

Universidad Simón Bolívar

FS2213: Física V

Mario I. Caicedo¹

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

¹Estas notas son de distribución libre y pueden ser descargadas del sitio:

[http : //www.fis.usb.ve/ ~ mcaicedo](http://www.fis.usb.ve/~mcaicedo)

Como es usual se espera que el usuario de las notas las refiera adecuadamente.

Contents

1	¿Qué es una onda?	5
1.1	Ondas Armónicas	9
1.2	Ondas estacionarias	11
1.3	Ondas en dos y tres dimensiones	12
1.3.1	Ondas Planas	13
1.4	Ondas esféricas y objetos relacionados	14
1.5	Ondas Longitudinales y Transversales	16
2	La línea de transmisión	21
2.1	Línea de transmisión ideal	23
2.2	EL caso general	24
3	La cuerda vibrante	26
3.1	La cuerda tensa y la ecuación de ondas	26
3.2	Consideraciones Energéticas	28
3.2.1	Flujo de Energía y vector de Poynting elástico	33

3.2.2	La Ecuación de Continuidad	36
3.3	La cuerda con extremos fijos	38
3.3.1	Ondas estacionarias y Series de Fourier	39
3.3.2	Problemas de contorno: método de separación de variables	42
3.3.3	Cálculo de los coeficientes	46
3.4	Ecuación de ondas para la membrana	49
3.5	Ejercicios	50
4	Ondas Electromagnéticas	52
4.1	Ecuaciones de Maxwell	52
4.2	Las ecuaciones de onda para los campos electromagnéticos	54
4.2.1	Ondas Armónicas Planas	55
4.3	Flujo de Energía y Vector de Poynting	60
4.4	Vector de Poynting para ondas armónicas	61
4.5	Complemento matemático	63

List of Figures

1.1	Izquierda: dibujo representando una onda <i>transversal</i> que se propaga a lo largo de una cuerda. experimento real, una onda transversal viajando a lo largo de un resorte.	6
1.2	Una onda viajera que se desplaza hacia la derecha ($f(x - vt)$).	8
1.3	Superficies de fase constante para una onda plana armónica monocromática. . . .	15
1.4	Arriba: una onda longitudinal propagándose a lo largo de un resorte. Abajo: onda transversal.	17
1.5	Arriba: una onda transversal que oscila en el plano vertical. Abajo: una onda transversal oscilando en el plano horizontal.	18
1.6	Superposición de dos ondas armónicas polarizadas linealmente de distinta amplitud que se propagan a lo largo de la misma dirección, los vectores de polarización de cada onda son ortogonales entre sí y la diferencia de fase entre ambas ondas es $\pi/2$. Resultado: ¡polarización elíptica!	20
3.1	Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial de cuerda.	27

3.2 En una cuerda con extremos fijos solo pueden formarse ondas armónicas con un
número entero de semi-longitudes de onda entre los extremos, es decir, con 0, 1,
2, ... nodos en la región en que la cuerda está libre. 40

Chapter 1

¿Qué es una onda?

El título de este capítulo coincide con una de las preguntas que queremos responder en este curso.

En un cierto caso especial puede decirse que:

Una onda es una señal reconocible que puede ser transferida de un lugar a otro de un medio con una velocidad de propagación reconocible.

G. B. Whitham¹

También podemos decir que una onda es una perturbación que se propaga en el espacio y en el tiempo manteniendo ciertas características discernibles. En esta forma decir las cosas hay una diferencia sustancial con el parrafo anterior: no estamos haciendo referencia a medio alguno, y esto es vital ya que en el caso de las ondas electromagnéticas no hace falta ningún medio para la propagación ya que las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío.

¹G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Interscience, ISBN 0471359424

Para acercarnos un poco a la intuición² consideremos un pulso que se propaga en una cuerda (esta es una onda mecánica que se propaga en un medio). Durante su tránsito, el pulso transmite movimiento a todos los puntos de la cuerda. Además, si hacemos un experimento con cierto cuidado podremos constatar tres características: (i) el pulso se propaga a lo largo de la cuerda con rapidez constante, (ii) la forma del pulso se mantiene prácticamente constante y (iii) el movimiento de la cuerda es perpendicular a la línea sobre la que se extiende la cuerda. La última característica es algo especial y cuando ocurre hablamos de una onda transversal (vea la sección 1.5).

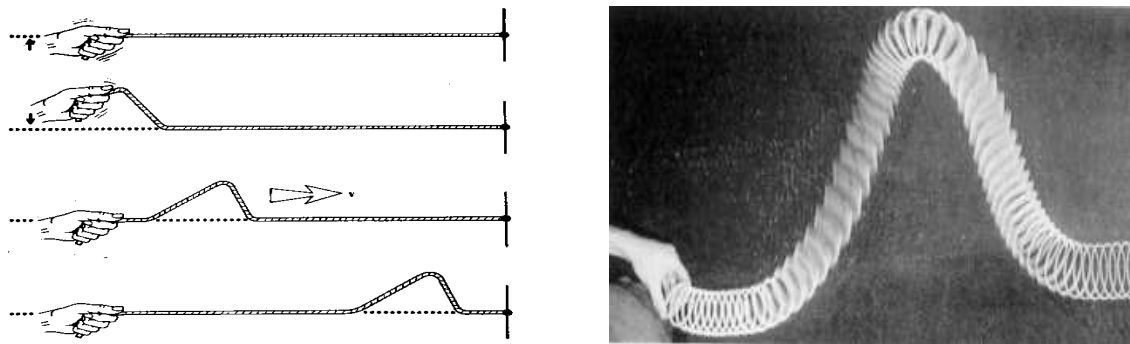


Figure 1.1: Izquierda: dibujo representando una onda *transversal* que se propaga a lo largo de una cuerda. experimento real, una onda transversal viajando a lo largo de un resorte.

Tratemos de construir un modelo matemático para la propagación de un pulso transversal que se propaga a lo largo de una cuerda. Para ello coloquemos un eje de coordenadas (que llamaremos x) a lo largo de la recta que la cuerda ocupa cuando está en reposo, y pensemos en enviar un pulso de tal suerte que los puntos de la cuerda se mantengan siempre en el mismo plano (que ciertamente contendrá al eje x). En estas condiciones podemos escoger el eje y para

²Por cierto, que una buena manera de mejorar la intuición ondulatoria consiste en hacer experimentos con ondas jugando con un *slinky*.

que el plano $x - y$ coincida con el plano del movimiento de los puntos de la cuerda.

Notemos que podemos utilizar la coordenada x para hacer referencia (etiquetar) a los puntos de la cuerda. En consecuencia la altura de un punto (P) de la cuerda será una función de x_P (la posición del punto P) y del tiempo esto es³ $y_P(t) = u(x_P, t)$.

Consideremos ahora una función real de una variable real ($f(s)$), cuyo grafo coincida con una imagen instantánea del pulso (digamos en $t = 0$), en ese caso, conocimientos elementales de matemáticas permiten afirmar que si el pulso viaja sin deformación con una rapidez v a lo largo de la cuerda la función $u(x, t)$ tendrá de la forma⁴

$$u(x, t) = f(x \pm vt) \quad (1.1)$$

donde los signos $+$ y $-$ indican un movimiento del pulso a la izquierda o a la derecha respectivamente.

Un efecto físico notable -que no siempre ocurre- se puede observar con onditas producidas en la superficie de un charco tranquilo. Bajo ciertas condiciones cuando dos ondas se encuentran interactúan produciendo una cresta más alta o anulándose por completo, para luego seguir propagándose tranquilamente con la misma forma que tenían antes de interactuar. Este fenómeno que no ocurre con todo tipo de ondas se denomina principio de superposición. En este curso nos limitaremos a estudiar en detalle las ondas que obedecen el principio de superposición y las

³una forma de entender esto es a través de un proceso de límites, podemos imaginar un sistema de N osciladores acoplados cuyos movimientos están limitados al plano $x - y$, a cada oscilador podemos asignarle una etiqueta de manera que sus alturas en función del tiempo serán $y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N-1}(t)$, y $y_N(t)$, si mantenemos la longitud de la cadena de osciladores finita y hacemos que el número de osciladores tienda a infinito las etiquetas deberán ser sustituidas por el continuo de manera que la lista $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$ se sustituirá naturalmente por $u(x, t)$

⁴a este tipo de ondas se les denomina *ondas viajeras*

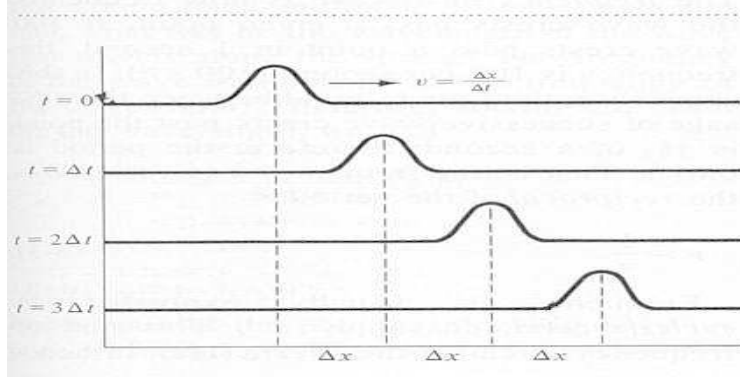


Figure 1.2: Una onda viajera que se desplaza hacia la derecha ($f(x - vt)$).

denominaremos ondas lineales para diferenciarlas de otro tipo de ondas (las ondas de choque, por ejemplo) para las cuales el principio de superposición no se satisface.

Volvamos a poner atención a la *onda viajera* dada por la fórmula (1.1). Supongamos que la segunda derivada ordinaria de $f(s)$ es $g(s)$, es decir, $\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = g(s)$. En ese caso, las segundas derivadas parciales de $u(x, t)$ estánsec:trans-lomgitud dadas por

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = g(x \pm vt) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 g(x \pm vt) \quad (1.3)$$

de donde sigue que $u(x, t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales de 2^o orden⁵

$$\partial_x^2 u(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, t) = 0 \quad (1.4)$$

Que denominaremos ecuación de ondas unidimensional sin fuentes, y que será el punto inicial de la modelación de los fenómenos ondulatorios. En este punto vamos a introducir algo de

⁵por simplicidad a veces usaremos la notación $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, etc.

nomenclatura extra: el parámetro v que aparece en la ecuación de ondas se denomina *velocidad de fase*.

Una de las virtudes básicas de la ecuación de ondas es que es lineal, lo que permite asegurar que las ondas que satisfagan la ecuación (1.4) satisfacen el principio de superposición. En efecto, supongamos que $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ sean soluciones de (1.4), y que α es un número real entonces

$$\begin{aligned} \partial_x^2 [u_1(x, t) + \alpha u_2(x, t)] - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 [u_1(x, t) + \alpha u_2(x, t)] = \\ = \partial_x^2 u_1(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u_1(x, t) + \alpha \left[\partial_x^2 u_2(x, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u_2(x, t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

en otras palabras, $u(x, t) = u_1(x, t) + \alpha u_2(x, t)$ es una solución de la ecuación de ondas, lo que corresponde sencillamente a la representación matemática del principio de superposición.

Una de las características fundamentales de las ondas es que portan energía, momentum, y en algunos casos momentum angular.

