

Elementos de Análisis Vectorial

Mario I. Caicedo

Diciembre, 2021

Índice general

1. Coordenadas Curvilíneas	2
1.1. Coordenadas Curvilíneas	3
1.2. Ejemplos	7
1.2.1. Coordenadas Cilíndricas	7
1.2.2. Coordenadas Esféricas	8
1.3. Gradiente	10
1.4. Divergencia y teorema de Gauss	10
1.5. Laplaciano	13
1.6. Conexión con Geometría Riemanniana	14

Capítulo 1

Coordenadas Curvilíneas

Mucho del material de este capítulo está restringido a objetos inmersos en \mathfrak{R}^3 .

Desde el punto de vista algebraico pensaremos en \mathfrak{R}^3 como espacio vectorial dotado de del producto interno,

$$. : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R} \quad (1.1)$$

que actúa sobre la base canónica (cartesiana) en la forma

$$\hat{\mathbf{e}}_i . \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} ,$$

Las coordenadas cartesianas de un punto $P \in \mathfrak{R}^3$ se denotan por x^i , $i = 1, 2, 3$ y en consecuencia, el vector de posición de un punto es

$$\vec{r} = x^i \hat{\mathbf{e}}_i .$$

Desde el punto de vista topológico, \mathfrak{R}^3 está dotado naturalmente de una norma y una métrica asociada.

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} . \vec{v}$$

$$d(P, Q) = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q|$$

Como consecuencia de estas definiciones, el cuadrado de la distancia¹ entre dos puntos cercanos de coordenadas x^i y $x^i + dx^i$ es

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^i dx^j \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_i (dx^i)^2$$

donde

$$d\mathbf{r} = (x^i + dx^i) \hat{\mathbf{e}}_i - x^i \hat{\mathbf{e}}_i,$$

Usualmente escribiremos

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j$$

y llamaremos a $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ el tensor métrico del espacio euclídeo y a ds^2 la métrica. También, con el abuso de lenguaje típico de los físicos diremos que η_{ij} es la métrica.

1.1. Coordenadas Curvilíneas

Cuando hacemos un cambio de coordenadas

$$x^i = x^i(u^j) \tag{1.2}$$

los dx^i cambian como

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j$$

y el elemento de arco queda como

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} du^i du^j$$

¹el cuadrado de la longitud de arco

el objeto indexado

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \eta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial u^j} \frac{\partial x^n}{\partial u^j}$$

se denomina tensor métrico inducido.

Los vectores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad (1.3)$$

son tangentes a las curvas coordenadas. Cuando dichas curvas son ortogonales, sus vectores tangentes también lo son.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = 0, \quad i \neq j \quad (1.4)$$

si definimos

$$h_i^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad (1.5)$$

los vectores

$$\hat{\mathbf{u}}_i \equiv \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad (1.6)$$

resultan siendo unitarios y en el caso en que las coordenadas sean ortogonales, definen un triedro ortonormal, es decir

$$\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_j = \delta_{ij} \quad (1.7)$$

En estos casos, el elemento de arco se simplifica enormemente ya que el tensor métrico resulta diagonal y podemos poner:

$$ds^2 = \sum_i h_i^2 (du^i)^2,$$

donde estamos utilizando una notación muy extendida en ingeniería, acá las funciones h_i , denominadas, factores de escala, no son otra cosa que las raíces cuadradas de los elementos diagonales

del *tensor métrico inducido*, es decir:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}.$$

En general, todo vector $\vec{A} = A^i \hat{\mathbf{e}}_i$ puede reexpresarse como

$$\vec{A} = a^i \hat{\mathbf{u}}_i \quad (1.8)$$

y

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} a^i b^j \quad (1.9)$$

Cuando nos limitamos al caso de sistemas ortogonales, las ideas se vuelven muy intuitivas. En efecto, en coordenadas curvilíneas ortogonales tenemos tres direcciones perpendiculares para movernos entre puntos infinitesimalmente cercanos. con pasos dados por los vectores tangentes

$$d\vec{\ell}_i = h_i du^i \hat{\mathbf{u}}_i \quad (1.10)$$

como los pasos son perpendiculares entre si podemos usar el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre los dos puntos cercanos

$$ds^2 = \sum_i (d\vec{\ell}_i)^2 = h_i^2 (du^i)^2 \quad (1.11)$$

y ya vemos que la métrica es algo totalmente natural.

