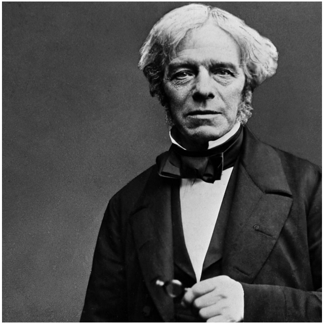
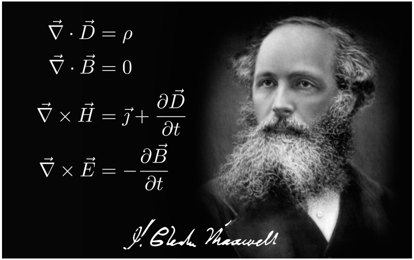
Ondas y Óptica

Mario I. Caicedo

16 de junio de 2021

Faraday y Maxwell
El campo electromagnético





¿Como conocemos los campos?

- Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se manifiestan por su acción sobre las cargas eléctricas.
- Los campos quedan definidos por la ecuación de fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$

- El campo eléctrico es el único en entregar energía a las cargas.
- Cargas distribuídas por una densidad ρ poseen una corriente asociada $\vec{J} = \rho\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es el campo de velocidades de las cargas.
- La conservación de la carga eléctrica se expresa en la ecuación de continuidad:

$$\partial_t \rho + div \vec{J} = 0$$

La ventaja de pensar en campos

- Cuando pensamos en campos podemos olvidar la idea (terriblemente fea) de acción a distancia.
- Los campos son objetos locales.
- Los campos obedecen a una dinámica que permite calcularlos a partir de mediciones en ciertas regiones (ecuaciones diferenciales en derivadas parciales + condiciones de contorno e iniciales)
- En el caso de la electrodinámica, la descripción "moderna" es el resultado de los trabajos de Faraday y Maxwell (Tarea: investigue algo de historia al respecto y establezca una linea de tiempo que le diga que ocurría en el mundo cuando estos caballeros trabajaban arduamente)

Ecuaciones de Maxwell en Forma Integral

En sus cursos de física básica, aprendió que el electromagnetismo en ausencia de materia se describe por las ecuaciones

$$\oint_{\partial V} \vec{E}.\hat{n}\, ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho\, dv \qquad \text{Ley de Gauss}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B}.\hat{n}\, ds = 0 \qquad \text{Ley de Gauss magnética}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}.\hat{n} ds \qquad \text{Ley de inducción de Faraday}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J}.\hat{n} ds + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E}.\hat{n} ds \qquad \text{Ley de Ampere-Maxwel}$$

¿Cuál es la contribución fundamental de Maxwell?

Ecuaciones de Maxwell en Forma Diferencial

El uso juicioso de los teoremas de Gauss y Stokes permite expresar las ecuaciones de Maxwell en la forma

Ley de Gauss	$div\vec{E} = \rho/\epsilon_0$
Ley de Gauss para $\vec{B}$	$div\vec{B} = 0$
Ley de Faraday	$rot\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$
Ley de Ampere-Maxwell	$rot\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E}$

Campos Electromagnéticos en la Materia

En presencia de un medio contínuo (un dieléctrico, un conductor, etc) un sistema electromagnético se describe a través de un campo escalar, y siete campos vectoriales, a saber:

- La densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{x}, t)$.
- La densidad de corriente eléctrica $\vec{J}(\vec{x}, t)$.
- La polarización $\vec{P}(\vec{x}, t)$.
- La magnetización $\vec{M}(\vec{x}, t)$.
- El desplazamiento eléctrico $\vec{D}(\vec{x}, t)$.
- El campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$.
- El campo magnético $\vec{H}(\vec{x}, t)$.
- La inducción magnética. $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

Ecuaciones de Maxwell en Presencia de Materia

La dinámica de este conjunto de campos se describe parcialmente por las ecuaciones de Maxwell:

$$
\begin{aligned}
div\,\vec{D} &= \rho && (1)\\
div\,\vec{B} &= 0 && (2)\\
rot\,\vec{E} &= -\partial_t \vec{B} && (3)\\
rot\,\vec{H} &= \vec{J} + \partial_t \vec{D} && (4)
\end{aligned}
$$

que deben ser complementadas por las definiciones

$$
\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P} && (5)\\
\vec{H} &= \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B} - \vec{M} && (6)
\end{aligned}
$$

