

El Principio de Hamilton

Mario Caicedo

March 2022

1 Primer Contacto

Considere la solución $x(t)$ a la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + \frac{dU}{dx} = 0, \quad (1)$$

válida en un intervalo temporal $I = [t_i, t_f]$. Considere adicionalmente una función $\delta x(t)$ que se caracteriza por tomar valores reales muy chicos en el mismo intervalo temporal que $x(t)$ y que satisface $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$. En estas condiciones, la función

$$X(t) = x(t) + \delta x(t) \quad (2)$$

es “cercana” a $x(t)$ en todo la región en que $x(t)$ es solución a la ecuación de movimiento. La imagen que podemos hacernos se parece algo a la de la convergencia uniforme, la función $X(t)$ es diferente de $x(t)$, pero sus valores en el intervalo de interés se encuentran en una banda muy delgada alrededor de los valores de $x(t)$ y adicionalmente, $X(t_i) = x(t_i)$ y $X(t_f) = x(t_f)$. Con el fin de pensar en las funciones como un todo en lugar de los valores que toman para cada instante de tiempo, hablaremos de x , δx y X , por cierto, en algunas notaciones se suele escribir η en lugar de δx para referir la pequeña modificación a x .

Contestemos ahora una primera pregunta, ¿cuanto cambia el potencial si en lugar de evaluarlo sobre la solución a la ecuación de movimiento lo evaluamos sobre X ?. La respuesta es bastante natural, a primer orden en δx ,

$$\delta U = U(x + \delta x) - U(x) = \frac{dU(x)}{dx} \delta x. \quad (3)$$

Con este resultado en la mano, multipliquemos la ecuación de movimiento por δx , para obtener

$$m\ddot{x}\delta x + \frac{dU(x)}{dx}\delta x = 0 \quad (4)$$

El siguiente paso de lo que pretendemos hacer no es precisamente “natural”, integrar en el tiempo la fórmula 4 en el intervalo $[t_i, t_f]$,

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left[m\ddot{x}\delta x + \frac{dU}{dx}\delta x \right] = 0, \quad (5)$$

siguiendo este camino incierto, podemos reescribir esta identidad integrando por partes

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\left(m \frac{d}{dt} [\dot{x}\delta x] - m\dot{x} \frac{d}{dt} [\delta x] \right) + \frac{dU}{dx}\delta x \right] = 0, \quad (6)$$

es decir,

$$[m\dot{x}\delta x]_{bd} + \int_{t_i}^{t_f} dt [-m\dot{x}\delta\dot{x} + \delta U] = 0, \quad (7)$$

donde hemos usado la fórmula 3 para δU . Ahora bien, usando un razonamiento análogo al que usamos cuando definimos el cambio del potencial, podemos introducir el cambio en \dot{x}^2 como:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}^2 &\equiv \left(\frac{d(x + \delta x)}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \\ &= 2\dot{x} \frac{d}{dt} [\delta x], \end{aligned} \quad (8)$$

de ahora en adelante, ponderamos sin demostración que,

$$\frac{d}{dt} [\delta x] = \delta\dot{x}. \quad (9)$$

En concreto, la igualdad 7 se puede poner como

$$\begin{aligned} bd - \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2} \delta\dot{x}^2 - \delta U \right] &= \\ = bd - \int_{t_i}^{t_f} dt \delta \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - U \right], \end{aligned} \quad (10)$$

si ahora notamos que el operador δ que calcula los cambios es independiente de la integración, quedamos con

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} dt [T - U] = 0 \quad (11)$$

En este momento introducimos dos objetos,

Definición 1 Para una partícula con un solo grado de libertad (x) , la función de Lagrange o lagrangeano está dada por

$$L(x, \dot{x}) \equiv T - U, \quad (12)$$

donde T es la energía cinética de la partícula y U la energía potencial.

