Universidad Simón Bolívar

FS-4211: Mecánica Clásica I
Tercer Parcial

Abril - Julio 2021

Sartenejas, 05 de agosto de 2021

A continuación se presentan cuatro (4) problemas que debe desarrollar para un total de cien (100) puntos. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible. Su resolución del examen debe entregarla en un único archivo PDF, con todas las imágenes nítidas, y la orientación de cada página correcta. Si decide realizar la transcripción en LaTeX, deberá incluir también el archivo fuente (.tex).

1. (25 ptos.) Considere las coordenadas cilíndricas elípticas $\{\mu, \nu, z\}$ definidas por las siguientes transformaciones:

$$x = a\cosh\mu\cos\nu, \quad y = a\,\mathrm{senh}\,\mu\,\mathrm{sen}\,\nu, \quad z = z. \tag{1}$$

   (a) (10 ptos.) Construya la base de vectores $\vec{\mathbf{b}}_i$, los versores $\hat{\mathbf{e}}_i$ y determine las constantes h_i.

   (b) (5 ptos.) Escriba la Energía Cinética T para estas coordenadas.

   (c) (10 ptos.) Considere un lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$ en estas coordenadas, en el que

$$V(\mu, \nu, z) = \frac{V_\mu(\mu) + V_\nu(\nu)}{\mathrm{senh}^2\,\mu + \mathrm{sen}^2\,\nu} + V_z(z). \tag{2}$$

   Considere transformaciones continuas φ_ϵ (ψ_ϵ) y discuta la forma de los términos $V_i(q_i)$ del potencial para que el $\mathcal{L}$ sea invariante bajo dichas transformaciones. Determine las cantidades conservadas respectivas usando el Teorema de Noether.

2. (25 ptos.) **Fuerzas de Vínculo y Multiplicadores de Lagrange**

   (a) (10 ptos.) Considere un sistema con $\mathfrak{g}$ grados de libertad y k ecuaciones de vínculo de la forma

$$\dot{q}_i = \sum_{j=k+1}^{\mathfrak{g}+k} \mathbf{b}_{ij}\dot{q}_j, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

   siendo $\{q_i\}$ coordenadas ignorables y $\frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial q_i} = 0$ para $i = 1, \ldots, k$. Demuestre que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse de la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\sum_{j=k+1}^{\mathfrak{g}+k}\left(\frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial q_l} - \frac{\partial \mathbf{b}_{il}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_l = 0. \tag{4}$$

   (b) (15 ptos.) Considere una partícula de masa m sujeta a un campo gravitacional constante $\vec{\mathbf{g}} = -g\hat{\boldsymbol{k}}$ que se mueve constreñida a una superficie dada por la siguiente ecuación:

$$z^2 - \cosh\big(x^2 + y^2\big) = a^2, \quad z > 0. \tag{5}$$

   [redacted]

a.) Use coordenadas cilíndricas circulares $\{\rho, \varphi, z\}$, escriba el Lagrangiano y derive las ecuaciones de movimiento.

b.) Calcule las fuerzas generalizadas de vínculo Q_i.

c.) Para un momentum angular $p_\varphi = \ell$ dado, determine la ecuación de órbita $\rho(\varphi)$. Discuta la posibilidad de órbitas cerradas con z variable.

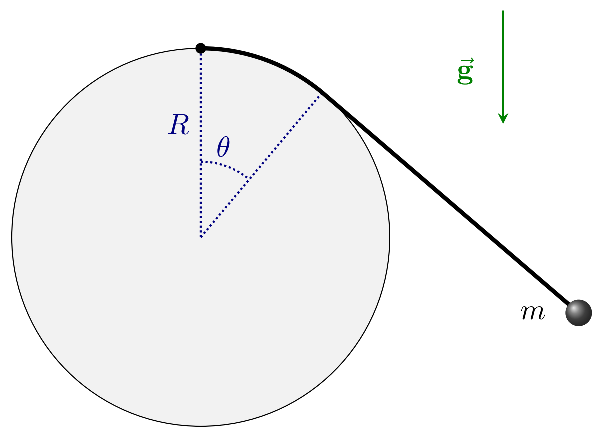
d.) Determine si el movimiento es acotado en z dadas una energía E y un momentum angular $p_\varphi = \ell$ y halle los valores máximo y mínimo para z.

3. (25 ptos.) Considere una polea de radio R que se encuentra fija de forma tal que no puede rotar. En el extremo superior de la polea se ancla un extremo de una cuerda ideal de longitud H y masa despreciable, en la cual se ha colocado en su otro extremo una bola de radio despreciable y masa M. En un instante dado, la cuerda cubre un arco θ de la polea, como se muestra en la figura. Considere que el movimiento se desarrolla exclusivamente en el plano que contiene el disco de la polea.

   (a) (5 ptos.) Denote por s la longitud de la cuerda despegada de la polea y escriba el Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(s, \dot{s})$ y la ecuación de movimiento.

   (b) (10 ptos.) Determine el momentum conjugado generalizado p_s y demuestre que p_s/s es una cantidad conservada. Discuta su significado físico. Use esta información para determinar $s(t)$ en términos de $s(t=0) = s_o$ y E.

   (c) (10 ptos.) Use ahora $\{s, \theta\}$ como coordenadas generalizadas, escriba el Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}\right)$, las ecuaciones de movimiento y determine las fuerzas generalizadas de vínculo. Discuta su significado físico.



4. (25 ptos.) **Lagrangianos con fuerzas dependientes de la velocidad:**

   (a) (10 ptos.) Considere el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \eta \, y \dot{x}. \tag{6}$$

   Escriba las ecuaciones de movimiento, determine los momenta conjugados generalizados, discutiendo su significado físico, y determine $x(t)$ y $y(t)$. Considere condiciones iniciales x_o, y_o, $\dot{x}_o$ y $\dot{y}_o$.

   (b) (15 ptos.) Considere la ecuación de movimiento de un oscilador armónico unidimensional con término dispersivo

$$m\ddot{x} + \mathbf{b}\dot{x} + kx = 0. \tag{7}$$

   Use como función de prueba

$$x(t) = \mathbf{e}^{-\xi t} \tag{8}$$

   y encuentre las soluciones según se trate de subamortiguamiento, amortiguamiento crítico y sobre amortiguamiento. En cada caso, determine $x = x(\dot{x})$ y discuta sus resultados.