

Modos Normales de N Osciladores Acoplados el Límite del Continuo

Mario Caicedo

Mayo, 2021

1. Introducción

Ya hemos visto que al acoplar 2 y 3 osciladores, las ecuaciones de movimiento poseen una base de soluciones constituidas por 2 o 3 modos normales de oscilación que se obtienen como soluciones de un problema espectral asociado a las ecuaciones de movimiento. Esta nota generaliza el resultado para N arbitrario.

En el caso de dos y tres osciladores, aprendimos que es conveniente introducir un espacio vectorial \mathcal{V} de dimensión igual a la del número de osciladores, y aprendimos que la matriz que define las ecuaciones de movimiento puede diagonalizarse. Los autovalores de la matriz son un conjunto de frecuencias propias y sus autovectores, son los *modos normales*, la descripción del movimiento se resume en el vector $\mathbf{X}(t)$ que en el caso bidimensional y la base canónica es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

en términos de la base de modos normales,

$$\mathbf{X}(t) = A_r \cos(\omega_r t + \phi_r) \hat{\mathbf{u}}_r + A_l \cos(\omega_l t + \phi_l) \hat{\mathbf{u}}_l \quad (2)$$

donde ω_r y ω_l son las frecuencias propias y $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_l$ sus autovectores asociados.

En esta nota estudiaremos la extensión del problema a N osciladores encontrando que el movimiento más general posible de la ℓ -ésima partícula de una cadena de osciladores acoplados a *primeros vecinos* tiene la forma.

$$\boxed{\psi_\ell = \sum_k A_k \operatorname{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} \ell \right] \cos(\omega_k t - \delta_k)} \quad (3)$$

otra manera de exoresar esto es escribir el k -ésimo modo normal en la forma (no normalizada)

$$\mathbf{u}_k(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} 1 \right] \\ \operatorname{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} 2 \right] \\ \vdots \\ \operatorname{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} m \right] \\ \vdots \\ \operatorname{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} (N-1) \right] \\ \operatorname{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} N \right] \end{pmatrix} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (4)$$

2. Descripción del Sistema Físico

El sistema de interés consiste en un conjunto de partículas de masas idénticas que se encuentra colocadas en posiciones fijas y equidistantes a lo largo de una cuerda “inextensible” y sin masa que se mantiene sometida a una tensión es de magnitud T_0 y con sus extremos fijos. El sistema está libre de cualquier otra fuerza. En la literatura en inglés se conoce a est sistema como *loaded string* (figura 1).

Por razones de sencillez al momento de visualizar la dinámica del sistemna, nos concentraremos en movimientos transversales (verticales) de las partículas.

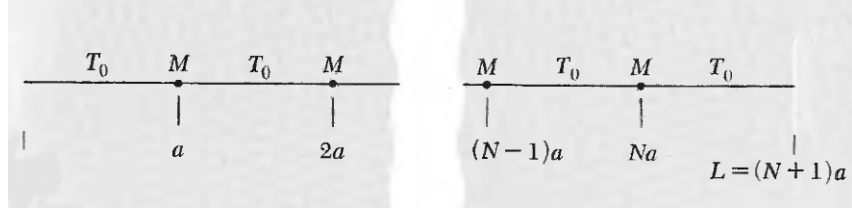


Figura 1: La *cuerda cargada*

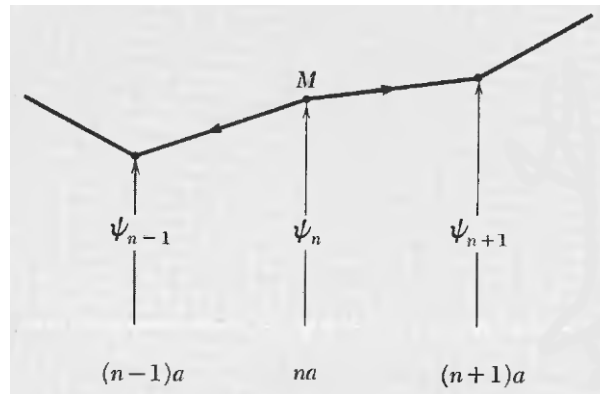


Figura 2: Geometría para el cálculo de las fuerzas sobre la n -ésima partícula.