1.1 Ondas Armónicas

Existe una clase de soluciones muy particulares a la ecuación de ondas que se conocen colectivamente como *ondas armónicas monocromáticas*. Estas son soluciones de la ecuación (1.4) que pueden expresarse en una de las siguientes formas:

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (1.6)$$

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (1.7)$$

$$u(x, t) = \Re[\mathcal{A} e^{i(kx - \omega t)}] \quad (1.8)$$

$$u(x, t) = \Im[\mathcal{A} e^{i(kx - \omega t)}] \quad (1.9)$$

donde A , ϕ , k y ω son constantes reales, y $\mathcal{A} = A e^{i\phi}$.

Debido a la ecuación de ondas, las constantes k y ω denominadas *número de onda* y *frecuencia angular* respectivamente no son independientes, sino que están relacionados por la velocidad de fase a través de la *relación de dispersión*

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (1.10)$$

ó $\omega = v k$. Es fácil observar que el número de onda y la frecuencia angular son cantidades dimensionales cuyas dimensiones son de recíproco de longitud y tiempo⁻¹ respectivamente. La amplitud (A) es una cantidad cuya dimensionalidad depende del contexto; en el caso de las ondas de campo eléctrico $[A] = \frac{\text{volt}}{m}$, mientras que en el caso de las ondas transversales en una cuerda la amplitud tiene dimensiones de longitud.

El número de onda y la frecuencia angular tienen una interpretación interesante, la cantidad

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k} \quad (1.11)$$

representa un período espacial de las ondas armónicas como puede verse de la cadena de igualdades

$$\cos[k(x + \lambda) \pm \omega t + \phi] = \cos(kx \pm \omega t + \phi + 2\pi) = \cos(kx \pm \omega t + \phi) \quad (1.12)$$

es por esto que λ se denomina *longitud de onda*.

La frecuencia angular define el período temporal (T) de una onda armónica según la identidad $T \equiv \frac{2\pi}{\omega}$.

Las ondas armónicas tienen una característica que las hace acreedoras a una atención especial, en efecto, de acuerdo al teorema de Fourier, cualquier solución a la ecuación de ondas

unidimensional se puede expresar como superposición de ondas armónicas de distinta amplitud relativa. Puesto en forma matemáticamente explícita:

Teorema 1 *Toda solución de la ecuación de ondas unidimensional puede escribirse como*

$$u(x, t) = \sum_{\omega} \mathcal{A}(\omega) e^{i(k(\omega) - \omega t)} \quad (1.13)$$

en donde, la suma es en las frecuencias, los números de onda asociados a cada frecuencia están dados por $k(\omega) = \frac{\omega}{v}$ y la notación $\mathcal{A}(\omega)$ pretende destacar que las amplitudes de las ondas armónicas cuya superposición permite sintetizar $u(x, t)$ son diferentes (y dependen de $u(x, t)$).

1.2 Ondas estacionarias

Consideremos la superposición de dos ondas armónicas de idénticas amplitudes, frecuencias y números de onda, una que viaja hacia la izquierda y otra a la derecha. Utilizando la notación compleja ponemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \Re \left[\mathcal{A} e^{i(kx - \omega t)} + \mathcal{A} e^{i(kx + \omega t)} \right] = \Re \left[\mathcal{A} e^{ikx} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right] \\ &= \Re \left[A e^{ikx} \cos(\omega t) \right] = A \cos(kx + \phi) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Donde, como dijimos en la sección anterior, $\mathcal{A} = A e^{i\phi}$. Observando el resultado con algo de cuidado podemos darnos cuenta de que $u(x, t)$ no es una onda viajera, sus ceros, máximos, mínimos, etc. ocupan siempre los mismos puntos del espacio, a esto se le denomina una onda estacionaria.

1.3 Ondas en dos y tres dimensiones

Los fenómenos ondulatorios lineales también pueden ocurrir en dos y tres dimensiones espaciales. Como ejemplo bidimensional por excelencia podemos mencionar las ondas que se producen en la superficie de un pozo, o las vibraciones del cuero de un tambor (ondas en membranas), mientras que en tres dimensiones podemos mencionar las ondas acústicas (el sonido no es otra cosa que la propagación de ondas de presión en el aire).

Los modelos matemáticos que describen estos fenómenos están basados en las soluciones de las ecuaciones de onda en dos y tres dimensiones (ó como decimos los físicos en $2 + 1$ y $3 + 1$ dimensiones, a saber

$$\partial_x^2 u(x, y; t) + \partial_y^2 u(x, y; t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, y; t) = 0 \quad (1.15)$$

para el caso $2 + 1$, y

$$\partial_x^2 u(x, y, z; t) + \partial_y^2 u(x, y, z; t) + \partial_z^2 u(x, y, z; t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(x, y, z; t) = 0 \quad (1.16)$$

para el caso $3 + 1$. Definiendo el operador de Laplace

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \dots \quad (1.17)$$

es posible resumir las ecuaciones de onda en los casos $d + 1$ con solo poner

$$\nabla^2 u(\vec{x}; t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(\vec{x}; t) = 0 \quad (1.18)$$

y especificando $d = 1, 2$ ó 3 .

1.3.1 Ondas Planas

De particular interés son las soluciones denominadas *ondas planas*. Estas se construyen como generalizaciones de las ondas viajeras unidimensionales y requieren de un vector unitario \hat{n} y de una función real de variable real ($f(s)$) con segunda derivada continua. Es facil ver que con estos elementos, las funciones

$$u(\vec{x}; t) \equiv f(\hat{n} \cdot \vec{x} \pm v t) \quad (1.19)$$

son ondas (es decir soluciones a las ecuaciones de onda en $d = 1, 2$ o 3) que se propagan paralela o antiparalelamente al vector \hat{n} según sea el signo relativo que aparece en el argumento.

Las soluciones se denominan planas porque en el caso tridimensional para cada instante de tiempo fijo (tomemos t_0 como ejemplo), el lugar geométrico de los puntos de *fase* (i.e. argumento) constante son los planos

$$\hat{n} \cdot \vec{x} = v t_0 \quad (1.20)$$

Estos planos de fase constante se denominan *frentes de onda* y evidentemente son ortogonales a los vectores de propagación \hat{n} . Más aún, es facil convencerse de que los frentes de onda viajan con velocidad $\pm v \hat{n}$.

Es claro que la noción de ondas planas se puede generalizar a las ondas armónicas monocromáticas. Si tomamos la notación de funciones complejas, podemos poner una onda armónica plana monocromática como

$$u(\vec{x}, t) = \mathcal{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (1.21)$$

donde (como usted deberá probar en los ejercicios) el *vector de onda* \vec{k} está relacionado con la

frecuencia angular por

$$|\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.22)$$

1.4 Ondas esféricas y objetos relacionados

Como usted debe haber aprendido en sus cursos de matemáticas, cuando el operador de Laplace ó *laplaciano* ∇^2 actúa sobre funciones, su acción tiene la siguiente forma en coordenadas cilíndricas y esféricas

$$\nabla^2 \Psi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho \Psi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 \Psi + \partial_z^2 \Psi \quad \text{coordenadas cilíndricas} \quad (1.23)$$

y

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \partial_r^2(r \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \Psi \quad \text{coordenadas esféricas.} \quad (1.24)$$

Evidentemente estas formas del laplaciano llevan a las formas correspondientes para la ecuación de ondas.

Adaptándonos al nivel matemático de este curso nos limitaremos al caso esféricamente simétrico, es decir a soluciones de la ecuación de ondas que solo dependen de la distancia radial (r) y el tiempo. En ese caso, la ecuación de ondas correspondiente se simplifica de manera notable reduciéndose a

$$\frac{1}{r} \partial_r^2(r u(r, t)) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 u(r, t) = 0 \quad (1.25)$$

que, como usted demostrará en la sección de problemas, tiene la solución general

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r - vt) + \frac{1}{r} f_2(r + vt) \quad (1.26)$$

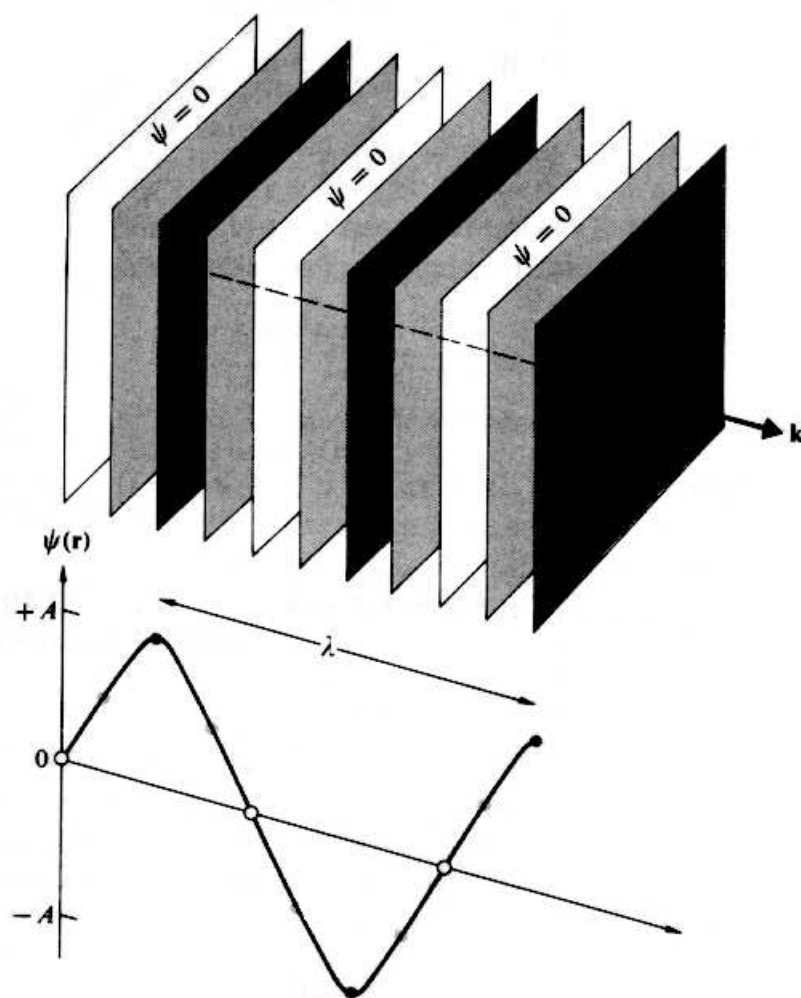


Figure 1.3: Superficies de fase constante para una onda plana armónica monocromática.

donde $f_1(s)$ y $f_2(s)$ son funciones reales de una variable real con segundas derivadas continuas y que carecen de cualquier otra característica especial. La fórmula (1.26) representa la superposición de una onda que se aleja del centro de coordenadas y una que se acerca a dicho punto.

Es claro que en el caso de las ondas esféricas los frentes de onda son esféricas (lo que coincide con nuestra intuición asociada a la experiencia de ver las ondas que se producen al lanzar una piedra en un charco).

