Acción de una Partícula en Interacción con un Campo Electromagnético Externo

Mario Caicedo

Abril 2022

1. Introduction

Del los cursos de física básica hemos aprendido que las fuerza (fuerza de Lorentz) que un campo electromagnético ejerce sobre una partícula es

$$\mathbf{F}_L = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{B} \times \mathbf{v} \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula.

Ahora bien, la teoría electromagnética nos enseña que tanto el campo eléctrico como la inducción magnética se pueden poner en términos del potencial escalar eléctrico ϕ y el potencial vectorial magnético ($\mathbf{A}$) potenciales lo que permite reescribir la fórmula anterior, en la forma

$$\mathbf{F}_L = -q\,grad(\phi) + q\,rot\mathbf{A} \times \mathbf{v} \tag{2}$$

Incluir la parte eléctrica de la interacción en la acción corresponde a escribir

$$S = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - q\phi\right] dt\,, \tag{3}$$

así que lo que debemos hacer es estudiar la manera de incluir la interacción magnética, asunto del que nos ocuparemos a continuación

2. La interacción magnética

La primera observación que debemos hacer es la siguiente, el término de interacción magn´petica debe estar constituido por una una cantidad escalar que incluya al potencial vector[1] $\mathbf{A}$ y que tenga dimensiones de ación/tiempo.

Un candidato obvio para un tal término de la acción es la integral de línea del potencial vector, es decir

$$S_{mag} = \int L_{mag} = q\int \mathbf{A}.d\mathbf{x} = q\int A_i\,\dot{x}^i\,dt\,, \tag{4}$$

[1] ¿qué ocurriría si incluyeramos directamente al campo $\mathbf{B}$?

donde q es la carga eléctrica de la partícula.

Para estudiar esta propuesta hay que comenzar por un primer **ejercicio** que consiste en verificar la dimensionalidad de S_{mag}. Resuelto este punto, continuemos nuestra investigación recordando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right] , \tag{5}$$

como lo que estamos proponiendo consiste únicamente en añadir a la acción el término S_{mag} nos basta con observar el comportamiento de las derivadas de S_{mag} que aparecerán een las ecs de Euler-Lagrange.

Notemos en primer lugar que,

$$\frac{\partial(A_i\,\dot{x}^i)}{\partial \dot{x}^j} = A_j\,, \tag{6}$$

esta cantidad debe diferenciarse con respecto a t obteniéndose,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(A_i\,\dot{x}^i)}{\partial \dot{x}^j}\right] = \frac{d}{dt}\,[A_j] = \partial_p A_j \dot{x}^p \tag{7}$$

Por otra parte, hay que calcular

$$\frac{\partial(A_i\,\dot{x}^i)}{\partial x^j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\,\dot{x}^i \tag{8}$$

Al sustituir en las ecs de E-L queda,

$$m\ddot{x}^j + q\partial_j A_i \dot{x}^i = q\partial_p A_j \dot{x}^p \tag{9}$$

es decir,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^j &= q\partial_p A_j \dot{x}^p - q\partial_j A_i \dot{x}^i = \\ &= q\partial_i A_j \dot{x}^i - q\partial_j A_i \dot{x}^i = \\ &= q\left[\partial_i A_j - \partial_j A_i\right]\dot{x}^i \end{aligned} \tag{10}$$

cuando usamos coordenadas cartesianas, la posición de los índices (arriba o abajo) es irrelevante, así que podemos reescribir la ecuación de movimiento en la forma

$$m\ddot{x}_j = q\,\left[\partial_i A_j - \partial_j A_i\right]\,\dot{x}_i \tag{11}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{v} &= \epsilon_{pkq}\,\epsilon_{k\ell m}\partial_\ell A_m\,\dot{x}_q\,\hat{\mathbf{e}}_p = \\ &= -\epsilon_{kpq}\,\epsilon_{k\ell m}\partial_\ell A_m\,\dot{x}_q\,\hat{\mathbf{e}}_p = \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_p\,\left[\delta_{p\ell}\,\delta_{qm} - \delta_{pm}\,\delta_{q\ell}\right]\,\partial_\ell A_m\,\dot{x}_q = \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_p\,\left[\partial_p A_q - \partial_q A_p\right]\,\dot{x}_q = \\ &= \hat{\mathbf{e}}_p\,\left[\partial_q A_p - \partial_p A_q\right]\,\dot{x}_q \\ &= \hat{\mathbf{e}}_j\,\left[\partial_i A_j - \partial_j A_i\right]\,\dot{x}_i \end{aligned} \tag{12}$$

Este resultado implica que, las ecuaciones de Euler-Lagrange que hemos encontrado se resumen en

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{q}{m} q\,(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = q\,\mathbf{B} \times \mathbf{v}\,, \tag{13}$$

es decir, la componente magnética de la fuerza de Lorentz que también podemos poner como

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\,\mathbf{B} \times \mathbf{v} \tag{14}$$