Definición 2 La acción es la funcional

$$S[x, \dot{x}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}), \quad (13)$$

sometida a las condiciones de frontera $x(t_i) = x_i$, $x(t_f) = x_f$

Para fines de nuestra discusión, debemos notar que una funcional es un objeto que toma una función f y su derivada \dot{f} y le asigna un valor real.

Antes de continuar pensemos en una función suave g en los entornos de un punto crítico. En estas condiciones, ocurre que, para toda cantidad ϵ de magnitud muy chica y pensando a primer orden en ϵ ,

$$\begin{aligned} \Delta g(x_0) &\equiv g(x_0 + \epsilon) - g(x_0) = \\ &= g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_0} \epsilon - g(x_0) = \\ &= \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_0} \epsilon = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

donde estamos usando que en un punto crítico, $g'(x)|_{x_0} = 0$. Esta fórmula expresa que, en los entornos de un punto crítico y a primer orden en los cambios en la variable, el valor de la función g no cambia, y decimos que x_0 es un punto estacionario.

Volvamos ahora a la fórmula 11 y a la manera que usamos para llegar a ella. Comenzamos con una función $x(t)$ solución de la ecuación de movimiento de Newton que satisface las condiciones de frontera $x(t_i) = x_i$, $x(t_f) = x_f$, cambiamos ligeramente dicha función haciendo $x(t) + \delta(x)$ y seguidamente calculamos la *variación* de la acción,

$$\delta S[x, \dot{x}] = S[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}] - S[x, \dot{x}] \quad (15)$$

encontrando que, en estas condiciones,

$$\delta S[x, \dot{x}] = 0. \quad (16)$$

Comparando con el análisis para funciones, podemos interpretar que, la acción es estacionaria en las soluciones de la ecuación de movimiento. Este es precisamente el contenido del

Principio de Hamilton

El movimiento de una partícula cuya acción es S , corresponde a los puntos estacionarios de S

En sus [Feynman Lectures on Physics](#), R. P. Feynman hace una presentación maravillosa de este principio.

2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

2.1 Coordenadas generalizadas

Pensemos en una partícula y en su movimiento descrito por tres coordenadas, en el caso de un sistema cartesiano usaríamos las tres funciones escalares $(x(t), y(t), z(t))$ que combinadas con la base estándar nos permiten expresar el vector de posición

$$\mathbf{r} = x(t) \hat{\mathbf{e}}_x + y(t) \hat{\mathbf{e}}_y + z(t) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (17)$$

si vamos a usar la acción¹, solo necesitamos considerar la función de lagrange

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - U(x, y, z) = \\ &= \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] - U(x, y, z). \end{aligned} \quad (18)$$

En coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) - U(r, \theta, \phi) = \\ &= \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2] - U(r, \theta, \phi). \end{aligned} \quad (19)$$

Podríamos incluso pensar en cualquier otro conjunto de coordenadas (q^1, q^2, q^3) , en cuyo caso, la dependencia general de L sería

$$L = L(q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3), \quad q^i = q^i(t), i = 1, 2, 3. \quad (20)$$

¹Aún no hemos discutido el caso de tres coordenadas, pero aceptemos cierta intuición por el momento

el número de coordenadas, en este caso, 3, se denomina, número de *grados de libertad* de la partícula, y las q^i se denominan colectivamente coordenadas generalizadas.

En el caso de un sistema de dos partículas interactuantes, debería ser claro que el número de grados de libertad a priori debería ser de $N = 2 \times 3 = 6$, y por tanto la función de lagrange debería contener seis coordenadas generalizadas (q^i) y seis velocidades generalizadas \dot{q}^i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Este caso de dos partículas es particularmente interesante porque nos permite hacer contacto, por primera vez, con la noción de que las coordenadas generalizadas no deben, en general, ser coordenadas geométricas en el espacio como lo conceptualizamos normalmente. El pensamiento usual nos lleva a considerar las tres coordenadas cartesianas estándar para cada partícula y el conjunto de coordenadas generalizadas en este caso, es el séxtuple

$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2), \quad (21)$$

donde el subíndice denota la partícula a la que se hace referencia. Ahora bien, pudimos usar las coordenadas del centro de masa y las posiciones relativas con respecto al centro de masas, en cuyo caso, la interpretación de las coordenadas generalizadas no hubiera sido obvia en términos de coordenadas cartesianas asociadas a nuestra intuición geométrica poco desarrollada.

