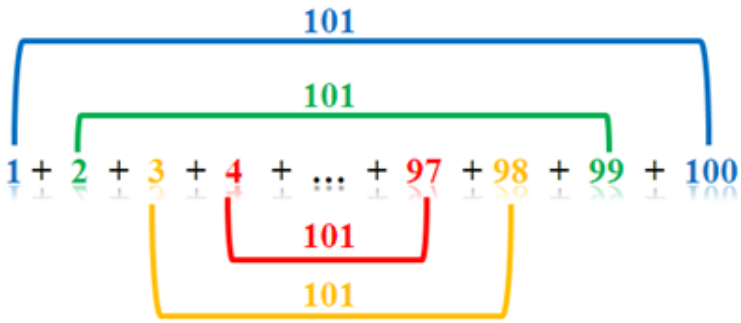

Las Mates son Divertidas

Mario I. Caicedo S.[1,2]

[1]Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar. Carcas, Venezuela
[2]Astronomy, Geology & Physics Department, Houston City College, Houston, U.S.A.

Índice general

1. Introducción **5**

1.1. Una historia corta y divertida 5

1.2. Una nota sobre estas notas 6

1.3. Algunas reflexiones sobre las Matemáticas 7

2. Propiedades Básicas de los Números **10**

2.1. Preguntas 12

2.2. Escribiendo Matemáticas 13

2.3. Más sobre operaciones 14

2.4. Una regla básica 16

2.5. Tiempo para algunas preguntas 18

2.5.1. Preguntas de Repaso 18

3. Ecuaciones de primer orden **20**

3.1. Una Pequeña Observación 25

3.2. Algunas Preguntas 25

4. Potencias Enteras **27**

4.1. Ejercicios 31

5. Raíces, también llamadas: Potencias Fraccionarias **32**

6. Fórmulas algebraicas "feas" **35**

6.1. ¿Qué estamos haciendo? 36

6.2. Completando cuadrados 38

6.3. Fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática 39

6.4. Practicando lo que hemos aprendido 42

6.5. Factorizando Funciones Cuadráticas 42

6.6. Un poco de Geometría 45

6.7. Una historia real agradable e interesante 47

6.7.1. ¿De dónde viene la fórmula para las raíces de un polinomio cuadrático? . 49

7. Ecuación de la Recta **52**

7.1. El Plano con Coordenadas Cartesianas 52

7.2. Primera Visita 52

7.3. Tres Formas de la Recta 56

8. Sistemas de Ecuaciones Lineales **58**

8.1. ¿Qué son estas cosas? 58

8.2. Acercándose a la Solución 59

8.2.1. ¿Siempre hay una solución? 60

8.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Geometría 62

8.3.1. Sistemas de tres ecuaciones y tres variables 64

8.4. Sistemas realmente grandes 65

8.5. Resolviendo Sistemas Lineales en la Práctica 66

9. Funciones **74**

9.1. Primer Encuentro: Las Funciones Son Máquinas 74

9.2. Monomios y Polinomios 78

9.3. Mejorando el concepto de Dominio 79

9.4. La necesidad de hablar jerga matemática 81

10. Un Vistazo a la Geometría Euclidiana **82**

10.1. Lógica: Reglas del razonamiento 84

10.1.1. La noción de PRUEBA 86

10.2. Volviendo a la Geometría 86

10.2.1. Dos Teoremas Importantes 88

11. Midiendo Cosas **92**

11.1. ¿Qué es medir? 92

11.1.1. Algunas cosas que medimos 93

11.2. Algo más de Geometría 98

11.3. Midiendo ángulos 99

11.4. Midiendo Ángulos en Grados 100

11.5. Un Experimento Curioso e Interesante 102

11.6. Midiendo Ángulos en Radianes 104

12. Introducción a la Trigonometría **108**

12.1. Tres funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente 109

12.2. Una conexión con la geometría 111

12.3. Algunas Fórmulas“no muy Útiles” 112

12.4. Valores de las funciones trigonométricas básicas para algunos ángulos 115

12.5. Una relación de equivalencia 119

12.6. Las funciones trigonométricas son periódicas 120
12.7. Ecuaciones trigonométricas 121

13. Números Primos:
Las Piezas de LEGO de las Matemáticas **126**
13.1. Factores 127
13.2. Números Primos 127
13.2.1. Descomponiendo un entero en sus factores primos 129
13.3. Aplicaciones simples 129

14. Errores Garrafales Que Comete la Gente **131**
14.1. Factorización Defectuosa 132
14.2. Fracciones Destrozadas 132
14.2.1. División del Denominador 132
14.3. La Trampa de la Cancelación 135
14.4. Cómo "Demostrar"1=2 (y Por Qué No Deberías) 137

Capítulo 1

Introducción

1.1. Una historia corta y divertida

Hay muchas historias divertidas sobre la ciencia en general y las matemáticas en particular. Una de mis favoritas (a la que se hace referencia gráficamente en la portada) es más o menos así. A finales de la década de 1700, un niño de 8 años llamado Carl Friedrich Gauss estaba en clase en la escuela primaria. Su maestro le pidió a la clase que sumara todos los números del 1 al 100, asumiendo que esta tarea ocuparía a sus estudiantes por un buen tiempo manteniéndolos callados. El maestro se sorprendió cuando, después de un par de minutos, el joven Gauss le dio la respuesta: 5050. El maestro no podía entender cómo su alumno había calculado la suma tan rápidamente en su cabeza. Gauss señaló que el problema era en realidad bastante simple y procedió a explicar que él visualizó la suma en su mente

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 97 + 98 + 99 + 100$$

y notó que en la suma había 50 pares de números como $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$, etc., que sumaban 101, y que por lo tanto el resultado de la suma era $50 \times 101 = 5050$.

Encuentro la historia del joven Gauss terriblemente divertida y se la cuento a todos mis amigos. La mayoría de ellos me pregunta qué pasó con Gauss y cuando les digo que se convirtió en uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, suelen decir "ahhh, no me extraña que tuviera una idea tan difícil", a lo que yo acostumbro preguntar a mis amigos si realmente les parece difícil de entender la solución de Gauss.

En relación con la historia del joven Gauss que discutimos en esta sección, hay una película alemano-austriaca en 3D de 2012 dirigida por Detlev Buck con el título en inglés *Measuring the World* (Alemán: Die Vermessung der Welt), basada en la novela homónima de Daniel Kehlmann. La película se basa en una novela de Daniel Kehlmann que sigue y contrasta la vida de dos científicos eminentes. Gauss, el matemático, fundador de la teoría de números, y el aventurero y explorador de Sudamérica (y el resto del mundo) Alexander von Humboldt. Ambos procedían de Brunswick, Alemania, eran contemporáneos y tenían aproximadamente la misma edad, pero Gauss surge de la pobreza mientras que Humboldt es un privilegiado. Y mientras que a Gauss no le gustaba dejar su oficina y rara vez viajaba, Humboldt no hizo prácticamente nada más que viajar.

1.2. Una nota sobre estas notas

Soy Físico Teórico, un científico que usa muchas matemáticas para su trabajo. Estoy escribiendo estas notas con la intención de mostrarle a ustede, el lector, que las matemáticas no solo son útiles sino también divertidas.

En estas notas estoy usando dos herramientas fundamentales que he aprendido en mi trabajo diario. La primera es evitar escribir todos los detalles de cada línea de pensamiento[1] y la segunda es hacer referencias a otros lugares (libros, artículos, blogs, videos, etc.) donde se puede

[1] escribir todos los detalles hace que cada artículo sea demasiado voluminoso y difícil de leer

encontrar información que puede ayudar a enriquecer nuestra comprensión. Las referencias deben usarse con cierto cuidado, si un lector intenta seguir cada referencia tan pronto como la encuentra, tardará demasiado en comprender o, peor aún, en aprender algo. La forma en que un científico lee un artículo o un libro es dejando las referencias a un lado a menos que encuentren algo que realmente no comprenden del artículo o del libro y necesitan ayuda para captar la idea o cuando encuentran una razón para extender su conocimiento. Esta técnica de lectura o estudio puede ser un buen consejo para ti, no caigas en la tentación de saltar a cada referencia tan pronto como la encuentres.

El tiempo y la experiencia me han enseñado que nosotros, los humanos, aprendemos haciendo. No tiene sentido leer si no intentamos hacer algunos ejercicios o problemas. La práctica es el camino a la perfección. El siguiente proverbio, generalmente atribuido al filósofo chino Confucio (Kong Qiu), expresa la idea de la mejor manera posible:

Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y entiendo

1.3. Algunas reflexiones sobre las Matemáticas

Muchas, muchas personas consideran las Matemáticas aburridas o difíciles de entender. Internet está lleno de blogs y cartas de personas que cuentan historias sobre cómo las matemáticas arruinaron sus vidas, entiendo a esas personas. La mayoría de ellas probablemente fueron tratadas con condescendencia por otras personas que afirmaron que sí entendían de una manera que pudo haber herido sus sentimientos.

La mayoría de las veces, las dificultades de comprensión provienen de una de dos razones. En primer lugar, haber sido enseñado por alguien que, además de tener buenas intenciones, no entiende realmente lo que está tratando de enseñar, créeme, esto me ha pasado. La segunda razón más común es no tener los requisitos previos necesarios para comprender algo, por

ejemplo, nadie puede entender la división sin saber la suma y la multiplicación.

Para mí y para muchas otras personas **¡Las matemáticas son geniales!**, llenas de diversión y una herramienta poderosa para abordar muchísimos problemas.

Las matemáticas no son solo sobre números o cálculos, **¡las matemáticas son una forma de pensar**. Una rama de las matemáticas llamada *LÓGICA* se ocupa de las formas en que el pensamiento puede ir bien o mal. Sin embargo, la mayoría de nosotros comenzamos nuestro contacto con las matemáticas con números y cálculos, y estas notas no serán muy diferentes en ese aspecto.

Lo que, espero, hace que estas notas sean de alguna manera diferentes es que estoy tratando de escribirlas en un tono conversacional, a veces señalaré un blog, a veces un video. Intentaremos examinar muchas cosas, algunas son similares a lo que la gente aprende en la escuela, otras no serán el tipo de cosas que aprendemos en la escuela. Estas notas se basan en una idea, no hay límites para las matemáticas más que nuestra imaginación.

