Óptica Geométrica

Tarea 8

Mario Caicedo

Julio 2021

1. Parte I

Lectura 1 *Para esta primera parte, se recomienda la lectura del capítulo 34 del texto: Física Universitaria con Física Moderna de Sears, Zemansky et al, 12 ed.*

1. Utilice el principio de Huygens para demostrar

   a) La ley de igualdad entre los ángulos de incidencia y reflexión

   b) La ley de Snell

2. Demuestre las leyes del ejercicio anterior a partir del *Principio de Fermat*

3. Utilizando únicamente regla y compas construya la imagen de un segmento recto de longitud L colocado en frente de un espejo plano. ¿La imagen obtenida es real o virtual?

4. El principio fundamental utilizado por los telescopios Newtonianos (y similares) consiste en que los rayos de luz que inciden sobre un espejo parabolico paralelamente a su eje óptico, se reflejan concentrándose en el foco. Demuestre esta propiedad.

5. Una posibilidad interesante, pero sobre todo, entretenida consiste en crear un espejo elíptico. Demuestre que en tal caso, todo rayo que sale de uno de los focos se rfleja pasando por el otro foco.

6. La construcción de sistemas ópticos pasa por ejercicios de trazado de rayos. Discuta (y obviamente encuentre las fórmulas correspondientes) la formación de imágenes en lentes delgadas

2. Parte II

Toda discusión elemental acerca de óptica geométrica se inicia con algún párrafo llamando la atención acerca de que la óptica geométrica es unaaproximación válida únicamente en el límita de longitudes de onda muy cortas. El propósito de esta segunda parte de la tarea[1] consiste en introducir los desarrollos teóricos que justifican tal aseveración.

Para esta parte conviene apoyarse en el capítulo III del extraordinario tratado, *Principles of Optics* de Max Born y Emile Wolf.

Comencemos estableciendo las ecuaciones de Maxwell en un medo material,

$$\begin{aligned} div\mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ div\mathbf{D} &= 0 \\ rot\mathbf{H} - \frac{1}{c}dot\mathbf{D} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ rot\mathbf{E} + \frac{1}{c}dot\mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Cuando elmedio es lineal, isótropo y homogéneo, las relaciones entre el desplazamiento y el campo eléctricos y el campo e inducción magnéticas son

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}\,, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{2}$$

[1]Si lo desea, puede entregar esta parte separadamante de la primera

donde la permitividad eléctrica (ε) y la permeabilidad magnética (μ) son constantes.

En este curso ya se han estudiado las soluciones ondulatorias de las ecuaciones de Maxwell, objetivo que se alcanzó proponiendo soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}\pm\omega t)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{H}_0\, e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}\pm\omega t)} \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ son vectores uniformes (independientes de $\mathbf{r}$)

Ahora nos interesan campos armónicos no uniformes, es decir, queremos estudiar la posibilidad de tener soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{4}$$

acá, el ansatz para las intensidades de los campos es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}(\mathbf{r})\, e^{ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r})} \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= \mathbf{h}(\mathbf{r})\, e^{ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r})}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde

$$k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0\,, \tag{6}$$

es el número de onda en el vacio.

Problema 1 *Compare las soluciones estandar con las propuestas para intentr dar una interpretación a* $\mathcal{S}$

Problema 2 *Demuestre que la sustitución del ansatz en la ecuaciones de Maxwell lleva al* *siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} grad\mathcal{S}\times\mathbf{h}+\varepsilon\,\mathbf{e} &= -\frac{1}{ik_0}rot\mathbf{h} \\ grad\mathcal{S}\times\mathbf{e}-\mu\,\mathbf{h} &= -\frac{1}{ik_0}rot\mathbf{e} \\ \mathbf{e}.grad\mathcal{S} &= -\frac{1}{ik_0}(\mathbf{e}.grad\ln\varepsilon+div\mathbf{e}) \\ \mathbf{h}.grad\mathcal{S} &= -\frac{1}{ik_0}(\mathbf{h}.grad\ln\mu+div\mathbf{h}) \end{aligned} \tag{7}$$

El siguiente paso del desarrollo no es otro que considerar el límite de longitud de onda corta, o equivalentemente, el límite de número de onda[2] infinito

Problema 3 *Tome el límite $k_0\to\infty$,*

1. *¿Qué relación geométrica se establece entre los vecotres de polarización* $\mathbf{e}$ *y* $\mathbf{h}$*?, ¿como la interpreta?*

