Modos Normales y Álgebra Lineal

Mario Caicedo

Mayo, 2021

1. Introduction

Esta nota pretende destacar la relación entre los problemas de oscilaciones lineales acopladas y algunos resultados de la teoría espectral.

Recordemos las ecuaciones que describen la dinámica de dos osciladores acoplados,

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2\, x_1 + \omega_c^2\,(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2\, x_2 - \omega_c^2\,(x_2 - x_1) \end{aligned}} \tag{1}$$

2. Álgebra Lineal for Dummies

Pensemos en las coordenadas ($x_1(t)$ y $x_2(t)$) de las dos masa de los osciladores acoplados como elementos de un espacio vectorial abstracto $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= x_1(t)\,\hat{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{x}_2(t) &= x_2(t)\hat{\mathbf{e}}_1 \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

obviamente podemos reescribir los vectores abstractos $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ en la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= x_1(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_1(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]\\
\mathbf{x}_2(t) &= x_2(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_1(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

ó

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= x_1(t)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{u}}_r]\\
\mathbf{x}_2(t) &= x_2(t)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\hat{\mathbf{u}}_l - \hat{\mathbf{u}}_r]
\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_l$ son

$$\hat{\mathbf{u}}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{6}$$

Estos vectores están relacionados con los modos rápido y lento que discutimos cuando estudiamos la dinámica de dos osciladores acoplados. Es evidente que los dos vectores $\hat{\mathbf{u}}_l$ y $\hat{\mathbf{u}}_r$ son LI, menos evidente, pero no por ello menos cierto, estos vectores constituyen una base ortonormal (que llamaremos U) de $\mathcal{V}$ a la que nos referiremos como la base de *modos normales*.

Resumiendo: Hasta este punto hemos introducido dos bases en $\mathcal{V}$, en estas bases, el vector $\mathbf{x}_1(t)$ se expresa como

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix}x_1(t)\\0\end{pmatrix}_C \qquad \text{en la base canónica y}\\
\mathbf{x}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_1(t)\end{pmatrix}_U \qquad \text{en la base de modos normales}
\end{aligned} \tag{7}$$

de la misma manera,

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix}0\\x_2(t)\end{pmatrix}_C, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x_2(t)\\-x_2(t)\end{pmatrix}_U \tag{8}$$

Continuemos avanzando arreglando las entradas de los versores de la base de modos normales en columnas de una matriz

$$\mathbf{P}_{C\to U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

esta matriz cambia las componentes de un vector de la base canónica a la base U, en efecto, si aplicamos la matriz a $\mathbf{x}_1$ expresado en la base canónica obtenemos

$$\mathbf{P}_{C\to U} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}_U , \tag{10}$$

y

$$\mathbf{P}_{C\to U} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_2(t) \end{pmatrix}_U , \tag{11}$$

El movimiento de las dos masas acopladas está definido por el vector

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C \tag{12}$$

o

$$\mathbf{X}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) - x_2(t) \end{pmatrix}_U , \tag{13}$$

como vemos, las entradas de $\mathbf{X}(t)$ en la base U definen -salvo normalización- las coordenadas que diagonalizan al sistema de ecuaciones diferenciales que describe el sistema.

Debido a que las columnas de la matriz $\mathbf{P}_{C\to U}$ son vectores ortonormales, $\mathbf{P}_{C\to U}$ es una matriz ortogonal y por lo tanto

$$(\mathbf{P}_{C\to U})^{-1} = (\mathbf{P}_{C\to U})^T , \tag{14}$$

ahora bien, es evidente que $(\mathbf{P}_{C\to U})^{-1}$ hace el cambio de base de la base U a la base canónica, por lo tanto, la matriz de cambio de base de U a la base canónica es

$$\mathbf{P}_{U\to C} = \mathbf{P}^T_{C\to U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \tag{15}$$

3. Jugando en la liga AAA

El sistema 1 puede expresarse como

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = \mathbf{\Omega}_C \mathbf{X}_C \,, \tag{16}$$

donde

$$\mathbf{X}_C \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{\Omega}_C = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2 - \omega_c^2 \end{pmatrix} . \tag{17}$$

Ahora bien, si se piensa un poco, debería resultar evidente que la fisica tiene que ser independiente de su representación, en este caso, independiente de la base que estemos usando, dicho de otro modo, deberíamos utilizar una notacción independiente de coordenadas tal como

$$\boxed{M\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{X}} \tag{18}$$

entendiendo que, cuando queramos expresar las ecuaciones de manera explícita deberíamos decir en que bae las estamos expresando. Esta idea de expresar las ecuaciones en forma independiente de las coordenadas no debe ser nueva para usted, en efcto, cuando escribimos la seguynda ley de Newton en la forma

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} \,, \tag{19}$$

la única referencia a coordenadas stá en la primera ley que declara que la segunda ley solo es válida en sistemas inerciales.

