

Interferencia

Mario Caicedo

Junio, 2021

Índice

1. Interferencia y Difracción	1
2. Intensidad	2
3. Interferencia de 2 fuentes coherentes	2
3.1. Superposición de dos ondas de la misma frecuencia	3
3.1.1. Propagación a lo largo de una misma recta	3
3.1.2. Fuentes puntuales de ondas esféricas	6
3.2. El Experimento de Young	7
4. Interferencia de N fuentes coherentes	9
5. Interferencia en películas delgadas	12

1. Interferencia y Difracción

Se presentan dos conceptos importantes en óptica ondulatoria: interferencia y difracción.

2. Intensidad

Definición 1 *La intensidad I asociada a una onda es la potencia entregada por la onda por unidad de área.*

El ejemplo más claro de intensidad es el vector de Poynting electromagnético, en este caso, la potencia entregada a una superficie A está dada por

$$P(t) = \int_A \vec{S} \cdot \hat{n} d^2x \quad (1)$$

Cuando la onda es periódica el concepto de potencia media adquiere gran importancia. En este caso, la potencia media es

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt P(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_S \vec{S} \cdot \hat{n} d^2x, \quad (2)$$

donde T es el período de la onda. Reordenando un poco,

$$\langle P \rangle = \int_S \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \vec{S} \right] \cdot \hat{n} d^2x = \int_S \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} d^2x \quad (3)$$

Esta última fórmula muestra que -aparte de posibles factores geométricos- la intensidad media es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

En estas notas estaremos interesados en la intensidad media producida por la superposición de ondas.

3. Interferencia de 2 fuentes coherentes

El concepto de *interferencia* es fundamental en el estudio de la física ondulatoria.

Siempre que exista linealidad, la interacción entre dos o más ondas ocurre por superposición. A veces ocurre que la superposición produce patrones espaciales de “iluminación” medibles y

es en ese caso que solemos hablar de *interferencia*, para haya interferencia en el sentido en que estamos hablando debe ocurrir que la superposición de una o más ondas que coinciden en un punto espacial \vec{r} muestre una intensidad media constante en \vec{r} . La condición para ello: que las fuentes sean *coherentes*.

La *coherencia* de las fuentes es pues una condición esencial para que se forme un patrón de interferencia. Es por tanto importante definirla.

Definición 2 *Dos fuentes monocromáticas son coherentes si mantienen una diferencia de fase temporal constante.*

Para limitar un poco ciertas dificultades matemáticas que no se relacionan directamente con el fenómeno que nos ocupa, nos limitaremos a ondas escalares como por ejemplo ondas de sonido, oscilaciones transversales en cuerdas, etc.

3.1. Superposición de dos ondas de la misma frecuencia

3.1.1. Propagación a lo largo de una misma recta

Comencemos estudiando la superposición de dos ondas de la misma frecuencia que se propagan a lo largo del eje x , usaremos la notación compleja por la enorme cantidad de ventajas que nos ofrece,

$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) &= A_1(x) e^{i(\phi_1(x) - \omega t)} \\ \psi_2(x, t) &= A_2(x) e^{i(\phi_2(x) - \omega t)}\end{aligned}\tag{4}$$

Al superponer,

$$\Psi(x, t) = A_1(x) e^{i(\phi_1(x) - \omega t)} + A_2(x) e^{i(\phi_2(x) - \omega t)}\tag{5}$$

Al utilizar los conceptos discutidos en la sección anterior, la intensidad instantánea es

$$\begin{aligned}
I \propto \Psi^* \Psi &= [A_1(x) e^{i(\phi_1(x)-\omega t)} + A_2(x) e^{i(\phi_2(x)-\omega t)}]^* [A_1(x) e^{i(\phi_1(x)-\omega t)} + A_2(x) e^{i(\phi_2(x)-\omega t)}] = \\
&= A_1(x)^2 + A_2(x)^2 + A_1(x)A_2(x) [e^{-i(\phi_1(x)-\omega t)} e^{i(\phi_2(x)-\omega t)} + e^{-i(\phi_2(x)-\omega t)} e^{i(\phi_1(x)-\omega t)}] = \\
&= A_1(x)^2 + A_2(x)^2 + A_1(x)A_2(x) [e^{i(\phi_2(x)-\phi_1(x))} + e^{-i(\phi_2(x)-\phi_1(x))}]
\end{aligned} \tag{6}$$

