Óptica Geométrica II

Tarea 9

Mario Caicedo

Julio 2021

1. Introducción

Esta última tarea del curso tiene un objetivo integrador.

En la tarea anterior propusimos soluciones de tipo ondulatorio de amplitud variable y y fase:

$$k_0\,\mathcal{S}(\mathbf{r}) - \omega t \tag{1}$$

a las ecuaciones de Maxwell y encontramos que, en el límite de longitud de onda cero[1] la EIKONAL ($\mathcal{S}(\mathbf{r})$) ha de satisfacer la cuación (denominada ecuación eikonal),

$$[grad(\mathcal{S})]^2 = n^2(\mathbf{r})\,, \tag{2}$$

donde

$$n(\mathbf{r}) = \frac{c}{v(\mathbf{r})}\,, \tag{3}$$

es el índice de refracción del material en que se propaga la onda.

[1] o de fecuencia infinita, si así lo prefiere

En esa misma tarea definimos los frentes de onda como las superficies de nivel de la Eikonal y a los rayos como las curvas integrales del campo de normales unitarias a los frentes de onda, es deir, como la familia de soluciones a la ecuación

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{grad\mathcal{S}}{n(\mathbf{r})} , \tag{4}$$

donde s es el parámetro s es la longitu de arco y en consecuencia,

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1 \tag{5}$$

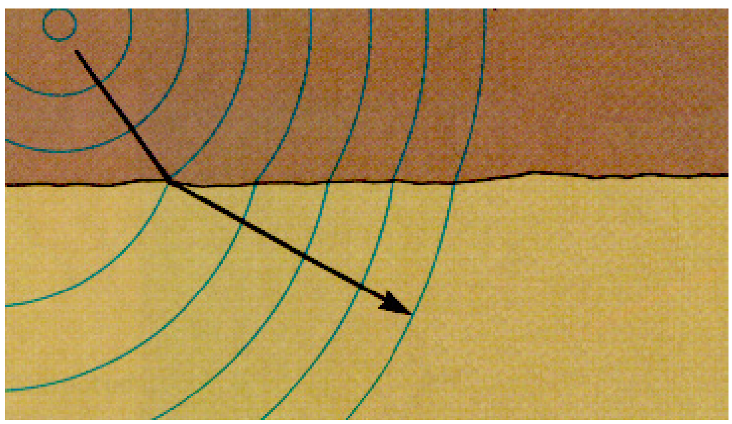

Figura 1: Frentes de onda y trayectorias de rayos en dos medios homogéneos separados por una interface

2. Problemas

Comencemos por deducir una ecuación diferencial de segundo orden para los rayos.

Problema 1 *Tomando la derivada de la ecuación 4 con respecto al parámetro de longitud de* *arco y usando la fórmula 5 demuestre que*[2]

$$\frac{d}{ds}\left(n(\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = grad(n(\mathbf{r})) \tag{6}$$

Problema 2 *El principio de Fermat establece que la trayectoria de un rayo que une dos puntos es el camino que minimiza el tiempo de viaje.*

- *¿Puede expresarse el principio de Fermat como la minimización de la funcional A?*

$$A = \frac{1}{c}\int n(\mathbf{r})\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\xi}\right| d\xi\,. \tag{7}$$

- *Utilice el apéndice A para demostrar que, si se escoge a ξ como igual al parámetro de longitud de arco, la ecuación diferencial*

$$\frac{d}{ds}\left[\left(n(\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\right] = grad\,(n(\mathbf{r})) \tag{8}$$

  es la condición de extremal de la funcional A.

- *Interprete cuidadosamente estos resultados*

Al llegar a este punto, usted habrá culminado el curso **Ondas y Óptica**.

Recuerde siempre que los conceptos y teorías que hemos estudiado se extienden y generalizan a todas las teorías físicas que contienen elementos ondulatorios.

Espero que usted haya disfrutado este curso tanto como yo. Mi mayoir deseo para usted es que continúe en su desarrollo como físico y futuro investigador. Espero con ansias aprender de los desarrollos futuro que se desprendan de su trabajo

[2]sea explícito en todos sus pasos

A. Ecuaciones de Euler Lagrange

El objetivo del cálculo variacional consiste en encontrar xtremos de funcionales, una funcional típica tiene la forma

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(q^i, \dot{q}^i)\, dt \,, \tag{9}$$

de esta manera, para cada función $F(q^i, \dot{q}^i)$, de N variables $q^i = q^i(t)$, una funcional da un número.

El ejemplo físico por antonomasia de una funcional es la *acción*,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i)\, dt \,, \tag{10}$$

donde la función de Lagrange, o Lagrangiano de una patícula puntual, cuya posición es descrita por las *coordenadas generalizadas* $q^i(t)$, que se encuentra inmersa en un potencial $U = U(q^i)$ es

$$L(q^i, \dot{q}^i) = T - U \,, \tag{11}$$

En el caso general, se demuestra que la funcional J alcanza un punto estacionario toda vez que la función F satisfaga el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F(q^i, \dot{q}^i)}{\partial \dot{q}^i}\right] = \frac{\partial F(q^i, \dot{q}^i)}{\partial q^i} \tag{12}$$

En el caso de la mecánica de un punto material descrita en el formalismo de Lagrange, el movimiento de la partícula corresponde a los mínimos de la acción.

Problema 3 *Utilice el formalismo de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento para una partícula que se mueve en un potencial central*[3]

[3] En coordenadas esféricas un potencial central tiene la forma $U(r, \theta, \phi) = u(r)$