Universidad Simón Bolívar

FS-4211: Mecánica Clásica I
Primer Parcial

Abril - Julio 2021

Sartenejas, 04 de junio de 2021

A continuación se presentan cuatro (4) problemas que debe desarrollar para un total de cien (100) puntos. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible. Su resolución del examen debe entregarla en un único archivo PDF, con todas las imágenes nítidas, y la orientación de cada página correcta. Si decide realizar la transcripción en LaTeX(preferible), deberá incluir también el archivo fuente (.tex).

1. (15 ptos.) Sea $\mathcal{C}$ la curva correspondiente a la trayectoria de una cierta partícula clásica no relativista en $D = 3$.

   (a) (3 ptos.) Sea s un parámetro para $\mathcal{C}$ tal que s crece de manera suave y monótona a lo largo de la trayectoria y sean $\vec{\mathbf{r}}(s_o)$ y $\vec{\mathbf{r}}(s_f)$ dos vectores de posición en la trayectoria con $s_o < s_f$. Muestre que la longitud ℓ a lo largo de la trayectoria que separa los puntos $\vec{\mathbf{r}}(s_o)$ y $\vec{\mathbf{r}}(s_f)$ está dada por

   $$\ell(s_o, s_f) = \int_{s_o}^{s_f} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s \geq d_E\big[\vec{\mathbf{r}}(s_o), \vec{\mathbf{r}}(s_f)\big], \tag{1}$$

   donde x_i son las componentes (cartesianas) de $\vec{\mathbf{r}}$ y $d_E\big[\vec{\mathbf{r}}(s_o), \vec{\mathbf{r}}(s_f)\big]$ es la distancia euclídea que separa los puntos $\vec{\mathbf{r}}(s_o)$ y $\vec{\mathbf{r}}(s_f)$.

   (b) (3 ptos.) Muestre que la longitud ℓ es independiente del parámetro escogido para describir la curva $\mathcal{C}$.

   (c) (3 ptos.) Use el vector tangente a la trayectoria $\hat{\mathbf{u}}_T \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\ell}$ para construir una tríada de versores, es decir, una Tríada de Frenet-Serret, con $\hat{\mathbf{u}}_N$ el vector normal principal y $\hat{\mathbf{u}}_B$ el vector binormal.

   (d) (3 ptos.) La curvatura κ de la trayectoria se define como

   $$\kappa \equiv \left\| \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_T}{\mathrm{d}\ell} \right\| = \frac{1}{\rho} \tag{2}$$

   con ρ el radio de curvatura. Muestre que esta definición de κ da cuenta de la tasa de rotación de $\hat{\mathbf{u}}_T$, esto es, la tasa de cambio del ángulo que forman $\hat{\mathbf{u}}_T$ con una dirección fija.

   (e) (3 ptos.) Escriba las variables dinámicas $\vec{\mathbf{r}}$, $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$, $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ de la partícula en términos de la tríada de Frenet-Serret.

2. (20 ptos.) Considere una partícula clásica (no relativista) de masa m en $\mathbb{E}^3$.

   (a) (5 ptos.) Demuestre que si sobre ella actúa una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ conocida, entonces su energía cinética T satisface

   $$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}, \tag{3}$$

   con $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$ su vector velocidad medida en un referencial $\mathbb{S}$ inercial.

(b) (15 ptos.) Sea $\vec{\mathbf{F}}$ una fuerza central tal que su magnitud F está dada por

$$F = \frac{\kappa}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2}\right), \qquad \text{donde} \quad r \equiv \|\vec{\mathbf{r}}\|, \tag{4}$$

donde κ es una constante positiva de dimensión apropiada. Escriba las ecuaciones de movimiento y discuta los aspectos relevantes que pueda sobre la trayectoria de la misma. De ser posible, determine puntos relevantes del movimiento de la partícula.

3. (45 ptos.) Sean $\{\hat{\mathbf{u}}_i\}$ y $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ dos bases ortonormales fijas en los referenciales $\mathbb{S}$ (inercial) y $\mathbb{S}'$ (no inercial), respectivamente. Ambos referenciales coinciden en el origen y $\mathbb{S}'$ rota respecto a $\mathbb{S}$ con velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Una partícula de masa m se describe en coordenadas cartesianas $\{x_i\}$ en $\mathbb{S}$ y $\{y_i\}$ en $\mathbb{S}'$, de manera que

$$\vec{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_{j=1}^{3} y_j \hat{\mathbf{e}}_j. \tag{5}$$

Considere que sobre la partícula actúa una cierta fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ conservativa con potencial asociado $V(x_i)$.

(a) (2 ptos.) Demuestre que

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \propto \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \tag{6}$$

y determine la constante de proporcionalidad.

(b) (8 ptos.) Determine

$$\frac{\partial V}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j}\|\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}\|, \quad \frac{\partial}{\partial y_j}\Big[\mathbf{D}_M(\vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}})\Big] \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}\Big[\mathbf{D}_M(\vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}})\Big]. \tag{7}$$

(c) (10 ptos.) En el referencial $\mathbb{S}'$, la segunda ley de Newton toma la forma

$$m\mathbf{D}_M^2(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{Q}} \quad \text{donde} \quad \vec{\mathbf{Q}} = \vec{\mathbf{F}} + \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \tag{8}$$

y $\vec{\mathbf{F}}_i$ son las fuerzas ficticias. Sea U el potencial generalizado definido como

$$U = \mathfrak{C}_1 V(\vec{\mathbf{r}}) + \mathfrak{C}_2 \mathbf{D}_M(\vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}) + \mathfrak{C}_3 \|\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}\|^2. \tag{9}$$

Determine las constantes $\mathfrak{C}_i$ de manera que

$$\vec{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^{3} Q_j \hat{\mathbf{e}}_j, \quad \text{con} \quad Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{y}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial y_j}. \tag{10}$$

(d) (10 ptos.) Sean T y T' las energías cinéticas en los referenciales $\mathbb{S}$ y $\mathbb{S}'$, respectivamente. Demuestre que

$$T - V = T' - \kappa U', \tag{11}$$

donde κ es una constante a determinar.

(e) (15 ptos.) Considere que la partícula está bajo la influencia de un potencial generalizado de la forma

$$U\big[\vec{\mathbf{r}}, \mathbf{D}_M(\vec{\mathbf{r}})\big] = V(r) + \vec{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \vec{\mathbf{L}}, \tag{12}$$

donde $\vec{\mathbf{L}}$ es el momentum angular medido desde el origen y $\vec{\boldsymbol{\Lambda}}$ es un vector fijo en $\mathbb{S}$. Determine la expresión de la Fuerza asociada a este potencial y escriba las ecuaciones de movimiento.

4. (20 ptos.) Sea un sistema aislado de N partículas en el que la partícula i-ésima tiene masa m_i y vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_i$.

   (a) (5 ptos.) Demuestre que el vector Centro de Masa $\vec{\mathbf{R}}$ satisface

   $$M^2 R^2 = M \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_i m_j r_{ij}^2, \tag{13}$$

   donde

   $$M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i, \quad R \equiv \left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|, \quad r_i \equiv \|\vec{\mathbf{r}}_i\| \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{r}}_{ij} \equiv \vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j \tag{14}$$

   (b) (15 ptos.) Considere que las partículas del sistema interactúan vía una cierta fuerza

   $$\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -K_{ij} \frac{\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}^n}\,, \tag{15}$$

   donde los coeficientes K_{ij} y n son constantes positivas y los subíndices $i, j = 1, 2, \ldots N$. Determine las condiciones bajo las cuales el problema de N cuerpos se reduce a N problemas de un solo cuerpo.