2.1. Ecuaciones de Movimiento

Al considerar el movimiento transversal (vertical) de la n -ésima partícula la segunda ley de Newton expresa,

$$M\ddot{\psi}_n = F_y^{(n)} \quad (5)$$

donde $\psi_n(t)$ es la posición vertical de la partícula con respecto a la posición (horizontal) de equilibrio de la cuerda.

Ahora bien, usando α_k para denotar al ángulo que la cuerda hace con la horizontal en el punto en que se encuentra la k -ésima partícula, es fácil ver que la fuerza vertical que actúa sobre

la partícula designada por el índice n es

$$F_y^{(n)} = T_0 \operatorname{sen} \alpha_n - T_0 \operatorname{sen} \alpha_{n-1} \quad (6)$$

Si queremos pensar de manera realista en una cuerda inextensible debemos insistir en ángulos muy chicos, y en ese caso,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha_n &\approx \tan \alpha_n = \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} \\ \operatorname{sen} \alpha_{n-1} &\approx \tan \alpha_{n-1} = \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} \end{aligned} \quad (7)$$

En consecuencia la ecuación de movimiento para una partícula genérica es

$$\boxed{M\ddot{\psi}_n = T_0 \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} - T_0 \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a}} \quad (8)$$

Observación 1 *La ecuación de movimiento 8 relaciona la posición de la n -ésima partícula única y exclusivamente con las posiciones de la partícula $n - 1$ y $n + 1$, a esto se le denomina acoplamiento ó interacción con **primeros vecinos***

2.2. Forma Matricial de las Ecuaciones de Movimiento

La ecuación 8 lleva a la siguiente formna explícita de las ecuaciones de movimiento para las N partículas del sistema,

$$\begin{aligned}
\frac{T_0}{a}\psi_2 - 2\frac{T_0}{a}\psi_1 &= M\ddot{\psi}_1 \\
\frac{T_0}{a}\psi_3 + \frac{T_0}{a}\psi_1 - 2\frac{T_0}{a}\psi_2 &= M\ddot{\psi}_2 \\
&\vdots \\
\frac{T_0}{a}\psi_{n+1} + \frac{T_0}{a}\psi_{n-1} - 2\frac{T_0}{a}\psi_n &= M\ddot{\psi}_n \\
&\vdots \\
\frac{T_0}{a}\psi_N + \frac{T_0}{a}\psi_{N-2} - 2\frac{T_0}{a}\psi_{N-1} &= M\ddot{\psi}_{N-1} \\
\frac{T_0}{a}\psi_{N-1} - 2\frac{T_0}{a}\psi_N &= M\ddot{\psi}_N
\end{aligned} \tag{9}$$

Observando un poco, es facil ver que el lado izquierdo del sistema puede escribirse en forma matricial ($\mathbf{A}\Psi$) donde \mathbf{A} es la matriz tridiagonal

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2\frac{T_0}{a} & \frac{T_0}{a} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{T_0}{a} & -2\frac{T_0}{a} & \frac{T_0}{a} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{T_0}{a} & -2\frac{T_0}{a} & \frac{T_0}{a} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{T_0}{a} & -2\frac{T_0}{a} & \frac{T_0}{a} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \frac{T_0}{a} & -2\frac{T_0}{a} & \frac{T_0}{a} \\ 0 & \dots & & & 0 & \frac{T_0}{a} & -2\frac{T_0}{a} \end{pmatrix} \tag{10}$$

y Ψ es un vector columna cuyas entrada son las funciones $\psi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

2.3. Frecuencias Propias

Hasta ahora hemos logrado resumir la dinámica del sistema en el sistema

$$\ddot{\Psi}(t) = \mathbf{A} \Psi(t) \quad (11)$$

El sistema de ecuaciones al generalizar lo que se hizo para 2 y 3 osciladores, es decir, proponer

$$\Psi = \Psi^{(0)} e^{i\omega t} \quad (12)$$

donde $\Psi^{(0)}$ es un vector de N entradas complejas constantes, el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce al problema espectral

$$\mathbf{A} \Psi^{(0)} = \lambda \Psi^{(0)} \quad (13)$$

donde $\lambda = -M\omega^2$.

