no críticos o sobreamortiguados.

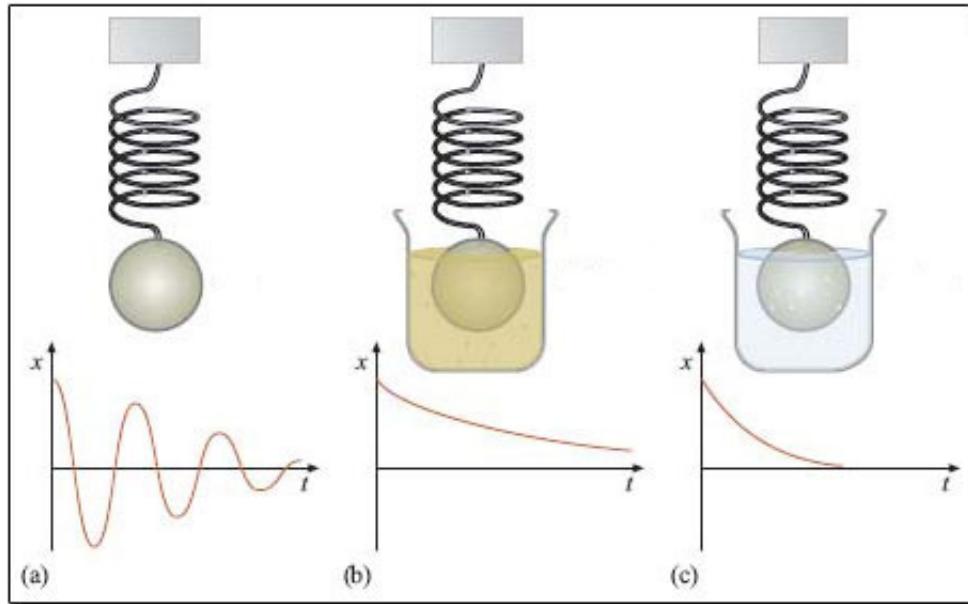


Figura 10.3: Oscilaciones amortiguadas, el caso (a) corresponde a un amortiguamiento débil, mientras que los casos (b) y (c) corresponden a amortiguamientos muy fuertes.

Como aplicación interesante de los osciladores amortiguados, cabe decir que los sistemas de amortiguación de los automóviles son compuestos, hay resortes y ballestas y los dispositivos realmente denominados amortiguadores. Si uno paseara en un auto sin amortiguadores sentiría al carro oscilar como un lanchón (se comportaría de manera parecida a una partícula adosada a un resorte ideal), el efecto de los amortiguadores consiste en eliminar la oscilación como hemos estudiado en esta sección.