Universidad Simón Bolívar

FS-4211: Mecánica Clásica I
Segundo Parcial

Abril - Julio 2021

Sartenejas, 07 de julio de 2021

A continuación se presentan cuatro (4) problemas que debe desarrollar para un total de cien (100) puntos. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible. Su resolución del examen debe entregarla en un único archivo PDF, con todas las imágenes nítidas, y la orientación de cada página correcta. Si decide realizar la transcripción en LaTeX, deberá incluir también el archivo fuente (.tex).

1. (10 ptos.) Sea un objeto de masa $M(t)$ variable. Demuestre que las ecuaciones de movimiento del centro de masa del objeto, sometido a una cierta fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$, implican que se cumple la siguiente ecuación diferencial para la energía cinética T del objeto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[M(t)T\Big] = \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{P}}, \tag{1}$$

   donde $\vec{\mathbf{P}}$ es el momentum lineal del centro de masa del objeto.

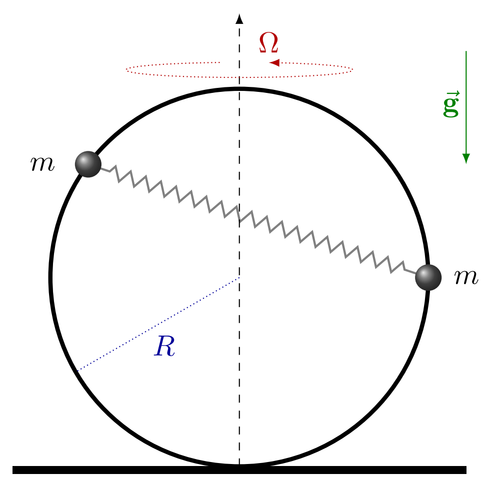
2. (30 ptos.) Dos cuentas de masa m cada pueden deslizar a lo largo de un aro vertical de radio R. Las masas se encuentran conectadas entre ellas por un resorte de constante elástica k y su elongación de equilibrio es $R/2$.

   (a) (10 ptos.) Determine los grados de libertad, escoja las coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ apropiadas y escriba el Lagrangiano $\mathcal{L}$ del sistema.

   (b) (5 ptos.) Determine las ecuaciones de movimiento.

   (c) (5 ptos.) Determine la función energía $\mathcal{E}$ y compare con la energía mecánica total. Discuta la conservación de ambas cantidades.

   (d) (10 ptos.) Determine las condiciones para que las masas se encuentren en equilibrio en la mitad inferior del aro a la misma altura de la base y con el resorte con elongación $R/2$. Compare con el caso análogo en la mitad superior del aro.



3. (30 ptos.) Una partícula de carga e se mueve bajo la influencia de un campo electromagnético estático con potenciales

$$\phi(\vec{\mathbf{r}}) = -\kappa\ln\rho, \quad \vec{\mathbf{A}} = -\frac{B}{2}(y\hat{\boldsymbol{\imath}} - x\hat{\boldsymbol{\jmath}}), \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

   y κ y B constantes de dimensión apropiada.

   (a) (5 ptos.) Exprese los campos y la fuerza de Lorentz en la base de versores cilíndricos $\{\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z\}$.

   (b) (5 ptos.) Escriba la segunda ley de Newton en coordenadas cilíndricas.

   (c) (5 ptos.) Escriba el Lagrangiano y derive las ecuaciones de movimiento. Compare con lo obtenido en la parte anterior.

(d) (5 ptos.) Determine la función energía $\mathcal{E}$ y verifique si se trata de una constante de movimiento. ¿Puede encontrar otra cantidad conservada?

(e) (10 ptos.) Demuestre que para una partícula de masa m y carga e moviéndose en un capo magnético constante,

$$\Gamma \equiv \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \frac{e}{2c} \left\| \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{B}} \right\|^2 \tag{3}$$

es una cantidad conservada. Discuta Γ en el contexto de la situación planteada en las partes anteriores del problema.

4. (30 ptos.) Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial central

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{\beta}{r^3}, \quad \text{con} \quad \kappa > 0, \quad \beta > 0. \tag{4}$$

(a) (15 ptos.) Encuentre una expresión para las órbitas $r(\phi)$ de la partícula.

(b) (15 ptos.) Asuma $\beta \ll 1$ de manera que el término β/r^3 sea una perturbación al potencial Coulombiano. Haga las aproximaciones necesarias, justificando cada una de ellas, y discuta el resultado final de $r(\phi)$.