Cualesquiera dos de los tres vectores elementales generan un rectángulo de área vectorial ortogonal a una dirección fija.

$$d\vec{A}_i = d\vec{\ell}_j \times d\vec{\ell}_k \quad j, k \neq i \quad (1.12)$$

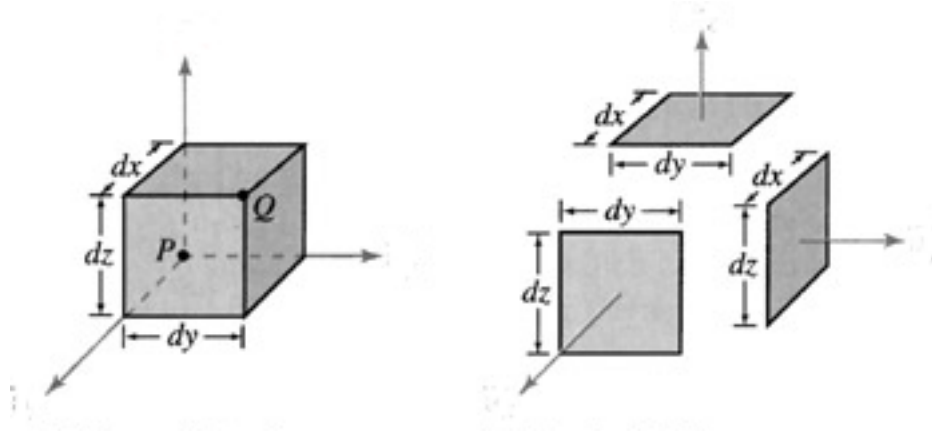


Figura 1.1: Los elementos de volumen y área en coordenadas cartesianas

y los tres vectores combinados forman un cubito elemental de volumen

$$dV = (d\vec{\ell}_1 \times d\vec{\ell}_2) \cdot d\vec{\ell}_3 = h_1 h_2 h_3 du^1 du^2 du^3 \quad (1.13)$$

Las fórmulas 1.12 y 1.13 son muy intuitivas, para entenderlas basta con mirar las figuras 1.1 y 1.2. En la primera de ellas, es evidente que el volumen del cubito infinitesimal (elemento de volumen) es el producto de los tres segmentos rectos que le forman, es decir, $dV = dx dy dz$, las áreas de las caras también son muy fáciles de determinar, cuando x es constante, tenemos que las cara infinitesimales tienen una superficie dada por $ds = dy dz$, pero hay dos de ellas, de acuerdo a la normal que les corresponda, de manera que $ds = \pm dy dz \hat{e}_x$. El caso cilíndrico es bastante más interesante. Comencemos por un área, digamos, una de z constante, en tal caso, el cuadrito infinitesimal correspondiente tiene dos lados de longitudes $\rho d\phi$ y $d\rho$, es decir: $h_\rho d\rho$ y $h_\phi d\phi$ así que los dos diferenciales de área posibles para $z = \text{constante}$ son: $ds = \pm \rho d\phi d\rho \hat{e}_z$. De la figura, también resulta evidente que el elemento de volumen es

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.14)$$

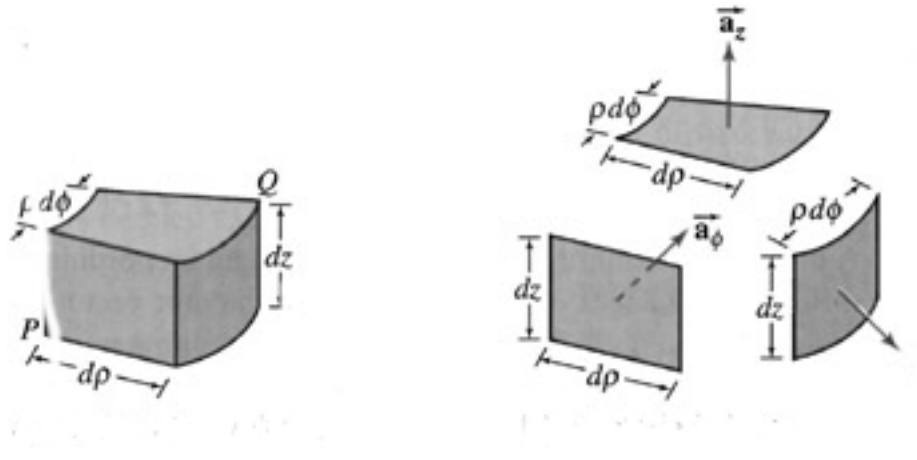


Figura 1.2: Los elementos de volumen y área en coordenadas cilíndricas

dibujito resulta

1.2. Ejemplos

1.2.1. Coordenadas Cilíndricas

Los cambios de coordenadas, vectores de base y elemento de línea son:

$$\begin{aligned} x^3 &= x^3 \\ x^2 &= r \operatorname{sen} \theta \equiv r \operatorname{sen} \theta^1 \\ x^1 &= r \cos \theta \equiv r \cos \theta^1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_3 &= \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 &= -\operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{u}}_1 &= \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{e}}_2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Esta es otra fomra de calcular el elemento de arco

