FS-4212: SEGUNDO PARCIAL

Universidad Simón Bolívar
Septiembre - Diciembre 2018
Sartenejas, 03 de diciembre de 2018

Nombre: ____ Carnet: ______________________

1. Suponga que se tiene un trompo masivo simétrico tal que cada elemento de masa asociada tiene una densidad de carga homogénea, de manera que el cociente e/m sea constante. Si un cuerpo así, denominado *trompo simétrico cargado*, rota en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, entonces el Lagrangiano del sistema viene dado por

$$\mathcal{L} = T - \vec{\omega}_l \cdot \vec{\mathbf{J}} \tag{1}$$

donde $\vec{\omega}_l \equiv -\frac{q\vec{\mathbf{B}}}{2m}$ es la conocida frecuencia de Larmor.

   (a) (4 ptos.) Muestre que T es una constante, lo cual es una manifestación de la propiedad de la fuerza de Lorentz de que un campo magnético no realiza trabajo sobre una carga en movimiento.

   (b) (4 ptos.) Suponga que ω_l es mucho menor que la rapidez angular inicial del trompo. Obtenga expresiones para las frecuencias y amplitudes de la nutación y precesión.

   (c) (2 ptos.) ¿De dónde proviene la energía cinética para la nutación y precesión?

   Ayuda: Puede consultar las secciones 5.7 y 5.9 de H. Goldstein, C.P. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, 3^{ra} Edición.

2. Un Hamiltoniano $\mathcal{H}(Q, P, t)$ para un sistema con $n = 1$ tiene la forma

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2\alpha} - bQP\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{ba}{2}Q^2\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\alpha + b\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) + \frac{kQ^2}{2} \tag{2}$$

donde a, b, α y k son constantes.

   (a) (4 ptos.) Determine el Lagrangiano $\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t)$.

   (b) (3 ptos.) Determine un Lagrangiano equivalente $\mathcal{L}'(q, \dot{q})$ que no dependa explícitamente del tiempo, *i.e.* $\partial_t \mathcal{L}' = 0$.

   (c) (3 ptos.) Determine el Hamiltoniano $\mathcal{H}'(q, p)$ asociado a $\mathcal{L}'(q, \dot{q})$. ¿Cuál es su relación con $\mathcal{H}(Q, P, t)$?

3. (2 ptos.) Se dice que a un Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ se le aplica una transformación de calibre cuando se le suma cualquier función de la forma $\frac{d\Psi(q,t)}{dt}$. Encuentre la manera en que cambia el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q, p, t)$ asociado a $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ bajo transformaciones de calibre.

4. El Hamiltoniano $\mathcal{H}(q,p,t)$ para una partícula cargada en un campo electromagnético viene dado por

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{1}{2m}\delta^{\alpha\gamma}\left[p_\alpha - eA_\alpha(q,t)\right]\left[p_\gamma - eA_\gamma(q,t)\right] + e\varphi(q,t) \tag{3}$$

Una transformación de calibre del campo electromagnético $A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha\Lambda$, $\varphi \to \varphi' = \varphi - \partial_t\Lambda$ cambia tanto el Hamiltoniano (3) como los momenta $p_\gamma = m\dot{q}^\gamma + eA_\gamma$.

(a) (3 ptos.) Muestre que el cambio es una transformación canónica de tipo 2, *i.e.* con (q,P) independientes.

(b) (2 ptos.) Halle su función generadora F.

(c) (2 ptos.) Muestre que el nuevo Hamiltoniano $\mathcal{K}(Q,P,t)$ viene dado por $\mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial_t F_2$, con $F_2 \equiv F\big(q, Q(q,P,t), t\big) + P_\alpha Q^\alpha(q,P,t)$

5. Sea

$$Q^1 = \left(q^1\right)^2, \;\; Q^2 = q^1 + q^2, \qquad P_\alpha = P_\alpha(q,p), \; \alpha = 1,2 \tag{4}$$

una transformación canónica para $n = 2$.

(a) (3 ptos.) Complete la transformación al encontrar la expresión más general para los $P_\alpha(q,p)$

(b) (3 ptos.) Encuentre una escogencia particular para los $P_\alpha(q,p)$ tales que

$$\mathcal{H} = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + \left(q^1 + q^2\right)^2 \;\;\longrightarrow\;\; \mathcal{K} = P_1^2 + P_2 \tag{5}$$

Use esta transformación canónica para determinar las $q^\alpha(t)$.