Ondas y Óptica. Tarea 2

Osciladores Acoplados y Modos Normales

Mario I. Caicedo

Noviembre 2018

Recomendaciones

1. Esta tarea consta de lectura guiada y solución asistida de un problema, trate de trabajar con sus propios recursos.

2. Aun cuando la información al respecto del tema de oscilaciones acopladas se encuentra en los capítulo 5 y 12 de los textos de French J. B. Marion respectivamente. se recomienda ir a los texto solo después de haber avanzado en la resolución **independiente** de la tarea.

3. Recuerde que el repositorio del curso y la carpeta de GoogleDrive compartida contienen informmación importante.

1. Dos Osciladores

Imaginemos dos masas (M_1 y M_2) que se mueven a lo largo de un riel sin rozamiento bajo la acción de tres resortes. Supongamos que en cada uno de los extremo del carril ($x = 0$ y $x = L$) se anclan dos de los resortes por uno de sus extremos, los otros extremos se anclan a las masas y simultaneamente, las masas están unidas entre sí a través del tercer resorte.

Se escoge el sistema de coordenadas de tal manera que, las desviaciones de las posiciones de equilibrio de las masas puntuales sean x_1 y x_2, escogemos la convención de manera que la posición de la masa M_1 sea siempre a la derecha de M_1, es decir, $x_2(t) > x_1(t)\ \forall\, t$. De esta manera, si las constantes elásticas de los resortes con un extremo fijo son k_1 y k_2, las fuerzas que sobre las masas ejercen los resortes que las unen a los extremos del riel son:

$$\vec{F}_1 = -k_1\, x_1\, \mathbf{e_x} \quad \text{y} \tag{1}$$

$$\vec{F}_2 = -k_2\, x_2\, \mathbf{e_x} \tag{2}$$

La fuerza que ejerce el resorte central es proporcional a la elongación de dicho resorte, es decir, $\vec{F}_\kappa = -\kappa(x_2 - x_1)$ donde, obviamente, κ es la constante elástica del resorte que acopla las dos masas.

1.1. Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones newtonianas de movimiento del sistema son.

$$M_1\, \ddot{x}_1 = -k_1\, x_1 + \kappa\, (x_2 - x_1) \tag{3}$$

$$M_2\, \ddot{x}_2 = -k_2\, x_2 - \kappa\, (x_2 - x_1)\, . \tag{4}$$

Acá es interesante notar los signos en las fuerzas.

Si usamos masas idénticas y $k_1 = k_2$ las ecuaciones de movimiento son

$$M\, \ddot{x}_1 = -M\, \omega_0^2\, x_1 + M\, \omega_c^2\, (x_2 - x_1) \tag{5}$$

$$M\, \ddot{x}_2 = -M\, \omega_0^2\, x_2 - M\, \omega_c^2\, (x_2 - x_1)\, , \tag{6}$$

donde, $\omega_0^2 = k/M$, $\omega_c^2 = \kappa/M$

La forma normal de estas ecuaciones es

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2\, x_1 + \omega_c^2\, (x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2\, x_2 - \omega_c^2\, (x_2 - x_1) \end{aligned}} \tag{7}$$

Este sistema de segundo orden puede representarse como uno de primer orden,

$$\dot{x}_1 = v_1 \tag{8}$$

$$\dot{v}_1 = -\omega_0^2\, x_1 + \omega_c^2\, (x_1 - x_2) \tag{9}$$

$$\dot{x}_2 = v_2 \tag{10}$$

$$\dot{v}_2 = -\omega_0^2\, x_2 - \omega_c^2\, (x_1 - x_2) \tag{11}$$

1.2. Modos Normales

Sumando y restando las ecuaciones del sistema 7 obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2\,(x_1 + x_2) \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 &= -(\omega_0^2 - 2\omega_c^2)\,(x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{12}$$

acá resulta evidente que definiendo

$$\begin{aligned} u_r &= x_1 + x_2 \qquad y \\ u_l &= x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{13}$$

el sistema de ecuaciones se desacopla totalmente resultando

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{u}_r &= -(\omega_0^2 + 2\omega_c^2)\,u_r \\ \ddot{u}_l &= -\omega_0^2\,u_l \end{aligned}} \tag{14}$$

estas ecuiaciones corresponden a dos osciladdores independientes de frecuencias naturales (rápida y lenta)

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \\ \omega_l &= \omega_0 \end{aligned}} \tag{15}$$

de acuerdo a esto,

$$\begin{aligned} u_r &= A_r cos(\omega_l t + \phi_r) \\ u_l &= A_l cos(\omega_r t + \phi_r) \end{aligned} \tag{16}$$

A las soluciones u_r y u_l se les denomina *modos normales* del sistema.

Problema 1. *Encuentre x_1 y x_2 en términos de los modos normales.*

Para cada modo normal describa cualitativamente el movimiento de ambas partículas.