Una vez más es posible discutir el caso armónico monocromático, que en notación trigonométrica y considerando solamente ondas que se alejan del centro, corresponde a la fórmula

$$u(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \phi), \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (1.27)$$

1.5 Ondas Longitudinales y Transversales

Existen diversas clasificaciones (todas incompletas) para las ondas. En una de ellas hablamos de *ondas longitudinales* y *ondas transversales*.

En las ondas longitudinales la perturbación es paralela a la dirección de propagación. Tal es el caso, por ejemplo, de las ondas de presión en un gas y de las ondas tipo P en un medio elástico.

En las ondas transversales la perturbación es ortogonal a la dirección de propagación. Las ondas S en un medio elástico y las ondas electromagnéticas son ejemplos típicos.

Con el fin de fijar las ideas consideremos una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda. Si utilizamos un sistema de coordenadas en que el eje x corresponda con la dirección de la cuerda en equilibrio saltan a la vista dos posibilidades para la propagación transversal, ondas que oscilan en el plano horizontal ($x - y$) y ondas que oscilan en el plano vertical ($x - z$)

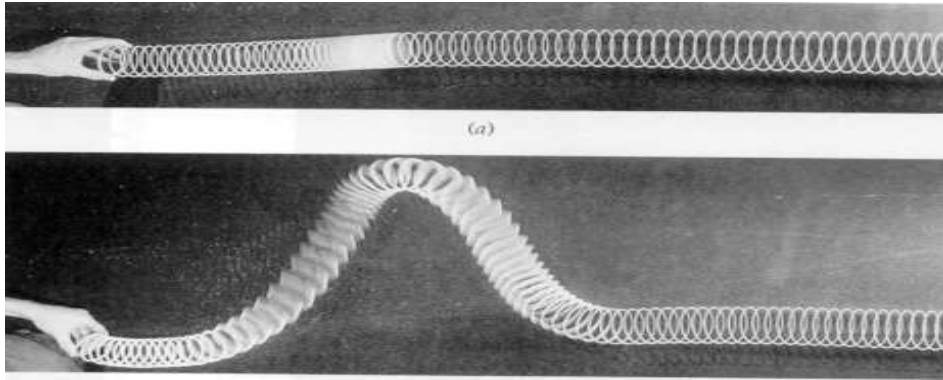


Figure 1.4: Arriba: una onda longitudinal propagándose a lo largo de un resorte. Abajo: onda transversal.

En el primer caso la onda queda perfectamente representada por el campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z; t) = u(x, t) \hat{j} \quad (1.28)$$

donde $u(x, t)$ es -por ejemplo- una onda viajera del tipo $u(x, t) = f(x - vt)$. En el segundo caso la onda se representa (usando la misma notación)

$$\vec{v}(x, y, z; t) = u(x, t) \hat{i}. \quad (1.29)$$

Podemos pensar en una onda que oscila en algún otro plano (fijo) ortogonal al eje x en cuyo caso podemos poner sencillamente

$$\vec{v}(x, y, z; t) = u(x, t) \hat{u}_p, \quad (1.30)$$

donde \hat{u}_p es un vector constante perpendicular al vector coordenado \hat{i} y que se denomina vector de polarización.

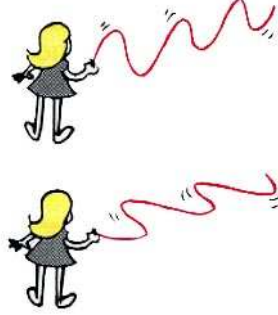


Figure 1.5: Arriba: una onda transversal que oscila en el plano vertical. Abajo: una onda transversal oscilando en el plano horizontal.

En el caso en que la propagación sea de este tipo (en un plano fijo) ortogonal a la dirección de propagación se dice que estamos en presencia de una onda linealmente polarizada.

Concretemos con un ejemplo, una onda transversal polarizada linealmente que se propaga a lo largo del eje x es un vector de la forma:

$$\vec{v}(x, y, z; t) = [f_1(x + vt) + f_2(x - vt)] \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

donde $\vec{u}_p = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$, $a_x^2 + a_y^2 = 1$ es el vector de polarización de la onda.

En el caso de las ondas armónicas monocromáticas se presenta otro tipo de polarización sumamente interesante, consideremos la onda (a_x y a_y reales)

$$\vec{v}(x, y, z; t) = \Re e \left[\begin{pmatrix} a_x \\ i a_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} \right] \quad (1.32)$$

ó

$$\vec{v}(x, y, z; t) = \begin{pmatrix} a_x \cos(kx - \omega t) \\ a_y \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

y pensemos en un punto particular del eje x , digamos -por sencillez $x = 0$ -. El vector resultante de llevar adelante la sustitución $x = 0$ en \vec{v} es

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a_x \cos(\omega t) \\ a_y \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

si observamos con cuidado notaremos que, la trayectoria del extremo del vector es una elipse de semiejes a_x y a_y en el plano $y - z$, esto determina la denominada polarización elíptica. Si $a_x = a_y$ la trayectoria del extremo de \vec{w} es un círculo y hablamos de polarización circular.

A primera vista el concepto de polarización elíptica es algo difícil de asir, sin embargo, un poquitin de experimentación hace entender la idea muy rápidamente. Tome una cuerda larga y fije un extremo a una pared (o pida a alguien que la sujete). Tome el otro extremo de la cuerda con su mano y haga oscilar esta horizontal ó verticalmente y obtendrá ondas transversales con polarización lineal propagándose a lo largo de la cuerda. Para obtener la polarización elíptica sencillamente trate de imprimir a su mano un movimiento circular y observe el resultado.

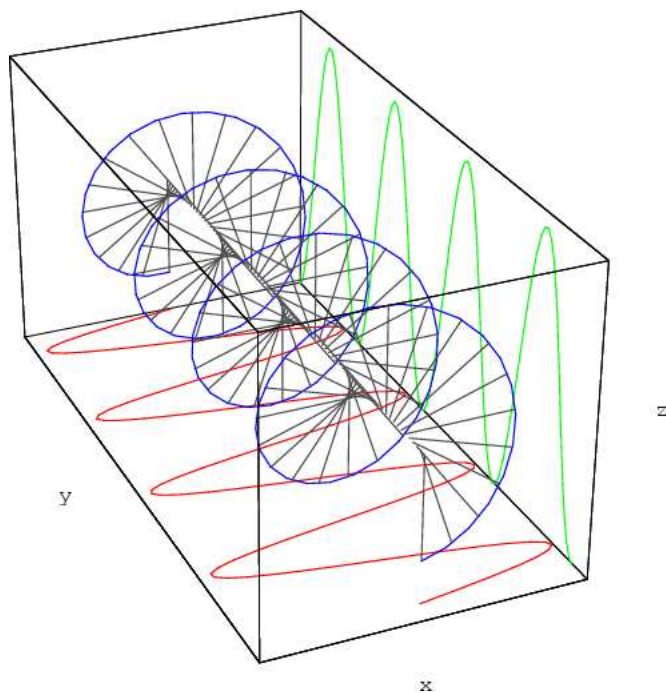


Figure 1.6: Superposición de dos ondas armónicas polarizadas linealmente de distinta amplitud que se propagan a lo largo de la misma dirección, los vectores de polarización de cada onda son ortogonales entre sí y la diferencia de fase entre ambas ondas es $\pi/2$. Resultado: ¡polarización elíptica!

Chapter 2

La línea de transmisión

El modelo de Heavyside es un modelo de elementos *distribuidos*, de acuerdo a esto, los atributos de un circuito (resistencia, capacidad, inductancia) son funciones continuas de los materiales que constituyen el circuito. Es importante notar que los modelos continuos no toman en cuenta la granularidad de la materia, esto requiere que pensemos que un elemento *infinitesimal* de volumen del circuito que pretendamos imaginar debe ser grande comparado con la escala atómica pero muy pequeño en relación a cualquier objeto macroscópico.

En el modelo distribuido cada elemento de circuito es de tamaño infinitesimal, en consecuencia, las corrientes y voltajes no son uniformes (especialmente constantes), si consideramos por ejemplo una línea unidimensional la corriente y el voltaje y que se adecuan a la descripción que acabamos han de ser funciones de la posición a lo largo de la línea, es decir,

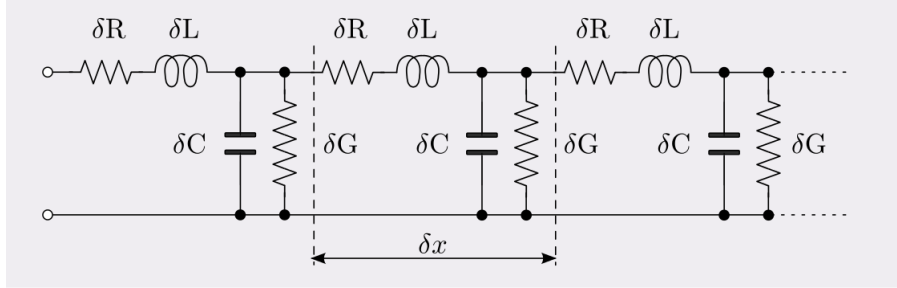
$$i = i(x, t) \quad \text{y} \quad v = v(x, t) \quad (2.1)$$

similarmente, la resistencia, inductancia, y capacitancia de un trozo de línea de longitud infinitesimal

imal δx son

$$\delta R = R \delta x, \quad \delta L = L \delta x \quad \text{y} \quad \delta C = C \delta x, \quad (2.2)$$

donde R , L y C son cantidades definidas por unidad de longitud.



Considérese el modelo que muestra la figura. Es claro que la caída de voltaje entre los nodos separados por la distancia δx está dada por

$$\Delta V = v(x + \delta x, t) - v(x, t) = -\delta L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - \delta R i(x). \quad (2.3)$$

Ahora bien, la diferencia $v(x + \delta x, t) - v(x, t)$ puede aproximarse a primer orden en δx resultando

$$v(x + \delta x, t) - v(x, t) = \delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (2.4)$$

así que, en definitiva

$$dx \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -dx \left\{ L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R i(x, t) \right\} \quad (2.5)$$

La capacitancia de la línea de transmisión y las pérdidas debidas a imperfecciones del material (representadas por una conductancia G por unidad de longitud) hacen que la corriente en x no sea igual a la que aparece en $x + \delta x$. Esta diferencia en corriente se expresa facilmente si se usa

la ley de Kirchoff correspondiente al nodo en que la corriente deriva a tierra, es decir

$$\{i(x + \delta x, t) - i(x, t)\} + [C \delta x] \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + [G \delta x] v(x, t) = 0 \quad (2.6)$$

El término $i(x + \delta x, t) - i(x, t)$ se aproxima sin problemas para llevarnos finalmente a

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - G v(x, t) \quad (2.7)$$

El modelo de Heavyside ha resultado en el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - R i(x, t) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - G v(x, t) \quad (2.9)$$

Conocido como *sistema de ecuaciones telegráficas*

2.1 Línea de transmisión ideal

Cuando la línea que estamos estudiando tiene pérdidas realmente muy bajas ($R \rightarrow 0$ y $G \rightarrow 0$)

las ecuaciones telegráficas se simplifican notablemente resultando

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.11)$$

Diferenciando la primera de estas ecuaciones con respecto a x y la segunda con respecto a t se obtiene