\mathbf{A} es simétrica además de diagonal y por tanto es una matriz de *Töeplitz*. Obviamente, la matriz

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \quad (14)$$

también es una matriz de Teplitz tridiagonal. Una matriz tridiagonal de Töeplitz de dimensión $N \times N$ posee N autovalores distintos que se calculan a través de una fórmula estándar, en el caso que estamos discutiendo, [los autovalores son](#)

$$\lambda_k = -2\frac{T_0}{a} + 2\frac{T_0}{a} \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

ó

$$-m\omega_k^2 = -2\frac{T_0}{a} \left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \right] = -4\frac{T_0}{a} \text{sen}^2 \left[\frac{k\pi}{2(N+1)} \right], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

De manera que la cuerda cargada posee N *frecuencias propias* dadas por la fórmula

$$\boxed{\omega_k = 2\sqrt{\frac{T_0}{am}} \text{sen} \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N} \quad (17)$$

es conveniente introducir la notación compacta

$$\boxed{\omega_k = 2\sqrt{\frac{T_0}{am}} \operatorname{sen}\frac{\gamma_k}{2}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{N+1} \quad k = 1, 2, \dots, N} \quad (18)$$

2.4. Encontrando los Autovectores

El teorema espectral implica que a cada frecuencia propia debe asociarse un autovector no nulo y más aún, establece que tales autovectores son ortogonales entre sí.

Para calcular los autovectores vectores $\Psi^{(0)}$ cambiaremos la notación a $\Psi_k^{(0)}$ para recordar que hay un autovector asociado a cada frecuencia propia. Al escoger un k particular e imponer la condición

$$\mathbf{A}\Psi^{(0)} = \lambda_k \Psi_k^{(0)} \quad (19)$$

se obtienen las *ecuaciones en diferencias*

$$\frac{T_0}{a}\psi_{n+1,k}^{(0)} + (m\omega_k^2 - 2\frac{T_0}{a})\psi_{n,k}^{(0)} + \frac{T_0}{a}\psi_{n-1,k}^{(0)} = 0 \quad (20)$$

al sustituir el valor explícito de las frecuencias propias queda

$$\psi_{n+1,k}^{(0)} - 2\cos\gamma_k \psi_{n,k}^{(0)} + \psi_{n-1,k}^{(0)} = 0 \quad (21)$$

donde las cantidades $\psi_{n+1,k}^{(0)}$ son la entradas del vector $\Psi_k^{(0)}$. Para resolver las ecuaciones proponemos el ansatz

$$\psi_{n+1,k}^{(0)} = A_k e^{i(\ell\gamma_k - \delta_k)} \quad A_{\ell,k} \in \Re \quad (22)$$

al sustituir en el lado izquierdo de las ecuaciones en diferencias obtenemos

$$\begin{aligned} & A_k \left(e^{i((\ell+1)\gamma_k - \delta_k)} - 2\cos\gamma_k e^{i(\ell\gamma_k - \delta_k)} + e^{i((\ell-1)\gamma_k - \delta_k)} \right) = \\ & A_k e^{i(\ell\gamma_k - \delta_k)} \left(e^{i\gamma_k} - 2\cos\gamma_k + e^{-i\gamma_k} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

que es una expresión idénticamente nula, de esta manera vemos que el ansatz satisface las ecuaciones en diferencias.

Ahora bien, hay una condición de frontera que con un pequeño abuso de notación podemos poner como

$$\psi_{0,k}^{(0)} = \psi_{N+1,k}^{(0)} = 0 \quad (24)$$

si aplicamos esta condición a la parte real (o imaginaria) de la amplitud,

$$\begin{aligned} A_k \cos(0\gamma_k - \delta_k) &= 0 \\ A_k \cos((N+1)\gamma_k - \delta_k) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

la primera condición implica $\delta_k = \pi/2$ y la segunda, se satisface idénticamente,

$$A_k \cos((N+1)\gamma_k - \pi/2) = A_k \sin[(N+1)\gamma_k] = A_k \sin[(N+1) \frac{k\pi}{N+1}] = 0, \quad (26)$$

en resumen, las componentes de los modos normales tiene la forma (real)

$$\psi_{\ell,k} = \sin \left[\ell \frac{k\pi}{N+1} \right] [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] \quad (27)$$