Con el fin de adentrarnos un poco más en estas ideas, consideremos un sistema de dos partículas de masas iguales que se mueven en un plano unidas por una barra rígida, sin masa, de longitud ℓ . Coloquemos coordenadas cartesianas en el plano y llamemos C al centro de la barra, introduzcamos adicionalmente el ángulo que la barra hace con el eje x , con estas definiciones, las coordenadas de las partículas son

$$\begin{aligned} x_1 &= x_c + \frac{\ell}{2} \cos \theta, & y_1 &= y_c + \frac{\ell}{2} \sin \theta \\ x_2 &= x_c - \frac{\ell}{2} \cos \theta, & y_2 &= y_c - \frac{\ell}{2} \sin \theta, \end{aligned} \quad (22)$$

comencemos por notar que, como el movimiento es un plano los grados de libertad z_1 y z_2 han desaparecido. Adicionalmente, el hecho de que la distancia $d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ entre las dos partículas sea constante $d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \ell$ disminuye el número de grados de libertad en una unidad más, de manera que el número de grados de libertad del sistema que estamos describiendo es

$$N = 6 - 1 - 1 - 1 = 3, \quad (23)$$

estos grados de libertad corresponden a las coordenadas generalizadas

$$(q^1, q_2, q^3) = (x_c, y_x, \theta), \quad (24)$$

si calculamos la energía cinética de este sistema, encontramos

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\ &= \frac{m+m}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{m+m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (25)$$

acá vemos claramente, el conjunto de los tres grados de libertad.

Recordando los cursos de física elemental, reconocemos los sumandos

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m+m}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) = \frac{M}{2} \dot{R}_{CM}^2, \quad y \\ T_2 &= \frac{I}{2} \dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (26)$$

como la energía cinética traslacional del centro de masas del sistema y la energía cinética rotacional de las dos masitas unidas por la barra, en que hemos destacado el momento de inercia

$$I = (m+m)\ell^2. \quad (27)$$

2.1.1 ¿Qué son las coordenadas generalizadas?

En este punto queremos destacar que las coordenadas generalizadas permiten describir el movimiento, no en el espacio convencional (alto, ancho y profundidad), sino en un cierto conjunto abstracto (\mathcal{M}) en donde el movimiento se describe de manera mucho más natural. Así, por ejemplo, un péndulo simple se describe perfectamente bien con el ángulo (θ) que la barra de suspensión hace con la vertical, en conclusión, el conjunto en que realmente describimos la posición de la masa del péndulo es un círculo (S^1) parametrizado por θ .

En el caso de un péndulo esférico, la posición de la masa queda determinada por los dos ángulos θ y ϕ de las coordenadas esféricas. La razón es obvia, debido a que la distancia entre la partícula y el punto de suspensión es constante, la partícula se mueve sobre una superficie esférica.

En general, para cada posición del sistema en conjunto, es decir, para cada punto (P) del conjunto abstracto \mathcal{M} en el que ocurre el movimiento tenemos N números $q^i(P)$, las coordenadas en el espacio de configuraciones del sistema.