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = L \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t \partial x} = C \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

como las derivadas parciales cruzadas son iguales, obtenbemos para $v(x, t)$

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.14)$$

Se puede invertir el orden de derivación de las ecuaciones 2.10 2.11 derivando la primera con respecto al tiempo y la segunda con respecto a la posición para obtener

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x} - LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

En resumen, el acoplamiento entre la corriente y el voltaje en el modelo de Heavyside implica que ambas variables obedecen la ecuacin de ondas con velocidad de fase

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.16)$$

2.2 EL caso general

Es instructivo esudiar lo que ocurre cuando la línea no es ideal. Un ejercicio de manipulación análogo al de la sección anterior lleva a las siguientes ecuaciones de tipo *hiperbólico*¹

¹las ecuaciones de tipo hiperbólico pertenecen a la misma familia que la ecuación de ondas

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + G R v(x, t) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + G R i(x, t) \quad (2.18)$$

En el caso en que no hay pérdidas de carga ($G = 0$) las ecuaciones se reducen a

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x^2} - RC \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x^2} - RC \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.20)$$

Estas ecuaciones tienen soluciones ondulatorias *evanescentes*, es decir, ondas que decaen con la distancia de propagación. Puede demostrarse que el decaimiento es de la forma ($x > 0$)

$$e^{-\alpha x}, \quad (2.21)$$

con

$$\alpha = \frac{R}{2 Z_0} \quad (2.22)$$

acá Z_0 es un parámetro conocido como *impedancia característica* de la línea que, en el caso sin pérdidas, está dado por la fórmula:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.23)$$

Chapter 3

La cuerda vibrante

3.1 La cuerda tensa y la ecuación de ondas

En este capítulo vamos a deducir que la descripción dinámica de las oscilaciones transversales de una cuerda está dada efectivamente por la ecuación de ondas unidimensional.

Comencemos por considerar la dinámica de un pequeño trozo de cuerda cuyos extremos están en los puntos $x - \frac{dx}{2}$ y $x + \frac{dx}{2}$. En ausencia de gravedad y considerando que las oscilaciones son solo en la dirección y (de manera que la velocidad del trocito de cuerda es simplemente $\partial_t u(x, t)$), podemos escribir la ecuación de movimiento para la cuerda (segunda ley de Newton) como

$$\vec{T}(x - \frac{dx}{2}) + \vec{T}(x + \frac{dx}{2}) = \mu \partial_t^2 u(x, t) \quad (3.1)$$

donde $\vec{T}(x - \frac{dx}{2})$ y $\vec{T}(x + \frac{dx}{2})$ son las fuerzas que actúan en cada extremo de la cuerda. La forma escalar de esta ecuación vectorial es el sistema de ecuaciones

$$T_x(x - \frac{dx}{2}) + T_x(x + \frac{dx}{2}) = 0 \quad (3.2)$$

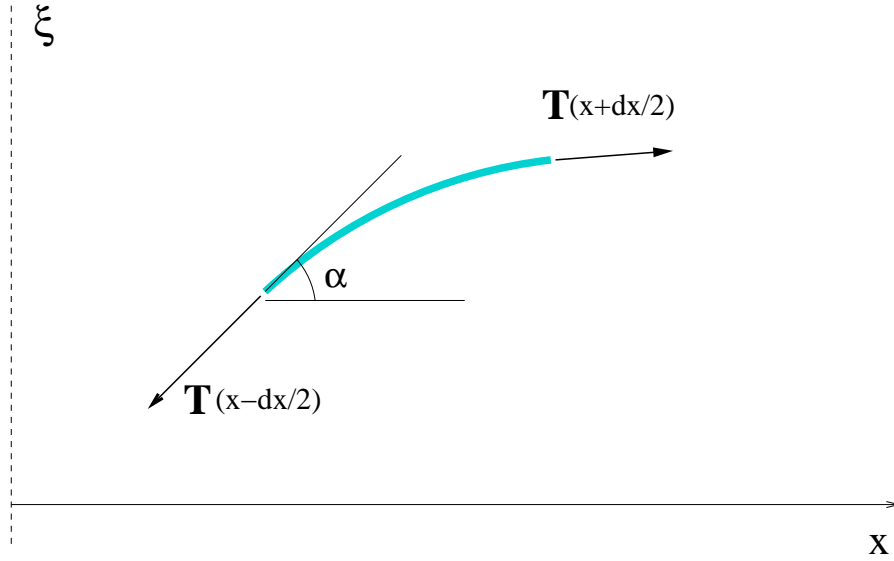


Figure 3.1: Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial de cuerda.

$$T_y(x - \frac{dx}{2}) + T_y(x + \frac{dx}{2}) = \mu \partial_t^2 u(x, t) \quad (3.3)$$

donde T_x y T_y son las componentes horizontal y vertical de la tensión. Ahora bien, llamemos $\alpha(x)$ al ángulo que forman la cuerda y el eje x en el punto x , así que $T_x(x) = |\vec{T}| \cos \alpha(x)$ y $T_y(x) = |\vec{T}| \sin \alpha(x)$. La primera hipótesis que haremos será considerar que la cuerda no ejerce resistencia a la flexión. Como consecuencia de esta hipótesis, las tensiones son tangentes a la cuerda en cada punto, de acuerdo a esto $\tan \alpha(x) = \partial_x u(x, t)$.

La segunda hipótesis consistirá en considerar un régimen de oscilaciones pequeñas (esto es, que la amplitud de la oscilación en cualquier instante y punto de la cuerda $-u(x, t)$ - satisface la condición $u(x, t) \ll L$ donde L es la longitud de la cuerda. De acuerdo a esta segunda suposición, los ángulos también son chicos, y por lo tanto $\cos(\alpha(x - dx/2)) \approx \cos \alpha(x) \approx \cos(\alpha(x + dx/2)) \approx 1$,

y $\text{sen}\alpha(x \pm dx/2) \approx \tan\alpha(x \pm dx/2) = \partial_x u(x \pm dx/2, t)$. De acá sigue que

$$T_x(x - \frac{dx}{2}) + T_x(x + \frac{dx}{2}) \approx |\vec{T}(x + \frac{dx}{2})| - |\vec{T}(x - \frac{dx}{2})| \approx 0 \quad (3.4)$$

lo que implica (en esta aproximación) que la magnitud de la tensión es constante ($|\vec{T}(x)| = T$, $\forall x$), por otra parte,

$$T_y(x - \frac{dx}{2}) + T_y(x + \frac{dx}{2}) = T \left[\partial_x u(x + \frac{dx}{2}) - \partial_x u(x - \frac{dx}{2}) \right], \quad (3.5)$$

ahora bien,

$$\begin{aligned} \partial_x u(x + \frac{dx}{2}) - \partial_x u(x - \frac{dx}{2}) &= \left[\partial_x u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) \frac{dx}{2} + \dots \right] - \\ &- \left[\partial_x u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) \frac{-dx}{2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

de donde resulta

$$T \left[\partial_x u(x + \frac{dx}{2}) - \partial_x u(x - \frac{dx}{2}) \right] \approx T \partial_x^2 u(x, t) dx \quad (3.7)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación para la aceleración vertical del elemento de cuerda resulta

$$\partial_x^2 u(x, t) - \frac{\mu}{T} \partial_t^2 u(x, t) = 0 \quad (3.8)$$

que no es otra cosa que la ecuación de ondas unidimensional con velocidad de fase $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

3.2 Consideraciones Energéticas

Consideremos la tasa de cambio en la energía cinética de un pequeño trozo de cuerda cuyos extremos están identificados por las coordenadas x y $x + dx$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt}, \quad (3.9)$$

donde $\frac{dW}{dt}$ es la potencia¹ que desarrollan las fuerzas que actúan sobre el pequeño trozo de cuerda, es decir

$$\frac{dW}{dt} = [\vec{T}(x+dx) + \vec{T}(x)] \cdot \vec{v} . \quad (3.10)$$

Como ya hemos discutido, la velocidad instantánea (\vec{v}) con que se desplaza el trozo de cuerda, cuando a través de este viaja una onda transversal² está dada por $\vec{v} = \partial_t u(x, t) \hat{j}$. Sustituyendo de vuelta en la igualdad (3.10) queda

$$\frac{dW}{dt} = [T_y(x+dx) + T_y(x)] \partial_t u(x, t). \quad (3.11)$$

Ahora bien, la componente vertical de la tensión no es otra cosa que $T_y(x) = T \partial_x u(x, t)$ de manera que³,

$$\frac{dW}{dt} = T [\partial_x u(x+dx) - \partial_x u(x, t)] \partial_t u(x, t) = T \partial_x^2 u(x, t) \partial_t u(x, t) dx + O(dx^2), \quad (3.12)$$

así, que en resumen, y despreciando los infinitésimos de orden superior al primero, la rata de cambio de la energía cinética del pequeño trozo de cuerda se puede poner como

$$\frac{dK}{dt} = T \partial_x^2 u(x, t) \partial_t u(x, t) dx. \quad (3.13)$$

Por otra parte, la expresión $\partial_x^2 u(x, t) \partial_t u(x, t)$ que aparece en el miembro derecho de esta última igualdad puede reescribirse como⁴

$$\partial_x^2 u(x, t) \partial_t u(x, t) = \partial_x [\partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)] - \partial_x u(x, t) \partial_{xt}^2 u(x, t), \quad (3.14)$$

¹recuerde que la potencia instantánea desarrollada por una fuerza (\vec{F}) que actúa sobre una partícula que en un cierto instante t se mueve con velocidad \vec{v} es $P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}$

²recuerde que en este caso el movimiento es solo en la dirección del vector $\hat{y} = \hat{j}$

³es necesario que insistamos en notar que el producto $T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)$ es la potencia desarrollada por la tensión que actúa en el punto x

⁴observe que esto no es más que el truco para hacer una integración “por partes”: $v du = d(vu) - dv u$

adicionalmente, es facil darse cuenta de que

$$\partial_x u(x, t) \partial_{xt}^2 u(x, t) = \partial_t \left[\frac{1}{2} (\partial_x u(x, t))^2 \right] \quad (3.15)$$

de manera que

$$\partial_x^2 u(x, t) \partial_t u(x, t) = \partial_x [\partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)] - \partial_t \left[\frac{1}{2} (\partial_x u(x, t))^2 \right] \quad (3.16)$$

reinsertando este resultado en la identidad (3.12), y utilizando el hecho de que $T = \text{constante}$ obtenemos el siguiente resultado parcial

$$\frac{dK}{dt} = \left\{ \partial_x [T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)] - \partial_t \left[\frac{T}{2} (\partial_x u(x, t))^2 \right] \right\} dx. \quad (3.17)$$

ó

$$\frac{dK}{dt} + \partial_t \left[\frac{T}{2} (\partial_x u(x, t))^2 \right] dx = \partial_x [T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)] dx \quad (3.18)$$

Observando que la energía cinética del trozo de cuerda está dada por

$$K = \frac{\mu}{2} (\partial_t u(x, t))^2 dx \quad (3.19)$$

es posible reescribir la igualdad (3.18) en la forma

$$\partial_t \left[\frac{\mu}{2} (\partial_t u(x, t))^2 + \frac{T}{2} (\partial_x u(x, t))^2 \right] dx = \partial_x [T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)] dx. \quad (3.20)$$

es decir:

$$\partial_t \left[\frac{\mu}{2} (\partial_t u(x, t))^2 + \frac{T}{2} (\partial_x u(x, t))^2 \right] = \partial_x [T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)]. \quad (3.21)$$

Detengámonos en este punto para reflexionar. A veces las manipulaciones matemáticas pueden resultar algo oscuras, sobre todo si son largas y llegan a resultados intermedios con la apariencia de la fórmula 3.21.

