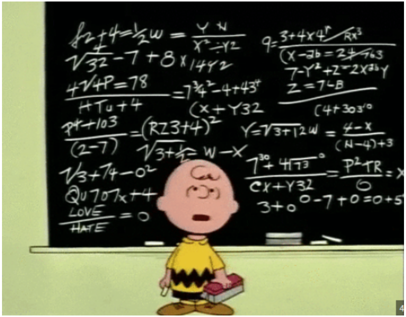
Fracciones Parciales

Mario I. Caicedo

1 de diciembre de 2025

Conclusiones y Preguntas

- **Objetivo de estas notas:** Comprender y aplicar el método de descomposición en fracciones parciales.



- Las **funciones racionales**, cocientes de polinomios, aparecen frecuentemente.
- En consecuencia, no es raro encontrar la necesidad de llevar a cabo operaciones elmentales de suma y producto de este tipo de funciones.
- El método de fracciones parciales está íntimamnente relacionado con el problema que acabamos de describir.

Considera la suma de las **fracciones simples**:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$$

ciertamente,

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2} &= \frac{2(x-2)+3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \\ &= \frac{2x-4+3x+3}{x^2-x-2}\end{aligned}$$

así que

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{5x-1}{x^2-x-2}$$

¿Qué es el método de fraciones parciales ó simples?

El método de fracciones parciales no es más que una técnica que nos permite realizar el proceso inverso al que acabamos de ver, es decir, reexpresar la función racional:

$$f(x) = \frac{5x - 1}{x^2 - x - 2}$$

en la forma:

$$\frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}$$

Definición

Una función racional $R(x)$ se define como el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \textit{donde } Q(x) \neq 0$$

Ejemplo:

$$R(x) = \frac{2x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)}$$

¿Qué es una Fracción Simple (o Parcial)?

Definición

Una fracción simple es una fracción racional con un denominador específico y donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Ejemplos

$$R(x) = \frac{7}{(x-4)^3}$$

$$R(x) = \frac{1-2x}{(x^2+x+1)^2}$$

Caso 1: Denominador - Potencia de un Factor Lineal

Una fracción simple puede tener la forma:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}$$

donde:

- A, a, y b son constantes ($a \neq 0$).
- x es la variable.
- n es un entero positivo ($n \geq 1$).
- El grado del numerador (0) es menor que el grado del denominador (n).

Ejemplos del Caso 1

Algunos ejemplos de fracciones simples con denominadores de factores lineales elevados a una potencia son:

$$\frac{3}{x-2}, \quad \frac{-5}{(2x+1)^2}, \quad \frac{1/2}{(x+7)^3}$$

En cada caso, el denominador es una potencia de un factor lineal, y el numerador es una constante (grado 0), que es menor que el grado del denominador.

Caso 2: Denominador - Potencia de un Factor Cuadrático Irreducible

Una fracción simple también puede tener la forma:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

donde:

- A, B, a, b, y c son constantes ($a \neq 0$).
- x es la variable.
- n es un entero positivo ($n \geq 1$).
- El factor cuadrático ax^2+bx+c es irreducible (su discriminante $b^2-4ac<0$).
- El grado del numerador (a lo sumo 1) es menor que el grado del denominador ($2n$).

Ejemplos del Caso 2

Algunos ejemplos de fracciones simples con denominadores de factores cuadráticos irreducibles elevados a una potencia son:

$$\frac{2x-1}{x^2+1}, \quad \frac{7}{(x^2+x+1)^2}, \quad \frac{-x+3}{(3x^2+2x+5)}$$

(Nota: En cada denominador cuadrático, el discriminante es negativo, confirmando su irreducibilidad). En cada caso, el grado del numerador (a lo sumo 1) es menor que el grado del denominador.

Características de una Fracción Simple

- El denominador es la potencia de un factor irreducible del denominador original (lineal o cuadrático).
- El grado del polinomio en el numerador es estrictamente menor que el grado del polinomio en el denominador.

Observación

Para aplicar el método de fracciones parciales, el grado de $P(x)$ debe ser menor que el grado de $Q(x)$. Si no lo es, primero debemos realizar la división larga de polinomios.

Caso 1: Denominadores Lineales Distintos

Si el denominador $Q(x)$ puede factorizarse en factores lineales distintos:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\dots(a_nx + b_n)$$

La descomposición en fracciones parciales tiene la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ son constantes a determinar.

