Tarea 4

Mario Caicedo

Junio 2021

Lectura 1 *Lea detallamente los capítulos 1 y 2 de las Notas del curso Física 5 que se encuentran en el repositorio*

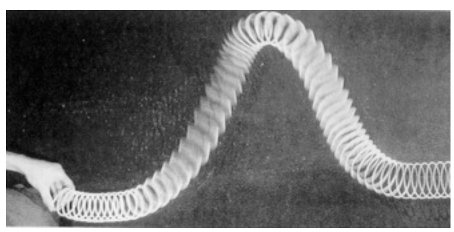

Figura 1: Pulso que viaja hacia la derecha

Problema 1 *El pulso que se muestra en la figura 1 se propaga a la derecha a lo largo de un resorte muy largo. Haga un esquema de como será la velocidad de un punto del resorte localizado a una distancia L a la derecha del pulso original. Suponga que la velocidad de fase para las ondas en el resorte es v*

Problema 2 *En dos dimensiones (y en coordenadas cartesianas), la ecuación de ondas adopta la forma*

$$\frac{\partial^2\psi(x,y;t)}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y;t)}{\partial\, y^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi(x,y;t)}{\partial\, t^2} = 0\,.$$

Demuestre que dado un vector unitario $\hat{n} = n_1\hat{\imath} + n_2\hat{\jmath}$, las ondas planas

$$\psi(x,t;t) = f_{\pm}(\hat{n}.\vec{r} \pm vt)\,,$$

donde: $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, y f es una función reales de una variable real con derivadas segundas contíuas son soluciones de la ecuación de ondas bidimensional.

¿Qué interpretación física puede dar a estas soluciones?

Problema 3 Defina los siguientes conceptos. *Sea particularmente cuidadoso especificando las condiciones en que pueden usarse*

1. *Onda armónica monocromática.*
2. *Vector de Onda*
3. *Longitud de onda*
4. *Frecuencia angular (ω). Frecuencia (f)*
5. *Velocidad de fase*
6. *Amplitud*

Problema 4 *Considere la onda armónica monocromática*

$$u(x,t) = 4\,cos[4\pi(x + 50\,t)]$$

donde todas las cantidades están especificadas en el sistema internacional de unidades. Encuentre

1. *La longitud de onda*
2. *La frecuencia angular (ω) y la frecuencia (f)*

3. *La velocidad de fase*

4. *La amplitud*

5. *El sentido de propagación*

6. *Una expresión compleja para ψ.*

Problema 5 *Una onda armónica monocromática de frecuencia $f = 10^3$ Hz viaja a lo largo de una cuerda de densidad $\mu = 0{,}5$ g/cm sometida a una tensión de 1 Nw. Si los puntos de la cuerda se parametrizan con una variable real (x) y la onda viaja en el sentido en que crece x, ¿cuál es la fórmula para la forma de la onda?.*

Problema 6 Ondas elctromagnéticas

Las estaciones de radio FM utilizan frecuencias del orden de los 10^6 Hz, ¿cuál es el orden de magnitud de las longitudes de onda asociadas?.

En el caso de la luz, las longitudes de onda son del orden de los cientos de nanometros (ó miles de amstrongs), ¿cuál es el orden de magnitud de las frecuencias asociadas?. ¿cómo compara las longitues de onda óptica con las escalas de la vida diaria?, ¿con las escalas celulares?, ¿con las escalas atómicas?

Problema 7

Demuestre que la solución a la ecuación de ondas unidimensional con condiciones iniciales:

$$u(x,0) = \phi(x) \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) \tag{1}$$

está dada por la fórmula de D'Alambert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+vt) + \phi(x-vt) + \frac{1}{v}\int_{x-vt}^{x+vt} d\xi\, \psi(\xi)\right] \tag{2}$$

Problema 8 *La forma y velocidad instantánea de una cuerda muy larga de densidad de masa μ sometida a una tensión T son: $u(x,0) = A_0\, e^{-|x|/a}$ y $\partial_t u(x,0) = 0$, donde a y A_0 son constantes positivas con dimensiones de longitud y $||$ es el símbolo usual para la función valor absoluto.*

Encuentre la forma de la onda para todo instante posterior.