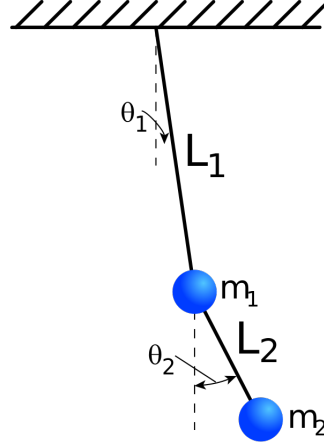


Figure 1: Péndulo doble

El péndulo doble (figura 1) constituye un ejemplo sumamente pedagógico e interesante. Las coordenadas generalizaas de interés son los ángulos independientes θ_1 y θ_2 , cada uno de ellos parametriza un círculo, de manera que el par (θ_1, θ_2) parametriza el producto cartesiano $S^1 \times S^1$, que no es otra cosa que un toro ($T^2 \approx S^1 \times S^1$), ¿qué significa esto?, pues bien, ocurre que los movimientos de las dos masas que constituyen el péndulo doble, están en relación biunívoca con una curva sobre el toro, ¡cada punto de esa curva representa la posición de ambas masas en un cierto instante!

Lo que estamos describiendo es la matemática de las *variedades*. Una variedad es un conjunto que admite coordenadas locales en cada punto, la esfera terrestre nos permite localizar la posición de los puntos sobre ella con solo dos ángulos, la isla de Tristan Da Cuña en el atlántico sur, por ejemplo, tiene por coordenadas² (37°6'44" S 12°16'56" W)

Ahora bien, la posición de una partícula en un instante, no es suficiente información para describir su movimiento en ese instante, la información debe complementarse con la velocidad de la patícula. En el caso general, hablamos del estado de movimiento de un sistema, que se determina completamente si conocemos todas las coordenadas y velocidades generalizadas ($q^i(P), \dot{q}^i(P)$).

La geometría que estamos describiendo es interesantísima, la posición de un sistema en un instante es un punto $P \in \mathcal{M}$, la velocidad es un vector tangente a \mathcal{M} en el punto P , lo que los matemáticos denominan un elemento³ $v \in T_P\mathcal{M}$. En este lenguaje, el estado de movimiento de un

²**Ejercicio:** convierta los valores a grados decimales

³ $T_P\mathcal{M}$ es conocido como el espacio tangente a \mathcal{M} en P



Figure 2: La esfera terrestre con tres puntos marcados (las islas de Santa Helena, Ascensión y Tristan da Cuña)

sistema en un punto tiene coordenadas $(q^i(P), \dot{q}^i(P))$. El conjunto de todos los estados movimientos posibles del sistema es un subconjunto de $T^*\mathcal{M} = \cup_P T_P\mathcal{M}$ el *fibrado tangente* a \mathcal{M} .

En estos términos, la función de Lagrange,

$$L : (q^i, \dot{q}^i) \rightarrow \mathfrak{R}, \quad (28)$$

es una aplicación

$$L : T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{R}, \quad (29)$$

Mientras que, la acción,

$$S : [q^i, \dot{q}^i] \rightarrow \mathfrak{R} \quad (30)$$

es una aplicación

$$S : \mathcal{F}[T^*\mathcal{M}] \rightarrow \mathfrak{R}, \quad (31)$$

es decir, una aplicación que manda el espacio de las funciones definidas sobre $T^*\mathcal{M}$ a los reales, un funcional.

2.2 Obteniendo las Ecuaciones de Movimiento

Comencemos por escribir la acción de un sistema de varios (finitos) grados de libertad,

$$S[q^i, \dot{q}^i] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q^i, \dot{q}^i), \quad (32)$$

La variación de S se calcula (a primer orden en las variaciones de coordenadas y velocidades generalizadas) como

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right] = \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} [\delta q^i] \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

El segundo objeto que aparece en el integrando admite la transformación

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} [\delta q^i] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i, \quad (34)$$

así que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i \right\} = \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{bd} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

debido a la condición $\delta q^i|_{bd} = 0$, el término

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{bd} = 0$$

es nulo y quedamos con

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \right\} \delta q^i. \quad (36)$$

Ahora bien, las variaciones de las coordenadas generalizadas son independientes entre si, y los matemáticos han demostrado que tal condición asegura⁴ que las condiciones para estar en presencia

⁴Teorema fundamental del cálculo variacional

de un punto estacionario de la acción están dadas por el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N} \quad (37)$$

Las ecuaciones de Euler- Lagrange constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo cuya solución es el movimiento del sistema.