Este resultado es independiente del tiempo, lo que claramente depende de que las dos ondas son coherentes (tienen la misma frecuencia)

Al promediar en el tiempo, la intensidad media queda como

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos \Delta \tag{7}$$

Acabamos de obtener nuestro primer resultado fundamental, retirando los símbolos de promedio porque de ahora en adelante, siempre hablaremos de medias temporales, la intensidad resultante de la superposición de dos ondas coherentes que se propagan a lo largo de la misma recta es

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta} \tag{8}$$

donde, la diferencia de fase es

$$\Delta = \phi_2(x) - \phi_1(x). \tag{9}$$

al sustituir la forma de la fase de ondas armónicas,

$$\Delta = k \delta x. \tag{10}$$

donde δx es la diferencia en recorrido espacial entre cada fuente y el punto de observación.

La fórmula 8 es sumamente interesante, de acuerdo a ella, a lo largo de todo el eje de propagación de las ondas existen puntos con máximos y mínimos de intensidad media. Los

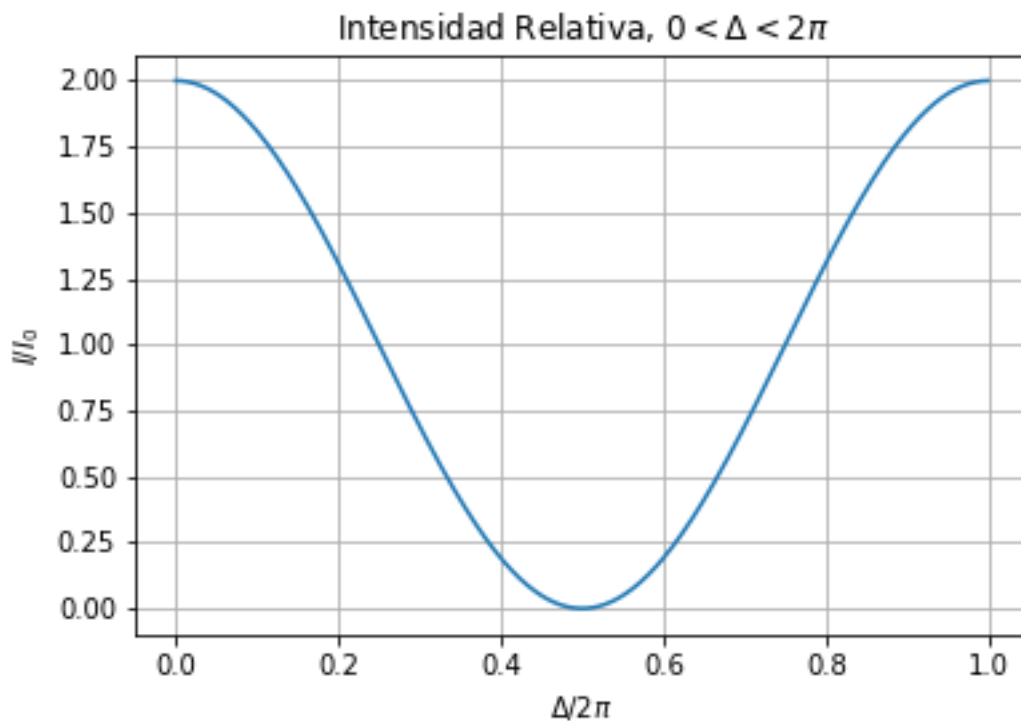


Figura 1: Intensidad resultante de la superposición de dos ondas monocromáticas de la misma frecuencia.

máximos ocurren en todos los puntos en que la diferencia de fase sea un múltiplo de 2π , mientras que los mínimos ocurren cuando $\Delta = (2n + 1)\pi$,

$$\begin{aligned} \text{máximos} \quad k\delta x &= 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \text{mínimos} \quad k\delta x &= (2n + 1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \tag{11}$$

recordando que $k = 2\pi/\lambda$

$$\begin{aligned} \text{máximos} \quad \delta x &= n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \text{mínimos} \quad \delta x &= (n + 1/2)\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{12}$$

Problema 1 ¿Qué ocurre si las frecuencias son distintas?