Ejemplo Caso 1

Descomponer

$$\boxed{\frac{5x-3}{(x+2)(x-1)}} \tag{1}$$

claramente

$$\frac{5x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

Multiplicando por $(x+2)(x-1)$:

$$5x-3 = A(x-1) + B(x+2)$$

Ejemplo Caso 1: Descomposición (cont)

Resolviendo para A y B: Para $x = 1$:
$5(1) - 3 = B(1+2) \implies 2 = 3B \implies B = \frac{2}{3}$. Para $x = -2$:
$5(-2) - 3 = A(-2-1) \implies -13 = -3A \implies A = \frac{13}{3}$.
Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{5x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{13/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1}} \tag{2}$$

Caso 2: Denominadores Lineales Repetidos

Si el denominador $Q(x)$ tiene factores lineales repetidos:

$$Q(x) = (ax + b)^n$$

La descomposición incluye términos para cada potencia del factor:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

Ejemplo Caso 2

Descomponer

$$\boxed{\frac{x+2}{(x-1)^2}} \tag{3}$$

:

$$\frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Multiplicando por $(x-1)^2$:

$$x+2 = A(x-1) + B$$

Ejemplo Caso 2: Descomposición

Resolviendo para A y B: Para $x = 1$:
$1 + 2 = A(0) + B \implies B = 3$. Sustituyendo $B = 3$:
$x + 2 = A(x - 1) + 3 \implies x - 1 = A(x - 1) \implies A = 1$, de donde,

$$\boxed{\frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}} \tag{4}$$

Caso 3: Denominadores Cuadráticos Irreducibles Distintos

Si $Q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles (no factorizables en lineales reales):

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)$$

La descomposición tiene la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo Caso 3: Descomposición

Descomponer

$$\frac{3x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} \tag{5}$$

$$\frac{3x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

Multiplicando por $(x-1)(x^2+1)$:

$$3x^2 + x + 2 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x-1)$$

Ejemplo Caso 3: Descomposición

Resolviendo para A, B y C (como vimos antes): $A = 3$, $B = 0$, $C = 1$.
Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{3x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}} \tag{6}$$

.

Caso 4: Denominadores Cuadráticos Irreducibles Repetidos

Si $Q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos:

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^n$$

La descomposición incluye términos para cada potencia del factor:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

La integración de estos términos puede ser más compleja y a menudo requiere sustituciones trigonométricas o manipulación algebraica.

Resumen de los Casos

Caso	Factor en $Q(x)$	Término en la Descomposición
1	$(ax+b)$	$\frac{A}{ax+b}$
2	$(ax+b)^n$	$\frac{A_1}{ax+b} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
3	(ax^2+bx+c) (irreducible)	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
4	$(ax^2+bx+c)^n$ (irreducible)	$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Estrategia General para la Descomposición

1. Factorizar completamente el denominador $Q(x)$.
2. Escribir la forma de la descomposición en fracciones parciales según los factores de $Q(x)$.
3. Determinar las constantes (como A, B, C, etc.) resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de igualar los numeradores.
4. Integrar cada una de las fracciones parciales obtenidas.
5. El método de fracciones parciales busca descomponer una función racional compleja en una suma de estas fracciones simples, que son más fáciles de integrar.

Ejemplo 1: Denominadores Lineales Distintos

Descomponer la función racional:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}$$

Escribimos la forma de la descomposición:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Multiplicando por $(x-1)(x+2)$:

$$3x+5 = A(x+2) + B(x-1)$$

Ejemplo 1: Resolviendo las Constantes

Para encontrar A y B:

- Si $x = 1$: $3(1) + 5 = A(1 + 2) + B(1 - 1) \implies 8 = 3A \implies A = \frac{8}{3}$.
- Si $x = -2$: $3(-2) + 5 = A(-2 + 2) + B(-2 - 1) \implies -1 = -3B \implies B = \frac{1}{3}$.

Por lo tanto, la descomposición es:

$$\frac{3x + 5}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{8/3}{x - 1} + \frac{1/3}{x + 2}$$

Ejemplo 2: Denominadores Lineales Repetidos

Descomponer la función racional:

$$\frac{x-4}{(x+1)^2}$$

Escribimos la forma de la descomposición:

$$\frac{x-4}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

Multiplicando por $(x+1)^2$:

$$x - 4 = A(x+1) + B$$

Ejemplo 2: Resolviendo las Constantes

Para encontrar A y B:

- Si $x = -1$: $-1 - 4 = A(-1+1) + B \implies -5 = B$.
- Comparando los coeficientes de x: $1 = A$.

