Problemas Resueltos de Mecánica Clásica

Mario Caicedo

Febrero 2022

1. Cinemática

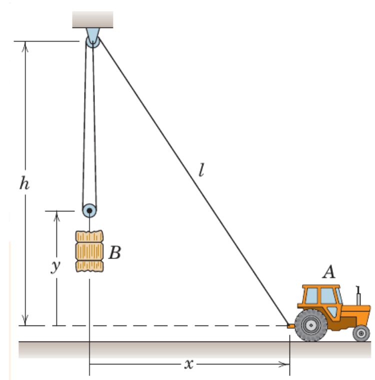

Figura 1: Problema 1

Problema 1 *El tractor A se utiliza para elevar el fardo de heno utilizando para ello el sistema de poleas que se muestra en la figura 1. Determine una expresión para la velocidad del fardo en términos de la velocidad del tractor. Este es un problema muy sencillo en que la longitud (L) de la soga (que se considera inextensible) permite establecer el siguiente vínculo*[1]

$$L = 2(h - y) + \ell = 2(h - y) + \sqrt{x^2 + h^2}\,, \tag{1}$$

Al tomar la derivada respecto al tiempo de la longitud de la soga encontramos,

$$\frac{dL}{dt} = 0 = -2\dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}}\,, \tag{2}$$

y de acá

$$\dot{y} = v_B = \frac{1}{2}\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}}\,. \tag{3}$$

[1] Se está utilizando un sistema de referencia convencional en que y es cero a nivel del piso y positivo por encima de dicho nivel y x crece hacia la derecha.

Como comentario final notemos que el signo de $\dot{y}$ está correctamnte asociado con el de $\dot{x}$, de manera que cuando el tractor hala de la soga, el fardo efectivamente se eleva.

Problema 2 *La rotación del brazo OP de la figura 2 es controlada por el movimiento horizontal del pasador vertical ranurado.*

Cuando $x = 2''$, $\dot{x} = 4\, ft/s$ y $\ddot{x} = 30\, ft/s^2$, ¿cuáles son los valores correspondientes de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$?

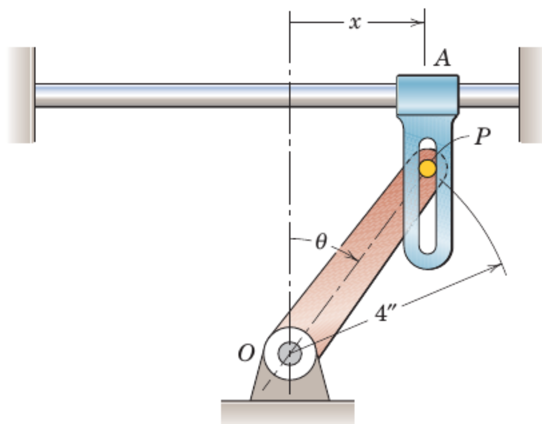

Figura 2: Problema 2

Para atacar el problema utilizaremos un sistema de coordenadas cartesiano centrado en O y con la orientación usual (es decir, x crece hacia la derecha de la figura y y lo hace desde O y hacia la barra de suspensión). Usaremos además un sistema polar con el ángulo θ definido exactamente como en la figura. Con estas escogencias,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \ell(sen\theta\hat{\mathbf{e}}_x + cos\theta\hat{\mathbf{e}}_y) = \ell\hat{\mathbf{e}}_r\,, \\
\mathbf{v} &= \ell\dot{\theta}(cos\theta\hat{\mathbf{e}}_x - sen\theta\hat{\mathbf{e}}_y) = \ell\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,, \\
\mathbf{a} &= -\ell\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r + \ell\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

como verificación notemos que cuando x crece, θ también lo hace, de hecho, cuando x cftrece, la componente horizontal de la velocidad de P es positiva ($\dot{x} > 0$) al igual que $\dot{\theta}$