Mi objetivo es doble, por un lado, espero que las notas puedan ser útiles para aprender que las Matemáticas son Divertidas y, por el otro, espero poder mostrar un poco sobre cómo piensan los matemáticos.

En estas notas supondré (asumiré) que ya sabes un poco sobre productos, divisiones, fracciones, etc., e incluso has aprendido algo de geometría elemental.

Una última palabra antes de comenzar. En cierto sentido, las Matemáticas son ciencia y la ciencia es maravillosa por varias cosas. Para mí, la mayor maravilla de la ciencia es que reconoce sus límites. Los científicos saben que todas sus ideas deben ser verificadas con la naturaleza, y la naturaleza puede, y generalmente lo hace, demostrarnos que estamos completamente equivocados. Pensemos en un ejemplo, un científico ha estado observando, digamos zorros, y ha descubierto que todos los zorros que ha visto son blancos, luego va y escribe un artículo informando que todos los zorros son blancos. Un par de meses después, ella atraviesa un bosque

y ve un zorro rojo, entonces sabrá inmediatamente que estaba equivocada en primer lugar y reformulará su teoría sobre los zorros.

Cada vez que la ciencia descubre que se ha equivocado, se reconstruye tratando de corregir su error hasta que encuentra el siguiente. Así es como progresa la ciencia. Este video muestra al biólogo Richard Dawkins hablando exactamente sobre este aspecto de la ciencia.

Habiendo terminado este preámbulo bastante largo, comencemos nuestro viaje a Matemagialandia

Capítulo 2

Propiedades Básicas de los Números

La primera cosa que deberíamos aprender es que hay diferentes tipos de números. Números *Naturales* o de *Conteo*, *Enteros*, *Racionales* (fracciones), *Irracionales*, *Reales*, *Complejos* (o imaginarios) e incluso hay números más exóticos como los *Cuaterniones* y los *Octoniones*.

Algunos de estos números están *contenidos* en otros. Los naturales, por ejemplo, están contenidos en los enteros. Esto significa que cualquier número natural es un número entero. Los enteros están contenidos en los racionales y los racionales en los números reales.

Lo interesante es que lo *contrario* no es cierto. Eso significa, por ejemplo, que no todo racional es un entero o que no todo entero es un número natural.

Veamos un ejemplo. Los números racionales tienen la forma[1] a/b, así, por ejemplo,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4} \tag{2.1}$$

son números racionales al igual que

$$\frac{14}{7}, \frac{24}{3}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2} \tag{2.2}$$

[1] El símbolo / significa división, es decir $a/b = a \div b$, por lo que $1/2$ no es otra cosa que el número 0,5, que se llama la forma decimal de la fracción.

pero,

$$\boxed{\frac{14}{7} = 2, \quad \frac{24}{3} = 8, \quad \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{2}{2} = 1} \tag{2.3}$$

y por lo tanto, estos números son enteros tanto como son racionales.

Hay operaciones, la suma por ejemplo, que podemos realizar en números que resultan en números del mismo tipo, Esto significa lo siguiente

$$\boxed{\text{algún tipo de número operación mismo tipo de número} = \text{un número del mismo tipo}} \tag{2.4}$$

Es importante ser consciente de que no todas las operaciones pueden aplicarse a cualquier tipo de números. La suma (+) es una operación que acepta cualquier par de números, la multiplicación también acepta cualquier cosa, pero la división no puede actuar sobre los enteros en el sentido de que no podemos dividir dos enteros y siempre obtener un entero.

Hay un par de números muy especiales que pertenecen a todos los tipos, son el cero (0) y el uno (1). Estos dos números son muy especiales porque (a) pertenecen a todas las clases de números y (b) son los únicos números que tienen las siguientes dos propiedades

$$0 + \text{cualquier número} = \text{ el mismo número} \tag{2.5}$$

$$1 \times \text{cualquier número} = \text{ el mismo número} \tag{2.6}$$

Los enteros tienen una propiedad muy especial no compartida por los números de conteo. Si pensamos en un entero, cualquier entero, siempre hay otro entero llamado su *opuesto* tal que esta pareja suma cero,

$$\text{cualquier entero} + \text{su opuesto} = 0\,. \tag{2.7}$$

Llamamos al opuesto de 3 *menos tres* -3 y decimos que 3 es un entero positivo y -3 un entero negativo.

2.1. Preguntas

1. **¿Por qué los números naturales no tienen opuesto?**. Para ser honesto, esta pregunta es un poco capciosa, porque es fácil y al mismo tiempo es extremadamente difícil.

2. Nombra y escribe los opuestos de 2, 7, 9

3. Nombra los opuestos de -3, -2 y -5. Esta última pregunta es la razón detrás de la expresión *dos negativos son igual a un positivo*. ¿Por qué?

La suma también puede operar en los racionales, la forma en que lo hace está muy bien explicada en un video de Matemáticas Portátiles. Al igual que sucede con los enteros, para cada racional hay un opuesto.

Habiendo hablado sobre la suma y los opuestos, estamos listos para afirmar que la suma tiene las siguientes dos propiedades

- El orden de los dos números en una suma siempre se puede cambiar sin modificar el resultado.

  Por ejemplo
  $$1 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + 1$$
  Esta es llamada la regla *conmutativa* de la suma.

- Al sumar varios números podemos agruparlos a nuestra voluntad sin cambiar el resultado.

  Por ejemplo
  $$1 + \frac{3}{4} + 5 + \frac{3}{2} + 7 = (1 + \frac{3}{4}) + 5 + (\frac{3}{2} + 7) = 1 + (\frac{3}{4} + 5) + (\frac{3}{2} + 7)$$

Esta regla también tiene un nombre, se llama *asociatividad*.

2.2. Escribiendo Matemáticas

Con el tiempo los Matemáticos desarrollaron una forma fantástica de hablar y escribir sobre matemáticas. A mucha gente no le gusta esta forma de hacer las cosas, dicen que no la entienden.

La verdad sobre la forma .^{ex}traña"de expresar las matemáticas es que es muy económica (es una forma de evitar escribir demasiado), es fácil de entender y, esto es aún más importante, es muy divertida.

La forma de hablar y escribir de los matemáticos usa letras en lugar de números. Piensan que cada letra representa cualquier número que puedas imaginar siempre y cuando respetes una regla, el significado de cada letra no puede cambiarse en absoluto durante una çonversación.º mientras un texto no esté cambiando su tema.

Veamos qué tan buena es esta forma de escribir o, mejor dicho, de pensar.

¿Recuerdas la regla *El orden de los dos números en una suma siempre se puede cambiar sin modificar el resultado.*

Bueno, en el lenguaje de los matemáticos esta regla es:

$$\boxed{\text{Para cualquier par de números,} \quad a + b = b + a} \tag{2.8}$$

Podemos hacerlo mejor y escribir todas las reglas de la suma.

1.
$$a + b = b + a$$

2.
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3.

$$0 + a = a$$

Lo creas o no, con estas reglas hemos recorrido un camino muy largo de descubrimientos matemáticos que abarcan más de mil años.

2.3. Más sobre operaciones

Todavía necesitamos algunas propiedades de las operaciones y los números. Para empezar, necesitamos aprender a multiplicar números racionales.

La regla de multiplicación para fracciones es muy fácil. Recordamos que todos los racionales son fracciones, lo que significa que siempre pueden escribirse como

$$\frac{numerador}{denominador}$$

y resulta que la regla para multiplicar fracciones es extremadamente simple, el numerador de la fracción es el producto de los numeradores y el denominador el producto de los denominadores, en fórmulas:

$$\frac{numerador}{denominador} \times \frac{numerador}{denominador} = \frac{\text{producto de los numeradores}}{\text{producto de los denominadores}}$$

así, por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} &= \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} \\ \frac{17}{3} \times \frac{5}{4} &= \frac{17 \times 5}{3 \times 4} = \text{termina} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Solo para asegurarnos de que todo esté claro, repetimos la afirmación de que una fracción es solo una división, por lo que los números racionales son números decimales.

Todavía hay algunos trucos bajo la manga.

El primero de todos es que siempre podemos escribir un entero como un racional, como en

$$2 = \frac{2}{1}$$

el segundo es este, supón que tienes dos enteros y los factorizas, digamos,

$$\begin{aligned} 24 &= 3 \times 8 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 14 &= 7 \times 2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

entonces, cuando construimos la fracción 24/14, podemos escribir

$$\frac{24}{14} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 2}{7 \times 2} = \frac{3 \times 2 \times 2}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{3 \times 2 \times 2}{7} \times 1 = \frac{3 \times 2 \times 2}{7} = \frac{12}{7} \tag{2.11}$$

Divertido, pero de aspecto feo, ¿No es así?.

Bueno, lo anterior se escribe usualmente, como probablemente lo has visto miles de veces,

$$\frac{24}{14} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times \cancel{2}}{7 \times \cancel{2}} = \frac{3 \times 2 \times 2}{7} = \frac{3 \times 2 \times 2}{7} = \frac{12}{7}\,. \tag{2.12}$$

Esto es lo que llaman *cancelar factores comunes* o simplificar una fracción.

Hagamos un par de ejemplos más, simplificaremos 125/25 y 360/150.

$$\frac{125}{25} = \frac{25 \times 5}{25} = \frac{\cancel{25} \times 5}{\cancel{25}} = \frac{5}{1} = 5 \tag{2.13}$$

$$\frac{360}{150} = \frac{36 \times 10}{5 \times 3 \times 10} = \frac{\cancel{3} \times 3 \times 4 \times \cancel{10}}{5 \times \cancel{3} \times \cancel{10}} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} \tag{2.14}$$

y solo en caso de que queramos un decimal, $1/5 = 0{,}2$ así que $12/5 = 2{,}4$

El segundo truco (o definición si se quiere) es el *recíproco*. Esto es algo que los racionales (las fracciones tienen) pero los enteros no.

Para cualquier número racional hay un recíproco, y el recíproco es el número que multiplicado por el número original da 1 como resultado.

