Tarea 6

Mario Caicedo

Junio 2021

Lectura 1 *KOs probleas 3 en adelante requieren de un cuidadoso estudio del capítulo 5 de las noyas de Física V*

Problema 1 Reflexión y Transmisión entre dos medios I. (problema guiado)

Video 1

Habiendo estudiado el problema más elemental posible de propagación de ondas (la propagación unidimensional en un medio homogéneo) es conveniente complicar un poco las cosas describiendo algún fenómeno más complejo, en este caso el de reflexión y transmisión de ondas. Con este fin, consideraremos las oscilaciones transversales de dos cuerdas tensas unidas firmemente en un punto. Las densidades[1] *son* $\mu_1 \neq \mu_2$

Tomemos el punto de unión como $x = 0$. *La continuidad del sistema y de la tensión en el punto de contacto obligarán a imponer las condiciones de borde*

$$\lim_{x\to 0^-} u(x,t) = \lim_{x\to 0^+} u(x,t) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \partial_x u(x,t) = \lim_{x\to 0^+} \partial_x u(x,t) \tag{2}$$

nuestro objetivo consiste en inquirir acerca del problema de reflexión y transmisión en la interfaz.

[1] de manera que las ondas que viajan en ambas cuerdas lo hacen con velocidades diferentes

Para simplificar el análisis supondremos que ambas cuerdas son semiinfinitas, y consideraremos adicionalmente la incidencia de una onda armónica plana monocromática que viene de $x = -\infty$ (use: $\psi_I(x,t) = A_I\, cos(kx - \omega t)$).

Para la solución completa del problema ($\psi(x,t)$) tome el siguiente ansatz

$$\psi(x,t) = \begin{cases} A_I\, cos(kx - \omega t) + A_R\, cos(kx + \omega t) & x < 0 \\ A_T\, cos(kx - \omega t) & x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

donde A_I, A_R y A_T son las amplitudes incidente, reflejada y transmitida

1. *(¿por qué?, explique)*

2. *(¿cuál es el significado físico de el ansatz?).*

3. *Demuestre que al expresar A_R y A_T en términos de A_I se obtiene*

$$A_R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} A_I \quad y, \tag{4}$$

$$A_T = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} A_I \tag{5}$$

   donde las cantidades z_i -denominadas impedancias acústicas-, solo dependen de las densidades μ_1 y μ_2 deberán ser encontradas por usted.

4. *Defina los coeficientes de reflexión y transmisión como $R = A_R/A_I$ y $T = 1 - R$ y demuestre que*

$$R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \quad y, \tag{6}$$

$$T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \tag{7}$$

   Estas dos cantidades contienen toda la información física de interés para el fenómeno de reflexión y transmisión que estamos estudiando. En efecto, las fórmulas $A_R = RA_I$

y $A_T = TA_I$ *nos muestran que las formas amplitudes de onda reflejada y transmitida corresponden a un reescalamiento de la amplitud incidente.*

Observe que la onda transmitida siempre tiene el mismo signo que la onda incidente. Mientras que en el caso de la onda reflejada puede haber un cambio de signo (o si se quiere, un cambio de fase de π *rad). Este signo relativo (ó diferencia de fase) entre las amplitudes reflejada e incidente depende fuertemente de las características acústicas de ambos medios.*

Problema 2 *Video 2*

Considere una cuerda **semiinfinita***, que se extiende desde* $x = -\infty$ *hasta* $x = 0$*. Discuta la reflexión de ondas para los casos:*

1. *La cuerda está fija en un punto (*$x = 0$*).*

2. *La cuerda está libre en* $x = 0$*.*

Problema 3 *En la discusión de las ondas electromagnéticas hemos utilizado algunas cosas, el objetivo de este ejercicio es comprobar su veracidad.*

Demuestre que

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\,\vec{C} && (8)\\
div(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B}.rot(\vec{A}) - \vec{A}.rot(\vec{B}) && (9)\\
rot(rot(\vec{A}) &= grad(div\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} && (10)
\end{aligned}$$

Problema 4 *Encuentre una fórmula sencilla que permita hallar el vector de polarización eléctrico a partir del vector de polarización magnético y del vector de onda. [Observación: se recomienda el uso de la notación compleja]*

Tome nota del número de componentes independientes que hay entre los dos campos.

Problema 5 *El campo eléctrico asociado a una onda electromagnética es:*

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, cos(k\, y - \omega\, t + \delta) \tag{11}$$

donde $\vec{E}_0$ *es un vector de entradas reales.*

1. *¿Cuál es la forma más general posible de* $\vec{E}_0$*?*

2. *¿Cuál es el campo magnético asociado?*

3. *Encuentre la densidad de energía asociada a este campo electromagnético.*

4. *Encuentre el vector de Poynting.*

Problema 6 *Considere las funciones de valores complejos*

$$F(\vec{r}, t) = \mathcal{A}\, e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega\, t)} \tag{12}$$

$$G(\vec{r}, t) = \mathcal{B}\, e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega\, t)} \tag{13}$$

1. *Demuestre que el promedio en un período el promedio* $\langle \Re e[F] \Re e[G] \rangle$ $\langle \Re e[F] \Re e[G] \rangle = \frac{1}{2} \Re e[F.G^*]$

2. *Use este truquito para expresar el valor medio de la densidad de energía y del vector de Poynting.*

Problema 7 *Una onda electromagnética armónica de frecuencia* ω *que se propaga en el sentido* z *negativo incide sobre un hemisferio de radio* R *cuyo centro está en el origen de coordenadas y cuyo polo norte se encuentra en el punto* $(0, 0, R)$*. El campo eléctrico está polarizado a lo largo del eje* x *y su intensidad máxima es de* E *volts/m.*

¿Cuál es la potencia media que la onda electromagnética entrega al hemisferio?. ¿cuál es la energía que se deposita en el hemisferio en $\mathcal{T}$ *segundos?*

Problema 8 *En las notas de Física 5 y en el problema 4 debemos haber notado que entre los campos eléctrico y magnético parecerían haber seis componentes independietes, sin embargo al tratar con ondas planas monocromáticas el número se reduce a 2.*

Este problema generaliza ese resultado. Considere los campos

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= P(x-ct)\hat{\mathbf{e}}_x + Q(x-ct)\hat{\mathbf{e}}_y + R(x-ct)\hat{\mathbf{e}}_z \\ \mathbf{B} &= S(x-ct)\hat{\mathbf{e}}_x + T(x-ct)\hat{\mathbf{e}}_y + U(x-ct)\hat{\mathbf{e}}_z\end{aligned} \tag{14}$$

1. *Demuestre que las ecuaciones de Maxwell implican $P = S = 0$, $Q = U$ y $R = -T$*

2. *Encuentre la forma explícita de los campos y comente al respecto.*