2. *Demuestre que en este límite,*

$$\frac{1}{\mu}\left[(\mathbf{e}.grad\mathcal{S})\mathcal{S}-(grad\mathcal{S})^2\mathbf{e}\right]+\varepsilon\mathbf{e}=0 \tag{8}$$

3. *Concluya demostrando que la eikonal ($\mathcal{S}$) satisface la* **ecuación eikonal**

$$\boxed{(grad\mathcal{S})^2=n(x,y,z)} \tag{9}$$

Problema 4 *Considere un medio con índice de refracción constante y encuentre soluciones a la ecuación eikonal en coordenads cartesians y esféricas. Interprete sus resultados.*

Se puede demostrar que, al utilizar las soluciones 5, las densidades de energía eléctrica y magnética promediadas en el tiempo están dadas por

$$\langle w_e\rangle=\frac{\varepsilon}{16\pi}\,\mathbf{e}.\mathbf{e}^*\,,\quad \langle w_m\rangle=\frac{\mu}{16\pi}\,\mathbf{h}.\mathbf{h}^* \tag{10}$$

[2] o frecuencia

Problema 5 *Demuestre que al usar las ecuaciones 10, se obtiene*

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{16\pi}\, \mathbf{e}.(\mathbf{h}^* \times grad\mathcal{S})\,, \quad \langle w_m \rangle = \frac{1}{16\pi}\,(grad\mathcal{S} \times \mathbf{e}).\mathbf{h}^* = \langle w_e \rangle\,, \tag{11}$$

así que dentro de los límites de la óptica gemétrica, las densidades medias de energía eléctrica y magnética son iguales.

Problema 6 *La media del vector de Poynting puede encontrarse a través de la fórmula*

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi}\, Re(\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*) \tag{12}$$

Demuestre que el uso juicioso de esta fórmula lleva a concluir que, en la aproximación de la óptica geométrica,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2c}{n^2}\, \langle w_e \rangle\, grad\mathcal{S} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n^2}\, \langle w \rangle\, grad\mathcal{S} \tag{13}$$

donde $\langle w \rangle$ *es la media de la energía electromagnética total.*

La fórmula 13 puede rescribirse en la forma

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n}\, \langle w \rangle\, \frac{grad\mathcal{S}}{n}\,, \tag{14}$$

ahora bien, de acuerdo a la ecuación eikonal, el vector $\hat{\mathbf{u}} = grad\mathcal{S}/n$ no es otra cosa que el vector unitario normal a los frentes de onda. Por otra parte, la cantidad $v = c/n$ es la “velocidad” de la luz en el medio. En conclusión, la media del vector de Poynting tiene por magnitud el producto de la densidad de energía por la velocidad de propagación de la luz en el medio y va en la dirección perpendicular a los frentes de onda.

Para los fines de este curso y de esta asignación concluiremos con una definición y algunos comentarios.

Definición 1 *Los rayos son las trayectorias ortogonales a los frentes de onda.*

Si utilizamos la parametrización de longitud de arco, y llamamos $\vec{r}(s)$ a la posición d eun punto en un rayo, la definición 1 implica la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \hat{\mathbf{u}}\,, \tag{15}$$

esta ecuación nos permite definir los rayos como

Definición 2 *Los rayos son las curvas integrales del campo de normales de los frentes de onda*

Para finalizar esta asignación dejamos los siguientes comentarios e inquietudes

1. En la aproximación de longitud de onda cero los campos eléctrico y magnético son, en todo punto, ortogonales a los rayos.

2. ¿Qué debemos entender por límite de longitud de onda muy pequeña?

3. ¿Qué relación existe entre las definiciones 1 y 2 y el principio de Fermat?

4. En muchas ocasiones las partes espaciales $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ y $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ de los camps eléctricos y magnéticos admiten desarrollos *asintóticos* de la forma

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = e^{ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r})}\sum_{0\leq m}\frac{\mathbf{e}^{(m)}}{(ik_0)^m}\,, \qquad \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = e^{ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r})}\sum_{0\leq m}\frac{\mathbf{h}^{(m)}}{(ik_0)^m}\,, \tag{16}$$

   donde los vectores $\mathbf{h}^{(m)}$ y $\mathbf{h}^{(m)}$ son funciones de $\mathbf{r}$, y en estos términos es evidente que la óptica geométrica es el término principal (leading term) de la serie asintótica.

5. Es fundamental decir que, a pesar de que el desarrollo que hemos llevado a cabo está en el contexto de la teoría electromagnética, hay generalizaciones para todas las teoria fisicas que llevan a comportamiento ondulatorio. Así por ejemplo, mucho de lo que se conoce en sismología es gracias a la teoría de rayos correspondiente.