3.1.2. Fuentes puntuales de ondas esféricas

En este segundo caso, la amplitud de cada onda es

$$\begin{aligned}\psi_1(r_1, t) &= \frac{I_1}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \\ \psi_1(r_2, t) &= \frac{I_1}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)}\end{aligned}\quad (13)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias entre el punto de detección y los centros emisores (fuentes) e I_1, I_2 son las intensidades medias de cada fuente por separado a distancia $r = 1$ de la fuente.

Algo de reflexión deja evidente que el análisis de la intensidad es idéntico al realizado en la sección anterior y por lo tanto,

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta} \quad (14)$$

donde, en este caso, la diferencia de fase es

$$\Delta = k(r_2 - r_1) = k \delta r. \quad (15)$$

donde ahora, δr es la diferencia de distancias entre cada fuente y el punto de observación.

Una vez más, la fórmula 14 pone en evidencia que existen lugares geométricos en donde encontramos máximos y mínimos de intensidad media, vea la figura 2.

$$\begin{aligned}\text{máximos} \quad & k\delta r = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \text{mínimos} \quad & k\delta r = (2n + 1)\pi, \quad 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\quad (16)$$

o en términos de longitudes de onda,

$$\begin{aligned}\text{máximos} \quad & \delta r = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \text{mínimos} \quad & \delta r = (n + 1/2)\lambda, \quad 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\quad (17)$$



Figura 2: Dos fuentes coherentes emiten ondas en una laguna, note las zonas de interfeencia destructiva

3.2. El Experimento de Young

La descripción esquemática del experimento de Young se muestra en la figura (3). Las dos perforaciones en la pantalla izquierda, separadas por una distancia d , se comportan exactamente como dos fuentes puntuales coherentes S_1 y S_2 . Debido a la distancia entre las rendijas y la pantalla, los rayos que salen de las fuentes y llegan al punto P son prácticamnte paralelos y por tanto, la intensidad

$$I = 2I(1 + \cos\Delta) = 4I \cos^2(\Delta/2) \quad (18)$$

la diferencia de fase entre las ondas correspondientes es ¹

$$\Delta = k(R_2 - R_1) \approx \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta) \quad (19)$$

¹Nótese que el triángulo S_1BP NO es isósceles.

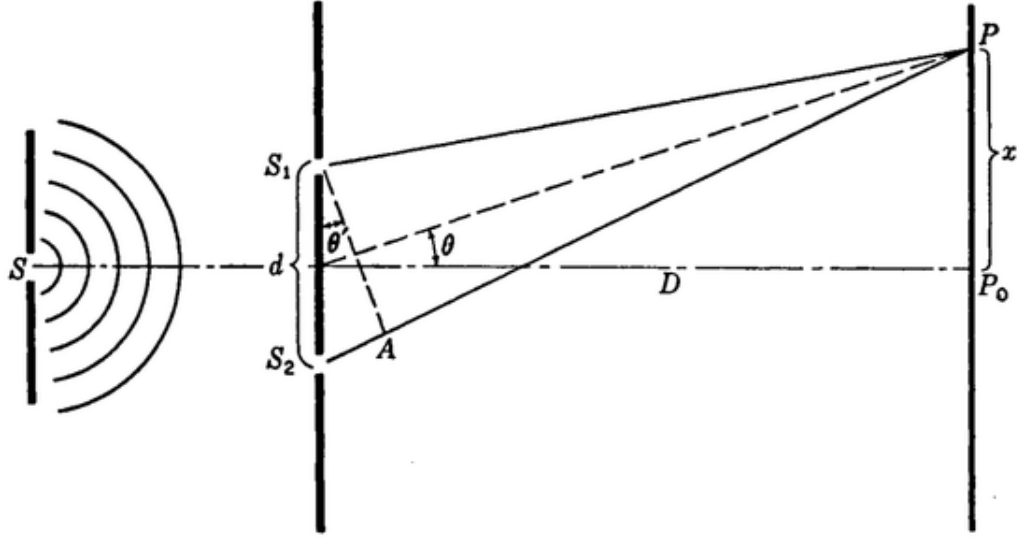


Figura 3: Esquemático del experimento de Young

llamando δr a la diferencia de camino,

$$\delta r = r_2 - r_1 \approx d \sin(\theta), \quad (20)$$

queda claro que toda vez que la diferencia de camino es un múltiplo de la longitud de onda λ , la interferencia en P es constructiva, y se observa un máximo. Por otra parte, cuando esta diferencia de camino es un múltiplo semientero de la longitud de onda, entonces la interferencia en P es destructiva, y se observa un mínimo, es decir,

$$d \sin(\theta) = m\lambda, \quad MAX \quad (21)$$

$$d \sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda, \quad MIN \quad (22)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (23)$$