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \\ &= (dr \cos\theta^1 - r \operatorname{sen}\theta^1 d\theta^1)^2 + (dr \operatorname{sen}\theta^1 + r \cos\theta^1 d\theta^1)^2 + (dx^3)^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^1)^2 + (dx^3)^2 \quad (1.18)$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$dV = \sqrt{g} dr d\theta dx^3 = \sqrt{r^2} dr d\theta dx^3 = r dr d\theta dx^3 \quad (1.20)$$

Los jacobianos (que los físicos usamos muy poco en el caso de sistemas de coordenadas ortogonales), son:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

1.2.2. Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned} x^3 &= r \cos\theta \equiv r \cos\theta^2 \\ x^2 &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \equiv r \operatorname{sen}\theta^2 \operatorname{sen}\theta^1 \\ x^1 &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \equiv r \operatorname{sen}\theta^2 \cos\theta^1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 + r^2 (d\theta)^2 \quad (1.23)$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

y los elementos de volumen (que pueden calcularse a partir de un dibujo sencillo, fig. 1.3)

$$dV = \sqrt{g} dr d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} dr d\theta_1 d\theta^1 = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.25)$$

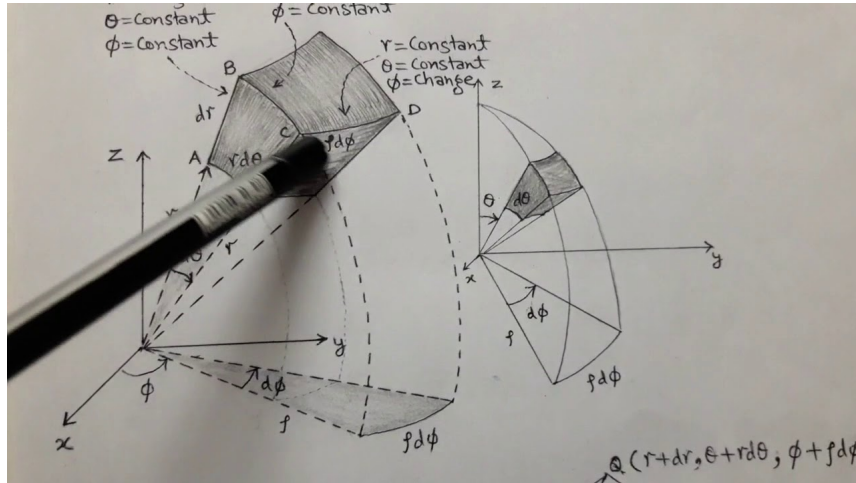


Figura 1.3: El elemento de volumen en corrdenadas esféricas

1.3. Gradiente

Definición 1 Consideremos un campo escalar evaluado en dos puntos diferentes del espacio,

$$d\phi = \phi(u^1 + du^1, u^2 + du^2, u^3 + du^3) - \phi(u^1, u^2, u^3) \equiv \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

el lhs es

$$d\phi = \partial_{u^1}\phi du^1 + \partial_{u^2}\phi du^2 + \partial_{u^3}\phi du^3$$

el rhs es

$$d\phi = \nabla_i\phi \hat{e}_i \cdot d\ell_j \hat{e}_j \quad (1.26)$$

al calcular el producto escalar

$$d\phi = \nabla_1\phi h_1 du^1 + \nabla_2\phi h_2 du^2 + \nabla_3\phi h_3 du^3, \quad (1.27)$$

de la comparación obtenemos

$$\nabla\phi = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\phi}{\partial u^i} \hat{u}_i \quad (1.28)$$

Ejemplo 1 En coordenadas esféricas, $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r \sin\theta$ y de allí sigue

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \hat{u}_\phi \quad (1.29)$$

1.4. Divergencia y teorema de Gauss

Definición 2

$$\text{div}(\vec{F}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} ds$$

Para encontrar una expresión general tomamos como volumen un cubito coordenado.

