Mecánica Clásica 1 Tarea 1

Mario Caicedo

Diciembre, 2021

1. Preguntas y Problemas

Problema 1 *Encuentre expresiones cartesianas explícitas para los vectores coordenados unitarios en*

1. *Coordenadas cilídricas*
2. *Coordenadas esféricas*

Problema 2 *Haga dibujitos suficientemente cuidadosos como para poder encontrar los factores de escala de las coordenadas del problema 1 y darles una interpretación geométrica derivada de sus bosquejos*

Problema 3 *Encuentre las expresiones generales para la velocidad y la aceleración en los dos sistemas de coordenadas que discutió en el problema 1*

Problema 4 *Considere el campo vectorial*

$$\mathbf{V} = -y\,\hat{\mathbf{e}}_x + x\,\hat{\mathbf{e}}_y \tag{1}$$

1. *Haga una gráfica de* $\mathbf{V}$
2. *Encuentre las* **curvas integrales** *correspondientes.*
3. *Exprese a* $\mathbf{V}$ *en coordenadas polares planas.*

4. *Encuentre* $\nabla.\mathbf{V}$ *y* $\nabla \times \mathbf{V}$ *e interprete (geométrica y físicamente) sus resultados.*

5. *Encuentre la circulación de* $\mathbf{V}$ *a lo largo de un círculo de radio* R *centrado en el origen (utilice dos métodos diferentes)*

Problema 5 *Considere el campo escalar (*V_0 *y* a *son constantes es una constante real positiva)*

$$\phi(x,y,z) = \begin{cases} \frac{V_0}{a} z & 0 < z < a \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2}$$

1. *Encuentre las superficies equipotenciales de* ϕ

2. *Calcule grad(*ϕ*)*

3. *¿Puede dar una interpretación física?*

Ayuda: Quizá le conviene cambiar de coordenadas.

Problema 6 *Considere el campo escalar (a es una constante real positiva)*

$$\phi(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}/a)\,, \tag{3}$$

1. *Encuentre las superficies equipotenciales de* ϕ

2. *Calcule grad(*ϕ*)*

3. *¿Puede dar una interpretación física?*

Ayuda: Quizá le conviene cambiar de coordenadas.

Problema 7 *Ecuentre el* **flujo** *del campo vectorial*

$$\mathbf{U} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z \tag{4}$$

a través de las paredes de un cubo de lado a cuyo centro geométrico coincide con el origen de coordenadas. Es decir, encuentre el valor de

$$\int_{\partial S} \mathbf{U}.\hat{\mathbf{n}}\, ds\,, \tag{5}$$

donde ∂S *es la superficie descrita*

Problema 8 *Considere la esfera S_a de radio R centrada en el origen, el campo* $\mathbf{U}$ *del problema 7 y $\mathcal{C}$ un* **círculo máximo** *de S_a que se especificará más adelante.*

1. *Encuentre el flujo de* $\mathbf{U}$ *a través de S_a*
2. *Llame $\mathcal{C}$ al ecuador de S_a, cuál es el valor de la* **circulación** *de* $\mathbf{U}$ *a lo largo de $\mathcal{C}$?*
3. *¿Qué ocurre si cambiamos a $\mathcal{C}$ por cualquier* **círculo máximo** *de S_a*

Problema 9 *Considere el sistema de coordenadas esféricas y un campo vectorial de la forma*

$$\mathbf{A} = F(r)\,\hat{\mathbf{e}}_r\,, \tag{6}$$

1. *¿Qué puede decir de* $\mathbf{A}$*?*
2. *¿Podría proponer y probar algún teorema en relación a* $\mathbf{A}$*?*

Problema 10 *¿Bajo que condiciones ocurre que un campo vectorial se puede escribir como un gradiente?*

Problema 11 *En los cursos de física elemental usted aprendió que el campo eléctrico generado por una carga puntual Q centrada en el origen se expresa -em coordenadas esféricas- como*

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \tag{7}$$

1. *Encuentre $\nabla \times \mathbf{E}$, ¿qué implicación tiene el resultado?*
2. *Encuentre un potencial para $\nabla \times \mathbf{E}$*
3. *¿Qué hay que hacer para asegurar el resultado*

$$V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r}\,?$$

Problema 12 *Convénzase de que, como consecuencia del principio de superposición, el potencial eléctrostático producido por una densidad volumétrica de carga en un punto P del espacio de posición* $\mathbf{r}$ *es*[1]

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Re^3}\frac{\rho(\mathbf{r}')\,d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{8}$$

[1] va a tener que interpretar la fórmula con cuidado

Problema 13 *A partir de la fórmula 8 del problema 12 demuestre que el campo eléctrico generado por una carga eléctrica distribuída es*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Re^3} \frac{\rho(\mathbf{r}') \ (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \ d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{9}$$

Problema 14 *En sus cursos de métodos matemáticos para la física, se encontrará con la definición rigurosa de la delta de Dirac ($\delta(x-a)$). En una dimensión, $\delta(x-a)$ es el único objeto que satisface la igualdad*

$$\int_I f(x)\delta(x-a)dx = \begin{cases} 0 & si \ a \notin I \\ f(a) & si \ a \in I \end{cases} \tag{10}$$

en tres dimensiones esto se generaliza a

$$\int_V f(\mathbf{x})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{a})d^3x = \begin{cases} 0 & si \ \mathbf{a} \notin V \\ f(\mathbf{a}) & si \ \mathbf{a} \in I \end{cases} , \tag{11}$$

Obs: (1) El 3 *en* $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ *es solo para recordar que se está hablando de la delta en* 3*D. (2) En coordenadas cartesianas,* $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \delta(x-x_a)\delta(y-y_a)\delta(z-z_a)$

Dando por cierto el resultado

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}) \, , \tag{12}$$

demuestre que el potencial electrostático satisface la ecuación Poisson,

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \tag{13}$$