En el lenguaje de los matemáticos, para un número a, el recíproco que se escribe como $1/a$ es el único número que hace que esta igualdad sea verdadera,

$$a \times \frac{1}{a} = 1\,. \tag{2.15}$$

Algunos ejemplos pueden ayudar. Los recíprocos de 3, 5 y 1/4 son 1/3, 1/5 y 4. Quizás un poco más complicado es darse cuenta de que el recíproco de 3/5 es solo 5/3 y para cualquier racional (usaremos letras) a/b el recíproco es b/a.

¿Por qué es esto? bueno, probemos solo la multiplicación,

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a}\,, \tag{2.16}$$

pero sabemos que podemos cambiar el orden de la multiplicación sin alterar el resultado, y luego

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{b \times a}{b \times a} = \frac{b}{b} \times \frac{a}{a} = 1 \times 1 = 1\,, \tag{2.17}$$

el último paso que tenemos que hacer es recordar que a y b son cualquier número, si pensamos cuidadosamente llegamos a la conclusión de que lo que hemos hecho es siempre cierto, **con solo una excepción**.

2.4. Una regla básica

Estoy seguro de que ahora te estás preguntando: **¿Cuál es la excepción?**. La respuesta tiene que ver con el número cero y el hecho de que

$$0 \times \text{ cualquier número} = 0\,, \tag{2.18}$$

este hecho hace imposible la existencia de un recíproco para el cero, o dicho de otra manera,

¡NO PODEMOS DIVIDIR POR CERO!

Veamos la razón de esta afirmación.

En primer lugar, el recíproco de cualquier número (a) debe funcionar como

$$a \times \frac{1}{a} = 1\,. \tag{2.19}$$

entonces si hubiera un recíproco para el cero deberíamos tener

$$0 \times \frac{1}{0} = 1\,. \tag{2.20}$$

pero ya sabemos que .[el] cero es el número más fácil por el que multiplicarza que

$$0 \times \text{cualquier número} = 0\,, \tag{2.21}$$

ahora podemos ver dónde está el problema. Según la fórmula (2.19) $0/0$ debería ser 1 pero la fórmula (2.21) dice que debería ser cero. Si ambas fórmulas fueran correctas, entonces uno debería ser igual a cero ($1 = 0$) lo cual sabemos que es ridículo.

Hay una regla elemental de LÓGICA (recuerda, la lógica es la ciencia de entender cuándo un razonamiento es o no es correcto) que establece que:

Cuando una cosa (A) es igual a algo (B) y otra cosa (C) es igual a ese mismo algo (B) entonces la primera cosa (A) y la otra cosa (C) deben ser iguales.

Podemos escribir esta regla como

Si A=B y B=C necesariamente A=C

Esta es la regla que hace imposible que las fórmulas $0/0 = 1$ y $0/0 = 0$ sean ciertas al mismo tiempo, porque si lo fueran, 1 debería ser igual a 0. Y por supuesto, esta imposibilidad es lo que hace que la división por cero esté mal definida o sea imposible. Los matemáticos llaman a imposibilidades como definir $0/0$ "forma indeterminada".

2.5. Tiempo para algunas preguntas

1. ¿Cuáles son los recíprocos de 2, 3, 4, 5/3?

2. Escribe 1/5 en forma decimal. Haz lo mismo para 1/4 y 2/8, ¿qué hay de 8/2?

3. ¿Qué pasa si multiplicamos el número decimal de 2/5 por el número decimal de 5/2?, ¿hay una razón para el resultado?

4. Calcula

   a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{2}$

   b) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{2}$

   c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

   d) $\frac{1}{3} + \frac{4}{6}$

2.5.1. Preguntas de Repaso

1. ¿Es verdadera la fórmula $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$?. Explica tu respuesta.

2. Calcula $3 \times (5 + 4)$ de dos maneras diferentes.

3. Calcula

   a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

   b) En la pregunta anterior, establece $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 6$ y verifica que la "fórmula"que obtuviste es verdadera.

4. ¿Es cierto que $x \times y + 5x \times z = x \times (y + 5z)$?

5. Esta es una pregunta más difícil pero más divertida. Un número par es un entero que después de la división por dos da un entero (por ejemplo 4 y 6 son pares porque $4/2 = 2$, $6/2 = 3$, pero 7 no es par, porque $7/2 = 3{,}5$. ¿Crees que **cualquier** número par debería escribirse como $\times$algún entero?

Capítulo 3

Ecuaciones de primer orden

Antes que nada, debemos aprender que una ecuación es solo una pregunta. Por ejemplo,

¿Qué número deberíamos sumar a dos para obtener 10?

En lenguaje matemático[1] esa pregunta se escribe como

$$2 + x = 10\,,$$

aquí x representa el número que estamos preguntando. Y la expresión $2 + x$ significa (como sabemos) sumar el número x al número dos.

Ahora entendemos que, dado que x es el número que buscamos, $2 + x = 10$ solo significa, cuál es el número (llamado x) que sumado a dos produce el resultado 10.

No es difícil responder a la pregunta en su forma original. Un poco de pensamiento nos permite darnos cuenta de que si sumamos 8 a 2 obtenemos 10 y por lo tanto la respuesta es 8.

La gente a la que no le gustan las matemáticas nos haría una pregunta, por qué aburrirnos escribiendo con matemáticas lo que podríamos haber respondido sin matemáticas. Esta es una pregunta muy buena e interesante, de hecho. Y debe responderse en dos frases. La primera,

[1] usualmente decimos **notación** en lugar de lenguaje o jerga.

es muy simple, pensar un poco y darse cuenta de que el número debe ser ocho es ¡hacer pensamiento matemático! así que hicimos matemáticas. La segunda parte es que, incluso si no nos damos cuenta en este mismo momento, la notación matemática es genial porque es una forma de ahorrar espacio, es una forma de escribir de forma concisa.

Una pregunta podría conducir a una ecuación como[2]

$$2x + 3 + 5x + 45 + 18x + 6 = 120 + x + 22x - 5\,, \tag{3.1}$$

en este caso, un poco de pensamiento podría no ser suficiente para darnos la respuesta (x). Entonces, ¿cómo encontramos x?

El truco es transformar esta fórmula de aspecto horrible en algo más simple. Para tener éxito, necesitaremos recordar que x es un número (el mismo número en todas partes). Llevemos a cabo la transformación paso a paso para poder ver lo que sucede. Empezamos con

$$2x + 3 + 5x + 45 + 18x + 6 = 120 + x + 22x - 5\,, \tag{3.2}$$

primero reordenamos todo ya que cambiar el orden no cambia los resultados

$$2x + 5x + 18x + 3 + 45 + 6 = 120 - 5 + x + 22x\,, \tag{3.3}$$

ahora agrupamos

$$(2 + 5 + 18)x + 54 = 115 + x(1 + 22)\,, \tag{3.4}$$

$$25x + 54 = 115 + 23x\,, \tag{3.5}$$

Nuestro siguiente paso comienza señalando que, dado que lo anterior es una igualdad, realizar la misma operación en ambos lados no cambia la igualdad. Esta idea me permite restar 54 en ambos lados

$$25x + 54 - 54 = 115 + 23x - 54\,, \tag{3.6}$$

[2] intenta formular una pregunta

lo que produce

$$25x = 61 + 23x\,, \tag{3.7}$$

finalmente restamos $23x$ en ambos lados

$$25x - 23x = 61 + 23x - 23x\,, \tag{3.8}$$

$$2x = 61\,, \tag{3.9}$$

casi hemos llegado. Dividimos por dos en ambos lados

$$2x/2 = 61/2\,, \tag{3.10}$$

$$x = 61/2 = 30{,}5\,, \tag{3.11}$$

¡conseguimos nuestro número!

Queremos repetir lo anterior para resolver ecuaciones que tienen *coeficientes fraccionarios*, lo que significa que se ven así

$$\boxed{\frac{3}{2}x + 121 = \frac{5}{7}x} \tag{3.12}$$

Una vez más, todo lo que tenemos que hacer es tener en cuenta que x significa .ªlgún número".

Con eso en mente, veamos cómo podríamos calcular

$$\frac{3}{2}9 + \frac{2}{5}9\,, \tag{3.13}$$

las matemáticas permiten muchas formas de realizar este cálculo, una de ellas es distribuir los productos y escribir

$$\frac{3}{2}9 + \frac{2}{5}9 = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5}\right)9 = \frac{15+4}{10}9 = \frac{20}{10}9 = 18 \tag{3.14}$$

Si usamos esta técnica de cálculo y recordamos que x es solo algún número, nuestra pregunta original se puede resolver con estos pasos

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x + 121 &= \frac{5}{7}x \\
\frac{3}{2}x - \frac{5}{7}x &= -121 \\
\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{7}\right) x &= -121 \\
\left(\frac{21-10}{14}\right) x &= -121 \\
\left(\frac{11}{14}\right) x &= -121 \\
x &= -\frac{14}{11}(11 \times 11) \\
x &= -14 \times 11 = 154
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Incluso podemos hacerlo mucho mejor. ¿Qué tal resolver"

$$ax + b = 0 \tag{3.16}$$

esto puede parecer extraño, pero en realidad es divertido.

En la ecuación anterior, cada carácter es solo algún número. Para poder resolverla, necesitamos saber qué número es el que queremos encontrar en términos de los otros dos.

Digamos que queremos encontrar x. Simplemente olvidamos que a y b parecen letras, son NÚMEROS, así que, usamos las matemáticas como de costumbre ...

$$\begin{aligned}
ax + b &= 0 \\
ax &= -b \\
x &= -\frac{b}{a}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Y ahora viene la parte divertida.

Si pensamos detenidamente nos damos cuenta de que acabamos de resolver cualquier ecuación concebible de primer orden porque:

¡¡a y b pueden ser cualesquiera dos números!!

Example 1. *En alguna tarea, a Sophie se le preguntó lo siguiente:*

Resuelve la siguiente ecuación para h

$$SA = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{3.18}$$

La pregunta significa que de alguna manera se supone que Sophie sabe los números SA, π y r y se espera que ella encuentre h en términos de SA, r y π.

