Ondas y Optica

Tarea 1

Mario I. Caicedo

Mayo 2021

Trate de atacar los problemas de esta tarea (y todas las demas) por sus propios medios.

El material de esta tarea está bastante bien presentado (de hecho la tarea usa la notación de esta referencia) en el capítulo 4 del libro de J. B. Marion.

Los capítulos 3 y 4 del libro de French y el capítulo 1 del libro de ondas de la serie Berkeley contienen muchos detalles acerca de la física de los sistmas tratados en esta tarea y la anterior.

Este material también forma parte del curso *Introducción a la Mecánica*.

1 Oscilaciones armónicas

Problema 1. *Utilice la expresión general para la energía de un movimiento a lo largo del eje x.*

$$E = T + U(x)\,. \tag{1}$$

para poner

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{M}\left(E - U(x)\right)}} \tag{2}$$

Lleve a cabo la integración en el caso del potencial armónico $\kappa x^2/2$ para encontrar la expresión general para $x(t)$ en este caso[1]*.*

Problema 2. *Defina las siguientes cantidades*

[1] A esta téncina de integración de las ecuaciones de movimiento se le denomina integración por cuaraturas.

- *Amplitud*
- *Frecuencia angular*
- *Frecuencia*
- *Período*

2 Oscilaciones Amortiguadas

La fuerza total que actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo del eje x bajo la acción combinada de un resorte y un frenado viscoso (proporcional a la rapidez) es

$$F = -k\,x - b\dot{x}\,, \tag{3}$$

la ecuación de movimiento para este sistema es

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \tag{4}$$

con solución general (cuando $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$).

$$x(t) = A\,e^{-\beta t}\,cos(\omega_1 t - \delta) \tag{5}$$

a esta solución se la conoce como solución subamortiguada.

Problema 3. *¿Por qué no podemos hablar de frecuencia en este caso?*

Problema 4. *Encuentre la solución general de la ecuaciónde movimiento para los casos*

- *Amortiguamiento crítico* $\beta^2 = \omega_0^2$
- *Sobreamortiguado* $\beta^2 < \omega_0^2$

Problema 5. *En un mismo gráfico presente* $x(t)$ *para las condiciones iniciales* $x(0) = 1$ $\dot{x}(0) = 0$ *y los regímenes*

- *Subamortiguado* $\beta^2 < \omega_0^2$
- *Amortiguamientio crítico* $\beta^2 = \omega_0^2$
- *Sobreamortiguado* $\beta^2 < \omega_0^2$
- *Describa la física de estos tres regímenes.*

3 Oscilaciones Forzadas y Resonancia

Comenzamos esta parte de la tarea con un resultado fundamental.

Teorema 1. *La solución más general posible a la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden*

$$\ddot{x} + P(t)\,\dot{x} + Q(t)\,x = F(t)\,. \tag{6}$$

tiene la forma

$$x_G(t) = x_H(t) + x_P(t) \tag{7}$$

donde $x_G(t)$ *es la solución general a la ecuación homogénea* $\ddot{x} + P(t)\,\dot{x} + Q(t)\,x = 0$ *y* $x_P(t)$ *una solución particular a la ecuación no homogénea*

Volvamos a pensar en física, en particular, en el oscilador amortiguado e incluyamos una fuerza armónica dependiente del tiempo, de manera que la fuerza neta que actúa sobre la partícula tiene la forma

$$F = -k\,x - b\dot{x} + F_0\,cos(\omega\,t)\,, \tag{8}$$

donde F_0 es la magnitud de la fuerza armónica y ω su fecuencia.

Problema 6. *Haga un bosquejo de un sistema mecánico realista con esta dinámica.*

¿Qué sistema eléctrico es modelado por esta ecuación?

En ese caso, la ecuación de movimiento resultante es

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{M}cos(\omega t) \tag{9}$$

Problema 7. *En este problema buscaremos una solución particular a la ecuación 9. Con este fin comencemos por notar que la parte real de la ecuación*

$$\ddot{z} + 2\beta\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = \frac{F_0}{M}e^{i\omega t} \tag{10}$$

reproduce exactamente la ecuación 9. Aprovechando esta propiedad, proponga $z(t) = \mathcal{A}\,e^{i\omega t}$ *como solución a la ecuación 10 y concluya*

$$\mathcal{A} = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\,e^{i\delta}\,, \tag{11}$$

con

$$\delta = arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \tag{12}$$

tome la parte real para dar la solución particular a la ecuación 9

Problema 8. *Escriba la solución general de la ecuación 9.*

Encuentre la solución para las condiciones iniciales:

- $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$

- $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$

Problema 9. *La solución particular de la ecuación 9 que conseguimos en el problema anterior se conoce como solución estacionaria*[2]*. Grafique la amplitud y la fase de la solución estacionaria. Utilice ω/ω_0 como variable de graficación.*

¿Que es la resonancia?. De algunos ejemplos.

¿Se le ocurre algún ejemplo en el cuál la resonancia pudiera resultar catastrófica?

[2] suele hablárse de los regímenes transitorio y estacionario del sistema