3 Ejemplos

Ejemplo 1 Péndulo Simple

Escogemos $U = 0$ en $z = 0$ y la orientación usual de manera que $U = mgz = mgl \cos \theta$

$$L = \frac{m}{2} \ell \dot{\theta}^2 - mgz = \frac{m}{2} \ell \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (38)$$

ecuación de movimiento,

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad (39)$$

Ejemplo 2 Partícula sometida a la influencia de un potencial central

Tomamos coordenadas esféricas para poner

$$L = \frac{m}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] - U(r) \quad (40)$$

Las tres ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (41)$$

$$m \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = mr^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (42)$$

$$m \frac{d(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})}{dt} = 0 \quad (43)$$

la última de estas ecuaciones o es otra cosa que la expresión matemática de la constancia de la componente z del momentum angular, $L_z = \text{constante}$. Esta condición puede utilizarse para escoger al plano $x - y$ como fijo, y sustituyendo $\theta = \pi/2$, en las ecs obtenemos

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (44)$$

$$0 = 0 \quad (45)$$

$$m \frac{d(r^2 \dot{\phi})}{dt} = 0 \quad (46)$$

Esta sustitucion pudo haberse hecho directamente en la función de Lagrange L para que quedara,

$$L|_{\theta/2} = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2] - U(r), \quad (47)$$

que obviamente es el lagrangiano que hubiéramos escrito si desde el principio hubiéramos usado coordenadas polares en el plano del movimiento.

En todo caso, la dinámica se ha reducido a la determinada por las dos ODE' s

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ mr^2\dot{\phi} &= \ell \end{aligned} \quad (48)$$

Sustituyendo $\dot{\phi}$ en la ecuación para r

$$m\ddot{r} = mr \left(\frac{\ell}{mr^2} \right)^2 - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (49)$$

queda

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (50)$$

ecuación que puede ponerse como

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_{eff}}{dr} \quad (51)$$

donde el potencial efectivo

$$U_{eff} = U + \frac{\ell^2}{2mr^2} \quad (52)$$

es la suma de la potencial original U y el potencial centrífugo

$$U_c = \frac{\ell^2}{2mr^2} \quad (53)$$

4 Sistemas con restricciones

Ya hemos mencionado sistemas que tiene ciertas particularidades, las dos partículas que se mueven en un plano unidas por una barra iextensible, el péndulo esférico y el pendulo simpe.

Estos sistemas comparten el hecho de que su coordenadas genaralizadas satisfacen algunas condiciones especiales urante su evolución.

Una partícula que se mueve a lo largo de un carril recto tiene dos restricciones, en efecto, si escogemos el sistema de coordenadas de tal fora que el riel coincida con el eje x , la partícula ha de satisfacer las condiciones $y = z = 0$. Si cnocemos que la partícula está sometida a una fuerza paralela al riel, tomamos en cuenta las restricciones, poniendo -a priori- que la ecuación de movimiento tiene la forma

$$m \ddot{x} \hat{\mathbf{e}}_x = F^x \hat{\mathbf{e}}_x \quad (54)$$

sin hacer referencia a los otros dos grados de libertad. De hecho, a única referencia a alguno de los otros dos grados de libertad aparece si consideramos el peso y escribimos $\mathbf{w} = -mg \hat{\mathbf{e}}_z$, en cuyo caso, si llamamos $\mathbf{\Lambda} = \lambda^x \hat{\mathbf{e}}_x + \lambda^y \hat{\mathbf{e}}_y + \lambda^z \hat{\mathbf{e}}_z$ a la fuerza de reacción del riel sobre la partícula deberíamos poner

$$m \ddot{x} \hat{\mathbf{e}}_x = F^x \hat{\mathbf{e}}_x + \lambda^x \hat{\mathbf{e}}_x + \lambda^y \hat{\mathbf{e}}_y + \lambda^z \hat{\mathbf{e}}_z - mg \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (55)$$

y acá se están tomando los grados de libertad restringidos al poner $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$, lo que trae como consecuencia que