Bueno, bajo esta suposición, lo primero que debemos hacer es restar $2\pi r^2$ en ambos lados de la ecuación para obtener

$$SA - 2\pi r^2 = 2\pi r h$$

y ahora, multiplicar ambos lados por el recíproco de $2\pi r$ que es

$$\frac{1}{2\pi r}$$

en ese caso obtenemos;

$$\frac{1}{2\pi r} \times \left[SA - 2\pi r^2\right] = 2\pi r h \times \frac{1}{2\pi r}$$

$$\frac{SA - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{r}h}{\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{r}} = h\,,$$

y así, la solución para 3.18 es

$$\boxed{h = \frac{SA - 2\pi r^2}{2\pi r}\,.}$$

Lo cual de hecho depende de las cantidades conocidas π, SA y r.

3.1. Una Pequeña Observación

Examinemos lo siguiente:

$$\frac{2x+2}{2x+5} = \frac{2x+2}{2x} + \frac{2x+2}{5},$$

¡Esta expresión es incorrecta! Miremos el lado derecho de la fórmula:

$$\frac{2x+2}{2x} + \frac{2x+2}{5},$$

Usando las reglas de adición para fracciones,

$$\begin{aligned}\frac{2x+2}{2x} + \frac{2x+2}{5} &= \frac{5 \times (2x+2) + 2x \times (2x+2)}{2x \times 5} = \\ &= \frac{10x + 10 + 4x \times x + 4x}{10x}\end{aligned}$$

Y la última línea es completamente diferente a

$$\frac{2x+2}{2x+5}$$

Si no entendiste el punto de este ejemplo, salta a la sección 14.2.1

3.2. Algunas Preguntas

1. Resuelve para x: $3x + 5 = 20$

2. Encuentra (es decir, resuelve) t: $t - 5 = 3t + 25$

3. Encuentra n: $3n - 8 = n$

4. Esta parece difícil pero es fácil si eres cauteloso. Encuentra x

$$\frac{3x+5}{2x-2} = 1$$

5. Encuentra las soluciones para las siguientes ecuaciones (se requiere una respuesta escrita con cada paso explicado)

   a) $2x + 5 = 7$

   b) $3x - 2 = 1$

   c) $2x + 1 = x + 1$

   d) $3s - 5 = s + 15$

   e) $\frac{4x-4}{x+1} = 2$

6. ¿Hay algo mal en

$$\frac{2x+2}{x+3} = \frac{2x+2}{x} + \frac{2x+2}{3},$$

   si la respuesta es sí, explica.

7. Misma pregunta para

$$\frac{2x+2}{x+3} = \frac{2x+2}{x} + \frac{2x+2}{3}$$

Capítulo 4

Potencias Enteras

A veces, al leer o ver un video, vemos algo como 2^3. ¿Qué significa eso?. La respuesta es simple,

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8\,, \tag{4.1}$$

¿qué pasa con 3^4?, una vez más, es simple

$$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4 veces}} = 81 \tag{4.2}$$

3^2 se lee como 3 **elevado a la potencia de** 2 o 3 a la segunda potencia, o simplemente 3-al cuadrado. Esto significa que acabamos de aprender que, cuando elevamos un número a, digamos, 4, eso significa multiplicar el número por sí mismo 4 veces.

Si dejamos que a represente un número,

$$a^3 = a \times a \times a \tag{4.3}$$

y por lo tanto, para cualquier entero positivo (b),

$$\boxed{a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{\text{b veces}}} \tag{4.4}$$

Figura 4.1: Nombres de los números en las potencias

Así, por ejemplo,

$$a^{15} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{\text{15 veces}} \tag{4.5}$$

Algunas veces encontramos un producto como $2^3 \times 2^2$, ¿qué sucede en casos como este?. Para encontrar la respuesta, simplemente multiplicamos

$$2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\text{5 veces}} \tag{4.6}$$

¡eso es simplemente multiplicar 2 por sí mismo 5 veces!, lo que acabamos de aprender, es igual a 2^5 por lo tanto concluimos

$$2^3 \times 2^2 = 2^5\,, \tag{4.7}$$

probemos con $3^2 \times 3^2$,

$$3^2 \times 3^2 = (3 \times 3) \times (3 \times 3)\,, \tag{4.8}$$

que es 3 por sí mismo 4 veces,

$$3^2 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4\,, \tag{4.9}$$

lo que estamos diciendo es esto,

$$\boxed{a^b \times a^c = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{\text{b+c veces}} = a^{b+c}} \tag{4.10}$$

Propongamos algunos ejercicios

1. $3^4 \times 3^5$

2. $5^2 \times 5^3$

3. $7^5 \times 7^2$

4. $a^4 \times a^3$

Otra cosa que podemos encontrar es una expresión como $(3^2)^3$, y una vez más, nos preguntaremos: ¿qué es esto? Bueno,

$$(3^2)^3 = (3^2) \times (3^2) \times (3^2) = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{6 \text{ veces}} = 3^6 \tag{4.11}$$

Si pensamos en algunos ejemplos más concluiremos que para cualesquiera enteros positivos b y c,

$$\boxed{(a^b)^c = a^{b \times c}} \tag{4.12}$$

¿Qué sucede si dividimos potencias?,

$$\begin{aligned} \frac{3^5}{3^2} &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = \\ &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 \end{aligned} \tag{4.13}$$

pensemos un poco, $3 = 5 - 2$. Hmmmm....parece que

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 \tag{4.14}$$

Y resulta que eso es absolutamente cierto.

Las matemáticas son maravillosas, las ideas encajan como las piezas de un rompecabezas gigante.

En algún momento, los matemáticos introdujeron la siguiente idea, -1 un entero negativo como exponente, lo hicieron al declarar

$$\frac{1}{a} = a^{-1} \tag{4.15}$$

Para descubrir a dónde nos lleva esta idea, pensamos en la siguiente expresión,

$$\frac{a^b}{a^c}\,, \tag{4.16}$$

las reglas para manejar fracciones nos dicen que

$$\frac{a^b}{a^c} = a^b \times \frac{1}{a^c}\,, \tag{4.17}$$

pero

$$\frac{1}{a^c} = \left(\frac{1}{a}\right)^c = (a^{-1})^c\,, \tag{4.18}$$

y $(a^{-1})^c = a^{(-1)\times c} = a^{-c}$, por lo tanto

$$\frac{a^b}{a^c} = a^b \times a^{-c} = a^{b-c} \tag{4.19}$$

donde hemos usado la regla para multiplicar potencias de la misma base.

Todavía hay algo que muchas veces se establece como una regla,

$$a^0 = 1\,, \tag{4.20}$$

para ver cómo surge esto, piensa en esta fracción

$$\frac{a}{a} = 1 \tag{4.21}$$

acabamos de aprender que

$$\frac{a}{a} = a \times \frac{1}{a} = a \times a^{-1} = a^{1-1} = a^0\,, \tag{4.22}$$

así tenemos

$$\frac{a}{a} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{a}{a} = a^0\,, \tag{4.23}$$

por lo que

$$a^0 = 1 \tag{4.24}$$

debe ser cierto y de hecho lo es.

4.1. Ejercicios

Calcula

1. $2^3 \times 2^4$
2. $5^a \times 5^b$
3. $\frac{3^3}{3^2}$
4. $a^3 \times b^4$
5. $\frac{5^3}{5^4}$
6. $\frac{3^3}{3^4}$
7. $\frac{2^8 \times 3^4}{4^2 \times 9^2}$
8. $(a+b)^2$
9. $(a-b)^2$
10. $(a+b) \times (a-b)$
11. Usa lo que has hecho para calcular 25×15 fácilmente

Esto es todo lo que necesitamos saber sobre potencias enteras, algunos videos pueden ayudar a entender.

Marija Kero

Franck Ives

Chico divertido

Capítulo 5

Raíces, también llamadas: Potencias Fraccionarias

Todos sabemos (o se supone que sabemos) que, la raíz cuadrada de 4 ($\sqrt{4}$) es 2 porque la raíz cuadrada de un número es otro número que multiplicado por sí mismo da como resultado el primer número[1]. Así, por ejemplo, $\sqrt{49}$ es el número que hace que esta igualdad sea verdadera

$$\sqrt{49} \times \sqrt{49} = 49\,,$$

lo que obviamente significa que $\sqrt{49} = 7$.

Algunos ejemplos y ejercicios no harán daño

1. $\sqrt{9} = 3$, porque: $3^2 = 9$
2. $\sqrt{36}$=6, beacuse: $6^2 = 36$
3. $\sqrt{256} = 16$, because: $16^2 = 256$
4. ¿Por qué es $\sqrt{25} = 5$?

[1] Video bueno

5. ¿Por qué es $\sqrt{81} = 9$?

6. Encuentra el valor de $\sqrt{64}$

7. Encuentra el valor de $\sqrt{100}$

8. ¿De qué número es 13 la raíz cuadrada?, ¿qué hay de 25?

La mayoría de las raíces cuadradas son bastante difíciles de calcular a mano, pero afortunadamente la tecnología (que se construye sobre los hombros de la ciencia) ha traído calculadoras de mano y computadoras que pueden hacer el trabajo por nosotros.

De todos modos, lo que quiero señalar es que a algún matemático (o a varios de ellos) se le ocurrió una idea divertida, pensar en las raíces cuadradas como potencias. Es decir, escribiendo $\sqrt{5} = 5^a$ para algún número a, si esto fuera posible, deberíamos escribir

$$5^a \times 5^a = 5\,,$$

y al mismo tiempo, debido a las reglas que ya hemos aprendido,

$$5^a \times 5^a = 5^{a+a} = 5^{2a}\,,$$

al mismo tiempo sabemos que

$$5^1 = 5\,,$$

y así, debido a la regla lógica de la que acabamos de hablar, debe suceder que

$$5^{2a} = 5^1\,,$$

lo que a su vez significa que

$$2a = 1\,.$$

Y ahora tenemos una pregunta, ¿qué número multiplicado por dos es igual a 1? Y la respuesta es el recíproco de 2 que es 1/2. Esta respuesta significa que nuestros amigos desconocidos que

propusieron la idea divertida de escribir la raíz cuadrada de cinco como una potencia pudieron encontrar una respuesta: una raíz cuadrada es una potencia 1/2

$$\sqrt{5} = 5^{1/2}$$

y esto es siempre cierto, así que si x representa cualquier número **positivo**

$$\sqrt{x} = x^{1/2}\,.$$

Y ahora sucede algo que es lo habitual con las matemáticas (cosas nuevas que aparecen por todas partes si pensamos un poco). Este algo nuevo proviene de la regla $(a^b)^c = a^{b\times c}$, de hecho, ya que esta regla es verdadera podemos aplicarla a la potencia 1/2 y ver qué sucede

$$(x^{1/2})^a = x^{\frac{1}{2}\times a} = (x^{1/2})^a = x^{\frac{a}{2}}$$

¡las potencias fraccionarias existen!, y de hecho, existen en muchísimos tipos (tantas como fracciones). Por ejemplo, una raíz cúbica es

$$\sqrt[3]{17} = 17^{1/3}\,,$$

Me parece genial, ¿y a ti?