En primer lugar recordemos que la cantidad $T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)$ que aparece en el lado derecho de 3.21 es la potencia que la tensión entrega a un punto de la cuerda localizado en el punto x , como consecuencia de esto, la derivada $\partial_x [T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)]$ representa la potencia suministrada a la cuerda por unidad de longitud.

Por otra parte, es bastante obvio que la cantidad

$$\frac{\mu}{2} (\partial_t u(x, t))^2 \quad (3.22)$$

no es otra cosa que la energía cinética por unidad de longitud de la cuerda.

Queda por interpretar el misterioso término

$$\frac{T}{2} (\partial_x u(x, t))^2, \quad (3.23)$$

con este fin en mente tomemos una desviación en nuestra discusión y consideremos la cuerda en reposo. En tal caso la longitud de un trozo diferencial de cuerda es $dl = dx$. Durante el movimiento de la cuerda la longitud del mismo trozo de cuerda cambia ligeramente resultando ser:

$$dl' = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.24)$$

pero, el cociente diferencial $\frac{dy}{dx}$ no es otra cosa que $\partial_x u$ de manera que

$$dl' = \sqrt{1 + (\partial_x u)^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2} (\partial_x u)^2\right] dx \quad (3.25)$$

de acuerdo a esto, la longitud del elemento de cuerda cambia en la cantidad $ds = dl' - dx = \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 dx$. El producto de la tensión T por esta cantidad, no es otra cosa que el trabajo realizado para cambiar la longitud de la cuerda. En conclusión, el término

$$\frac{T}{2} (\partial_x u(x, t))^2, \quad (3.26)$$

de la fórmula 3.21 no es otra cosa que la energía potencial elástica de la cuerda por unidad de longitud.

La fórmula 3.21 y el razonamiento que le sigue sugieren introducir tres nuevas cantidad física

$$u_c \equiv \frac{1}{2}\mu (\partial_t u)^2 \quad (3.27)$$

$$u_e \equiv \frac{1}{2}T (\partial_x u)^2 \quad (3.28)$$

$$\mathcal{E} \equiv u_c + u_e \quad (3.29)$$

A esta altura debería ser evidente que estas tres cantidades tienen dimensiones de energía por unidad de longitud ($\frac{\text{energía}}{\text{longitud}}$) (**Ejercicio**) de manera que son densidades de energía. \mathcal{E} es denominada *densidad lineal de energía mecánica* o sencillamente *densidad de energía*.

Si imaginamos que cada elemento infinitesimal de longitud de la cuerda es una partícula puntual resulta natural pensar que en cada instante de tiempo la cuerda almacena una energía mecánica total E que es sencillamente la suma de las energías de cada una de las partículas que la forman.

En términos concretos, estamos diciendo que nuestra interpretación de los sumandos que aparecen en el lado izquierdo de la fórmula 3.21, nos ha llevado a entender que la energía mecánica total contenida en un trozo de cuerda vibrante cuyos extremos están localizados en los puntos x_1 y x_2 está dada por

$$E(x_1, x_2; t) = \int_{x_1}^{x_2} dx (u_c + u_e) \quad (3.30)$$

donde debemos insistir en que cada trozo de cuerda “almacena” energía en forma de energía cinética y potencial y que estas cantidades son *distribuidas*⁵

⁵más adelante veremos un resultado análogo para el campo electromagnético

3.2.1 Flujo de Energía y vector de Poynting elástico

Consideremos la fórmula 3.21, integrémosla entre dos puntos x_1 y x_2 de la cuerda y expresemos el resultado en los términos que acabamos de introducir:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \partial_t [u_c + u_e] = \int_{x_1}^{x_2} dx \partial_x [T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t)]. \quad (3.31)$$

En vista de que los extremos del intervalo de integración están fijos podemos reescribir la igualdad como

$$\frac{dE(x_1, x_2; t)}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} dx \partial_x [T \partial_x u \partial_t u] \quad (3.32)$$

integrando el lado derecho de la igualdad

$$\frac{dE(x_1, x_2; t)}{dt} = T \partial_x u(x_2, t) \partial_t u(x_2, t) - T \partial_x u(x_1, t) \partial_t u(x_1, t) \quad (3.33)$$

Ahora bien, en vista de que la cadena de razonamientos matemáticos que nos llevó hasta esta última igualdad fue enteramente rigurosa y que la interpretación física es natural hemos probado lo siguiente

Teorema 2 *La tasa de cambio en la energía almacenada en un trozo de cuerda es igual a la potencia que se entrega en los extremos del trozo de cuerda.*

Discutamos un poco más este teorema. Ya sabemos que

$$E = \int_{x_2}^{x_1} dx \mathcal{E}$$

es la cantidad de energía almacenada en la cuerda entre los dos extremos de interés x_1 y x_2 .

Ciertamente, $\frac{dE}{dt}$ es la tasa de cambio de E que puede ser positiva, si la energía almacenada en

la cuerda está aumentando o negativa si está disminuyendo. Evidentemente un cambio en la energía solo puede aparecer si alguna fuerza hace trabajo sobre la cuerda. El teorema 2 establece dos cosas, en primer lugar que el trabajo sobre la cuerda lo ejecuta la tensión que actúa en los extremos del trozo de cuerda que nos interesa y además establece la tasa de entrega de energía (potencia) en cada uno de los dos extremos.

En términos pictóricos podemos imaginarnos que el segmento $[x_1, x_2]$ es una caja unidimensional en la cual se almacena energía que entra o sale de la caja a través de “entradas” localizadas en las “tapas” de la caja, es decir en la frontera que separa el interior de la caja del exterior a ella. Existe una manera de hacer preciso lo que acabamos de decir y nos abocaremos a entenderla en el resto de esta sección. Para ello comencemos por introducir un objeto

Definición 1 *El vector de Poynting⁶ elástico asociado a las oscilaciones de una cuerda tensa (dirigida a lo largo del eje x) está dado por*

$$\vec{S}(x, t) \equiv -T \partial_x u(x, t) \partial_t u(x, t) \hat{i} \quad (3.34)$$

Volviendo a considerar nuestra hipotética caja unidimensional notemos que los vectores que definen las normales unitarias exteriores (salientes) a la “superficie” de la caja (los puntos extremos x_1 y x_2) son $\hat{n}_1 = -\hat{i}$ y $\hat{n}_2 = \hat{i}$. En términos de del vector de Poynting y de estas normales, podemos reexpresar la fórmula (3.33) como

$$\frac{dE(x_1, x_2; t)}{dt} = - [\vec{S}(x_2, t) \cdot \hat{n}_2 + \vec{S}(x_1, t) \cdot \hat{n}_1] \quad (3.35)$$

Que nos permite expresar el teorema 2 en la forma siguiente

⁶Entender este concepto será fundamental para cuando se discuta la teoría electromagnética

Teorema 3 *La potencia que se entrega a un segmento de cuerda tensa limitado por dos puntos es la suma de los productos entre el vector de Poynting evaluado en cada extremo y las normales unitarias exteriores a la cuerda en dichos puntos.*

Acá bien vale la pena que nos entretengamos en un par de ejemplos explícitos.

Ejemplo 1 *Consideremos una onda que viaja hacia la derecha $u(x, t) = f(x - vt)$, y calculemos el vector de Poynting en este caso. Si $f'(x) = g(x)$ resulta que $\partial_x u(x, t) = f'(x - vt) = g(x - vt)$ mientras que $\partial_t u(x, t) = -v g(x - vt)$ usando la definición resulta*

$$\vec{S}(x, t) = v T [g(x - vt)]^2 \hat{i} \quad (3.36)$$

la forma de la dependencia espacio temporal de \vec{S} , nos indica que \vec{S} se comporta como una onda viajera que se propaga con la velocidad de fase v .

Es interesante continuar con el ejemplo notando lo que ocurre si calculamos la densidad de energ

ia \mathcal{E} . Para ello calculemos

$$u_c = \frac{\mu}{2} [v g(x - vt)]^2 \quad y \quad u_e = \frac{T}{2} [g(x - vt)]^2 \quad (3.37)$$

de manera que al recordar que $v = \sqrt{T/\mu}$ se obtiene

$$\mathcal{E} = T [g(x - vt)]^2 \quad (3.38)$$

de manera que el vector de Poynting se reescribe como

$$\vec{S}(x, t) = v \mathcal{E} \hat{i} \quad (3.39)$$

y esto deja un ejercicio al lector: interprete este resultado⁷

⁷ayuda: fíjese bien en las unidades

Ejemplo 2 Consideremos una onda armónica monocromática, $u(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$. En este caso, el vector \vec{S} está dado por

$$\vec{S} = A^2 k (-\omega) T \cos^2(kx - \omega t) (-\hat{i}) = A^2 v T \cos^2(kx - \omega t) \hat{i} \quad (3.40)$$

y el promedio de \vec{S} en un período temporal ($\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ completo es

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_t^{t+\mathcal{T}} dt A^2 v T \cos^2(kx - \omega t) \hat{i} = \frac{vT}{2} A^2 \hat{i} \quad (3.41)$$

En ambos ejemplos podemos observar que la potencia instantánea en cada punto es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda en dicho punto en cada instante de tiempo. En el caso de una onda armónica monocromática, la potencia media que la onda entrega en un punto arbitrario de la cuerda ($\langle \vec{S}(x, t) \rangle$) es proporcional al cuadrado de la amplitud ($\propto A^2$), esto es característico de las ondas lineales e induce la introducción de una cantidad denominada *intensidad*, que en el caso de las ondas que se propagan en el espacio es la potencia instantánea que la onda deposita en un área unitaria ortogonal al vector que describe la propagación de la energía.

3.2.2 La Ecuación de Continuidad

Resumiendo, en el párrafo 3.2.1 hemos aprendido que la ecuación para el flujo de energía en un punto de la cuerda puede ponerse en la forma

$$\partial_t \mathcal{E}(x, t) + \partial_x S_x(x, t) = 0 \quad (3.42)$$

en donde la densidad de energía \mathcal{E} está dada por

$$\mathcal{E}(x, t) = u_c(x, t) + u_e(x, t) \quad (3.43)$$

Es importante que en este momento desviemos completamente nuestra atención y pensemos en otro problema físico. Consideremos un objeto de volumen V que pretendemos cargar eléctricamente con una corriente I , ciertamente, la relación entre la carga del objeto y la corriente es

$$\frac{dQ}{dt} = I, \quad (3.44)$$

ahora bien, la carga total del objeto es evidentemente:

$$Q = \int_V dv \rho \quad (3.45)$$

donde ρ es la densidad volumétrica con que la carga eléctrica se distribuye en el objeto, mientras que la corriente que penetra al objeto es $I = - \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds$ donde \vec{J} es el vector de densidad de corriente eléctrica por unidad de área, y S la superficie cerrada que define al objeto. De estamaneira, la igualdad (3.44) que representa nada más y nada menos que la ley de conservación de la carga puede reexpresarse en la forma

$$\int_V dv \partial_t \rho + \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (3.46)$$

usando el teorema de la divergencia, esta igualdad puede escribirse como

$$\int_V dv [\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}] = 0 \quad (3.47)$$

que por ser una identidad válida para cualquier volumen implica a su vez que -expresando $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ en forma desarrollada

$$\partial_t \rho + \partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z = 0 \quad (3.48)$$

que es entonces la forma diferencial de la ley de conservación de la carga para una distribución continuada carga eléctrica que es transportada por el vector \vec{J} .