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= F^x + \lambda^x \\ \lambda^y &= 0 \\ \lambda^z &= mg. \end{aligned} \quad (56)$$

La última de estas igualdades muestra claramente que, la componente vertical de la fuerza de contacto, es la fuerza que asegura la condición $z = \text{constante}$. La igualdad $\lambda^y = 0$ debe sernos muy familiar, en efecto, si estamos sentados en un auto que viaja en línea recta, no sentiremos fuerza alguna tratándo de movernos lateralmente en el auto. Finalmente, la primera ecuación establece que tenemos que conocer alguna condición extra sobre la aceleración o sobre la fuerza F para poder decir algo de la compoonente de la fuerza de contaco paralela al movimiento, usualmente decimos que no hay roce con el riel y eso implica, automáticamente que $\lambda^x = 0$.

De este ejemplo hemos aprendido que -a nivel macrosópico- la fuerza de contacto entre la partícula y el riel está íntimamente relacionada con las restricciones, volveremos con este tema en la sección 4.1.

Vayamos ahora al tema de las restricciones también llamadas vínculos o ligaduras. El caso más sencillo es el de los

Vínculo Holónomo

Un vínculo holónomo es una relación entre las coordenadas generalizadas que puede expresarse en la forma

$$\phi(q^1, q^2, \dots, q^N) = 0$$

El ejemplo más sencillo de un vínculo holónomo es la relación entre la coordenada radial de un péndulo y la longitud (ℓ) de este,

$$\phi(r) = r - \ell = 0, \quad (57)$$

en coordenadas cartesianas el vínculo se expresa como

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0, \quad (58)$$

Hay otros tipos de restricciones pero en esta nota nos limitaremos a los vínculos holónomos.

El tratamiento lagrangiano de los sistemas con vínculos holónomos comienza con la introducción del lagrangiano extendido

$$L(q^i, \dot{q}^i, \lambda^p) = T - U + \lambda^p \phi_p(q^i), \quad (59)$$

en este formalismo, los vínculos se incluyen en el lagrangiano a través de las cantidades λ^p , $p = 1, 2, \dots$, número de vínculos, que se consideran nuevas variables del sistema.

a partir del lagrangiano extendido, se construye la acción extendida correspondiente

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt [T - U + \lambda^p \phi_p], \quad (60)$$

y las ecuaciones de movimiento siguen de aplicar el principio de estacionariedad a S usando las coordenadas generalizadas y los multiplicadores de Lagrange como variables dinámicas, es decir, buscando las condiciones que siguen de imponer

$$\delta S_{q^i} = 0, \quad \delta S_{\lambda^p} = 0. \quad (61)$$

Si se lleva a cabo el ejercicio, resultan las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] + \lambda^p \frac{\partial \phi}{\partial q^i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \phi_p &= 0, \quad p = 1, 2, \dots, M\end{aligned}} \quad (62)$$

4.1 fuerzas de vínculo

En el formalismo de acción extendida, los multiplicadores de Lagrange resultan ser bastante más que solo un conjunto de cantidades matemáticas introducidas para resolver un problema de optimización funcional, en efecto, en este formalismo, los λ 's terminan estando inextricablemente relacionados con las fuerzas de vínculo, es decir, con las fuerzas necesarias para mantener las restricciones al movimiento del sistema.

