FS-4212: PRIMER PARCIAL

Universidad Simón Bolívar

Septiembre - Diciembre 2018

1. **Oscilaciones Armónicas**: Sean dos partículas puntuales de masa m, limitadas a moverse en $D = 1$. Las partículas están unidas entre sí por resortes ideales y cada una de ellas está anclada a una pared por medio de otro resorte ideal. En todos los casos la longitud de equilibrio de los resortes es d_o.
   (a) (4 ptos.) Considere que los resortes que unen las partículas a la pared tienen constante elástica k mientras que el que une a ambas tiene contsante $k' = 3k$. Escriba la matriz Λ y determine las frecuencias y modos normales del sistema.
   (b) (6 ptos.) Considere ahora que los tres resortes tienen la misma constante elástica k. Considere además que cada partícula tiene carga $+e$ y, en consecuencia, se repelen de acuerdo a la ley de Coulomb. Escriba el lagrangeano, la matriz Λ y las ecuaciones de movimiento. Consiga la ecuación característica correspondiente.

2. **Transformaciones Ortogonales**: Sea $\mathbb{A}$ una matriz antisimétrica 3×3 de entradas reales.
   (a) (1 pto.) Demuestre que $\mathbb{B}_\pm \equiv \mathbb{1} \pm \mathbb{A}$ es no singular.
   (b) (1 pto.) Sea $\mathbb{C} = \mathbb{B}_+\mathbb{B}_-^{-1}$. Demuestre que $\mathbb{C} \in \mathbf{O}(3)$.
   (c) (2 ptos.) Sea $\mathbb{H} \in \mathbf{SO}(3)$ tal que corresponde a una rotación con $\theta = \pi$ a lo largo de un cierto eje $\hat{n}$ y sea $\mathbb{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \mathbb{H})$. Demuestre que $\mathbb{P}_\pm$ es idempotente, esto es, que cumple que $\mathbb{P}_\pm^2 = \mathbb{P}_\pm$. Escriba la matriz correspondiente en un sistema apropiado y dé una interpretación geométrica de la operación de dicho operador sobre un cierto vector $\vec{\mathbf{x}}$.

3. **Tensor de Inercia**: Sea un cuerpo rígido con distribución de masa uniforme, de base cuadrada de lados b y altura h. Considere el caso en el que uno de los vértices inferiores coincide con el origen de un sistema de coordenadas ortonormal.
   (a) (3 ptos.) Calcule el tensor de inercia $\mathbb{I}$ y determine los ejes principales de rotación del rígido en cuestión.
   (b) (3 ptos.) Suponga que el rígido rota instantáneamente respecto a un eje que coincide con alguno de los dos vértices de la base cuadrada que toca el origen con rapidez angular Ω. Determine $\vec{J}$ y $\vec{J} \angle \vec{\omega}$.

4. **Oscilaciones en Rígidos**: Una barra homogénea de longitud l y masa m está suspendida por dos resortes ideales de constante elástica k y longitud de equilibrio b. En equilibrio, los resortes forman un ángulo θ_o con la vertical.
   (a) (1 pto.) Indique los grados de libertad del sistema y las coordenadas generalizadas a utilizar.
   (b) (1 pto.) Escriba la energía Cinética y el Lagrangeano del sistema.
   (c) (3 ptos.) Escriba las matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$ y Λ.
   (d) (3 ptos.) Determine las frecuencias y modos normales de las oscilaciones en el plano.

5. **Lagrangeano de un Rígido**: Sean x_i coordenadas generalizadas en $\mathbb{Q}_R$ y $\mathbb{H} \in \mathbf{SO}(3)$ tal que respecto a un referencial inercial, $\vec{r}' = \mathbb{H}\vec{r}$.
   (a) (2 ptos.) Muestre que $T_{rot}(\mathbb{Q}_R) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\dot{\mathbb{H}}\,\mathbb{K}\,\dot{\mathbb{H}}^\mathsf{T}) = \frac{1}{2}\,\rho_{jk}K_{kl}\rho_{jl}$, con $K_{kl} \equiv K_{lk} = \int x'_k x'_l dm$.
   (b) (2 ptos.) Muestre que la ecuación de Euler-Lagrange para un Rígido viene dada por $\mathbb{H}^\mathsf{T}\ddot{\mathbb{H}}\mathbb{K} - \mathbb{K}\ddot{\mathbb{H}}^\mathsf{T}\mathbb{H} = \frac{\partial V}{\partial \mathbb{H}^\mathsf{T}}\mathbb{H} - \mathbb{H}^\mathsf{T}\frac{\partial V}{\partial \mathbb{H}}$
   (c) (1 pto.) Use la matriz de velocidad angular $\Omega \equiv \mathbb{H}^\mathsf{T}\dot{\mathbb{H}}$ para mostrar que el lado izquierdo de la anterior expresión puede escribirse como $\mathbb{K}\dot{\Omega} + \dot{\Omega}\mathbb{K} + \Omega^2\mathbb{K} - \mathbb{K}\Omega^2$
   (d) (2 ptos.) Sea $\mathbb{G} \equiv \frac{\partial V}{\partial \mathbb{H}^\mathsf{T}}\mathbb{H} - \mathbb{H}^\mathsf{T}\frac{\partial V}{\partial \mathbb{H}}$. Haga uso de las propiedades de matrices antisimétricas para, con la correspondencia $\mathbb{G} \longleftrightarrow \vec{g}$ $\Omega \longleftrightarrow \vec{\omega}$, para mostrar que la ecuación de Euler-Lagrange es equivalente a las ecuaciones de Euler para un rígido provisto que $\vec{\omega}$ sea la velocidad angular y $\vec{g}$ el torque externo.