Dada la condición experimental $D \gg d$, se tiene entonces que

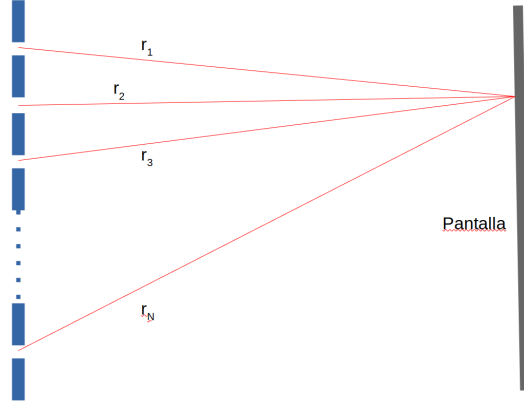


Figura 4: N fuentes coherentes

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{x}{D} \quad (24)$$

de donde la posición x de los máximos y mínimos en la pantalla derecha viene dada por

$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{\lambda D}{d} m \\ x_{min} &= \frac{\lambda D}{d} \left(m + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nótese que la separación entre dos franjas brillantes consecutivas es

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d} \quad (26)$$

esta fórmula es la base de un método de medición longitudes de onda

4. Interferencia de N fuentes coherentes

En la figura (4) tenemos ahora la representación de N fuentes coherentes. Como hemos visto en la sección anterior, el “campo eléctrico” proveniente de la p -ésima fuente medido en la

pantalla es

$$\hat{E}_{p-1}(\mathbf{r}_1, t) = \mathcal{E}_o e^{i(kr_p - \omega t)} \quad (27)$$

Si consideramos dos fuentes consecutivas,

$$\begin{aligned} \hat{E}_{p-1}(\mathbf{r}_p, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_p - \omega t)} \\ \hat{E}_p(\mathbf{r}_{p+1}, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_{p+1} - \omega t)} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_p - \omega t + \phi)} \end{aligned} \quad (28)$$

donde la diferencia de fase es

$$\phi = k(r_{p+1} - r_p) \quad (29)$$

Si la distancia entre las rendijas y la pantalla es suficientemente grande, la diferencia de camino $d \sin \theta$ se mantiene prácticamente igual para todo par de aberturas consecutivas idéntica. y lo mismo ocurre con la diferencia de fase,

$$\phi = k(r_{p+1} - r_p) = k d \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta, \quad (30)$$

en consecuencia, si medimos la diferencia de fase en relación a la primera abertura,

$$k(r_p - r_1) = k[(r_p - r_{p-1}) + (r_{p-1} - r_{p-2}) + \dots + (r_2 - r_1)] = (p-1)\phi \quad (31)$$

Este resultado es muy útil para encontrar la amplitud total en el punto de medición, ya que para ello solo hace falta superponer

$$\begin{aligned} \hat{E}_0(\mathbf{r}_1, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t)} \\ \hat{E}_1(\mathbf{r}_2, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_2 - \omega t)} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t + (r_2 - r_1))} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t + \phi)} \\ \hat{E}_2(\mathbf{r}_3, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_3 - \omega t)} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t + (r_3 - r_1))} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t + 2\phi)} \\ \hat{E}_3(\mathbf{r}_4, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_4 - \omega t)} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t + 3\phi)} \\ &\vdots \\ \hat{E}_{N-2}(\mathbf{r}_{N-1}, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_{N-1} - \omega t + (N-2)\phi)} \\ \hat{E}_{N-1}(\mathbf{r}_N, t) &= \mathcal{E}_o e^{i(kr_N - \omega t + (N-1)\phi)} \end{aligned} \quad (32)$$

y por lo tanto, el campo total es

$$\hat{E}_{tot} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t)} [1 + e^{i\phi} + e^{i2\phi} + e^{i3\phi} + \dots] \quad (33)$$

La suma dentro del corchete es la de la sucesión geométrica

$$1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \dots + \beta^N = \frac{\beta^N - 1}{\beta - 1} \quad (34)$$

sustituyendo, el campo total queda como

$$\hat{E}_{tot} = \hat{E}_{tot} = \mathcal{E}_o e^{i(kr_1 - \omega t)} \left[\frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} \right] \quad (35)$$

que en función de la identidad $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ puede reescribirse como

$$\hat{E}_{tot} = \mathcal{E}_o \left[\frac{\sin(N\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \right] e^{i[kr_1 - \omega t + (N-1)\frac{\phi}{2}]} \quad (36)$$