Las ecuaciones del tipo

$$\partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.49)$$

en donde ϕ es la densidad volumétrica asociada a alguna cantidad física y \vec{V} un vector que transporta dicha cantidad se conocen como *ecuaciones de continuidad* y expresan la conservación de la cantidad física. Así, por ejemplo, un fluido de densidad ρ que es transportado a velocidad \vec{v} tiene un vector de densidad de corriente dado sencillamente por $\vec{J} = \rho \vec{v}$ (note que las unidades de \vec{J} son $gr/(cm^2 \times seg)$), de manera que la conservación de la cantidad de fluido se expresa en forma diferencial como

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.50)$$

Esta digresión nos muestra claramente, que la igualdad (3.42) con que empezamos esta sección no es otra cosa que la ley de conservación de la energía expresada como una ecuación de continuidad para la densidad de energía en la cuerda y el vector \vec{S} de transporte de potencia.

3.3 La cuerda con extremos fijos

En esta sección queremos presentar una primera discusión acerca de las oscilaciones transversales de una cuerda tensa cuyos extremos, localizados en $x = 0$ y $x = L$ están fijos. En otras palabras vamos a estudiar las ondas en una cuerda en la que los valores de $u(x, t)$ deben satisfacer las *condiciones de frontera*

$$u(0, t) = 0 \quad (3.51)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (3.52)$$

Nuestro estudio será llevado a cabo de dos formas distintas, en primer lugar con un enfoque intuitivo que nos permitirá entender ciertos aspectos del problema y la forma general de su solución y con un enfoque matemáticamente más riguroso que admite extensiones a otros problemas más generales.

3.3.1 Ondas estacionarias y Series de Fourier

Pensemos en la solución general de la ecuación de ondas unidimensional en términos de la superposición de ondas que viajan a la derecha y a la izquierda. Por esta vez utilizaremos la notación trigonométrica, es decir propongamos que en la cuerda se propaga una onda de la forma

$$u(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) + B \operatorname{sen}(kx + \omega t) \quad (3.53)$$

al imponer las condiciones de borde en $x = 0$ y L resulta

$$-A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t) = 0 \quad (3.54)$$

$$A \operatorname{sen}(kL - \omega t) + B \operatorname{sen}(kL + \omega t) = 0 \quad (3.55)$$

la primera ecuación implica $A = B$, esto lleva a que la segunda se reexpresen en la forma

$$\operatorname{sen}(kL - \omega t) + \operatorname{sen}(kL + \omega t) = 0, \quad (3.56)$$

ó, utilizando identidades trigonométricas elementales,

$$2 \operatorname{sen}(kL) \cos(\omega t) = 0. \quad (3.57)$$

Esta última fórmula implica que la superposición de ondas viajeras a la izquierda y la derecha a lo largo de una cuerda con bordes fijos solo es posible si

$$kL = n\pi \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.58)$$

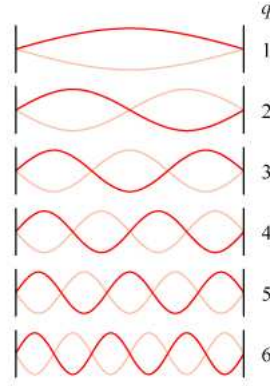


Figure 3.2: En una cuerda con extremos fijos solo pueden formarse ondas armónicas con un número entero de semi-longitudes de onda entre los extremos, es decir, con 0, 1, 2, ... nodos en la región en que la cuerda está libre.

es decir, la propagación de ondas armónicas monocromáticas es posible si y solo si, cuando en un intervalo de longitud L caben un número entero de semilongitudes de onda de las ondas que se superponen. Es decir, cuando

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.59)$$

Volviendo sobre la solución debemos recordar que el número de onda y la frecuencia están relacionados por la relación de dispersión $k = \omega/v$, en virtud de esta identidad, y de las longitudes de onda posibles para la existencia de superposición de ondas armónicas viajeras en la cuerda resulta que esta solo puede vibrar con un conjunto discreto de frecuencias dadas por

$$\omega_n = n \omega_o, \quad (3.60)$$

donde ω_0 , denominada frecuencia fundamental está dada por

$$\omega_0 = \frac{\pi v}{L}, \quad (3.61)$$

claramente las ondas que hemos obtenido tienen que ser ondas estacionarias lo que se demuestra en forma explícita al reescribir las soluciones obtenidas en la forma

$$u(x, t) = 2 A \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t). \quad (3.62)$$

Si en lugar de comenzar con la solución propuesta 3.53 se comienza con

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \cos(kx + \omega t) \quad (3.63)$$

se obtienen soluciones de la forma [**Ejercicio**]

$$u(x, t) = 2 A \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t) \quad (3.64)$$

con las mismas condiciones para k_n y ω_n .

En vista del principio de superposición, la solución más general de la ecuación de ondas para una cuerda vibrante con los extremos fijos es una suma sobre todas las ondas estacionarias posibles (modos) esto es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \operatorname{sen}(n \omega_0 t) + b_n \cos(n \omega_0 t)] \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad \text{con: } \omega_0 = \frac{\pi v}{L} \quad (3.65)$$

A esta solución se le denomina serie de Fourier doble. En la siguiente sección la construiremos de otra forma y estudiaremos la técnica que nos permitirá calcular los coeficientes a_n y b_n

3.3.2 Problemas de contorno: método de separación de variables

Vamos a estudiar el mismo problema que acabamos de resolver: el problema de la cuerda vibrante con extremos fijos, esta vez vamos a atacar el problema utilizando una técnica matemática muy potente y general denominada *separación de variables*, que consiste en proponer el siguiente *ansatz*⁸ para resolver la ecuación de ondas unidimensional.

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.66)$$

al sustituir esta función en la ecuación de ondas se obtiene

$$X''T - \frac{1}{v^2}X\ddot{T} = 0 \quad (3.67)$$

donde ahora las derivadas no son parciales sino ordinarias ($' = \frac{d}{dx}$, $\cdot = \frac{d}{dt}$), la ecuación (3.67) se puede reescribir en la forma

$$X''T = \frac{1}{v^2}X\ddot{T} \quad (3.68)$$

y acá es que podemos hacer la observación que sustenta el método: ‘!cada uno de los lados de esta ecuación tiene que ser constante!, en consecuencia, el *ansatz* de separación de variables convierte el problema de resolución de la ecuación de ondas unidimensional en el de resolver dos ecuaciones ordinarias dependientes de un parámetro real denominado *constante de separación* como sigue:

$$\frac{X''}{X} = \kappa^2 \quad (3.69)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}}{T} = \kappa^2 \quad (3.70)$$

Para el caso que nos ocupa hay tres posibilidades: $\kappa^2 = 0$, $\kappa^2 > 0$ y $\kappa^2 < 0$

⁸una solución de este tipo es denominada solución en *variables separadas*

En el primer caso $\kappa = 0$ la ecuación para X es la siguiente

$$X'' = 0, \quad (3.71)$$

con solución $X(x) = Ax + B$, al evaluar las condiciones de borde obtenemos

$$X(0) = A0 + B = 0, \quad \text{y} \quad (3.72)$$

$$X(L) = AL + B = 0 \quad (3.73)$$

que es un sistema lineal que solo posee la solución trivial ($A = 0$, $B = 0$).

El segundo caso: $\kappa^2 > 0$ también lleva (**ejercicio**) a $X(x) = 0$

Finalmente, el caso $\kappa^2 < 0$ lleva a un análisis más interesante, que comienza por observar la ecuación diferencial para X

$$X'' = -\kappa^2 X = 0 \quad (3.74)$$

cuya solución general es bien conocida

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\kappa x) + B \cos(\kappa x) \quad (3.75)$$

Al evaluar las condiciones de frontera obtenemos de nuevo un sistema lineal para los coeficientes, en este caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sen}(\kappa L) & \cos(\kappa L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

que en notación compacta reescribimos como:

$$\mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.77)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sen}(\kappa L) & \cos(\kappa L) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

La existencia de soluciones no triviales para el sistema (3.77) está definida por la *no inversibilidad* de la matriz \mathbf{M} , que a su vez está dada por la nulidad de su determinante, al estudiar esta condición obtenemos

$$\det(\mathbf{M}) = 0 \iff \sin(\kappa L) = 0 \quad (3.79)$$

esta condición implica las siguientes condiciones para el valor de κ (*existencia de un número infinito de autovalores*)

$$\kappa \times L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.80)$$

o equivalentemente

$$\kappa = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.81)$$

esta es nuestra vieja condición 3.59 para las longitudes de onda de las ondas estacionarias!, al reinsertarla en el problema lineal queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \cos(n\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

que implica: $B = 0$ y A arbitrario. De manera que las soluciones espaciales (*autofunciones*) compatibles con las condiciones de frontera tienen la forma

$$X_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.83)$$

Para construir la parte temporal ($T(t)$) asociada a cada solución espacial factible, debemos recordar que T obedece la ecuación general: $\frac{1}{v^2} \ddot{T} = -\kappa^2$, de manera que para cada autofunción espacial, la función temporal correspondiente estará dada por la solución general de

$$\frac{1}{v^2} \ddot{T} = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (3.84)$$

donde debemos destacar la dependencia en los autovalores $n\pi/L$, al reescribir esta ecuación en la forma

$$\ddot{T} = \frac{n^2 \pi^2 v^2}{L^2} T \quad (3.85)$$

reconocemos de inmediato la frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi v/L$ y podemos poner

$$\ddot{T} = -n^2 \omega_0^2 T \quad (3.86)$$

de donde sigue que

$$T_n(t) = a_n \sen(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t) \quad \omega_n = n\omega_0 \quad (3.87)$$

de esta manera, al multiplicar por la solución espacial correspondiente obtenemos

$$u_n(x, t) = [a_n \sen(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)] \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.88)$$

Ahora bien, debemos notar que para cada n $u_n(x, t)$ es una solución de la ecuación de ondas que satisface las condiciones de frontera, sin embargo, como la ecuación es **lineal**, la superposición de soluciones también es solución, de manera que -por ejemplo-, la función: $u(x, t) = u_{n_1}(x, t) + u_{n_2}(x, t)$ es solución de la ecuación de ondas.

Este razonamiento puede extenderse a la superposición de un número arbitrario de soluciones de manera que, la solución más general de la ecuación de ondas compatible con las condiciones de frontera que hemos dado estará dada por la fórmula

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.89)$$

Es decir, por la fórmula 3.65 que habíamos encontrado en la subsección anterior:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sen(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)] \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.90)$$

Donde evidentemente, aún tenemos un número infinito de constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales: $u(x, 0) = \phi(x)$ y $\partial_t u(x, 0) = \psi(x)$.