ó

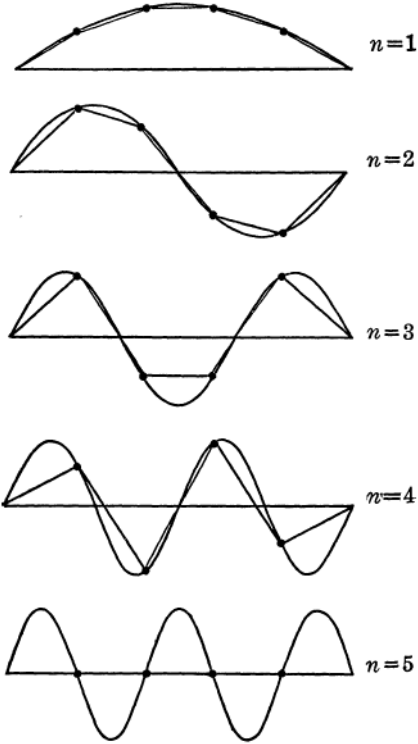
$$\psi_{\ell,k} = A_k \sin \left[\ell \frac{k\pi}{N+1} \right] \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (28)$$

Finalmente, la solución más general posible del problema de los N osciladores acoplados es una combinación lineal (superposición) de los modos, de acuerdo a esto, la forma más general posible de la posición del ℓ -ésimo punto es

$$\boxed{\psi_{\ell}(t) = \sum_k A_k \sin \left[\ell \frac{k\pi}{N+1} \right] \cos(\omega_k t - \delta_k)} \quad (29)$$

en notación vectorial, el movimiento más general posible del sistema tiene la forma

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^N A_k \mathbf{u}_k(t) = \sum_{k=1}^N A_k \begin{pmatrix} \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} 1 \right] \\ \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} 2 \right] \\ \vdots \\ \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} m \right] \\ \vdots \\ \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} (N-1) \right] \\ \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} N \right] \end{pmatrix} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (30)$$



En la gráfica vemos los modos normales de una cuerda cargada con $N = 4$ partículas.

Es interesante notar que como en general

$$\psi_{\ell,k} \propto \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} \ell \right]$$

ocurre que si ponemos $k + N + 1$ queda

$$\begin{aligned} \psi_{\ell,k+N+1} &\propto \text{sen} \left[\frac{(k+N+1)\pi}{N+1} \ell \right] = \\ &= \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} \ell + \ell\pi \right] = \\ &= (-1)^\ell \text{sen} \left[\frac{k\pi}{N+1} \ell \right] \end{aligned}$$

esta cualidad de periodicidad -a menso de un signo- nos hace ver claramente por que solo hay N modos normales.

3. El límite del continuo. $N \rightarrow \infty$

El siguiente paso en nuestro estudio de los modos normales es bastante natural, tomar el límite en que el número de partículas crece al infinito mientras la separación entre ellas tiende a cero y obtener como resultado, un modelo para las vibraciones transversales de una cuerda.

3.1. Ecuación de Movimiento

Con este fin retomemos las ecuaciones en diferencias que definen la dinámica de las oscilaciones transversales de las masas interactuantes en la “cuerda cargada”

$$M\ddot{\psi}_n = T_0 \frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{a}, \quad (31)$$

la primera consideración que haremos será tomar el índice n y pensarlo como la coordenada (x_n) de la partícula mientras al mismo tiempo cambiamos la nomenclatura $\psi_n(t)$ por una que haga pensar en una función de dos variables,

$$\psi_n(t) \rightarrow u(x_n, t). \quad (32)$$

La segunda consideración que haremos será dar masa a la cuerda a través de una densidad por unidad de longitud (μ) y sustituiremos las masas por pequeños trocitos de cuerda de longitud h , de esta manera, las ecuaciones de movimiento para los trocitos de cuerda toman la forma