1.3. Modos Normales: Técnica General

El sistema acoplado de segundo orden 7 puede reexpresarse en forma matricial

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\mathbf{\Omega}^2\mathbf{X} \tag{17}$$

con

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Si proponemos una solución de la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}e^{i\omega t} \tag{19}$$

obtenemos

$$\mathbf{\Omega}^2\mathbf{V} = \omega^2\mathbf{V} \tag{20}$$

que reconocemos de inmediato como el problema espectral para la matriz $\mathbf{\Omega}^2$. Lo autovalores del problema son las raices del determinante

$$det[\mathbf{\Omega}^2 - \omega^2\mathbf{I}] \tag{21}$$

es decir, las raices de

$$P(\omega^2) = (\omega_0^2 + \omega_c^2 - \omega^2)^2 + \omega_c^4 \tag{22}$$

ó

$$\omega_0^2 + \omega_c^2 - \omega^2 = \pm\omega_c^2 \tag{23}$$

con soluciones

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \omega_0^2 + 2\omega_c^2 \\ \omega_l^2 &= \omega_c^2\,, \end{aligned} \tag{24}$$

es decir, los autovalores del problema corresponden a los cuadrados de las frecuencias rápida y lenta que habíamos encontrado anteriormente (ecuación 15)

Los autovectores correspondientes se obtienen al sustituir las frecuencias propias (ω_r y ω_l) en la ecuación 20.

Al hacerlo resultan dos sistemas de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{pmatrix} \mathbf{V}_l = \omega_0^2\mathbf{V}_l \\ \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{pmatrix} \mathbf{V}_r = (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)\mathbf{V}_r \end{aligned} \tag{25}$$

es decir,

$$\boxed{\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\omega_c^2 & -\omega_c^2\\ -\omega_c^2 & \omega_c^2\end{pmatrix}\mathbf{V}_l = 0\\ \begin{pmatrix}-\omega_c^2 & -\omega_c^2\\ -\omega_c^2 & -\omega_c^2\end{pmatrix}\mathbf{V}_r = 0\end{array}} \tag{26}$$

la soluciones generales de estos sistemas son

$$\begin{array}{c}\mathbf{V}_l = \begin{pmatrix}a\\ a\end{pmatrix}\\ \mathbf{V}_r = \begin{pmatrix}b\\ -b\end{pmatrix}\end{array} \tag{27}$$

a y $b \in \mathcal{C}$.

En resumen, las soluciones que hemos encontrado son

$$\begin{array}{c}\mathbf{V}_r = \mathcal{B}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\, e^{i\omega_r t}\\ \mathbf{V}_l = \mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\, e^{i\omega_l t}\end{array} \tag{28}$$

que corresponen a las soluciones reales

$$\begin{array}{c}\mathbf{u}_r = B\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\, cos(\omega_r t + \phi_r)\\ \mathbf{u}_l = A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\, cos(\omega_l t + \phi_l)\end{array} \tag{29}$$

1.4. Interpretando los modos

En su forma original, pensabamos en la solución del sistema como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} \tag{30}$$

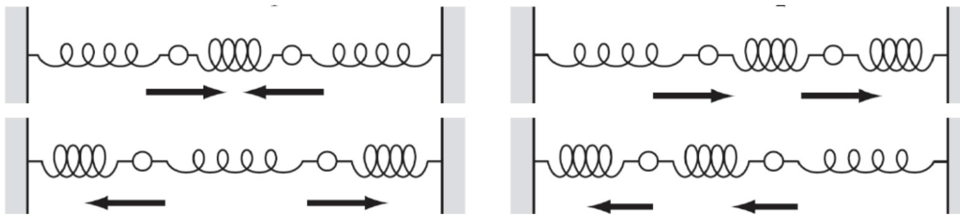

Figura 1: Los modos antisimétrico y simétrico de dos osciladores acoplados

que obviamente podemos reescribir en la forma

$$\mathbf{X}(t) = x_1(t)\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\hat{\mathbf{e}}_2 \tag{31}$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{32}$$

constituyen una base ortonormal en un espacio vectorial bidimensional **abstracto**

Ahora bien, podemos pensar con absoluta generalidad, que los autovectores normalizados

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_l &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{u}}_r &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{33}$$

constituyen una base alterna del espacio vectorial que describe el movimiento de los osciladores acoplados y en esta base, el movimiento del sistema debe describirse en la forma

$$\mathbf{X} = \eta_r(t)\hat{\mathbf{u}}_r + \eta_l(t)\hat{\mathbf{u}}_l \tag{34}$$

y las η-s se denominan coordenadas normales.

El cambio de las coordenadas estándar $x_i(t)$ a las coordenadas normales y visceversa es solo un cambio de base. Los modos normales corresponden a dos formas de oscilación en que, para el caso de dos partículas, las masas oscilan individualmente en fase y anti-fase.

2. Tres Osciladores (Problema Guiado)

Considere el sistema físico de la figura 2

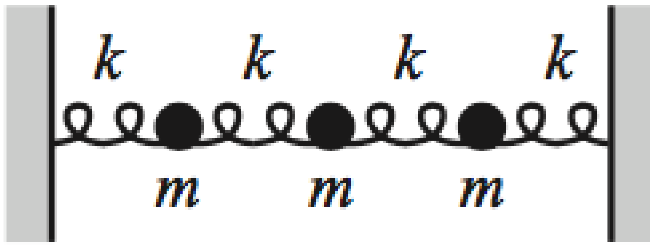

Figura 2: Caption

1. Sin intentar resolver, ¿cuantos modos normales cree que tenga este sistema?, trate de hacer un esbozo de tales modos

2. Encuentre las ecuaciones de movimiento

3. Proponga la solución $\mathbf{X}(t) = \mathbf{U}\, e^{i\omega t}$ y obtenga el problema espectral correspondiente

4. Resuelva el problema espectral para encontrar los modos normales y descríbalos cuidadosamente.