De las fórmulas anteriores deducios que, para cualquier ángulo

$$\begin{aligned}
\dot{x}(\theta) &= \ell\dot{\theta}(\theta)cos(\theta)\,, \\
\ddot{x}(\theta) &= -\ell[\dot{\theta}(\theta)]^2 sen\theta + \ell\ddot{\theta}(\theta)cos\theta = -\dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta}y
\end{aligned} \tag{5}$$

de la primera ecuación sigue que

$$\dot{\theta}(\theta) = \frac{\dot{x}(\theta)}{\ell cos(\theta)} = \frac{\dot{x}}{\ell\, cos\theta}\,, \tag{6}$$

y de la segunda,,

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x} + \dot{\theta}^2 x}{y}\,, \tag{7}$$

Debido a que $\ell = 4''$, cuando $x = 2''$ ocurre que $sen\theta = 1/2$ y por tanto, $cos\theta = \sqrt{3}/2$.

Sutituyendo los valores numéricos de interés,

$$\dot{\theta}(\theta) = \frac{4\,ft/s}{4'' \times \sqrt{3}/2} = \frac{4 \times 12''/s}{4'' \times \sqrt{3}/2} = \frac{24}{1{,}73}\,rad/s \approx 13{,}86\,rad/s \tag{8}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{30\,ft/s^2 + (13{,}86\,rad/s)^2 \times 2''}{(2\sqrt{3})''} = 214{,}67\,rad/s^2 \tag{9}$$

Problema 3 *La antena de radar de la figura 3 oscila alrededor de su eje vertical según la fórmula* $\theta = \theta_0\, cos(\omega t)$*, donde* ω *es la frecuencia angular* **constante** *y* $2\theta_0$ *el doble de la ampitud angular de oscilación. Simultáneamente el ánguo de elevación de la antena* (ϕ)*está aumentando a una taa uniforma* $\dot{\phi} = K$*.*

Determine expresiones para la magnitud de la aceleración del detector (a) cuando este pasa por el punto A y (b) cuando alcanza la posición azimutal B (suponga que en ese punto $\theta = 0$*).*

