Mecánica Clásica 1
Tarea 0

Mario Caicedo

Diciembre, 2021

1. Introduction

Usted y yo sabemos perfectamente que en la web puede buscar recursos en que encontrará resueltos casi todos los problemas de cuanto texto se me ocurra a mi utilizar. Así que la tentación de "hacer trampa" es enorme, ¿habrá alguien acaso que no quiera entregar trabajos perfectos?.

Consultar no es tan truculento como enseña la "escuelita" tradicional, de hecho yo mismo y todos mis colegas, quienes debemos sancionarles si se "copian" consultamos los textos para dictar los cursos que se encuentran bajo nuestra responsabilidad. Dadas estas condiciones, ¿que hacer?, la respuesta es simple: cada uno de nosotros debe ser honesto. En el caso de un curso básico o intermedio como este, honestidad se traduce en leer cuidadosamente los textos, hacer todo esfuerzo personalísimo en tratar de reproducir los razonamientos y resultados que se presentan en ellos, completar los pasos intermedios y obviamente intentar resolver todas y cada una de las preguntas y problemas que encuentre, en este proceso, el trabajo en grupo es totalmente válido y solo debe permitirse recurrir a la consulta via google cuando usted y sus compañeros, luego de haber consultado con el profesor del curso, hayan alcanzado el agotamiento por no encontrar solución.

Hay muchas habilidades que hay que aprender y que están más allá de las que se desarrollan formalmente en los cursos. Una de ellas, que es fundamental para un físico es aprender a usar varias herramientas, es por ello que le pido que en la medida de lo posible, utilice LaTeX -la herramienta que uso para escribir este documento- para entregar sus tareas. Le recomiendo en particular overleaf un servicio en la nube que le permite crear y compartir proyectos en latex sin tener que instalar software en su computador.

Esta tarea, titulada "Tarea 0" tiene como objetivo dar un primer repaso a algunos elelementos de álgebra y análisis vectorial con los que usted ya debería estar muy familiarizado. En el contexto de esta tarea la palabra *vector* debe entenderse con su significado usual de *segmento orientado*.

Leídas las líneas anterores, aplíquese y diviértase con la tarea.

2. Preguntas y Problemas

Los productos escalar y vectorial siempre se introducen con algún tipo de definición. Antes de proponer los primeros problemas, presentaremos dos definiciones axiomáticas de $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Para ello es necesario comenzar[1] con una base ortonormal *dextrogira*[2] de vectores unitarios del 3-espacio, $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$.

Definición 1 *Dado un par cualquiera de números naturales (i, j), la delta de Kronecker (δ_{ij}) está dada por*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Definición 2 *El producto escalar* $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ *es una aplicación*

$$. : \Re 3 \times \Re^3 \to \Re$$

que satisface las propiedades:

- *Conmutatividad,*
- *Distributividad,*

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}.\mathbf{B} + \mathbf{A}.\mathbf{C}$$

- *Permeabilidad con respecto al producto por escalares, es decir,* $\forall \alpha \in \Re$

$$\mathbf{A}.(\alpha \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A}.\mathbf{B}$$

- *finalmente, para los elementos de una base ortonormal dextrogira*

$$\hat{\mathbf{e}}_i.\hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \, , \tag{1}$$

  donde, obviamente, $1 \leq i, j \leq 3$

Definición 3 *El producto vectorial* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *es una aplicación*

$$\times : \Re 3 \times \Re^3 \to \Re^3$$

que satisface las propiedades:

- *Distributividad:* $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

[1] Observe que la base está especificada en términos puramente geométricos sin hacer referencia a dirección alguna de su orientación en el espacio

[2] Orientada según la regla de la mano derecha

- *Permeabilidad con respecto al producto por escalares, es decir,* $\forall \alpha \in \Re$, $\mathbf{A} \times (\alpha \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- *Para cualquier base ortonormal*

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 &= \hat{\mathbf{e}}_3 \\
\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 &= \hat{\mathbf{e}}_2 \\
\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 &= \hat{\mathbf{e}}_1 \\
\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j &= 0\,, \ \textit{si: } i = j \\
&\textit{Cambiar el signo si el orden de los índices cambia}
\end{aligned} \tag{2}$$

Problema 1 *Demuestre que si*

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \equiv a_i \hat{\mathbf{e}}_i \\
\mathbf{B} &= b_i \hat{\mathbf{e}}_i
\end{aligned}$$

la definición 2 implica

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_2 = a_i b_i$$

Es muy común repreentar a los vectores como ma que si trices columna, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

¿puede reescribir el producto escalar en esta representación?