Es posible encontrar un conjunto de relaciones empíricas que relacionan los valores del desplazamiento eléctrico y del campo magnético y en términos del campo eléctrico y la inducción magnética

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}) \\ \vec{H} &= \vec{H}(\vec{B}) \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Estas relaciones son denominadas *relaciones constitutivas* y desde el punto de vista matemático son absolutamente necesarias para asegurar que las ecuaciones de Maxwell puedan ser resueltas para una distribución de cargas y corrientes en un material dado.
La descripción completa de un sistema electromagnético requiere de la especificación de la interacción entre los campos y las cargas y corrientes eléctricas que está dada por la fuerza de Lorentz

$$\mathsf{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times B) \tag{8}$$

Predicción de las Ondas Electromagnéticas.

En esta sección mostraremos que las ecuaciones de Maxwell implican la existencia de ondas electromagnéticas.

- Utilizaremos dos técnicas para mostrar el resultado
  - Construcción de ecuaciones de ondas a partir de las ecuaciones de Maxwell (técnica estándar).
  - Técnica **no** estándar una solución (ondulatoria[1]) de la forma $\mathcal{E}\, e^{ik_i x^i - \omega t}$, a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.
- Mostraremos que las ondas em son ondas transversales con velocidad de fase $c \approx 3 \times 10^8$ m/s
- **Observación** sin una prueba experimental, lo anterior se reuce a ser un lindo ejercicio de matemáticas. TAREA; investigar la **evidencia/demostración** experimental de la predicción.

[1] $\mathcal{E}$ es el vector de polarización

Ecuaciones de Onda Electromagnéticas I

Teorema

Las ecuaciones de Maxwell en el vacio ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$) *y en ausencia de cargas y corrientes implican la existencia de ondas electromagnéticas*

Ondas Electromagnéticas I

Para demostrar el teorema comenzaremos por escribir las ecuaciones de Maxwell incorporando las hipótesis:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \tag{9}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \partial_t \vec{E} \tag{11}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{12}$$

Dos apuntes de matemáticas

Para las deducciones que siguen utilizaremos:

- Hipótesis de diferenciabilidad a todo orden, que nos permitiráen asegurar que $\nabla(\vec{\partial_t}\vec{B}) = \partial_t(\vec{\nabla}\vec{B})$
- La identidad (solo válida en coordenadas cartesianas)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \nabla(\vec{\nabla}.\vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}\,.$$

Si tomamos el rot de la ley de Faraday, ecuación (12) y usamos la ley de Ampere-Maxwell ecuación (11) se obtiene la ecuación

$$\nabla(\vec{\nabla}.(\vec{E})) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0\, \varepsilon_0\, \partial_t^2 \vec{E} \tag{13}$$

Tomando en cuenta la ley de Gauss y el hecho de que no hay cargas, el primer término del lado izquierdo de la ecuación (13) se anula y obtenemos finalmente:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \tag{14}$$

Realizando operaciones análogas en la ecuación (11) se obtiene similarmente

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial_t^2 \vec{B} = 0 \qquad (15)$$

donde se ha utilizado que el campo magnético es solenoidal $(div(\vec{B}) = 0)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\nabla^2 \vec{E} - \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial_t^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial_t^2 \vec{B} = 0\end{array}} \tag{16}$$

Ciertamente las ecuaciones (14) y (15) son ecuaciones de onda para los campos electrico y magnético. La velocidad de fase de estas ondas es claramente:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0}} \tag{17}$$

Si bien hemos encontrado ecuaciones de onda, falta discutir algunas propiedades que deben satisfacer las soluciones ondulatorias de las ecuaciones de Maxwell.

Ondas Electromagnéticas II

Otra técnica para estudiar las ondas electromagnéticas consiste en proponer soluciones armónicas a las ecuaciones de Maxwell.
Esta técnica es similar a la que utilizamos cuando estudiábamos los osciladores acoplados.