Pregunta: *¿Qué intrés puede tener este cálculo?*

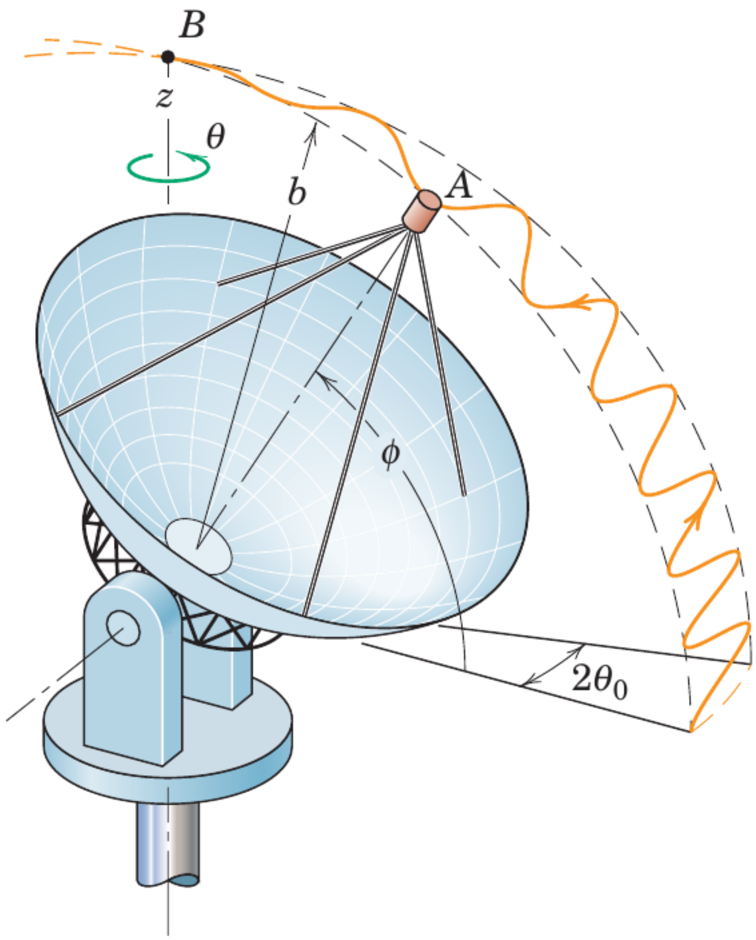

Figura 3: Problema 3

Evidentemente el receptor de la antena se mueve sobre una esfera de radio B lo que nos permite usar de manera directa las fórmulas correspondientes de aceleración en coordenadas esféricas teniendo cuidado, eso si, en que la nomenclatura de la figura es diferente a la usual, acá el azimuth es θ y la latitud ϕ.

Comencemos por recordar la fórmula general de aceleración en coordenadas esféricas (acá estamos haciendo el cambio de notación $\phi \leftrightarrow \theta$)

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = & \left[\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - rsen^2\phi\dot{\theta}^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \\ & + \left[r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - rsen\phi cos\phi\dot{\theta}^2\right]\hat{\mathbf{e}}_\phi + \\ & + \left[rsen\phi\ddot{\theta} + 2rcos\phi\,\dot{\phi}\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}sen\phi\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta\end{aligned} \tag{10}$$

Al imponer el vínculo $r = b = constante$ la fórmula se reduce a[2]

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = & -b\left[\dot{\phi}^2 + sen^2\phi\dot{\theta}^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \\ & + b\left[\ddot{\phi} - sen\phi cos\phi\dot{\theta}^2\right]\hat{\mathbf{e}}_\phi + \\ & + b\left[sen\phi\ddot{\theta} + 2cos\phi\,\dot{\phi}\dot{\theta}\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta\,,\end{aligned} \tag{11}$$

La posición A es un punto de retorno en el ángulo θ, es decir, $\dot{\theta}|_A = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}|_A = & -b\,\dot{\phi}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + \\ & + b\,\ddot{\phi}\,\hat{\mathbf{e}}_\phi + \\ & + b\,sen\phi\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,.\end{aligned} \tag{12}$$

En vista de que $\dot{\phi} = K =$ constante y $\theta = \theta_0\,cos(\omega t)$ocurre que $\ddot{\phi} = 0$, $\dot{\theta} = -\omega\theta_0 sen(\omega t)$ y $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 cos(\omega t)$ la expresión qe estamos bucando queda finalmente en la forma,

$$\mathbf{a}|_A = -b\,K^2\,\hat{\mathbf{e}}_r \mp b\omega^2\theta_0\,sen\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,. \tag{13}$$

donde hemos usado que, en el punto de retorno para θ, $cos(\omega t)|_{retornos} = \pm 1$, al evcaluar la magnitud de la aceleración queda

$$a|_A = b\sqrt{K^4 + \omega^4\theta_0^2\,sen^2\phi} \tag{14}$$

Aun falta un detalle, en la notación estándar el ángulo θ es la colatitud, mientras que en la figura, el ángulo ϕ que mide la elevción de la antena es la latitud de manera que hay que implemantar el cambio $\phi \to \pi/2 - \phi$ que deja la fórmula para la aceleración en el punto de interés como

$$a|_A = b\sqrt{K^4 + \omega^4\theta_0^2\,cos^2\phi}\,. \tag{15}$$

Consideraciones similares que se dejan al lector llevan a la conclusión

$$a|_B = bK\sqrt{K^2 + \omega^2\theta_0^2} \tag{16}$$

[2]Este resultado puede obtenerse sin problema imponiendo el vínculo desde el principio, es decir, poniendo $\mathbf{r} = b\hat{\mathbf{e}}_e$ y calculando las derivadas correspondientes