



## FS-4212: TERCER PARCIAL

Universidad Simón Bolívar  
Septiembre - Diciembre 2018  
Sartenejas, 09 de enero de 2019

Nombre: \_\_\_\_\_ Carnet: \_\_\_\_\_

1. Un *monopolo magnético* es una partícula hipotética propuesta inicialmente por P.A.M. Dirac en 1931, que tendría únicamente un polo magnético, siendo el equivalente a una “carga magnética” en el campo magnético. Éste se define por una singularidad del campo magnético de la forma  $\vec{B} = g\vec{r}/r^3$ , donde  $g$  es una constante relacionada con la carga magnética. Suponga que una partícula de masa  $m$  se mueve en el campo de un monopolo magnético y de una fuerza central derivada de un potencial  $V(r) = -k/r$ 
  - (a) (2 ptos.) Use coordenadas esféricas para escribir el Hamiltoniano del sistema. Recuerde que la fuerza de Lorentz viene dada por  $\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]$ .
  - (b) (2 ptos.) Construya la ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) correspondiente. Discuta una posible forma de volver la ecuación HJ separable.
  - (c) (3 ptos.) Demuestre que

$$\vec{D} = \vec{J} - \frac{qg}{c} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

se conserva.

- (d) (3 ptos.) Muestre que hay un vector conservado análogo al vector de *Lagrange-Runge-Lenz*  $\vec{A} \equiv \vec{p} \times \vec{J} - \kappa m \frac{\vec{r}}{r}$  en el que  $\vec{D}$  juega el mismo papel que  $\vec{J}$  en el problema de Kepler.
2. Una partícula puntual se mueve bajo la interacción de una cierta fuerza conservativa.
  - (a) (5 ptos.) Construya la ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) en coordenadas elipsoidales  $\{u, v, \theta\}$ , definidas en términos de las coordenadas cilíndricas usuales  $\{r, \theta, z\}$  por

$$r = a \sinh v \sin u, \quad z = a \cosh v \cos u \quad (2)$$

¿Cuál es la forma que debe tener el potencial  $V(u, v, \theta)$  para que la ecuación sea separable?

- (b) (5 ptos.) Use los resultados anteriores para reducir a cuadraturas el problema de una partícula puntual de masa  $m$  que se mueve en el campo gravitacional de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  fijadas en el eje  $z$  separados por una distancia  $2a$ .
3. Una partícula de masa  $m = 1$  está constreñida a moverse en  $D = 1$  y está sujeta a un potencial  $V = a \sec^2(x/l)$ , donde  $a$  y  $l$  son constantes.
  - (a) (4 ptos.) Resuelva la ecuación de Hamilton-Jacobi, obteniendo una expresión integral para  $S$ . Determine  $x(t)$  a partir de la solución de la ecuación HJ.
  - (b) (6 ptos.) Determine las variables de Ángulo-Acción  $(\phi, J)$  y la frecuencia  $\nu$ . Obtenga la dependencia en la amplitud de  $\nu$ . Verifique que el límite de amplitud pequeña es el mismo que el dado por la teoría de pequeñas oscilaciones visto al inicio del curso.