Pretendemos resolver las ecuaciones de Maxwell en el vacio y sin fuentes. La linealidad de las ecuaciones sugiere la posibilidad de proponer soluciones de la forma

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \, e^{i\phi_1} \,, \quad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_0 \, e^{i\phi_2} \tag{18}$$

en donde $\vec{\mathcal{E}}_0$ y $\vec{\mathcal{B}}_0$ son vectores de entradas complejas denominados *vectores de polarización*, $\phi_i = \vec{k}_i \vec{x} - \omega_i \, t$, $i = 1, 2$ y los vectores de onda $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ y las frecuencias angulares son -en principio diferentes-

Proposición

$\forall \vec{\mathcal{A}}$ *constante de entradas complejas*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\mathcal{A}} e^{i\phi_i(\vec{x},t)}\right] = -i\omega_i \vec{\mathcal{A}} e^{i\phi_i(\vec{x},t)}$$

$$div\left[\vec{\mathcal{A}} e^{i\phi_i(\vec{x},t)}\right] = i\vec{k}_i.\vec{\mathcal{A}} e^{i\phi_i(\vec{x},t)}$$

$$rot\left[\vec{\mathcal{A}} e^{i\phi_i(\vec{x},t)}\right] = i\vec{k}_i \times \vec{\mathcal{A}} e^{i\phi_i(\vec{x},t)}$$

Al usar el ansäzt de ondas planas monocromáticas y la proposición anterior, las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma

$$\vec{k}_1 . \vec{\mathcal{E}}_0 = 0 \tag{19}$$

$$\vec{k}_2 . \vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \tag{20}$$

$$\vec{k}_2 \times \vec{\mathcal{B}}_0 \, e^{i\phi_2} = -\varepsilon_0 \, \mu_0 \, \omega_1 \, \vec{\mathcal{E}}_0 \, e^{i\phi_1} \tag{21}$$

$$\vec{k}_1 \times \vec{\mathcal{E}}_0 \, e^{i\phi_1} = \omega_2 \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i\phi_2} \tag{22}$$

de donde se deduce inmediatamente (**ejercicio**) que para obtener una solución, los campos eléctrico y magnético deben tener la misma dependencia espacio-temporal, es decir

$$\phi_1(\vec{r}, t) = \phi_2(\vec{r}, t) \tag{23}$$

En conclusión, las ecuaciones de Maxwell implican que

- Las frecuencias y vectores de onda han de ser iguales, es decir

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{k}_2 = \vec{k} \\ \omega_1 &= \omega_2 = \omega \end{aligned} \tag{24}$$

- Adicionalmente, las siguientes relaciones entre los vectores de polarización electrico ($\vec{\mathcal{E}}_0$) y magnético ($\vec{\mathcal{B}}_0$) y el vector de propagación $\vec{k}$ han de satisfacerse identicamente.

$$\begin{aligned} \vec{k}.\vec{\mathcal{E}}_0 &= 0 \\ \vec{k}.\vec{\mathcal{B}}_0 &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{\mathcal{B}}_0 &= -\varepsilon_0\, \mu_0\, \omega\, \vec{\mathcal{E}}_0 \\ \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0 &= \omega\, \vec{\mathcal{B}}_0 \end{aligned} \tag{25}$$

Hasta este punto hemos sido capaces de deducir la siguiente interpretación geométrica válida para las ondas electromagnéticas propagándose en el vacio

- Las polarizaciones (y por lo tanto los campos) son ortogonales a la dirección de propagación[2], es decir

$$\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{k} \qquad \vec{\mathcal{B}}_0 \perp \vec{k} \quad . \tag{26}$$

- Los campos eléctrico y magnético son ortogonales entre sí, y de hecho, la polarización magnética $\mathcal{B}_0$ puede calcularse facilmente a partir de la eléctrica a través de la fórmula

$$\vec{\mathcal{B}}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{\mathcal{E}}_0 \quad . \tag{27}$$

[2] como ya hemos aprendido en este curso, técnicamente se dice que la propagación es transversal

Para encontrar la relación de dispersión multiplicamos (vectorialmente) la igualdad $\vec{k}\times\vec{\mathcal{B}}_0 = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\omega\,\vec{\mathcal{E}}_0$ a la izquierda por el vector de propagación,

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{\mathcal{B}}_0) = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}_0$$

y de acá, al utilizar la fórmula general para el triple producto vectorial

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\,\vec{C}$$

obtenemos

$$(\vec{k}.\vec{\mathcal{B}}_0)\,\vec{k} - k^2\,\vec{\mathcal{B}}_0 = \varepsilon_0\,\mu_0\,\omega^2\,\vec{\mathcal{B}}_0 \quad , \tag{28}$$

el primer término del lado izquierdo es nulo debido a la transversalidad así, que en definitiva hemos obtenido

$$\boxed{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\vec{\mathcal{B}}_0 = 0}$$

En resumen,

- Hemos demostrrado que la relación de dispersión es

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

- La relación de dispersión nos permite expresar el vector de polarización magnético en términos del eléctrico en la forma alternativa

$$\vec{\mathcal{B}}_0 = \frac{\hat{k}}{c} \times \vec{\mathcal{E}}_0 \quad , \tag{29}$$

donde $\hat{k}$ es el vector unitario paralelo al vector de onda $\vec{k}$.