$$\mu h \ddot{u}(x_n, t) = T_0 \frac{u(x_{n+1}, t) + u(x_{n-1}, t) - 2u(x_n, t)}{a} \quad (33)$$

ahora tomamos la distancia entre los trocitos de cuerda igual a h y quedamos con

$$\frac{\mu}{T_0} \ddot{u}(x_n, t) = \frac{u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t)}{h^2} \quad (34)$$

donde hemos sustituido $x_{n\pm 1}$ por $x_n \pm h$

A continuación notemos los desarrollos de Taylor

$$u(x_n \pm h, t) = u(x_n) \pm \frac{\partial u(x_n, t)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} h^2 + \dots \quad (35)$$

de los que deducimos,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n)}{h^2} + \dots \quad (36)$$

De acuerdo a esta deducción, el lado derecho de la ecuación 34 es una buena aproximación a $\partial_x^2 u(x_n, t)$ si sustituimos esta aproximación concluimos que

$$\frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (37)$$

finalmente, notemos que cuando h se hace más y más pequeño, el número N de partículas crece al infinito con la condición¹ $(N+1)h = L$, de esta manera, podemos olvidar el índice n y tomar el límite del continuo para quedar con el siguiente modelo para la *cuerda vibrante*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}} \quad (38)$$

en el caso que estamos estudiando, la ecuación debe ser complementada con las *condiciones de frontera fija*

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0. \quad (39)$$

3.2. Modos normales

Sabemos que en el caso de la cuerda cargada y tomando la distancia entre masas como h , la oscilación vertical de la ℓ -ésima masa en el p -ésimo modo normal es

$$\psi_{\ell, n}(t) \propto \sin \left[\frac{p\pi\ell}{N+1} \right] \cos(\omega_p t - \phi_k) \quad (40)$$

¹es la longitud de la cuerda o la distancia entre las paredes a las que la cuerda se encuentra fija

con

$$\omega_p = 2\sqrt{\frac{T_0}{hm}} \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi}{2(N+1)} \right) \quad (41)$$

introduzcamos unas pequeñas manipulaciones,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left[\frac{p\pi\ell}{N+1} \right] &= \operatorname{sen} \left[\frac{p\pi\ell h}{(N+1)h} \right] = \\ &= \operatorname{sen} \left[\frac{p\pi\ell h}{L} \right] = \\ &= \operatorname{sen} \left[\frac{p\pi x}{L} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

y

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\sqrt{\frac{T_0}{hm}} \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi}{2(N+1)} \right) = \\ &= 2\sqrt{\frac{T_0}{h^2 m/h}} \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi h}{2(N+1)h} \right) = \\ &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{T_0}{m/h}} \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi h}{2(N+1)h} \right) = \\ &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi h}{2L} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

cuando h se hace muy chico

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi h}{2L} \right) \approx = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \frac{p\pi h}{2L} = \\ &= \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \frac{p\pi}{L} = \frac{v}{L} \pi p = p\omega_o, \end{aligned} \quad (44)$$

con

$$\omega_0 = \frac{v}{L} \pi, \quad (45)$$

recordando que en este límite $\psi_{\ell,p} = u(x_\ell, t) \rightarrow u_p(x, t)$, concluimos que el p -ésimo modo normal de la cuerda vibrante tiene la forma

$$u_p(x, t) = \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi x}{L} \right) \cos(p\omega_0 t - \phi_k). \quad (46)$$

Una identidad trigonométrica estándar permite escribir

$$u_p(x, t) = \frac{1}{2} \left[\text{sen} \left(\frac{p\pi x}{L} - p\omega_0 t + \phi_p \right) + \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{L} + p\omega_0 t - \phi_p \right) \right]. \quad (47)$$

En las próximas notas discutiremos la interpretación tanto de la ecuación 38 como de sus soluciones en modos normales (fórmula 46) y finalmente de la aplicación del principio de superposición para expresar el movimiento más general posible de la cuerda vibrante en una de las siguientes formas

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{L} \right) \cos(p\omega_0 t - \phi_k) \quad (48)$$

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} [a_p \cos(p\omega_0 t) + b_p \sin(p\omega_0 t)] \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{L} \right) \quad (49)$$