Con estos hallazgos suceden todo tipo de cosas geniales, como por ejemplo, que podemos hacer álgebra con exponentes (potencias) siempre y cuando tengamos cierto cuidado con los signos de los números que estamos elevando a una potencia (volveremos a eso más tarde). Una vez más, nuestra amiga Marija repasará lo que acabamos de aprender

Capítulo 6

Fórmulas algebraicas “feas”

Fe vez en cuando aparece la necesidad de calcular algo como

$$(3x^2 + 5)(2 + x)\,, \tag{6.1}$$

y en muchos casos,las personas empiezan a quejarse y a preguntar por qué demonios tienen que pensar siquiera en cosas tan horribles. Bueno, les doy la razón en que hoy en día hay programas de computadora que pueden resolver estas y otras fórmulas de aspecto mucho más feo en muy poco tiempo, sin embargo, encuentro tales cálculos divertidos y parte de mi vida diaria, así que les digo a esas personas, intentemos estas cosas.

Volviendo al cálculo propuesto en la fórmula 6.1, todo lo que se necesita es un poco de cuidado, hagámoslo

$$\begin{aligned}
&(3x^2 + 5)(2 + x) = \\
&= 3x^2(2 + x) + 5(2 + x) = \\
&= 3x^2 \times 2 + \mathbf{3x^2} \times \mathbf{x} + 5 \times 2 + 5 \times x = \\
&= 6x^2 + 3x^3 + 10 + 5x
\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\boxed{(3x^2+5)(2+x) = 3x^3+6x^2+5x+10} \tag{6.3}$$

Veamos algunos ejemplos resueltos más.

Example 2.

$$y(2y+5) = y \times 2y + y \times 5 = 2y^2 + 5y$$

Example 3.

$$\begin{aligned}(2x+3)(5x+4) &= 2x \times 5x + 2x \times 4 + 3 \times 5x + 3 \times 4 = \\ &= 10\,x^2 + (8+15)x + 12 = \\ &= 10\,x^2 + 23x + 12\end{aligned}$$

Example 4.

$$\begin{aligned}(2x+3)(2x-3) &= 2x \times 2x + 2x \times (-3) + 3 \times 2x + 3 \times (-3) = \\ &= 4\,x^2 + (3-3)x - 3^2 = \\ &= 4\,x^2 - 9\end{aligned}$$

Intentemos un ejercicio de aspecto más difícil, esta vez completamente simbólico, ¡ES SIMPLEMENTE MÁS DE LO MISMO!

Example 5.

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= ax \times cx + ax \times d + b \times cx + b \times d = \\ &= ac\,x^2 + (ad+bc)x + bd\end{aligned}$$

6.1. ¿Qué estamos haciendo?

Este es un buen lugar para algunos comentarios. Hemos revisado algunos ejemplos, pueden haber sido algo divertidos, pero siendo honesto debo conceder mucho más que un punto a quien me diga que estas fórmulas no parecen tener mucho que ver con la vida cotidiana, sino más bien como algo que alguien a quien le gusta el álgebra quiere forzarle a hacer.

A decir verdad, gran parte del interés en estas fórmulas tiene razones históricas, hace muchos años o mejor dicho siglos (quizás incluso milenios), no existían teléfonos inteligentes ni computadoras para manejar cálculos tediosos como los necesarios para, digamos, la banca o el gobierno, y por lo tanto la vida para los encargados de tales cálculos era probablemente un infierno. Tarde o temprano, alguien se dio cuenta de que desarrollar fórmulas podría ser útil para hacer las cosas más fáciles.

Example 6. *Considera el siguiente producto,*

$$17 \times 23$$

ciertamente no es el cálculo más largo y horrible, ni tampoco es el cálculo más fácil de todos, de hecho, puede ser un poco molesto.

Sin embargo, alguien puede darse cuenta (esto es muy fácil) de que

$$23 = 20 + 3 \quad y$$
$$17 = 20 - 3\,,$$

por lo que el producto 23×17 *es exactamente lo mismo que calcular*

$$(20 - 3)(20 + 3)\,,$$

si esta misma persona conoce el truco (fórmula) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$*, el cálculo se vuelve significativamente más fácil,*

$$(20 - 3)(20 + 3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391\,.$$

Producto/Fórmula	Resultado	Nombre en Inglés	Nombre en Español
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	Square of a sum	Cuadrado de una suma
$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b^2$	Square of a difference	Cuadrado de una diferencia
$(a+b)(a-b)$	a^2-b^2	Sum times its difference	Suma por su diferencia

Cuadro 6.1: Most usual notable products

¿Y cómo podría esta persona saber que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$? La respuesta es, porque alguien más hizo el álgebra con símbolos.

La fórmula

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

es solo un ejemplo de los llamados **productos notables**, la tabla 6.1 muestra una muestra de los más comunes.

6.2. Completando cuadrados

Por alguna razón que no estará clara ahora mismo (así que mejor continuamos por diversión) podríamos preguntar si hay alguna manera de escribir

$$x^2+2x$$

como

$$(x+1)^2+\text{algo}\,,$$

hacer esto se llama **completar el cuadrado** y resulta que de hecho se puede hacer y que es muy útil. Veamos cómo hacerlo.

En primer lugar, debemos recordar que

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

por comparación, $x^2 + 2x$ se parece a los dos primeros términos con $a = 1$, pero nos falta un término 1^2, si sumamos cero de una manera inteligente,

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + (1 - 1) = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1\,,$$

y hemos completado el cuadrado.

6.3. Fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es una ecuación que se ve así:

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{6.4}$$

al igual que con las ecuaciones de primer orden, esta es una pregunta donde todo lo que queremos saber es esto:

¿Qué valor (o valores) de x hacen verdadera la parte derecha de la ecuación?.

Por ejemplo, si la ecuación es

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

y probamos con $x = 3$ obtenemos

$$2(3)^2 + 4(3) + 2 = 18 + 12 + 2 = 32 \neq 0$$

esto significa que 3 no es una solución de la ecuación, si probamos con $x = -1$ obtenemos

$$2(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 2 + (-4) + 2 = 0\,,$$

lo que significa que $x = 1$ es de hecho una solución.

Los matemáticos han descubierto que una ecuación cuadrática puede tener -a lo sumo- 2 soluciones diferentes.

Así, por ejemplo, $x = 3$ y $x = -3$ son dos soluciones de

$$x^2 - 9 = 0\,,$$

y gracias a nuestros más queridos amigos los matemáticos, no puede haber ninguna otra solución.

Ahora, si pensamos un poco, nos damos cuenta de que hay un método para resolver cualquier ecuación de primer orden, podríamos preguntar si existe tal método para las ecuaciones cuadráticas y encontraríamos una respuesta positiva.

Nuestros queridos amigos los matemáticos hicieron el trabajo duro y han encontrado que la solución (soluciones o raíces) de la ecuación cuadrática

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \tag{6.5}$$

vienen dadas por la siguiente fórmula,

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}\,, \tag{6.6}$$

donde la cantidad dentro de la raíz cuadrada, a saber

$$D = b^2 - 4ac\,,$$

es referida como el *discriminante de la ecuación*

Probemos esto. Imagina que necesitamos resolver la ecuación

$$x^2 - x - 6 = 0\,,$$

para usar la fórmula 6.6 necesitamos identificar los coeficientes (números) a, b y c en la ecuación, que en el caso de esta discusión son $a = 1$, $b = -1$ y $c = -6$.

Por lo tanto, el **discriminante** es

$$D = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$$

lo que implica

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

esto significa que tenemos dos raíces, a saber $x_1 = 6/2 = 3$ y $x_2 = -4/2 = -2$

Example 7. *Busquemos ahora la solución para*

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

esta vez, $a = 1$, $b = -2$ *y* $c = -15$. *El discriminante de la ecuación es*

$$(-2)^2 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64$$

por lo que la fórmula para la solución es

$$x = \frac{-(-2) \pm 8}{2(1)}$$

dando las soluciones $x_1 = 5$ *y* $x_2 = -3$.

Pensemos ahora en la "función"

$$y = x^2 - 2x - 15\,,$$

como cualquier función, esta es una máquina que da un valor (y) a cada valor de x que usamos como entrada. Así, por ejemplo,

$$y(2) = (2)^2 - 2(2) - 15 = 4 - 4 - 15\,,$$

$$y(2) = -15$$

Ahora,

$$y(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 15 = 9 + 6 - 15 = 0\,.$$

Pero esto ya lo sabíamos. $y(-3)$ debe ser cero porque usamos la fórmula de la solución de una ecuación cuadrática para obtener que -3 es una de las soluciones de $x^2 - 2x - 15 = 0$.

6.4. Practicando lo que hemos aprendido

Problem 1. *Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas*

- $x^2 - 13x = 30$. $x = 15$, $x = -2$
- $4x(2x + 3) = 36$. $x = 3/2$, $x = -3$
- $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$. $x = -2/3$, $x = 4$
- $x(x + 4) = 32$

Problem 2. *Encuentra las raíces de las funciones*

- $y(x) = 4x^2 - 4$
- $y(x) = 2x^2 + 4x + 2$
- $y(x) = x^2 + 36$

Problem 3. Este problema requiere un poco de pensamiento. *Considera las funciones* $y(x) = x^2 - 1$ *y* $y(x) = x + 1$. *Por favor, explica tu respuesta.*

- *¿Cómo se ven si se dibujan (un simple bosquejo es suficiente)*
- *¿Se cruzan sus gráficos?, si lo hacen, ¿dónde?*

6.5. Factorizando Funciones Cuadráticas

Comencemos con un ejemplo simple. Mira la igualdad

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) \tag{6.7}$$

¿Es verdad?, bueno, comprobemos

$$(x-1)(x-1) = x \times x + x \times (-1) - 1 \times x - 1 \times (-1) = x^2 - 2x + 1$$

así que la igualdad es de hecho verdadera. Un poco de pensamiento nos mostrará que $x = 1$ es una raíz doble de la función $F(x) = x^2 - 2x + 1$.

