Tarea 3

Mario Caicedo

Mayo 2021

Problema 1 *Considere un circuito RLC en serie conectado (también en serie) con una fuente de voltaje* $V(t) = V_0\, cos(\omega t)$.

1. *Sabiendo que la energía almacenada en el condensador y en la inductancia se calculan por las fórmulas*

$$E_e = \frac{Q^2}{2C}\,, \qquad E_m = \frac{LI^2}{2}$$

   ¿cuál es la energía (E) almacenada en el circuito en un instante determinado?, ¿encuentre una expresión para dE/dt

2. *Use el resultado anterior para encontrar la ecuación diferencial que describe la corriente que corre en el circuito.*

Problema 2 [Este problema será muy importante para la tarea #4]*Dos péndulos de igual longitud* (ℓ) *y masas idénticas* ($m_1 = m_2 = m$) *cuelgan de un techo separados por una cierta distancia. Las masas de los péndulos se encuentra unidas por un resorte muy ligero de constante elástica* κ *cuya longitud de equilibrio es igual a la distancia que separa a las dos masas cuando se encuentran en reposo.*

1. *Llamando x_1 y x_2 a la separación horizontal de las masas con respecto a su posición de equilibrio, encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema acoplado*

2. *Encuentre las frecuencias (ω_l y ω_r) de los modos rápido y lento del sistema. Use la notación $\omega_0^2 = g/\ell$, $\omega_c^2 = k/m$.*

3. *Sobre la masa cuya posición es x_2 se ejerce una fuerza externa horizontal de la forma $\vec{F} = F_0\, cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x$. Encuentre las nuevas ecuaciones de movimiento.*

4. *Demuestre que las sluciones estacionarias para los modos normales son*

$$\begin{aligned} u_l(t) &= \frac{F_0}{\omega_l^2 - \omega^2}\, cos(\omega t) \\ u_r(t) &= \frac{F_0}{\omega_r^2 - \omega^2}\, cos(\omega t) \end{aligned} \tag{1}$$

   use este resultdo para demostrar que las leyes de movimiento de ambas masas son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{F_0}{m}\frac{\omega_c^2}{(\omega_l^2 - \omega^2)(\omega_r^2 - \omega^2)}\, cos(\omega t) \\ x_2(t) &= \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 + \omega_c^2 - \omega^2}{(\omega_l^2 - \omega^2)(\omega_r^2 - \omega^2)}\, cos(\omega t) \end{aligned} \tag{2}$$

Las siguientes preguntas y problemas guiados adelantan parte del material que estaremos etudiando en las siguientes semanas.

Pregunta 1 *¿Qué entiende usted por onda?*

Pregunta 2 *¿Diría usted que dada una función real de variable real $f(\xi)$, la función*

$$u(x,t) = f(x - \nu t)$$

es una onda que viaja a lo largo del eje x en el sentido de las x crecientes con velocidad[1] *v*

[1] $[v]$=dimensiones de x/dimensiones de t

Problema 3 *En las actividades anteriores hemos visto que el límite del contínuo de un sistema de N osciladores es descrito por la llamada* **ecuación de ondas unidimensional sin fuentes**

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

1. *Verifique que para toda función ($f(x)$ suave de una variable real, las funciones de dos variables*

$$u_\pm(x,t) = f(x \pm vt)\,,$$

son soluciones de la ecuación de ondas.

2. *Interprete físicamente estas soluciones.*

3. *¿Qué condiciones deben satisfacer k y ω para que propuestas de las formas cos$(kx-\omega t)$, sen$(kx-\omega t)$ ó $e^{i(kx-\omega t)}$ sean soluciones de la ecuación de ondas.*

4. *Encuentre una interpretación física para k y ω.*

Problema 4 *Verifique que los* **modos**

$$u_p(x,t) = sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right)cos(p\omega_0 t)\,, \quad p = 1,2,3,... \tag{3}$$

con $\omega_0 = \frac{v}{L}\pi$ son soluciones de la ecuación de ondas que satisfacen las condiciones de borde (o extremo) $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Cuántos ceros (y en donde se encuentran) posee $u_p(x,t)$. Los ceros se denominan nodos.

Finalmente, demuestre que cada modo (u onda estacionaria) $u_p(x,t)$ es la suma(superposición) de una onda que viaja a la izquierda y una que viaja a la derecha.