Modos Normales y Álgebra Lineal

Mario Caicedo

Mayo, 2021

1. Introduction

Esta nota pretende destacar la relación entre los problemas de oscilaciones lineales acopladas y algunos resultados de la teoría espectral.

Recordemos las ecuaciones que describen la dinámica de dos osciladores acoplados,

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2\, x_1 + \omega_c^2\,(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2\, x_2 - \omega_c^2\,(x_2 - x_1) \end{aligned}} \tag{1}$$

2. Álgebra Lineal for Dummies

Pensemos en las coordenadas ($x_1(t)$ y $x_2(t)$) de las dos masa de los osciladores acoplados como elementos de un espacio vectorial abstracto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= x_1(t)\,\hat{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{x}_2(t) &= x_2(t)\hat{\mathbf{e}}_1 \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{3}$$

obviamente podemos reescribir los vectorea abstractos $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ en la forma

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) = x_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, x_1(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\
\mathbf{x}_2(t) = x_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, x_1(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ó

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= x_1(t)\, \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{u}}_r \right] \\
\mathbf{x}_2(t) &= x_2(t)\, \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{\mathbf{u}}_l - \hat{\mathbf{u}}_r \right]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

donde los vectores

$$
\hat{\mathbf{u}}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \hat{\mathbf{u}}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\tag{6}
$$

Están relacinados con los modos lento y rápido que discutimos cuando estudiamos la dinámica de dos osciladores acoplados. Es evidente que los dos vectores $\hat{\mathbf{u}}_l$ y $\hat{\mathbf{u}}_r$ son LI y por tanto constituyen una base (que llamaremos U), más aún, la base U, que llamaremos la base de *modos normales*, es ortonormal.

Resumiendo. Hasta este punto notamos que en el espacio abstracto el vector $\mathbf{x}_1(t)$ tiene componentes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}_C && \text{en la base canónica y} \\
\mathbf{x}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}_U && \text{en la base de modos normales}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

de la misma manera,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C \\
\mathbf{x}_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_2(t) \end{pmatrix}_U
\end{aligned} \tag{8}$$

Podemos arreglar las entradas de los versores de la base de modos normales en columnas de una matriz

$$\mathbf{P}_{C\to U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

esta matriz cambia las componentes de un vector de la base canónica a la base U, en efecto, si aplicamos la matriz a $\mathbf{x}_1$ expresado en la base canónica obtenemos

$$\mathbf{P}_{C\to U} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}_U , \tag{10}$$

y

$$\mathbf{P}_{C\to U} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_2(t) \end{pmatrix}_U , \tag{11}$$

si queremos pensar en el movimiento de las dos masas acopladas tenemos que pensar en el vector

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C \tag{12}$$

o

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) - x_2(t) \end{pmatrix}_U , \tag{13}$$

como vemos, las entradas de $\mathbf{X}(t)$ en la base U definen -salvo normalización- las coordenadas que diagonalizan al sistema de ecuaciones diferenciales que describe el sistema.

Debido a que las columnas de la matriz $\mathbf{P}_{C\to U}$ son vectores ortonormales, $\mathbf{P}_{C\to U}$ es una matriz ortogonal y por lo tanto

$$(\mathbf{P}_{C\to U})^{-1} = (\mathbf{P}_{C\to U})^{T}\,, \tag{14}$$

ahora bien, es evidente que $(\mathbf{P}_{C\to U})^{-1}$ hace el cambio de base de la base U a la base canónica, por lo tanto, la matriz

$$\mathbf{P}_{U\to C} = \mathbf{P}^{T}_{C\to U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

nos permite cambiar de la base U a la base canónica.

3. Jugando en AAA

El sistema 1 puede expresarse como

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = \mathbf{\Omega}_C \mathbf{X}_C\,, \tag{16}$$

donde

$$\mathbf{X}_C \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{\Omega}_C = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2 - \omega_c^2 \end{pmatrix}\,. \tag{17}$$

Ahora bien, si se piensa un poco, debería resultar evidente que la fisica tiene que ser independiente de su representación, en este caso, independiente de la base que estemos usando, dichi de otro modo, palabras, deberíamos escribir -en general-

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{X}} \tag{18}$$

entendiendo que al escribir las ecuaciones de manera exolícita deberíamos decir en que bae las estamos expresando.

Juguemos un poco con estas ideas, en la base canónica

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = \mathbf{\Omega}_C \mathbf{X}_C \,, \tag{19}$$

Usando que $\mathbf{P}_{U\to C}\mathbf{P}_{C\to U} = \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{X}}_C &= \{\mathbf{\Omega}_C [P_{U\to C}][P_{C\to U}]\}\,\mathbf{X}_C = \\ &= \{\mathbf{\Omega}_C [P_{U\to C}]\}\,[P_{C\to U}]\mathbf{X}_C \end{aligned} \tag{20}$$

finalmente multipliquemos ambos lados a la izquierda por $\mathbf{P}_{C\to U}$

$$M\mathbf{P}_{C\to U}\ddot{\mathbf{X}}_C = \mathbf{P}_{C\to U}\,\{\mathbf{\Omega}_C [P_{U\to C}]\}\,[P_{C\to U}]\mathbf{X}_C \tag{21}$$

es decir,

$$M\ddot{\mathbf{X}}_U = [\mathbf{P}_{C\to U}\,\mathbf{\Omega}_C\,P_{U\to C}]\,\mathbf{X}_U \,, \tag{22}$$

esta última ecuación nos dice algo que ya habíamos aprendido en los cursos de álgebra lineal, el operador $\mathbf{\Omega}_U$ se obtiene de $\mathbf{\Omega}_U$ a través de una transformación de similaridad.

Hagamos el ejercicio,

$$\mathbf{\Omega}_U = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2 - \omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Comenzamos por el producto a derechas,

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2 - \omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2 - 2\omega_c^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 + 2\omega_c^2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Al sustituir,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_U &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2 - 2\omega_c^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 + 2\omega_c^2 \end{pmatrix} = \\
&= 1/2 \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -2\omega_0^2 + 4\omega_c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 + 2\omega_c^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Si usamos la base U para escribir el sistema e ecuaciones diferenciales queda

$$
M \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u_l(t) \\ u_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 + 2\omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l(t) \\ u_r(t) \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} u_l(t) \\ u_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) - x_2(t) \end{pmatrix} \tag{26}
$$

que es exactamente lo que obtuvimos en la tarea #1.

En definitiva, acabamos de demostrar que en la base de modos normales, las ecuaciones diferenciales se desacoplan en dos problemas de oscilaciones armónicas con las frecuencias baja y alta que habíamos encontrado anteriormente.

Ahora todo está claro. Al proponer la solución $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}\, e^{i\omega t}$, el sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en el problema espectral

$$
\mathbf{\Omega X}_0 = \lambda\, \mathbf{X}_0 \tag{27}
$$

con $\lambda = -\omega^2$. En este y en todos los casos, ocurre la matriz cuyo espectro se está estudiando es real y simétrica, en ese caso, el teorema espectral asegura que los autoepacios asociados a autovalores diferentes son ortogonales, pero hay algo más.

En los problemas de oscilaciones de interés físico suelen encontrarse tantos autovalores distintos como partículas oscilantes y en consecuencia el conjunto de autovectores constituye una base en que $\mathbf{\Omega}$ es diagonal, esa es, precisamente, la base de modos normales.