Con el objeto de tener cierta intuición acerca de las fuerzas de vínculo, consideremos el caso más sencillo de una sola partícula sometida a fuerzas conservativas y sujeta a una sola ligadura holónoma ($\phi(\mathbf{r})$), el lagrangiano extendido de este sistema es

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}) - \lambda \phi(\mathbf{r}) \quad (63)$$

las ecuaciones de Euler Lagrange correspondientes (en coordenadas cartesianas) se resumen en

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} L) = \nabla_{\mathbf{r}} L - \lambda \nabla_{\mathbf{r}} \phi, \quad (64)$$

o en forma explícita,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} U - \lambda \nabla_{\mathbf{r}} \phi, \quad (65)$$

ó,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_{\mathbf{r}} U - \Lambda \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \phi}{|\nabla_{\mathbf{r}} \phi|} \quad (66)$$

que podemos reescribir en la forma típicamente newtoniana

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{\Lambda}, \quad (67)$$

donde $\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}} U$ es la fuerza conservativa usual y

$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \phi}{|\nabla_{\mathbf{r}} \phi|}, \quad (68)$$

es la fuerza asociada a la ligadura.

4.2 Ejemplos

Ejemplo 3 Partícula moviéndose a lo largo de un riel Para este problema impondremos a priori el vínculo $y = 0$ (movimiento lateral en relación al riel), de esta manera, la acción extendida es

$$S = \int dt \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda y \right] \quad (69)$$

donde, hemos usado que el potencial gravitatorio es $U = -mgz$ y el vínculo tiene la forma $\phi(z) = z = 0$. Al hacer las variaciones

$$\begin{aligned} \delta_x S &= \int dt \frac{m}{2} \delta \dot{x}^2 \\ \delta_z S &= \int dt \left[\frac{m}{2} \delta \dot{z}^2 - mg \delta z + \lambda \delta z \right] \\ \delta_\lambda S &= \int dt [\delta \lambda z] \end{aligned} \quad (70)$$

y de allí,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{z} &= -mg + \lambda \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

el vínculo impone $\ddot{y} = 0$ y por tanto, la fuerza de vínculo es

$$\boxed{\lambda = mg} \quad (72)$$

Ejemplo 4 péndulo simple

Escogemos $U = 0$ en $y = 0$ (altura d suspensión del pendulo) y la orientación usual⁵ para que quede $U = mgy = -mgr \cos \theta$.

Evidentemente el lagrangiano extendido es

$$L = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] + mgr \cos \theta + \lambda (r - \ell) \quad (73)$$

⁵recordar que cuando $\theta = 0$, $y = -r$

Variaciones de la acción y ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\delta_r S &= m \int dt \left[\delta \dot{r}^2 + r \delta r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta + \lambda \delta r \right] = \\
m &= \int dt \left[-m \ddot{r} + r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta + \lambda \right] \delta r = 0 \\
\delta_\theta S &= \int dt \left[-\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \sin \theta \right] \delta \theta \\
\delta_\lambda S &= \int dt \delta \lambda (\ell - r)
\end{aligned} \tag{74}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
\lambda &= m \ddot{r} - mr \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \\
\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}^2) &= -mgr \sin \theta \\
r &= \ell
\end{aligned} \tag{75}$$

Al sustituir la solución de vínculo, es decir, poner $r = \ell$, las ecuaciones para θ y λ quedan como

$$\begin{aligned}
\lambda &= -m \ell \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \\
\ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell} \sin \theta
\end{aligned} \tag{76}$$

Podemos reducir el orden de la segunda ecuación para hacer una primera integración,

$$\begin{aligned}
\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \, d\theta \\
m \ell \dot{\theta}^2 &= 2mg [\cos \theta - \cos \theta_0] + m \ell \dot{\theta}_0^2,
\end{aligned} \tag{77}$$

y de allí

$$\boxed{\lambda = -3mg \cos \theta + 2mg \cos \theta_0 - m \ell \dot{\theta}_0^2} \tag{78}$$

Si la condición inicial fuera de reposo absoluto en el punto más bajo del péndulo ($\theta_0 = 0$), la fuerza de vínculo sería

$$\boxed{\lambda = -mg} \tag{79}$$

que es exactamente la tensión en la cuerda cuando de ella se suspende una masa m

Ejemplo 5 El Plano inclinado, ejemplo de una sutileza:

Consideremos la situación estándar de los cursos de física elemental, un punto material que desliza -sin rozamiento- sobre un plano inclinado que hace un ángulo θ con la horizontal.