Escribir

$$F(x) = (x-1)(x-1)$$

se llama **factorizar** $F(x)$

Factorizar una función cuadrática es simplemente reexpresarla en términos de sus raíces.

Otro ejemplo puede ayudar.

Queremos factorizar el polinomio $P(x) = x^2 + 2x - 8$, usando lo que sabemos sobre las raíces de un polinomio cuadrático, fórmula 6.6, las raíces del polinomio que queremos factorizar vienen dadas por

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-8)}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

lo que significa que hay dos raíces diferentes, $x_1 = 2$ y $x_2 = -4$.

La factorización es muy simple, simplemente escribimos el polinomio como un producto de cantidades que contienen sus raíces como

$$x^2 + 2x - 8 = (x - x_1)(x - x_2) = (x-2)(x+4)$$

Comprobemos

$$(x-2)(x+4) = x^2 + 4x - 2x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

genial, ¿no es así?

Veamos otro ejemplo, factoriza $Q(x) = x^2 - 4$.

Esta vez las raíces de Q son

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(-4)}}{2} = \pm\frac{4}{2}$$

lo que significa que

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Resumamos lo que hemos hecho hasta este momento.

Si tenemos un polinomio de 2º orden con el primer coeficiente (a) igual a 1, es decir, algo como

$$P(x) = x^2 + bx + c$$

$P(x)$ se factoriza escribiendo

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

donde x_1 y x_2 son las raíces reales cuando existen.

En el caso en que $a \neq 1$ siempre podemos reexpresar el polinomio como

$$P(x) = a[Q(x)]$$

donde $Q(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ y usar lo que ya hicimos para polinomios con $a = 1$.

Dado que los ejemplos siempre son buenos para la comprensión, factoricemos $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

Comenzamos factorizando $a = 2$ para escribir

$$P(x) = 2\left[x^2 - 2x + 1\right]$$

ahora factorizamos $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ lo cual es fácil y produce

$$Q(x) = (x - 1)(x - 1)$$

y por lo tanto,

$$P(x) = 2(x - 1)^2$$

6.6. Un poco de Geometría

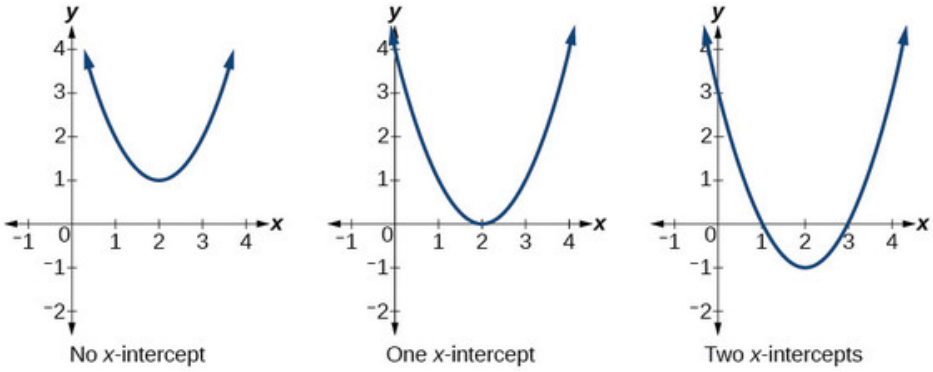

Figura 6.1: Caption

La figura 6.1 muestra tres curvas diferentes, estas curvas con formas particulares se llaman *parábolas* y son tres de los seis gráficos posibles de funciones cuadráticas, es decir, funciones de la forma

$$y(x) = ax^2 + bx + c\,.$$

Si examinamos cuidadosamente la figura, aprendemos dos cosas:

- Las tres curvas .ªpuntan hacia arriba", los matemáticos dicen que son **cóncavas hacia arriba**
- Una de las curvas tiene dos intersecciones (cruza el eje x dos veces), otra tiene solo una intersección (no cruza el eje x, solo lo toca), y la tercera no tiene intersección, nunca cruza ni toca el eje x.

Tener una intersección en x_0 significa $y(x_0) = 0$, es decir, x_0 es una raíz de $y(x)$ o, dicho de otra manera, x_0 es una solución de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Los problemas que hemos resuelto nos han enseñado que hay momentos en que una ecuación cuadrática tiene dos soluciones, a veces tiene una y solo una solución y a veces encontramos NINGUNA solución. Esos casos se corresponden con las tres parábolas mostradas en la figura 6.1, hemos encontrado una conexión muy interesante entre el álgebra y la geometría, pero más que una conexión lo que hemos encontrado es una nueva herramienta. Podemos pensar en los problemas de diferentes maneras, a veces geométricas, a veces algebraicas, a veces incluso hay más formas de ver los problemas.

Cuantas más formas aprendamos de ver los problemas, más posibilidades tendremos de comprenderlos y resolverlos.

Al comienzo de esta sección hablamos de seis posibles parábolas pero mostramos solo tres. La razón de esto radica en el coeficiente a en $y = ax^2 + bx + c$, cuando a es positivo, la parábola es cóncava hacia arriba, cuando a es negativo, es cóncava hacia abajo.

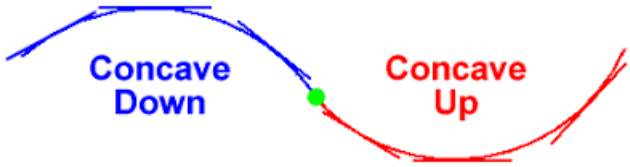

Figura 6.2: Definición gráfica de concavidad

Estamos muy cerca de haber aprendido mucho (pero no todo) sobre parábolas. Todavía faltan dos piezas de conocimiento.

La primera es la cuestión del número de intersecciones (o raíces de la ecuación cuadrática correspondiente) y centraremos nuestra atención en ello. Lo hacemos recordando la fórmula para la solución de la ecuación cuadrática,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Signo de a	**Concavidad**	**Signo/Valor de D**	**Número de intersecciones/raíces**
+	Hacia arriba	+	2
+	Hacia arriba	0	1
+	Hacia arriba	-	0
-	Hacia abajo	+	2
-	Hacia abajo	0	1
-	Hacia abajo	-	0

Cuadro 6.2: Clasificación de todas las parábolas de la forma $y(x) = ax^2 + bx + c$. D es el discriminante, $D = b^2 - 4ac$

esta fórmula tiene una raíz cuadrada ($\sqrt{b^2 - 4ac}$) y sabemos que no hay raíces cuadradas para números negativos. Por lo tanto, si $b^2 - 4ac$ resulta ser un número negativo, no habrá solución para la ecuación cuadrática ni intersección de la parábola. Existe la posibilidad de que $b^2 - 4ac$ sea igual a cero, entonces hay solo una solución para la ecuación cuadrática, o solo una intersección de la parábola, y finalmente, $b^2 - 4ac$ puede ser positivo, en cuyo caso tendremos dos raíces, o dos intersecciones diferentes. Dado que el signo de $b^2 - 4ac$ es tan importante, le damos un nombre especial a esta cantidad (ya lo hicimos) y la llamamos el **discriminante**. Con esta información a mano, ahora podemos resumir nuestro conocimiento sobre parábolas y ecuaciones cuadráticas.

6.7. Una historia real agradable e interesante

Habiendo aprendido las soluciones para las ecuaciones de primer y segundo grado, es natural preguntarse acerca de las ecuaciones de tercer, cuarto, quinto o mayor grado, de las cuales la tabla 6.3 muestra una muestra hasta el grado 6. Lo razonable es preguntar sobre la existencia

de fórmulas para resolver las ecuaciones de mayor grado.

Grado	Ecuación
1	$a_1x + a_0$
2	$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
4	$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
5	$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
6	$a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Cuadro 6.3: Polynomial equations

Durante mucho tiempo, la búsqueda de tales fórmulas fue una especie de cruzada para los matemáticos, trabajaron increíblemente duro y encontraron fórmulas para la solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, y a pesar de su esfuerzo no pudieron encontrar nada para ninguna ecuación de grado superior, nuestros amigos estaban muy frustrados. Luego, en el siglo diecinueve, un joven matemático francés y activista político llamado Évariste Galois, encontró lo que deberíamos llamar una pieza extraordinaria de las matemáticas, Galois, que se erige como un gran héroe intelectual, demostró que simplemente no existe ninguna fórmula para la solución de la ecuación de quinto grado (o superior), lo que significa que nos enseñó a todos que la búsqueda de cualquier fórmula de este tipo era como la búsqueda de la mítica Quimera, es decir, un desperdicio de esfuerzo completamente inútil.

Los descubrimientos de Galois, quien murió trágicamente en un duelo el 31 de mayo de 1832, a la temprana edad de 20 años, constituyen los cimientos de dos ramas modernas de las matemáticas llamadas *Teoría de Galois* y *Teoría de Grupos*, siendo esta última de importancia fundamental para la física moderna. Eduardo Sáenz un Matemático y Profesor de ciencias de la computación nos da un relato muy interesante y accesible del trabajo de Galois en español.

Para una reseña en inglés recomiendo el siguiente video.

6.7.1. ¿De dónde viene la fórmula para las raíces de un polinomio cuadrático?

La fórmula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}\,, \tag{6.8}$$

es bastante intrigante, por no decir casi mágica, ¿cómo llegó a ser?

Bueno, como dijimos al comienzo de estas notas, las matemáticas son divertidas y la fórmula proviene de trabajar con matemáticas. En este caso, de un ejercicio extremadamente inteligente de completar un cuadrado.