Hagamos el cálculo parcial del flujo a la dos caritas caritas perpendiculares a las líneas coordenadas de la variable u^3 . El flujo a través de estas dos caras es

$$\Delta\phi_3 = (d\vec{\ell}_1 \times d\vec{\ell}_2).F_3(u^1, u^1, u^3 + du^3/2) + (d\vec{\ell}_1 \times d\vec{\ell}_2).F_3(u^1, u^1, u^3 - du^3/2). \quad (1.30)$$

La expresión explícita -al orden más bajo en serie potencias de los infinitésimos du^i - para el primer sumando es

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{3+} &= h_1(u^1, u^1, u^3 + du^3/2)h_2(u^1, u^1, u^3 + du^3/2)du^1 du^2 \hat{e}_3. \vec{F}(u^1, u^1, u^3 + du^3/2) \\ &= h_1(u^1, u^1, u^3)h_2(u^1, u^1, u^3)F_3(u^1, u^1, u^3) + \\ &\quad + \partial_3[h_1(u^1, u^1, u^3)h_2(u^1, u^1, u^3)\vec{F}(u^1, u^1, u^3)]du^1 du^2 du^3/2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

el flujo a través de la cara complementaria es muy parecido salvo por dos elementos, la normal es $-\hat{e}_i$ y la posición es $(u^1, u^1, u^3 - du^3/2)$. Al sumar resulta:

$$\Delta\phi_{3+} + \Delta\phi_{3-} = \partial_3[h_1(u^1, u^1, u^3)h_2(u^1, u^1, u^3)\vec{F}(u^1, u^1, u^3)]du^1 du^2 du^3 \quad (1.32)$$

es evidente que al sumar sobre los tres pares de caras se obtiene

$$\Delta\phi = [\partial_1(h_2h_3F_1) + \partial_2(h_1h_3F_2) + \partial_3(h_1h_2F_3)] du^1 du^2 du^3 \quad (1.33)$$

con todo evaluado en (u^1, u^1, u^3) ahora bien, div se define como flujo por unidad de volumen, es decir,

$$div(\vec{F}) = \Delta\phi/dv = [\partial_1(h_2h_3F_1) + \partial_2(h_1h_3F_2) + \partial_3(h_1h_2F_3)] du^1 du^2 du^3 / (h_1h_2h_3 du^1 du^2 du^3) \quad (1.34)$$

al final del día;

$$\boxed{div(\vec{F}) = \frac{1}{h_1h_2h_3} [\partial_1(h_2h_3F_1) + \partial_2(h_1h_3F_2) + \partial_3(h_1h_2F_3)]} \quad (1.35)$$

Ejemplo 2 En coordenadas esféricas un vector es

$$\vec{F} = F_r \hat{u}_r + F_\theta \hat{u}_\theta + F_\phi \hat{u}_\phi, \quad (1.36)$$

la fórmula general implica

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} [\partial_r(r^2 \sin\theta F_r) + \partial_\theta(r \sin\theta F_\theta) + \partial_\phi(r F_\phi)] , \quad (1.37)$$

y por lo tanto

$$\boxed{\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi F_\phi} \quad (1.38)$$

Con los elementos que tenemos a mano es fácil entender el contenido del teorema de Gauss. Consideremos un volumen V encerrado por una superficie (su frontera) que denotaremos por ∂V . Queremos calcular el flujo de un campo vectorial (\vec{F}) a través de ∂V , es decir, queremos encontrar el valor de

$$I = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds. \quad (1.39)$$

Para llevar a cabo el cálculo dividamos el volumen en una miriada de cubitos de volumen infinitesimal ΔV cuyas caras se tocan entre si en el interior del volumen. Ciertamente, los cubitos con caras tangentes a la frontera de V no tendrán una cara no apareada (aquella tangente a la frontera de V).

Ahora bien, al considerar los cubitos con caras apareadas, resulta obvio que si el flujo del campo entre dos caritas apareadas se anula ya que en ambos casos tiene magnitudes iguales y signos opuestos. De esta manera, ocurre que el flujo a través de ∂V se puede escribir en la forma

$$\phi = \sum_{\text{cubitos}} \phi_{\text{cubitos}} = \sum_{\text{cubitos}} \oint_{\partial \text{cubito}} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds, \quad (1.40)$$

pero acabamos de aprender que

$$\oint_{\partial cubito} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = dv_{cubito} \operatorname{div}(\vec{F}), \quad (1.41)$$

así que el flujo total es

$$\phi = \sum_{cubitos} dv_{cubito} \operatorname{div}(\vec{F}), \quad (1.42)$$

es decir,

$$\phi = \int_V dv \operatorname{div}(\vec{F}), \quad (1.43)$$

o

$$\boxed{\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = \int_V dv \operatorname{div}(\vec{F})} \quad (1.44)$$

¡el teorema Gauss!