Por lo tanto, la descomposición es:

$$\frac{x-4}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-5}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}$$

Ejemplo 3: Denominador Cuadrático Irreducible

Descomponer la función racional:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}$$

Escribimos la forma de la descomposición:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$:

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

Ejemplo 3: Resolviendo las Constantes

Expandiendo y comparando coeficientes:

$$2x^2 - x + 4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

- Coeficientes de x^2: $2 = A + B$
- Coeficientes de x: $-1 = C$
- Términos constantes: $4 = 4A \implies A = 1$

Sustituyendo $A = 1$ en $2 = A + B$, obtenemos $B = 1$. Por lo tanto, la descomposición es:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$

- En muchos problemas de cálculo integral es necesario recurrir a tales operaciones entre funciones racionales, lo que a veces resulta desafiante. En estos casos, las fracciones parciales pueden ser de gran ayuda.
- A primera vista, es evidente que la integral

$$J = \int \frac{x^3 + 2x}{x^4 - 1}\, dx$$

no es sencilla de resolver

¿Por Qué Fracciones Parciales?

El integrando es una función racional:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^4 - 1}$$

El denominador se puede factorizar como:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

La presencia de factores lineales distintos y un factor cuadrático irreducible en el denominador sugiere que la descomposición en fracciones parciales simplificará la integral.

La Descomposición Simplificará la Integral

Al descomponer

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

se obtiene una sumade de fracciones simples de la forma:

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

la integral original se transformará en una suma de integrales más fáciles de resolver (involucrando logaritmos y la función arcotangente).

Una Integral Problemática

¿Cómo integrarías esta función directamente?

$$\int \frac{5x-3}{x^2-x-2}dx$$

El integrando se puede poner como

$$\frac{5x-3}{x^2-x-2} = \frac{5x-3}{(x+2)(x-1)},$$

que no es otra cosa que la fórmula 1 del ejemplo del Caso 1. La integración de esta expresión sigue siendo complicada, pero la descomposición en fracciones parciales simplifica enormemente esta tarea.

En efecto, al usar la descomposición en fracciones simples (fórmula 2) la integral se transforna en

$$\int \frac{5x-3}{(x+2)(x-1)}dx = \int \left(\frac{13/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1}\right) dx\,,$$

es decir, una suma de integrales elementales,

$$= \frac{13}{3}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}dx\,.$$

Integrando cada término:

$$= \frac{13}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$$

Ejemplo Caso 2. Integración

La integral

$$I = \int \frac{x+2}{(x-1)^2}\, dx\,,$$

también se simplifica notablemente con el uso de las fracciones simples. En efecto, la fórmula 4 permite reescribir la integral como

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} \right) dx$$

es decir,

$$I = \int \frac{1}{x-1}\, dx + 3 \int (x-1)^{-2}\, dx$$

y de acá, la integración cada término y posterior suma llevan a

$$I = \ln|x-1| + 3\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

Ejemplo Caso 3: Integración (Parte 1)

Consideremos finalmente, la integral

$$I = \int \frac{3x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} dx \tag{7}$$

cuyo integrando es la fracción del miembro izquierdo de la fórmula 5.

Utilizando la descomposición en fracciones simpoles correspondiente (eq. 6))

$$I = \int \frac{3x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

Lo que separa la integral como:

$$I = 3 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

Ejemplo Caso 3: Integración (Parte 2)

Ambas integraciones son directas, en efecto,

$$3\int \frac{1}{x-1}dx = 3\ln|x-1| + C_1$$

y

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + C_2$$

Combinando ambos resultados resultados:

$$\boxed{\int \frac{3x^2+x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx = 3\ln|x-1| + \arctan(x) + C}$$

donde $C = C_1 + C_2$.

Aplicaciones de las Fracciones Parciales

El método de fracciones parciales no solo es útil para la integración, sino que también tiene aplicaciones en diversas áreas como:

- Resolución de ecuaciones diferenciales.
- Cálculo de la transformada de Laplace y su inversa.
- Ingeniería eléctrica (análisis de circuitos).
- Sistemas de control.
- Descomposición de funciones racionales en series de potencias.

Conclusiones y Preguntas

- El método de fracciones parciales es una herramienta poderosa para integrar funciones racionales complejas.
- Permite descomponer expresiones algebraicas complicadas en sumas de términos más simples que son más fáciles de integrar.
- Comprender los diferentes casos de factores en el denominador es crucial para aplicar el método correctamente.