Tarea 5

Mario Caicedo

Junio 2021

Lectura 1 *Repase cuidadosamente elcapítulo 4 de las Notas del curso Física 5 y lea el capítulo 5. Haga énfasis en los fenómenos de transporte de energía*

Problema 1 *La expresión general para la velocidad de propagación de las ondas superficiales en un fluido es:*

$$v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\mathcal{T}}{\lambda\rho}\right)\, tanh\left(\frac{2\pi\, h}{\lambda}\right)}$$

donde: g es la aceleración de gravedad, $\mathcal{T}$ y ρ la tensión superficial y densidad del fluido,, h la profundidad a que se encuentra el fondo del contenedor, y λ la longitud de onda.

Demuestre que si $h << \lambda$ resulta $v \approx \sqrt{gh}$. Interprete físicamente el resultado.

Problema 2 *Encuentre condiciones para k_x, k_y y ω para que las ondas armónicas planas monocromáticas:*

$$\Psi_\pm(x, y; t) = A\, e^{i(\vec{k}.\vec{r} \pm \omega\, t)}$$

(A una constante compleja) sean soluciones de la ecuación de ondas en $2D$. Para $t = t_0$ fijo, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos de fase constante?.

¿Cuál será la generalización de este resultado al caso tridimensional?.

Problema 3 *La forma inicial de una cuerda de longitud L cuyos extremos están fijos en $x = 0$ y $x = L$ está dada por:*

$$\phi(x) = \begin{cases} x \ si \ 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} - x \ si \ \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

si la cuerda está inicialmente en reposo ¿cuál será la forma ($u(x,t)$) de la cuerda para todo instante posterior.

Ayuda: *La serie de Fourier de la función*

$$\phi(x) = \begin{cases} x \ si \ 0 < x < \pi \\ -x \ si \ -\pi < x < 0 \end{cases}$$

es:

$$f(s) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \ impar} \frac{cos(nx)}{n^2}$$

Problema 4 *Encuentre la solución general para las oscilaciones de una cuerda vibrante sujeta a las con diciones de contorno ($\partial_x u(0,t) = 0$, $\partial_x u(L,t) = 0$ denominadas condiciones de extremos libres. ¿Puede dar una interpretación física a estas condiciones?.*

Problema 5 *Considere la siguiente onda armónica monocromática que se propaga a través de una cuerda de densidad μ sometida a tensión T:*

$$u(x,t) = A\, sen(kx - \omega\, t)$$

Encuentre el vector de transporte de potencia ($\vec{S}(x,t)$) y verifique que la densidad de denergía $\rho = u_c + u_e$ y $\vec{S}$ satisfacen la ecuación de continuidad.

Problema 6 *Utilice la expresión general para la energía contenida en un trozo de cuerda limitado por dos puntos de coordenadas x_1 y x_2:*

$$E(x_1, x_2; t) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\mu(\partial_t\, u)^2 + T(\partial_x\, u)^2\right]$$

para encontrar una fórmula para la energía de una cuerda vibrante con sus extremos fijos en términos de los coeficientes de Fourier de la solución. ¿E cambia con el tiempo?, ¿por qué?.

Problema 7 *Considere una membrana cuadrada de lado L, coloque un sistema de coordenadas tal que uno de los vértices de la membrana se encuentre en el origen, y su opuesto en el punto (L, L). Usando un argumento heurístico y sabiendo que una membrana satisface la ecuación de ondas con*

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\sigma}}\,,$$

donde $\mathcal{T}$ es la tensión superficial de la membrana, y σ la densidad superficial de masa.

¿Qué forma esperaría para los modos de una mebrana cyos bordes se mantienen fijos?.

¿Ocurrirá alguna modificación si la membrana es rectangular y sus lados son de longitud L_x, L_y?

Problema 8 *Considere una membrana cuadrada de lado L, coloque un sistema de coordenadas tal que uno de los vértices de la membrana se encuentre en el origen, y su opuesto en el punto (L, L). Usando un argumento heurístico y sabiendo que una membrana satisface la ecuación de ondas con*

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\sigma}}\,,$$

donde $\mathcal{T}$ es la tensión superficial de la membrana, y σ la densidad superficial de masa.

1. *¿Qué forma esperaría para los modos de una mebrana cyos bordes se mantienen fijos?.*

2. *¿Ocurrirá alguna modificación si la membrana es rectangular y sus lados son de longitud L_x, L_y?*

Problema 9 *Retomando la física del problema anterior.*

1. *Examine la dinámica de un pequeño rectángulo de una mebrana tensa para demostrar que sus oscilaciones transversales obedecen la ecuación de ondas en $2 + 1$.*

2. *Encuentre los modos de oscilación tansersal de una menbrana rectangular con bordes fijos.*

Problema 10 *En tres dimensiones y si se considera el caso de simetría esférica, la ecuación de ondas adopta la forma*[1]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(r\psi(r,t)\right)}{\partial\, r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial\, t^2}$$

Demuestre que la solución más general posible de esta ecuación es

$$\psi(r,t) = \frac{f(r+vt)}{r} + \frac{g(r-vt)}{r}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales de una variable con derivadas segundas contínuas. Interprete el factor $\frac{1}{r}$.

¿Cuál será la forma de las ondas armónicas monocromáticas de simetría esférica?

[1] acá como es usual, r representa la distancia al origen de coordenadas