Antes de abocarnos al cálculo de las constantes es importante que destaquemos que inicialmente buscábamos una solución en variables separadas y que hemos encontrado una solución general que obviamente no posee esta estructura pero (y esto es notable) que está expresada como superposición de soluciones separadas. Más aun, es posible demostrar que (bajo ciertas condiciones), la serie es convergente y que cualquier solución de la ecuación de ondas puede ser aproximada por una serie del tipo (3.65) tanto como se quiera.

3.3.3 Cálculo de los coeficientes

En la sección anterior habíamos encontrado una expresión para la solución general del problema que describe las oscilaciones transversales de una cuerda con sus extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, a saber:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.91)$$

y habíamos comentado acerca de la necesidad de utilizar las condiciones iniciales para evaluar los coeficientes, labor a que nos vamos a dedicar a continuación. Al evaluar las condiciones iniciales: $u(x, 0) = \phi(x)$ y $\partial_t u(x, 0) = \psi(x)$ se obtiene:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(\omega_n 0) + b_n \cos(\omega_n 0)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \phi(x) \quad (3.92)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \omega_n \cos(\omega_n 0) - b_n \omega_n \sin(\omega_n 0)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \psi(x) \quad (3.93)$$

esto es:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.94)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.95)$$

Dicho en pocas palabras: los coeficientes a_n y $\omega_n b_n$ son los coeficientes de los desarrollos en serie de Fourier unidimensional de las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$. Ahora bien, cabe preguntarse ¿cómo se calculan los coeficientes?.

Para contestar esta pregunta concentrémonos en calcular los coeficientes de la primera de estas series (3.94). para ello comencemos por multiplicar ambos lados de la igualdad por $\operatorname{sen}(\frac{p\pi x}{L})$ luego de lo cual vamos a integrar entre 0 y L para obtener:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \phi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.96)$$

donde “abusivamente” hemos invertido el orden de la suma y la integración.

Ahora bien, el siguiente resultado (**ejercicio**)

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases} \quad (3.97)$$

Que puede reescribirse como

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{np} \quad (3.98)$$

donde

$$\delta_{np} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases} \quad (3.99)$$

permite demostrar sin ningún problema que

$$b_p = \frac{2}{L} \int_0^L \text{sen}\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \phi(x) dx \quad (3.100)$$

análogamente:

$$a_p = \frac{2}{\omega_p L} \int_0^L \text{sen}\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \psi(x) dx \quad (3.101)$$

De esta manera, hemos calculado los coeficientes de la representación en serie de la solución al problema que nos interesaba.

Probablemente, uno de los comentarios más importante que podemos hacer en este momento sea el siguiente:

Los coeficientes de una serie de Fourier son únicos.

Esto significa que si de alguna manera -diferente a calcular- somos capaces de encontrar los coeficientes, ya no hará falta nada más por hacer. A este respecto vale la pena comentar un ejemplo sencillo.

Supongamos que las condiciones iniciales para un problema son

$$\phi(x) = \frac{L}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (3.102)$$

$$\psi(x) = \frac{v}{3} \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \quad (3.103)$$

Para encontrar los coeficientes de las series que nos interesan nos basta con leer para obtener que los únicos coeficientes no nulos son a_2 y b_3 , lo que implica que el movimiento de la cuerda en este caso esta dado por

$$u(x, t) = \frac{L}{9\pi} \text{sen}\left(\frac{3\pi v t}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{L}{2} \cos\left(\frac{2\pi v t}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (3.104)$$

Un último ejercicio interesante es el siguiente: utilice algún programa de manipulación matemática (por ejemplo: matlab, maple, mathematica, o scilab -que es un software de distribución gratuita-) para hacer una animación de lo que acabamos de obtener.

3.4 Ecuación de ondas para la membrana

Para concluir el capítulo estudiemos la construcción de la ecuación que describe el movimiento de una membrana tensa. El análisis es similar al que se llevó a cabo en el estudio de la cuerda en la sección (3.1). La diferencia está en que por ser un problema bidimensional, la membrana posee tensión superficial.

Consideremos un pequeño trozo rectangular de membrana cuyo punto medio está localizado en las coordenadas (x, y) y cuyas esquinas están localizadas en los cuatro puntos $(x \pm \frac{dx}{2}, y \pm \frac{dy}{2})$. Queremos estudiar las oscilaciones transversales de la cuerda, es decir, los cambios en la altura z del punto localizado en la posición (x, y) en función del tiempo ($z(t) = u(x, y; t)$).

Para comenzar debemos notar que la diferencia entre la tensión superficial y la tensión en una cuerda consiste en que las fuerzas en un pequeño trozo de cuerda están aplicadas en los extremos del trocito, mientras que en el caso de la membrana las fuerzas están distribuidas a lo largo de los lados del pequeño rectángulo. Así, por ejemplo, la fuerza neta que actúa en el lado localizado entre los puntos $(x - \frac{dx}{2}, y \pm \frac{dy}{2})$ está dada por:

$$\vec{F} = \vec{\mathcal{T}}(x - \frac{dx}{2}, y) dy \quad (3.105)$$

donde \mathcal{T} es la tensión superficial (cuyas unidades son $\frac{\text{fuerza}}{\text{longitud}}$ en consecuencia, la fuerza neta

que actúa sobre el rectángulo es

$$\vec{F}_{total} = \vec{T}(x + \frac{dx}{2}, y) dy + \vec{T}(x - \frac{dx}{2}, y) dy + \vec{T}(x, y + \frac{dy}{2}) dx + \vec{T}(x, y - \frac{dy}{2}) dx. \quad (3.106)$$

Como estamos considerando solamente las oscilaciones transversales pequeñas de la membrana (i.e. en la dirección z), podemos seguir muy de cerca el argumento de la sección anterior para mostrar que $|\vec{T}|$ es aproximadamente constante. Usando esta conclusión parcial y utilizando argumentos geométricos muy parecidos a los que utilizamos en el caso de la cuerda, es muy fácil ver⁹ que la ley de fuerzas para la pequeña pieza rectangular de la membrana es

$$T \left[\partial_x^2 u(x, y; t) + \partial_y^2 u(x, y; t) \right] dx dy = \sigma \partial_t^2 u(x, y; t) dx dy \quad (3.107)$$

donde σ es la densidad superficial de masa. Definiendo el operador de Laplace bidimensional

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (3.108)$$

podemos reescribir la ecuación (3.107) en la forma

$$\nabla^2 u(x, y; t) - \frac{\sigma}{T} \partial_t^2 u(x, y; t) = 0 \quad (3.109)$$

que es la ecuación de ondas bidimensional (ó ecuación de ondas en $2 + 1$ dimensiones)

3.5 Ejercicios

1. Considere de nuevo la ecuación de ondas en el dominio $x \in [0, L]$, pero esta vez piense en el siguiente conjunto de condiciones iniciales.

$$\partial_x u(0, t) = 0 \quad (3.110)$$

$$\partial_x u(0, L) = 0 \quad (3.111)$$

⁹solo siga el argumento de la cuerda paso a paso

- (a) Utilice la técnica de separación de variables para obtener los *auto-valores* adecuados para el problema espacial.
 - (b) Encuentre la solución general de la ecuación y de una interpretación física al *modo cero*
2. En coordenadas polares la Ecuación de Ondas en el plano tiene la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{1}{v^2} u = 0 \quad (3.112)$$

Utilice la técnica de separación de variables para encontrar la forma de la solución general de esta ecuación destacando sus singularidades (si las tiene).

Chapter 4

Ondas Electromagnéticas

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento ondulatorio de los campos electromagnéticos. Nuestro interés en el problema se centrará en mostrar ciertas características que están ausentes en el comportamiento de las ondas escalares (ondas transversales en cuerdas y membranas u ondas longitudinales en un gas), y que se deriva del hecho de que en el campo electromagnético aparecen varias funciones simultáneas (las componentes de los vectores de campo) a diferencia de lo que ocurre en el caso escalar en que solo hay una función.

4.1 Ecuaciones de Maxwell

En presencia de un medio continuo (un dieléctrico, o un conductor ohmico) un sistema electromagnético se describe a través de un campo escalar, y siete campos vectoriales, a saber:

- La densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{x}, t)$.

- La densidad de corriente eléctrica $\vec{J}(\vec{x}, t)$.
- El desplazamiento eléctrico $\vec{D}(\vec{x}, t)$.
- La polarización $\vec{P}(\vec{x}, t)$.
- El campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$.
- El campo magnético $\vec{H}(\vec{x}, t)$.
- La magnetización $\vec{M}(\vec{x}, t)$ y
- La inducción magnética $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

La dinámica de este conjunto de campos se describe parcialmente por las ecuaciones de Maxwell:

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (4.1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D} \quad (4.3)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (4.4)$$

que deben ser complementadas por las definiciones

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.5)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (4.6)$$

y por un conjunto de relaciones empíricas que permiten encontrar los valores del desplazamiento eléctrico y del campo magnético y en términos del campo eléctrico y la inducción magnética

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \quad (4.7)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{B}) \quad . \quad (4.8)$$

Estas relaciones son denominadas *relaciones constitutivas* y desde el punto de vista matemático son absolutamente necesarias para asegurar que las ecuaciones de Maxwell puedan ser resueltas para una distribución de cargas y corrientes en un material dado.

La descripción completa de un sistema electromagnético requiere de la especificación de la interacción entre los campos y las cargas y corrientes eléctricas que está dada por la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.9)$$

4.2 Las ecuaciones de onda para los campos electromagnéticos

En esta sección vamos a demostrar que las ecuaciones de Maxwell en el vacío ($\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$) y en ausencia de cargas y corrientes implican la existencia de ondas electromagnéticas, para ello comenzaremos por escribir las ecuaciones de Maxwell incorporando estas hipótesis:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (4.13)$$

Si tomamos el rot de la ecuación (4.13) resulta y usamos¹ la ecuación (4.12) se obtiene

$$\nabla(\vec{\nabla} \cdot (\vec{E})) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} \quad (4.14)$$

donde hemos usado la identidad $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$. Tomando en cuenta la ley de Gauss y el hecho de que no hay cargas, el primer término del lado izquierdo de la ecuación (4.14) se anula y obtenemos finalmente:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (4.15)$$

Realizando operaciones análogas en la ecuación (4.12) se obtiene similarmente

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{B} = 0 \quad (4.16)$$

donde se ha utilizado que el campo magnético es solenoidal ($\text{div}(\vec{B}) = 0$).