De hecho, escribamos la forma más general de la ecuación de segundo grado con coeficientes reales:

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad a, b, c \in \Re \tag{6.9}$$

comenzamos reescribiendo la ec. 6.9 como

$$(\sqrt{a}\,x)^2 + bx + c = 0 \tag{6.10}$$

ahora, justo al lado de b insertamos el número uno escrito como

$$1 = \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\,,$$

así que ahora la ecuación se ve como

$$(\sqrt{a}\,x)^2 + b\,\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}x + c = 0$$

haciendo uso de la conmutatividad movemos algunos factores un poco,

$$(\sqrt{a}\,x)^2 + 2\sqrt{a}\,x\,\frac{b}{2\sqrt{a}} + c = 0\,,$$

ahora hacemos un poco de agrupación

$$\left[(\sqrt{a}\,x)^2 + 2\sqrt{a}\,x\,\frac{b}{2\sqrt{a}}\right] + c = 0\,,$$

y aquí vemos que la parte entre corchetes de la ecuación es donde podemos completar un cuadrado. Para hacerlo necesitamos sumar cero de una manera inteligente, como

$$\left[(\sqrt{a}\,x)^2 + 2\sqrt{a}\,x\,\frac{b}{2\sqrt{a}}\right] + c + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a}\right) = 0$$

y hacer un poco más de reordenamiento y reagrupación

$$\left[(\sqrt{a}\,x)^2 + 2\sqrt{a}\,x\,\frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{b^2}{4a}\right] + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

y aquí vemos que la pieza entre corchetes es de hecho un cuadrado perfecto, así que ahora la ecuación se ve como

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0\,.$$

Nuestro siguiente paso es llevar el término independiente al lado derecho de la ecuación,

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c\,,$$

o,

$$\left(\frac{2a\,x + b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,,$$

ahora tomamos la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación y nos ocupamos de la posibilidad de tener dos signos,

$$\left(\frac{2a\,x + b}{2\sqrt{a}}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}\,,$$

el denominador del lado derecho se puede factorizar y tomar su raíz cuadrada para obtener

$$\frac{2a\,x + b}{2\sqrt{a}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}\,,$$

y ahora podemos eliminar los denominadores

$$2a\,x + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}\,,$$

y de aquí obtenemos inmediatamente

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{6.11}$$

Capítulo 7

Ecuación de la Recta

7.1. El Plano con Coordenadas Cartesianas

7.2. Primera Visita

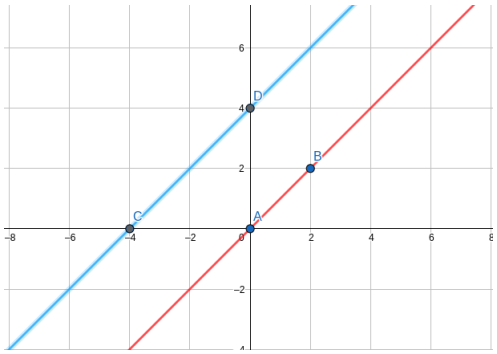

Figura 7.1: Los puntos tienen coordenadas, A(0,0), B(2,2), C(-4,0) y D(0,4). Las líneas roja y azul son paralelas

Las figuras 7.1 y 7.2 fueron dibujadas usando GeoGebra, las líneas azul y roja en 7.1 fueron

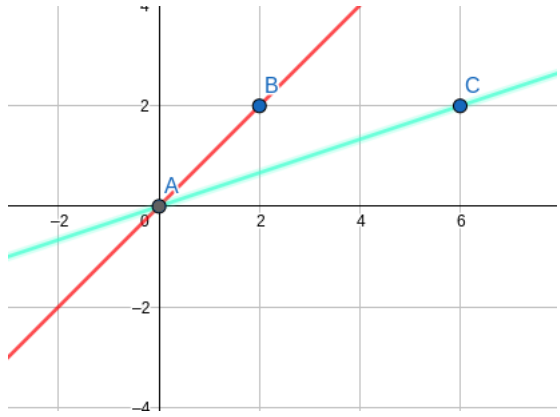

Figura 7.2: Los puntos tienen coordenadas, A(0,0), B(2,2), C(6,2). La línea roja es más empinada que la línea azul

establecidas usando las fórmulas

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= x + 4 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Para las líneas en la figura 7.2 las fórmulas son

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= \frac{1}{3}x \end{aligned} \tag{7.2}$$

Con un poco de atención y si usamos lo que hemos aprendido sobre el lenguaje matemático, notaremos que las cuatro fórmulas tienen la forma

$$\boxed{y = mx + n} \tag{7.3}$$

en la fórmula $y = \frac{1}{3}x$, $m = \frac{1}{3}$, mientras que en la fórmula $y = x + 4$, $m = 1$ y $n = 4$. Estos dos números, m y n, tienen significados especiales.

- m es llamada **pendiente**, y nos dice qué tan empinada es la línea. Si m es pequeña, digamos $m = 0{,}2$, la línea no será muy empinada, mientras que si $m = 5$ veremos una línea bastante inclinada.

- n es llamada la **intersección** es el valor de y cuando $x = 0$.

Intentemos entender perfectamente el significado de la fórmula 7.3. Si pensamos en un valor para x y pegamos ese valor en la fórmula, obtenemos un valor para y, esos dos valores terminan siendo las coordenadas de un punto en la recta. Veamos un ejemplo. La línea roja en la figura 7.1 tiene la fórmula $y = x$, si ponemos $x = 4$, obtenemos $y = 4$ y resulta que el punto $(4, 4)$ está de hecho en la línea, lo mismo sucede con $(-2, -2)$. La línea azul de la misma figura tiene la fórmula $y = x + 4$, al establecer $x = 2$ obtenemos $y = 6$ y $((2, 6)$ es un punto que pertenece a la línea. Como dijimos antes, para estas dos líneas paralelas, $m = 1$ lo cual es bastante empinado (de hecho, puedes encontrar que el ángulo que las líneas forman con el eje x es exactamente 45°.

La línea cian en la figura 7.2 viene dada por la fórmula $y = \frac{1}{3}x$, esta vez la pendiente tiene el valor $m = 0{,}333...$ y es por eso que la línea no está demasiado inclinada, y el punto $(6, 2)$ pertenece a la línea porque $y = 2 = \frac{1}{3}x$ con $x = 6$.

Ok, entonces hemos aprendido cómo encontrar puntos que pertenecen a una línea si conocemos su ecuación. Pero, ¿qué más podemos hacer?

Hace muchos, muchos años[1], se inventó la geometría tal como la conocemos hoy. De hecho, un hombre llamado **Euclides** también conocido como Euclides de Alejandría, un matemático griego, que vivió en la antigua y famosa ciudad de Alejandría escribió uno de los libros más importantes e influyentes de todos los tiempos, se llama **Elementos** y en él, Euclides escribió una gran cantidad de geometría, tanto de hecho, que los Elementos sigue siendo una obra fundamental sobre el tema. Pero, ¿qué tiene que ver Euclides con nuestra discusión actual?

Sucede que el primer postulado de Euclides establece algo que probablemente ya sabes: *dados dos puntos hay una y solo una recta que pasa por ambos.* este resultado plantea la siguiente pregunta,

[1] Cerca de 2350 años, para ser exactos

Dadas las coordenadas de dos puntos, ¿es posible encontrar la ecuación de la única recta que pasa por dichos puntos?

La respuesta corta es: **sí**. Pero tendremos que hacer un trabajo divertido antes de dar la respuesta completa. Consideremos los dos triángulos en la figura 7.3, el teorema de Tales

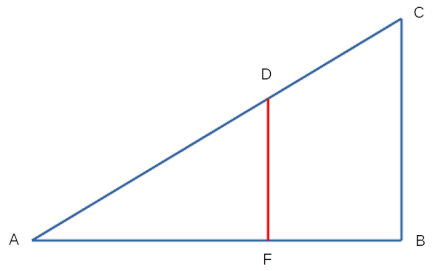

Figura 7.3: Los triángulos ABC y AFD son **similares** esto significa que todos los ángulos correspondientes son iguales

establece que para tales triángulos semejantes,

$$\frac{BC}{BA} = \frac{FD}{FA}\,. \tag{7.4}$$

y eso sucede con cualquier par de triángulos grandes y pequeños que podamos imaginar.

Dado que en la figura 7.4 todos los pares de puntos a lo largo de las líneas construyen triángulos semejantes, el teorema de Tales nos asegura que la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{7.5}$$

siempre tendrá el mismo valor, tal razón resulta ser la pendiente de la recta. Escribamos esto de nuevo con un poco de cuidado,

Dados dos puntos $P1(x_1, y_1)$ y $P2(x_2, y_2)$ la pendiente de la recta a la que pertenecen viene dada por

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{7.6}$$

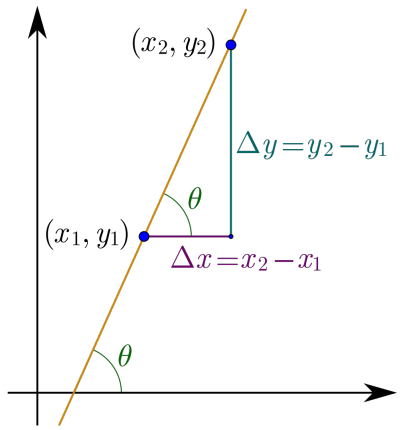

Figura 7.4: Cualquier par de puntos a lo largo de la línea amarilla forma un triángulo que es similar a otro construido a partir de cualquier otro par de puntos que pertenecen a la línea

y aquí debemos dar una advertencia, el orden de las coordenadas en el denominador y numerador de la fórmula es vital.

Ahora imagina un punto genérico Q a lo largo de la misma recta a la que pertenecen $P1$ y $P2$, y sea (x, y) las coordenadas de Q, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \tag{7.7}$$

o

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{7.8}$$

es decir

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \tag{7.9}$$

y esta es otra forma para la ecuación de la recta.

7.3. Tres Formas de la Recta

Hay tres problemas diferentes asociados con la búsqueda de la ecuación de una recta.

- Nos dan la pendiente (m) y una intersección (n) de la recta.
- Nos dan la pendiente y las coordenadas (x_0, y_0) de un punto $P0$ que pertenece a la recta, y finalmente
- Nos dan las coordenadas (x_1, y_1) (x_2, y_2) de dos puntos que pertenecen a la recta.

Las formas de construir las ecuaciones para la recta en cada caso son (respectivamente)

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Capítulo 8

Sistemas de Ecuaciones Lineales

8.1. ¿Qué son estas cosas?