Al incluir la paerte eléctrica la acción es

$$S = S_0 + S_{int} \tag{15}$$

donde S_0 es la acción de la partícula libre y

$$S_{int} = S_{elec} + S_{mag} = -\int \phi dt + q \int \mathbf{A}.d\mathbf{x}\,, \tag{16}$$

es decir,

$$S = \int \left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\,\phi + q\,\mathbf{A}.\dot{\mathbf{x}}\right] dt, \tag{17}$$

3. Invariancia de Calibre

El movimiento de la partícula cargada está determinado por las fuerzas que actúan sobre ella, es decir, por la configuaración de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, la teoría electromagnética nos muestra que estos campos se calculan a partir de los potenciales según las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \tag{18}$$

lo que implica que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son invariantes bajo las transformaciones de calibre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi' &= \phi - \partial_t\Lambda \end{aligned} \tag{19}$$

El significado físico de la invariancia de calibre es el siguiente: el movimiento de una partícula cargada no puede depender de la escogencia de los potenciales, esto parece curioso ya que son los potenciales, los objetos que aparecen en la acción.

Si bien es cierto, que las ecuaciones de Euler Lagrange de la acción propuesta coinciden perfectamente con las ecuaciones asociadas a la fuerza de Lorentz, es válido pregutarse que efecto podrían tener las transformaciones de calibre en la acción misma. ese será nuestro siguiente tema de investigación.

Nos interesa ver cual es el cambio que sufre la acción propuesta

$$S = \int \left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\,\phi + q\,\mathbf{A}.\dot{\mathbf{x}}\right] dt \tag{20}$$

al aplicar una transformación de calibre a los potenciales.

El cálculo es bastante directo y lo presentamos a continuación

$$\begin{aligned} S' &= \int \left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\,\phi + q\partial_t\Lambda + q\,\mathbf{A}.\dot{\mathbf{x}} + q\nabla\Lambda\dot{\mathbf{x}}\right] dt = \\ &= \int \left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\,\phi + q\,\mathbf{A}.\dot{\mathbf{x}} + q\partial_t\Lambda + q\nabla\Lambda\dot{\mathbf{x}}\right] dt = \\ &= \int \left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\,\phi + q\,\mathbf{A}.\dot{\mathbf{x}}\right] dt + \int \left[q\,\partial_t\Lambda + q\,\nabla\Lambda\dot{\mathbf{x}}\right] dt = \\ &= \int \left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\,\phi + q\,\mathbf{A}.\dot{\mathbf{x}}\right] dt + q\int \frac{d}{dt}\left[\Lambda\right]\, dt \end{aligned} \tag{21}$$

En resumen,

$$\boxed{S' = S + q\int \frac{d}{dt}\left[\Lambda\right]\, dt} \tag{22}$$

Es decir, bajo transformaciones de calibre, el lagrangiano cambia por una derivada total, lo que, de acuerdo a los teoremas que hemos comentado, implica que no hay cambio en las ecuiaciones de movimiento, o dicho de otra manera, la física se mantiene invariante bajo transformaciones de calibre.

Ya hemos discutido la definición del momento canóinico asociado a una coordenada generalizada,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{23}$$

Para el sistema que estamos estudiando, el momento canónico asociado a las coordenadas cartesianas es

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + q\,A_i\,. \tag{24}$$

Es necesario ener mucho cuidado en no confundir al momento canónico con el momento mecánico

$$\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v}\,. \tag{25}$$

cuyas componentes podemos expresar como

$$\pi_i = p_i - q\,A_i\,. \tag{26}$$

Hay una enorme diferencia entre ambos objetos, en efecto, bajo una transformación de calibre,

$$\begin{aligned} &p_i \to p'_i = m\dot{x}_i + q\,A'_i = m\dot{x}_i + q\,A_i + q\partial_i\lambda \\ &\pi_i \to \pi'_i = p'_i - q\,A'_i = (m\dot{x}_i + q\,A'_i) - q\,A'_i = \\ &\quad = m\dot{x}_i = \pi_i\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Es decir, el momento mecánico es invariante de calibre mientras que el momento canónico no lo es.

4. Comentarios Finales

Comencemos esta última sección introduciendo una idea fundamental

Definición 1 *Una cantidad física* $(F(x^i, \dot{x}^i))$ *es una cantidad independiente de calibre.*

La física tiene que ser siempre la misma, por ejemplo, no queremos que un experimentador detecte que una partícula es un electrón y otro identifiqe la misma partícula como un piónha de nueutro.

Ciertamente hay cosas que dependen de los observadres, en el caso de la mecánica, por ejemplo, no hay razón para que diversos experimentadores detecten que la velocidad es la misma, de echo, la velocidad depoende de la velocidad y orientación relativas de un observador cha deon respecto a otro. Las fuerzas y la dinámica que ellas generan, sin embargo, tienen que ser las mismas para todos los observadores inerciales.

Em el caso de la interacción electromagnética, toda la física de interés tiene que ser invariante de calibre y de allí la importancia de la definición 1.