Si bien los campos complejos $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$ y $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$ son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, no son soluciones físicas. Las soluciones físicas se obtienen tomando la parte real o imaginaria de las soluciones complejas. Así, por ejemplo, en el primer caso, las soluciones físicas están dadas por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re e\left\{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\right\} \tag{30}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \Re e\left\{\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)\right\} \quad , \tag{31}$$

En cualquier operación lineal (suma por ejemplo) entre los campos, podemos utilizar los campos complejos para luego encontrar el resultado físico tomando la parte real o imaginaria (según halla sido la escogencia a priori).

Las ecuaciones de Maxwell no son capaces de predecir la dirección de propagación (el vector de onda), esta debe ser introducida como una condición externa al problema.

Es muy interesante destacar el hecho de que -para los campos físicos- toda la información de polarización (se decir, los vectores de polarización) está codificada en solo tres números uno de ellos la fase del campo eléctrico (ya que el magnético está en fase con $\vec{E}$).

Olvidando la fase, es claro que en principio y en vista de que los dos campos de interés son vectoriales deberían hacer falta $2 \times 3 = 6$ números para especificar las componentes de ambos campos. Sin embargo, la igualdad (27) que permite expresar $\mathcal{B}_0$ en función de $\mathcal{E}_0$ y de la dirección de propagación (que suponemos dada a priori) reduce los números independientes a las tres componentes de E_0 que a su vez se reducen a solo dos componentes ya que $\mathcal{E}_0$ es perpendicular al vector de propagación.

Ejemplo

Si consideramos una onda plana monocromática que viaja en la dirección del eje z y usamos notación matricial podemos escribir

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

lo que implica que necesariamente la forma del campo de polarización eléctrico tiene que ser

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

en donde E_{0x} y E_{0y} son constantes arbitrarias en términos de las cuales es posible calcular las componentes de B_0.

Finalmente, es menester recordar que la linealidad de las ecuaciones permite encontrar las soluciones generales de las ecuaciones de Maxwell en términos de la suma de modos armónicos, y es por ello que solo nos hemos preocupado de las ondas planas monocromáticas.

Introducción

- En nuestro estudio de la cuerda vibrante y la linea de transmisión estudiamos el tema de almacenamiento y transporte de energía
- Se introdujo un vector que describe el transporte de energía.
- A continuación presentaremos brevemente la generalización al caso eletromagnético

Densidad de Energía y vector de Poynting

- Densidades de energía eléctrica y magnética,

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \qquad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- u_E y u_B permiten dar definiciones a la capacitancia e inductancia.
- Densidad de energía electromagnética es

$$u = u_E + u_B$$

- Vector de Poynting

$$S = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Conservación de la Energía

- Al considerar la potencia que el campo electromagnético entrega a un conjunto de corrientes,

$$\frac{dE}{dt} = \vec{J}.\vec{E}$$

- Se encuentra la ley de conservación de la energía expresada como

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + div(\vec{S}) = -\vec{J}.\vec{E}}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E}.\hat{n}\, ds = 4\pi \int_V \rho\, dv$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B}.\hat{n}\, ds = 0$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}.\hat{n} ds$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{J}.\hat{n} ds + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}.\hat{n} ds$$

Ley de Gauss	$div\vec{E} = 4\pi\epsilon_0$
Ley de Gauss para $\vec{B}$	$div\vec{B} = 0$
Ley de Faraday	$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$
Ley de Ampere-Maxwell	$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}$

- $$u_E = \frac{1}{8\pi} E^2 \qquad u_B = \frac{1}{8\pi} B^2$$
- u_E y u_B permiten dar definiciones a la capacitancia e inductancias.
- Densidad de energía electromagnética es

$$u = u_E + u_B$$

- Vector de Poynting

$$S = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$$