Problema 9 *Cuando utilizamos el paso al contínuo de la cuerda cargada para terminar con una descripción de la cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$ sometida a la condición inicial*

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0\,,$$

concluimos que, para todo instante posterior, la forma general de la cuerda tiene que estar dada por una superposición de modos normales de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, cos\left(v\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Use este resultado para encontrar la forma de las oscilaciones transversales de de una cuerda de densidad μ, sometida a una tensión T, cuyos extremos están fijos en $x = 0$ y $x = L$ y que empieza a vibrar desde el reposo con la forma inicial,

$$u(x,0) = 3\, sen(\frac{\pi\, x}{L}) + \frac{1}{2}\, sen(\frac{11\pi\, x}{L})\,.$$

Problema 10 *Los problemas ondulatorios que se estudian en este curso atisfacen el principio de superposición (son problemas lineales). Hemos tenido la suerte de que muhos problemas físicos pertenecen a esta categoría, ya que existen una pléyade de técnicas bien entendidas para su resolución analítica. Los problemas no lineales son muchísimo más difícles y no hay técnicas generales para buscar sus soluciones analíticas.*

El objetivo de este problema consiste en presentar un modelo físico no lineal que posee soluciones del tipo onda viajera. La ecuación

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \frac{\partial\phi}{\partial t} - 6\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0\,,$$

conocida como ecuación de Korteweg–De Vries (KdV) es una ecuación no-lineal (¿por qué?) que constituye un modelo para las ondas superficiales de agua en un canal poco profundo.

1. *Proponga el ansätz* $\phi(x,t) = z(x-\beta t)$ *y demuestre que al sustituirlo en la ecuación KdV se obtiene la ecuación diferencial ordinaria* ($\xi = x - \beta t$)

$$-\beta\frac{dz}{d\xi} + 6z\frac{dz}{d\xi} + \frac{d^3z}{d\xi^3} = 0$$

2. *Haga una primera integración para concluir que*

$$-\beta z + 3z^2 + \frac{d^2z}{d\xi^2} = c_1$$

3. *Multiplique ambos lados por*

$$\frac{dz}{d\xi}$$

e integre una vez más para obtener

$$-\frac{\beta}{2}z^2 + z^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = c_1 z + c_2 \tag{3}$$

4. *En vista de que* $\phi(x,t)$ *pretende representar olas en un canal, es razonable esperar que en las zonas muy lejanas del canal, las aguas estén tranquilas, matemáticamente esto corresponde a pedir que en la región* $x \to \pm\infty$, $z \to 0$, $\frac{dz}{d\xi} \to 0$ *y* $\frac{d^2z}{d\xi^2} \to 0$, *reconozca las condiciones que estos límites imponen sobre y demuestre que con tales condiciones, la ecuación 3 se transforma en*

$$-\frac{\beta}{2}z^2 + z^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = 0\,, \tag{4}$$

5. *La ecuación 4 es una ecuación de primer orden separable que se integra sin mayor problema,*

$$\int_0^\xi d\eta = \int_0^z \frac{ds}{s^2\left(\beta - 2s\right)}\,,$$

6. *Lleve a cabo la integración y revierta el cambio de variables para demostrar que*

$$\boxed{\phi(x,t) = \frac{\beta}{2}\, sech^2\left[\frac{\sqrt{\beta}}{2}(x-\beta t)\right]} \tag{5}$$

   es una solución tipo onda viajera de la ecuación KdV

7. *¿Se le ocurre un análogo mecánico de la ecuación 4?*

La solución 5 a la ecuación KdV es un ejemplo de solitón. Este tipo de objeto e bastante conocido y tiene numerosas aplicaciones.