1.5. Laplaciano

En $D = 3$ el laplaciano se define como

$$\nabla^2 \phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) \quad (1.45)$$

Sustituyendo las fórmulas que hemos demostrado,

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\partial_1 \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \partial_1 \phi \right) + \partial_2 \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \partial_2 \phi \right) + \partial_3 \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \partial_3 \phi \right) \right] \quad (1.46)$$

Ejemplo 3 *Una vez más pensemos en las coordenadas esféricas, la fórmula genral para el laplaciano adopta la forma*

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\partial_r \left(\frac{r^2 \sin \theta}{1} \partial_r \phi \right) + \partial_\theta \left(\frac{r \sin \theta}{r} \partial_\theta \phi \right) + \partial_\phi \left(\frac{r}{r \sin \theta} \partial_\phi \phi \right) \right], \quad (1.47)$$

y luego de un cálculo sencillo,

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \phi \quad (1.48)$$

1.6. Conexión con Geometría Riemanniana

Esta sección es avanzada y no se recomienda para una primera lectura.

Comencemos con el gradiente. En coordenadas cartesianas solemos escribir

$$\text{grad}(\phi) = \partial_i \phi, \hat{\mathbf{e}}_i \quad (1.49)$$

pero, esto tiene, **al menos**, un problema. El objeto definido de esta manera no es un objeto geométrico. En efecto, queremos que $\text{grad}(\phi)$ sea un vector, es decir, un vector contravariante ($a^i \partial_i$) así que en verdad, debimos haber puesto

$$\nabla \phi \equiv \partial^i \phi \hat{\mathbf{e}}_i = \delta^{ij} \partial_j \phi \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (1.50)$$

acá, tenemos que notar que δ^{ij} es la inversa de la métrica euclídea y que los elementos de la base son $\hat{\mathbf{e}}_i = \partial_i$ son las derivaciones con respecto a las coordenadas cartesianas.

Al poner la versión invariante

$$\nabla \phi \equiv \nabla^\mu \phi \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \quad (1.51)$$

donde

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \quad (1.52)$$

tendríamos que en coordenadas esféricas, por ejemplo,

$$\nabla \phi = \partial_r \phi \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \phi \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \phi \partial_\phi \quad (1.53)$$

aparentemente, este no es el resultado esperado. Sin embargo, si lo es salvo por que los elementos de la base

$$\mathbf{r} = \partial_r, \quad \boldsymbol{\theta} = \partial_\theta, \quad \boldsymbol{\phi} = \partial_\phi \quad (1.54)$$

no están normalizados.

En efecto, examinando solo uno de ellos,

$$\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r^2 \theta = g_{\theta\theta} \neq 1 \quad (1.55)$$

Si definimos la base normalizada como

$$\hat{\mathbf{u}}_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu}}} \partial_\mu \quad (1.56)$$

y reescribimos $\nabla\phi$, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \partial_r\phi \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta\phi \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi\phi \partial_\phi = \\ &= \partial_r\phi \partial_r + \frac{1}{r} \partial_\theta\phi \frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi\phi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi = \\ &= \partial_r\phi \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \partial_\theta\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Otro objeto interesante para discutir es la divergencia, en coordenadas cartesianas debemos poner

$$\text{div} \vec{F} = \partial_i F^i \quad (1.58)$$

cuya versión invariante es

$$\text{div} \vec{F} = \nabla_\mu F^\mu \quad (1.59)$$

en donde hay que tener cuidado en recordar que (a) ∇_μ es la diferenciación covariante y que (b) las componentes de \vec{F} deben estar expresadas en la base normalizada

$$\vec{F} = F^\mu \hat{\mathbf{u}}_\mu, \quad (1.60)$$

Citando (parcialmente) a un usuario de [StackExchange](#)

*This problem is really nicely addressed in Weinberg's Gravitation and Cosmology, chapter² 4 if I remember correctly. There is basically one issue which leads to confusion: In **intermediate (or old fashioned) physics**³ orthogonal coordinates are used, for example spherical or cylindrical. This leads to a diagonal line element. This allows to normalize the natural basis-vectors. So if the diagonal elements are called h_i then a 'vector' \vec{V} in physics is neither a **covariant** nor a **contravariant** vector, but $V_j = h_j W_j$ with \vec{W} a vector and no Einstein summation. So to go from math to physics and back you have to keep track of the h_i .*

Para concluir esta discusión tenemos que notar que $grad(\phi)$ debe definirse naturalmente como una 1-forma y no como un vector. El objeto geométrico natural es

$$d\phi = \partial_i \phi dx^i \quad (1.61)$$

²Chapter: Tensor Analysis

³Esto fue uno de mis mayores dolores de cabeza cuando usaba libros de análisis vectorial