Juguemos un poco con estas ideas, en la base canónica

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = \mathbf{\Omega}_C \mathbf{X}_C \,, \tag{20}$$

Usando que $\mathbf{P}_{U\to C}\mathbf{P}_{C\to U} = \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{X}}_C &= \{\mathbf{\Omega}_C[P_{U\to C}][P_{C\to U}]\}\, \mathbf{X}_C = \\ &= \{\mathbf{\Omega}_C[P_{U\to C}]\}\, [P_{C\to U}]\mathbf{X}_C \end{aligned} \tag{21}$$

finalmente multipliquemos ambos lados a la izquierda por $\mathbf{P}_{C\to U}$

$$M\mathbf{P}_{C\to U}\ddot{\mathbf{X}}_C = \mathbf{P}_{C\to U}\,\{\mathbf{\Omega}_C[P_{U\to C}]\}\,[P_{C\to U}]\mathbf{X}_C \tag{22}$$

es decir,

$$M\ddot{\mathbf{X}}_U = [\mathbf{P}_{C\to U}\,\mathbf{\Omega}_C\, P_{U\to C}]\,\mathbf{X}_U \,, \tag{23}$$

esta última ecuación nos dice algo que ya habíamos aprendido en los cursos de álgebra lineal, el operador $\mathbf{\Omega}_U$ se obtiene de $\mathbf{\Omega}_U$ a través de una transformación de similaridad.

Hagamos el ejercicio de cálculo esxplícito de $\mathbf{\Omega}_U$,

$$\mathbf{\Omega}_U = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_0^2-\omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2-\omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Comenzamos por el producto a derechas,

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2-\omega_c^2 & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -\omega_0^2-\omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2-2\omega_c^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2+2\omega_c^2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Al sustituir,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_U &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2-2\omega_c^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2+2\omega_c^2 \end{pmatrix} = \\ &= 1/2 \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -2\omega_0^2+4\omega_c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2+2\omega_c^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

Si usamos la base U para escribir el sistema e ecuaciones diferenciales queda

$$M\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_l(t) \\ u_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 + 2\omega_c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_l(t) \\ u_r(t) \end{pmatrix} \;, \quad \begin{pmatrix} u_l(t) \\ u_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) - x_2(t) \end{pmatrix} \tag{27}$$

que es exactamente lo que obtuvimos en la tarea #1.

En definitiva, acabamos de demostrar que en la base de modos normales, las ecuaciones diferenciales se desacoplan en dos problemas de oscilaciones armónicas con las frecuencias baja y alta que habíamos encontrado anteriormente.

4. Generalización

Ahora todo está claro. Al proponer la solución $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}\, e^{i\omega t}$, el sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en el problema espectral

$$\mathbf{\Omega X}_0 = \lambda\, \mathbf{X}_0 \tag{28}$$

con $\lambda = -\omega^2$. En este y en todos los casos, ocurre la matriz cuyo espectro se está estudiando es real y simétrica, en ese caso, el teorema espectral asegura que los autoepacios asociados a autovalores diferentes son ortogonales, pero hay algo más.

En los problemas de oscilaciones de interés físico suelen encontrarse tantos autovalores distintos como partículas oscilantes y en consecuencia el conjunto de autovectores constituye una base en que $\mathbf{\Omega}$ es diagonal, esa es, precisamente, la base de modos normales.

En la siguiente nota vamos a dar respuesta precisa a la pregunta:

¿Qué características tiene los modos normales?

Por ahora nos contentaremos con la respuesta sin demostración

1. Un sistema de N osciladores acoplados tiene exactamente N modos normales de oscilación $\hat{\mathbf{u}}_i$, $i = 1, 2, ..., N$

2. Cada modo posee su propia frecuencia característica ω_k, $k = 1, 2, ..., N$

3. Los modos constituyen una base del espacio $\mathcal{V}$ de soluciones del sistema de N oscladores acoplados.

4. Cuando $\mathbf{X}(t)$ es proporcional a un modo normal

$$\mathbf{X}(t) \propto \; cos(\omega_i t - \delta_i)\, \hat{\mathbf{u}}_i \, ,$$

) o dicho de otra manera, cuando el sistema se mueve en un modo normal, todas y cada una de las partículas del sistema oscila con la frecuencia propia del modo.

5. El movimiento más general posible del sistema es una combinación de mosod normales, es decir

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \, cos(\omega_i t - \delta_i)\, \hat{\mathbf{u}}_i \tag{29}$$