Mecánica Clásica 1 Tarea 4

Mario Caicedo

Diciembre, 2021

Todo físico posee una caja de herramientas personal, entre las herramientas que siempre habrá allí están, elementos avanzados de cálculo y ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales), destrezas básicas en el manejo de instrumental de laboratorio, etc. Hay algunas herramientas, sin embargo, que a veces no están a la mano y que son de hecho **fundamentales** y pueden colocarse bajo las clasificaciones *orders of magnitude and calculating on the back of an envelope.*

Las discusiones en las tareas tiene varios objetivos, uno de ellos, es, sin duda, ayudarle a crear una firme base conceptual. Otro de los objetivos es consiste en ayudarle a desarrollar, esas habilidades de cálculo simplificado y órdenes de magnitud.

Discusión 1 *Argumente*[1] *las forma (a menos de factores adimesionales) que deberían tener las frecuencias de oscilación de un oscilador de resorte y de un péndulo simple.*

Problema 1 *Una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea tiene la forma*

$$\mathbf{L}x(t) = s(t)\,, \tag{1}$$

donde $\mathbf{L}$ *es un operador diferencial* **lineal**, *por ejemplo:*

$$\mathbf{L} = \sum_{p=1}^{N} a_p(t)\frac{d^p}{dt^p}\,,$$

con a_p *funciones que toman valores reales sería un operador lineal ordinario.*

Demuestre que la solución más general posible a la ecuación 1 es de la forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2}$$

donde $x_h(t)$ *es la solución general del problema homogéneo*

$$\mathbf{L}x_h(t) = 0\,, \tag{3}$$

y $x_p(t)$ **una** *solución particular*[2] *de la ecuación NO homogénea.*

[1] No recurra a las ecuaciones de movimento

[2] que significa exactamente: "una"

Problema 2 *Considere una partícula que se mueve a lo largo de una un segmento recto bajo la acción de una superposición de fuerzas, de tal manera que la fuerza neta es*

$$F = -kx - b\dot{x} + F_0\, cos(\omega t) \tag{4}$$

1. *Escriba la ecuación de movimiento en la forma*

$$\ddot{x} + 2\beta x + \omega_0^2 x = A\, cos(\omega t)$$

2. *Demuestre que la solución a la ecuación de movimiento debe ser de la forma*

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[A_1\, exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t) + A_2\, exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t)\right] + x_p(t) \tag{5}$$

3. *Para encontrar la soución particular $x_p(t)$ utilice dos técnicas diferentes:*

   a) *Proponer*

$$x_p(t) = D\, cos(\omega t - \delta) \tag{6}$$

   b) *Proponer una solución compleja de la forma*

$$z_p(t) = \mathcal{D}\, e^{i\omega t}\,, \quad \mathcal{D} \in \mathcal{C} \tag{7}$$

   y quedarse con la parte real (¿por qué se puede hacer esto?)

   en ambos casos debe deducir que la amplitud y la fase de la solución están dadas por

$$\begin{aligned} D =& \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2\beta^2}} \\ tan\delta =& \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Las funciones $x_h(t)$ y $x_p(t)$ del problema 2 son denominadas: solución transiente o transitoria y solución estacionaria respectivamente.

Recuerde que el parámetro de amortiguamiento (β) provoca que la amplitud de la solución transitoria disminuya en el tiempo.

Problema 3 Resonancia.

Defina la frecuenca de resonancia

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2\,, \tag{9}$$

y el **factor de calidad**

$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta}\,, \tag{10}$$

1. *Grafique la amplitud y la fase de la solución estacionaria en función de la frecuencia impulsora (ω) para al menos tres valores de Q (incluya al cero)*

2. *Encuentre la frecuencia forzante en la que la amplitud alcanza su máximo (resonancia)*

Problema 4 *Considere el régimen estacionario de un oscilador amortiguado sometido a una fuerza impulsora sinusoidal. Encuentre una fórmula para la energía cinética instanánea T del sistema, note que es periódica y calcule su media*

$$\langle T \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} T\,dt\,. \tag{11}$$

¿A qué valor de la frecuencia forzante hay resonancia de energía cinética?, es decir, ¿a que valor de ω se maximiza $\langle T \rangle$?

¿A que frecuencia habrá resonancia de energía potencial?. Interprete su resultado.

Los circuitos eléctricos sencillos constituyen un excelente laboratorio para estudiar oscilaciones. Los siguientes problemas versarán sobre tales temas.

Problema 5 *Considere un circuito LC conectado en serie, el condensador está cargado inicialmente y el circuito tiene un interruptor que está abierto originalmente y se cierra en cierto instante. Encuentre la ecuación dinámica del circuito y busque un sistema mecánico con la misma representación matemática.*

Problema 6 *Repita el problema anterior con un circuito RLC en serie.*

Problema 7 *Añada una fuente de voltaje alterno a un circuito RLC en serie, conecte la fuente en serie con el circuito y encuentre las ecuación dinámica y el sistema mecánico equivalente.*

Problema 8 *Muestre que toda ecuación diferencial del tipo 1 puede reescribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que, en notación matricial se escribe*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X} + \mathbf{F}\,. \tag{12}$$

Muestre de forma explícita la forma de todos los objetos involucrados, $\mathbf{X}$, $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{X}$