Debido a las condiciones, la fuerza (Λ) de contacto entre la superficie y la partícula es ortogonal a la superficie y luego de unos pocos cálculos se encuentra

$$\Lambda = \Lambda^\perp \hat{\mathbf{e}}_\perp, \quad (80)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_\perp$ es el versor ortogonal al plano inclinado y

$$\Lambda^\perp = mg \cos \theta \quad (81)$$

Estudiemos ahora el mismo problema en su formulación lagrangiana.

Escogiendo $U = 0$ en la base del plano inclinado, la acción extendida adopta la forma

$$S = \int dt \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgy + \lambda(z - kx) \right], \quad (82)$$

donde, obviamente, $k = \tan \theta$. Las variaciones de la acción con respecto a cada una de las variables dinámicas son

$$\begin{aligned} \delta_x S &= \int dt \left[\frac{m}{2} \delta \dot{x}^2 - \lambda k \delta x \right] \\ \delta_z S &= \int dt \left[\frac{m}{2} \delta \dot{z}^2 - mg \delta z + \lambda \delta z \right] \\ \delta_\lambda S &= \int dt \delta \lambda (z - ky). \end{aligned} \quad (83)$$

En consecuencia, obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= k\lambda \\ m \ddot{z} &= -mg + \lambda \\ z &= kx \end{aligned} \quad (84)$$

$$\text{de } y = kx, \quad \text{deducimos, } \ddot{y} = k\ddot{x}. \quad (85)$$

Y de aquí

$$m\ddot{y} = k^2\lambda, \quad \text{luego: } \lambda = \frac{mg}{k^2 + 1}. \quad (86)$$

Al sustituir el valor de k ,

$$\lambda = \frac{mg}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{mg}{\sec^2 \theta} = mg \cos^2 \theta = (mg \cos \theta) \cos \theta, \quad (87)$$

caray, hemos obtenido el resultado de la fórmula 81 modificado por un factor extra $\cos \theta$, parece que nuestra expectativa de que el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo sea igual a la fuerza de vínculo es falsa.

Pero no nos adelantemos en la sección tal y cual destacamos que había que normalizar el gradiente del vínculo para que λ fuera realmente la fuerza de ligadura.

En el caso que estamos estudiando, el gradiente del vínculo es exactamente

$$\nabla \phi = -k \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (88)$$

de manera que

$$|\nabla \phi| = \sqrt{1 + k^2} = \sec \theta, \quad (89)$$

es decir,

$$\frac{1}{|\nabla \phi|} = \cos \theta, \quad (90)$$

que es exactamente el factor extra que estamos encontrando. De manera que, al normalizar el gradiente obtenemos el resultado correcto.

Para finalizar esta exposición, mencionaremos sin demostrarlos, algunos resultados fundamentales.

Teorema 1 *Dos lagrangianos que difieren en una derivada total respecto al tiempo llevan a las mismas ecuaciones de movimiento.*

Este teorema establece que, para toda función f ,

$$L \quad \text{y} \quad L + \frac{df}{dt} \quad (91)$$

llevan a las mismas ecuaciones de movimiento.

El siguiente resultado es de enorme interés

Teorema 2 *La forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange es independiente de las coordenadas.*

Definición 3 Una coordenada (q^i) que no aparece explícitamente en el lagrangiano se denomina *cíclica*

Definición 4 El momento canónico conjugado p_i de la coordenada generalizada q^i es

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (92)$$

Teorema 3 Si una coordenada es cíclica, su momento canónico conjugado es una constante del movimiento

Probablemente, el ejemplo más emblemático de aplicación del teorema de variables cíclicas sea el de la conservación del momentum angular en el movimiento bajo la acción de fuerzas centrales, en efecto, la ausencia del a variable ϕ en el lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] - U(r), \quad (93)$$

es patente y por tanto, su momento canónico conjugado

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \ell = \text{constante} \quad (94)$$