Ciertamente las ecuaciones (4.15) y (4.16) son ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético. La velocidad de fase de estas ondas es claramente:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (4.17)$$

4.2.1 Ondas Armónicas Planas

Es interesante observar lo que ocurre al tratar de resolver directamente (esto es sin recurrir a las ecuaciones de onda) las ecuaciones de Maxwell sin fuentes para el vacío. La linealidad de las ecuaciones sugiere la posibilidad de proponer soluciones de la forma

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\phi_1} \quad (4.18)$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i\phi_2} \quad (4.19)$$

¹estamos utilizando hipótesis de diferenciabilidad que nos permiten asegurar que $\nabla(\partial_t \vec{B}) = \partial_t(\vec{\nabla} \vec{B})$

con:

$$\phi_i = \vec{k}_i \vec{x} - \omega_i t, \quad i = 1, 2 \quad (4.20)$$

en donde $\vec{\mathcal{E}}_0$ y $\vec{\mathcal{B}}_0$ son vectores de entradas complejas denominados *vectores de polarización* eléctrico y magnético y los vectores de onda \vec{k}_1 , \vec{k}_2 y las frecuencias angulares son -en principio diferentes-. Es fácil utilizar las fórmulas (4.66), (4.68) y (4.69) de la sección complementaria (4.5) para ver que al sustituir este ansatz, las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 = 0 \quad (4.21)$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \quad (4.22)$$

$$\vec{k}_2 \times \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i\phi_2} = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega_1 \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\phi_1} \quad (4.23)$$

$$\vec{k}_1 \times \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\phi_1} = \omega_2 \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i\phi_2} \quad (4.24)$$

de donde se deduce inmediatamente (**ejercicio**) que ambos campos deben tener la misma dependencia espacio-temporal, es decir

$$\phi_1(\vec{r}, t) = \phi_2(\vec{r}, t) \quad (4.25)$$

a su vez. esto implica que las frecuencias y vectores de onda también han de ser iguales, es decir

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k} \quad (4.26)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad (4.27)$$

De acuerdo a este resultado parcial las ecuaciones de Maxwell implican las siguientes relaciones entre los vectores de polarización eléctrico ($\vec{\mathcal{E}}_0$), magnético ($\vec{\mathcal{B}}_0$) y el vector de propagación \vec{k} .

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 = 0 \quad (4.28)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \quad (4.29)$$

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{B}}_0 = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega \vec{\mathcal{E}}_0 \quad (4.30)$$

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0 = \omega \vec{\mathcal{B}}_0 \quad (4.31)$$

de donde se deduce que en el vacío las polarizaciones (y por lo tanto los campos) son ortogonales a la dirección de propagación², es decir

$$\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{k} \quad \vec{\mathcal{B}}_0 \perp \vec{k} \quad . \quad (4.32)$$

Mas aún, la relación (4.31) demuestra que en las condiciones que estamos estudiando, los campos eléctrico y magnético son ortogonales entre sí, y de hecho nos da una regla para encontrar $\vec{\mathcal{B}}_0$ en función del vector de polarización del campo eléctrico, a saber

$$\vec{\mathcal{B}}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{\mathcal{E}}_0 \quad . \quad (4.33)$$

Aún es necesario encontrar -si es que la hay-, una relación entre el vector de onda y la frecuencia. Para encontrar la relación de dispersión adecuada para los medios que estamos estudiando multiplicamos vectorialmente la igualdad (4.30) a la izquierda por el vector de propagación, esto lleva a

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{\mathcal{B}}_0) = -\varepsilon_0 \mu_0 \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0 \quad (4.34)$$

resultado que, al utilizar la fórmula general para el triple producto vectorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (4.35)$$

conduce a la siguiente igualdad

$$(\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}}_0) \vec{k} - k^2 \vec{\mathcal{B}}_0 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{\mathcal{B}}_0 \quad , \quad (4.36)$$

²como ya hemos aprendido en este curso, técnicamente se dice que la propagación es transversal

el primer término del lado izquierdo es nulo debido a la transversalidad así, que en definitiva hemos obtenido

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\vec{\mathcal{B}}_0 = 0 \quad (4.37)$$

de donde se deduce automáticamente la relación de dispersión

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (4.38)$$

Por cierto que la relación de dispersión nos permite expresar el vector de polarización magnético en términos del eléctrico en la forma alternativa

$$\vec{\mathcal{B}}_0 = \frac{\hat{k}}{c} \times \vec{\mathcal{E}}_0 \quad , \quad (4.39)$$

donde \hat{k} es el vector unitario paralelo al vector de onda \vec{k} .

En este punto es importante que destaquemos dos cosas, en primer lugar el hecho de que si bien los campos $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ y $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$ son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, estas no son soluciones físicas, las soluciones físicas se obtienen tomando la parte real o imaginaria de las soluciones complejas. Así, por ejemplo, en el primer caso, las soluciones físicas están dadas por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \{ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \} \quad (4.40)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \Re \{ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) \} \quad , \quad (4.41)$$

debemos apuntar sin embargo, que en cualquier operación lineal (suma por ejemplo) entre los campos, podemos utilizar los campos complejos para luego encontrar el resultado físico tomando la parte real o imaginaria (según halla sido la escogencia a priori).

En segundo lugar es necesario observar que las ecuaciones de Maxwell no son capaces de predecir la dirección de propagación (el vector de onda), esta debe ser introducida como una condición externa al problema.

Es muy interesante destacar el hecho de que -para los campos físicos- toda la información de polarización (se decir, los vectores de polarización) está codificada en solo tres números uno de ellos la fase del campo eléctrico (ya que el magnético está en fase con \vec{E}). Olvidando la fase, es claro que en principio y en vista de que los dos campos de interés son vectoriales deberían hacer falta $2 \times 3 = 6$ números para especificar las componentes de ambos campos. Sin embargo, la igualdad (4.33) que permite expresar \mathcal{B}_0 en función de \mathcal{E}_0 y de la dirección de propagación (que suponemos dada a priori) reduce los números independientes a las tres componentes de E_0 que a su vez se reducen a solo dos componentes ya que \mathcal{E}_0 es perpendicular al vector de propagación. Así por ejemplo, si consideramos una onda plana monocromática que viaja en la dirección del eje z y usamos notación matricial podemos escribir

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

lo que implica que necesariamente la forma del campo de polarización eléctrico tiene que ser

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

en donde E_{0x} y E_{0y} son constantes arbitrarias en términos de las cuales es posible calcular las componentes de B_0 .

Finalmente, es menester recordar que la linealidad de las ecuaciones permite encontrar las soluciones generales de las ecuaciones de Maxwell en términos de la suma de modos armónicos, y es por ello que solo nos hemos preocupado de las ondas planas monocromáticas.

4.3 Flujo de Energía y Vector de Poynting

Con el fin de conectar nuestra discusión con el estudio que hicimos acerca de la cuerda vibrante, es conveniente estudiar el problema de flujo de energía, para ello consideremos la potencia que el campo electromagnético entrega a una carga puntual. En términos de la fuerza de Lorentz, y observando que el campo magnético no hace trabajo, es claro que la potencia que estamos buscando está dada por

$$\frac{dE}{dt} = \vec{E} \cdot (q\vec{v}) \quad (4.44)$$

Si hay una distribución de cargas entonces, la potencia se entrega a la densidad de corriente \vec{J} de manera que

$$\frac{dE}{dt} = \int_V dv \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (4.45)$$

Al utilizar las ecuaciones de Maxwell para sustituir a la densidad de corriente por su relación con los campos eléctrico y magnético se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = \int_V dv \vec{E} \cdot \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \right] \quad (4.46)$$

Ahora bien, es conveniente observar la siguiente identidad:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (4.47)$$

que nos permite reescribir (4.46) en la siguiente forma alternativa:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] \quad (4.48)$$

por otra parte, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ de manera que el último resultado puede reescribirse en la forma

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] \quad (4.49)$$

en definitiva:

$$\int_V dv \vec{E} \cdot \vec{J} = \int_V dv \left[-\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] \quad (4.50)$$

igualdad que, introduciendo la densidad de energía electromagnética,

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \quad (4.51)$$

y utilizando el teorema de la divergencia podemos expresar en la forma:

$$\int_V dv [\vec{E} \cdot \vec{J} + \partial_t u] = -\frac{1}{\mu_0} \int ds \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (4.52)$$

en ausencia de corrientes esta igualdad corresponde ciertamente a la ecuación de continuidad

$$\partial_t u + \text{div}(\vec{S}) = 0 \quad (4.53)$$

donde el vector de Poynting definido como

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (4.54)$$

representa el transporte instantáneo de potencia por unidad de área, de manera que la potencia instantánea (P) que se entrega a una superficie S está dada por:

$$P = \int_S \vec{S} \cdot \hat{n} ds \quad (4.55)$$

4.4 Vector de Poynting para ondas armónicas

Es interesante observar la densidad de energía y el vector de Poynting para una onda electromagnética monocromática. Como las operaciones involucradas no son lineales, es menester

trabajar con los campos físicos concentrándonos en ondas con polarización uniforme. Usando la parte real de las soluciones complejas, la onda electromagnética está formada por los campos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (4.56)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{k} \times \vec{E}_0}{c} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (4.57)$$

De acuerdo a esto, el vector de Poynting es:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \times \left(\frac{\hat{k} \times \vec{E}_0}{c} \right) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) = \\ &= \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \hat{k} \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde hemos utilizado la fórmula que nos permite calcular un producto vectorial triple.

Es interesante calcular la densidad de energía asociada al campo electromagnético que estamos discutiendo, el resultado es (**ejercicio**)

$$u = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (4.59)$$

de manera que podemos expresar en la forma $\vec{S} = \frac{u}{c} \hat{k}$.

Finalmente, nos interesa estudiar los valores medios de estas cantidades, usando el resultado estándar que establece que la media del cuadrado de un coseno es 0.5 obtenemos

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (4.60)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \hat{k} = I \hat{k} \quad (4.61)$$

donde la cantidad I denominada *intensidad* es la potencia media por unidad de área que transporta la onda electromagnética.

4.5 Complemento matemático

En esta sección vamos a establecer algunos resultados que están siendo utilizados en el texto principal del capítulo.

En primer lugar recordemos los operadores diferenciales básicos del análisis vectorial (acá ϕ es un campo escalar, y \vec{V} un campo vectorial):

$$\text{grad}(\phi) = \partial_x \phi \hat{e}_x + \partial_y \phi \hat{e}_y + \partial_z \phi \hat{e}_z \quad (4.62)$$

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z \quad (4.63)$$

$$\text{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Estamos interesados en el siguiente campo escalar $\Phi = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, y en sus derivadas parciales:

$$\partial_i \Phi = A \partial_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i k_i A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad i = x, y, z \quad (4.65)$$

$$\partial_t \Phi = -i\omega A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.66)$$

Podemos aplicar estos resultados al campo vectorial

$$\vec{V} = [\mathcal{V}_x \hat{e}_x + \mathcal{V}_y \hat{e}_y + \mathcal{V}_z \hat{e}_z] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.67)$$

donde $\vec{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}_x \hat{e}_x + \mathcal{V}_y \hat{e}_y + \mathcal{V}_z \hat{e}_z$ es un vector de entradas complejas, con el fin de calcular $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, y $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. El resultado es

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = i\vec{k} \times \vec{V} \quad y \quad (4.68)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = i\vec{k} \cdot \vec{V} \quad (4.69)$$

Verifiquemos el resultado del *rot*,

$$rot\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \mathcal{V}_x e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} & \mathcal{V}_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} & \mathcal{V}_z e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \hat{e}_x [\partial_y V_z - \partial_z V_y] + \dots = \\ &= \{ \hat{e}_x [i(k_z \mathcal{V}_y - k_y \mathcal{V}_z)] + \dots \} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \\ &= i\vec{V}_0 \times \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i\vec{V} \times \vec{k} \end{aligned} \quad (4.71)$$