Problema 2 *Utilice la definición* **geométrica** *de magnitud*[3] *de un vector para demostrar*

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\, cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores[4]

Problema 3 *Demuestre que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector ortogonal al plano que forman $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ orientado según la regla de la mano derecha (de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$)y que*

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\, sen(\theta)$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores

Problema 4 *Demuestre que el producto vectorial se puede escribir formalmente como*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

[3] $|\mathbf{A}|$=longitud de $\mathbf{A}$
[4] ¿Como se define el ángulo que forman dos vectores?

Problema 5 *Considere el símbolo de Levi-Civita*

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \textit{Cuando hay al menos un índice repetido.} \\ +1 & \textit{Cuando los índices están en el orden de una permutación par de } 1,2,3 \\ -1 & \textit{Cuando los índices están en el orden de una permutación impar de } 1,2,3 \end{cases}$$

1. *Demuestre*[5][6]*:*

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jm}$$

2. *Demuestre que, en coordenadas cartesianas,*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{\mathbf{e}}_k \tag{3}$$

Problema 6 *Encuentre fórmulas generales para*

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}.(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \\ &\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \\ &(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \end{aligned} \tag{4}$$

Problema 7 *Sea* $\hat{\mathbf{u}}$ *un vector unitario, demuestre que* $\forall\ \mathbf{A}$*,*

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}.\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{u}}) \times \hat{\mathbf{u}}\,, \tag{5}$$

¿qué interpretación geométrica tiene el resultado?

Problema 8 *Considere dos vectores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{C}$*, ¿bajo que condiciones (si es que las hay) existirá solución a la ecuación*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}\,.$$

De existir solución, ¿es única?

Problema 9 *Considere la matriz*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

1. *¿Qué interpretación geométrica puede darle?*

2. *Discuta todas las propiedades interesantes que encuentre en* $\boldsymbol{M}$ *(el problema 1 puede serle de ayuda)*

Problema 10 *Construya la matriz* 3×3 *que representa una rotación de ángulo* θ *alrededor del eje y*

Problema 11 *¿Qué son los autovalores de una matriz cuadrada?, ¿qué interpretación geométrica tienen?*

[5] La única demostración que conozco consiste en hacer todas las combinaciones de interés

[6] Dese cuenta de que hay una regla nemotécnica sencilla para aprender de memoria el resultado

Problema 12 *¿Podría encontrar alguna (ó algunas) característica(s) de las matrices que representan rotaciones?. Una vez más, el problema 1 puede serle de ayuda.*

Problema 13 *¿Qué interpetación gemétrica puede asociar a una matriz* 3×3*?*

Problema 14 *Considere un vector que depende de un parámetro real (*$\mathbf{A} = \mathbf{A}(s)$*)*

1. *Encuentre*
$$\frac{d|\mathbf{A}|^2}{ds}$$
2. *¿Qué ocurre si* $|\mathbf{A}|$ *es constante?*
3. *De que podemos estar seguros si ocurre que*
$$\frac{d|\mathbf{A}|^2}{ds} = 0$$
4. *¿Qué interés -para este curso- pueden tener las preguntas anteriores?*

Problema 15 *Sean* $\mathbf{r}$ *un vectro que depende de un parámetro real (*t*) y* $\dot{\mathbf{r}}$ *su derivada respecto a* t*, demuestre que*

$$\frac{d[\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})]}{dt} = r^2\ddot{\mathbf{r}} + (\mathbf{r}.\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}.\ddot{\mathbf{r}})\mathbf{r} \tag{6}$$

Problema 16 *Demuestre la identidad*

$$\int [2a\mathbf{r}.\dot{\mathbf{r}} + 2b\dot{\mathbf{r}}.\ddot{\mathbf{r}}]\, dt = a\mathbf{r}^2 + b\dot{\mathbf{r}}^2\,, \tag{7}$$

donde a *y* b *son constantes reales.*

Problema 17 *Demuestre que*

$$\int \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2}\right] dt = \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{C}\,,$$

donde $r = |\mathbf{r}|$ *y* $\mathbf{C}$ *es un vector constante*

Problema 18 *Sea* $\mathbf{A}(t)$ *un vector dependiente de un parámetro. Evalúe la integral*

$$\int \mathbf{A} \times \ddot{\mathbf{A}} dt\,.$$

Problema 19 *Rcordando un poco de su curso de introducción a la mecánica, considere el movimiento de vector de posición de una partícula (*$\mathbf{r}(t)$*), encuentre el valor de la integral de línea*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.d\mathbf{r}\,, \tag{8}$$

donde $\mathcal{C}$ *es un camino qur une dos puntos* A *y* B *del espacio.* **Ayuda** *Reduzca el orden de derivación y exprese el elemento de curva (*$\hat{\mathbf{r}}$*)en términos de* $\dot{\mathbf{r}}$

Problema 20 *Demuestre que los vectores entendidos como segmentos orientados y las operaciones básicas definidas sobre ellos consituyen un espacio vectorial de dimensión* 3