Para hallar la intensidad media basta con encontrar el cuadrado de la magnitud de esta cantidad compleja, es decir

$$I_{prom} \propto \hat{E}_{tot}^* \hat{E}_{tot} , \quad (37)$$

en definitiva,

$$I_{prom} = I = I_o \left[\frac{\sin(N\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \right]^2 \quad (38)$$

Para terminar, veamos que esta expresión se reduce a la fórmula (18) del caso de $N = 2$ fuentes coherentes. Hacemos $N = 2$ en la expresión (38) y se tiene

$$I = I_o \left[\frac{\sin(2\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \right]^2 \quad (39)$$

utilizamos el hecho de que $\sin[2(\frac{\phi}{2})] = 2\sin(\frac{\phi}{2})\cos(\frac{\phi}{2})$ y queda

$$I = 4I_o \cos^2 \left[\frac{\phi}{2} \right] \quad (40)$$

que es el resultado esperado.

5. Interferencia en películas delgadas

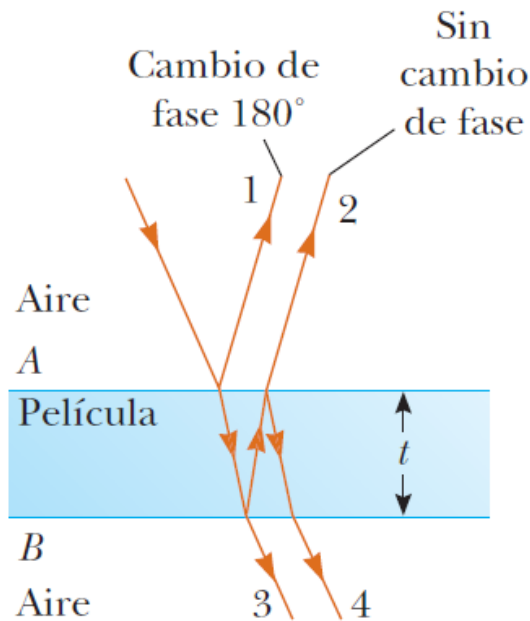


Figura 5: Interferencia en película delgada de índice refractivo n

La figura (5) representa una película delgada de un material con índice de refracción n y espesor t flanqueado encima y debajo por aire ($n \approx 1$). Este es el caso, por ejemplo, de la delgada membrana de jabón que conforma una burbuja que flota en la sala de baño. La figura también muestra un haz de luz monocromática que incide en la membrana de forma (quasi)normal, así

como los rayos transmitidos y reflejados consecuencia de la interacción física en las interfaces. Hagamos algunas observaciones pertinentes:

- La hipótesis de incidencia quasi-normal permite suponer que el camino recorrido por la luz al entrar y salir dentro de la película es $2t$
- La longitud de onda en un medio con índice de refracción n es $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$
- Una onda que viaja en un medio con índice de refracción n_1 hacia otro con n_2 experimenta un cambio de fase de 180° en la reflexión cuando $n_2 > n_1$, y ningún cambio de fase en la reflexión si $n_2 < n_1$. Recuérdese que esto se cumple idénticamente cuando un pulso viaja en una cuerda y encuentra un cambio de densidad lineal del material ρ (ver fig)

Si analizamos estas tres observaciones, vemos entonces que en la figura (5) el rayo $R1$ ya lleva, al reflejarse en la primera interfaz, un desfase angular de 180° con respecto al rayo incidente. Además, el rayo $R2$, tiene un desfase asociado solo a la diferencia de camino ocasionada por su viaje dentro del material. Los rayos $R1$ y $R2$ producirán interferencia entre sí, pero debido a los 180° iniciales, los máximos se producen cuando la diferencia de camino es un múltiplo de $\frac{\lambda}{2}$ y los mínimos cuando la diferencia de camino es λ , es decir

$$\begin{aligned}
 2nt &= (m + \frac{1}{2})\lambda, & max \\
 2nt &= m\lambda, & min \\
 m &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Estos resultados son válidos cuando la película tiene por ambos lados el mismo medio (no importa si el n es mayor o menor).