A veces encontramos un problema como el siguiente, encuentra x y y que resuelvan las siguientes dos ecuaciones simultáneamente

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \tag{8.1}$$

en este caso, la respuesta es $x = 0$ y $y = 1$.

Lo mismo ocurre con

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

con solución, por el momento $x = 3/5$, $y = -1/5$. Las cosas podrían ser aún más interesantes

como en este problema,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned} \tag{8.3}$$

con solución, $x = 1/2$, $y = -1/2$ y $z = 0$

Los matemáticos le han dado un nombre a este tipo de cosas, las llaman **sistemas de ecuaciones lineales**.

8.2. Acercándose a la Solución

En esta sección daremos un primer vistazo a la pregunta: **¿cómo resolvemos sistemas de ecuaciones lineales?**

Por el momento, nos concentraremos en el caso más simple de solo dos ecuaciones y dos variables, es decir, cosas que se ven así

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ x - y &= 1\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Existen varias técnicas para resolver este tipo de problemas.

Un método muy simple consiste en intentar multiplicar una o ambas ecuaciones por algunos números elegidos inteligentemente, y luego sumar el resultado para deshacernos de una de las variables, lo que nos deja con una ecuación lineal para la otra variable, luego resolvemos la ecuación, obtenemos el valor de la variable que dejamos sola, y usamos ese valor para sustituirlo en cualquiera de las dos ecuaciones originales, para obtener una nueva ecuación lineal simple para la variable restante.

Probemos este método con el sistema 8.4. Un poco de observación (y práctica) nos lleva a notar que, si multiplicamos la segunda ecuación por 2 estaremos listos para sumar ambas ecuaciones y cancelar y, de hecho, la multiplicación de la segunda ecuación por 2 nos deja con

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ 2x - 2y &= 2\,, \end{aligned} \tag{8.5}$$

y si sumamos ambas ecuaciones obtenemos,

$$2x + 2y + (2x - 2y) = 2\,, \tag{8.6}$$

lo que produce

$$4x = 2\ , \tag{8.7}$$

con el resultado, $x = 1/2$. Ahora podemos sustituir este valor en, digamos, la primera ecuación original para obtener

$$2(1/2) + 2y = 0 \tag{8.8}$$

o

$$1 + 2y = 0 \tag{8.9}$$

con solución, $y = -1/2$. Y como se anunció, encontramos la solución al sistema que es $x = 1/2$, $y = -1/2$.

8.2.1. ¿Siempre hay una solución?

Considera el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x + \frac{1}{2}y &= 3 \end{aligned} \tag{8.10}$$

si multiplicamos la segunda ecuación por -2 y sumamos obtenemos,

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ -2x - y &= -6 \end{aligned} \tag{8.11}$$

y

$$2x + y - 2x - y = 1 - 6 \tag{8.12}$$

lo que termina como

$$0 = -5 \tag{8.13}$$

¿QUÉ?, esto es ridículo, 0 y -5 son diferentes, este es un resultado imposible. ¿Qué hicimos mal?.

La respuesta es: NO HICIMOS NADA MAL, no importa lo que intentemos, en este sistema en particular, siempre obtendremos una respuesta imposible.

Claramente hay una pregunta:

¿Por qué pasó esto?

Volveremos a responderla en la sección 8.3 donde descubriremos una hermosa relación entre los sistemas de ecuaciones lineales y la geometría.

Por el momento, veamos este otro sistema,

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Para intentar una solución, multiplicamos la primera ecuación por -2 y sumamos,

$$-2x - 2y + 2x + 2y = -2 + 2 \tag{8.15}$$

esta vez se deduce que

$$0 = 0\,, \tag{8.16}$$

lo cual es siempre cierto, un resultado que parece extraño, de hecho. Una vez más, no hay nada malo, simplemente llegamos a una verdad absoluta, ¿tiene algún significado?, una vez más, debemos ser pacientes y esperar la sección 8.3

8.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Geometría

Veamos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ 16x - 2y &= 6\,, \end{aligned} \tag{8.17}$$

podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} y &= -2x + 2 \\ -2y &= -16x + 6\,, \end{aligned} \tag{8.18}$$

o

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -2x + 2 \\ y &= 8x - 3\,, \end{aligned}} \tag{8.19}$$

Ahora respiremos profundamente y miremos cuidadosamente lo que tenemos frente a nuestros ojos. Es un sistema de ecuaciones lineales, sí. Pero también podemos pensar que son las ecuaciones de dos líneas rectas, una con pendiente $m = -2$ y la otra con pendiente $m = 8$. Ohhh, son dos líneas no paralelas y por lo tanto deben cruzarse en uno y solo un punto.

Si hubiéramos trabajado para resolver el sistema 8.17 habríamos encontrado la solución $x = 1/2$, $y = 1$ y si usamos GeoGebra, podremos ver que las líneas se cruzan exactamente en el punto $(1/2, 1)$.

En el caso del sistema 8.10

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x + \frac{1}{2}y &= 3 \end{aligned} \tag{8.20}$$

o

$$\begin{aligned} y &= -2x + 1 \\ y &= -2x + 6 \end{aligned} \tag{8.21}$$

la geometría nos dice que estamos tratando con dos líneas paralelas (ambas tienen pendiente $m = -2$) e intersecciones diferentes, esas líneas nunca se encontrarán, su encuentro es imposible como la igualdad $0 = -5$.

Finalmente, en el sistema 8.14

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned} \tag{8.22}$$

o

$$\begin{aligned} y &= -x + 1 \\ 2y &= -2x + 2 \end{aligned} \tag{8.23}$$

que se simplifica a

$$\begin{aligned} y &= -x + 1 \\ y &= -x + 1 \end{aligned} \tag{8.24}$$

lo que sucedió es que estábamos hablando de la misma línea, y por lo tanto, todos sus puntos le pertenecen, el sistema es siempre verdadero.

Hemos encontrado una hermosa y profunda conexión entre el álgebra y la geometría. Los sistemas de 2 ecuaciones lineales con dos variables son equivalentes al problema de preguntar el punto de intersección de dos líneas.

Geométricamente sabemos lo que pasa

- Las líneas se cortan en uno y solo un punto

- Las líneas son paralelas y nunca se cruzan, o
- Las líneas son una y la misma y, por lo tanto, todos sus puntos pertenecen a la línea.

Desde el punto de vista de los sistemas de ecuaciones lineales, estas tres posibilidades se traducen en

- El sistema tiene una y solo una solución (los matemáticos dicen, hay una solución única)
- El sistema no tiene solución, y
- El sistema tiene infinitas soluciones.

8.3.1. Sistemas de tres ecuaciones y tres variables

Ya hemos visto sistemas de este tipo, se ven así

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y - 3z &= 2 \\ 5x + 7y - 3z &= 5 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Sucede que geométricamente, una ecuación como

$$x + y + z = 1\,, \tag{8.26}$$

representa un plano situado en el espacio tridimensional. Los planos también pueden ser paralelos y nunca tocarse, o pueden cruzarse, de hecho, dos planos que se cruzan se intersecan en una línea.

Cuando tenemos tres ecuaciones de plano puede suceder que dos de ellas se intersequen a lo largo de una línea y otras dos en otra línea y estas líneas pueden encontrarse, en cuyo caso, si se encuentran en un punto, el sistema de 3 por 3 tendrá una solución única. Si las dos líneas

son la misma, habrá infinitas soluciones. Si dos de los planos son paralelos y nunca se tocan, no tendremos soluciones.

8.4. Sistemas realmente grandes

Piensa en sistemas de 4 por 4 o de 5 por 5

$$\begin{aligned} x+y+z+t&=1\\ 2x+2y-3z-t&=2\\ 5x+7y-3z+2t&=5\\ x-y+3z-2t&=5 \end{aligned} \tag{8.27}$$

y

$$\begin{aligned} x+y+z+t-3w&=1\\ 2x+7y-3z-t+5w&=2\\ 3x+7y-3z+t-w&=5\\ x-7y-6z+t/2-8w&=5\\ 3x+5y-z+2t-w&=0 \end{aligned} \tag{8.28}$$

se ven graciosos, y se ven aún más divertidos si pensamos en una interpretación geométrica.

Una ecuación como

$$x+y+z+t=1 \tag{8.29}$$

puede considerarse como un "plano"(se les conoce como hiperplanos) situado en un espacio de cuatro dimensiones, mientras que algo como

$$7x+2y+3z+t-w=1 \tag{8.30}$$

es un hiperplano (uno de cuatro dimensiones) situado en un espacio de cinco dimensiones.

La diversión no se detiene aquí, podemos imaginar espacios de, digamos 100 dimensiones, en cuyo caso, no tenemos suficientes caracteres diferentes para referirnos a cada dimensión, por lo que usamos índices como en $(x_1, x_2, x_3, ..., x_{98}, x_{99}, x_{100})$, podemos pensar en hiperplanos situados en espacios dimensionales tan grandes y pensar en sistemas de 100 ecuaciones lineales con 100 variables, **JAJAJAJAJA** (Risa histérica de científicos locos).

Estas ideas no tienen nada de raro, solo imagina cuántas variables podrían influir en el precio de un par de zapatos (el precio del cuero, el precio de la electricidad, los salarios de los empleados, el precio del transporte, los impuestos, el alquiler de la tienda, el costo de la maquinaria para hacer los zapatos, etc, etc, etc). Cada una de estas variables es una dimensión en el espacio de factores que influyen en el precio, no hay misterio al respecto. científicos, ingenieros, economistas y muchos otros profesionales siguen resolviendo enormes sistemas de ecuaciones lineales. Google en particular lo hace para sistemas que consisten en miles de millones de ecuaciones y miles de millones de variables. Por supuesto, nadie intenta abordar grandes problemas a mano, utilizamos computadoras potentes, lo cual es solo otra razón para divertirse con las matemáticas.

8.5. Resolviendo Sistemas Lineales en la Práctica

Los sistemas grandes siempre son resueltos por computadoras, sin embargo, para sistemas pequeños hay algunos trucos que pueden ser útiles.

Example 8. *Pensemos en el sistema*

$$2x - y + 3z = 9 \tag{8.31}$$

$$x - 3y - 2z = 0 \tag{8.32}$$

$$3x + 2y - z = -1 \tag{8.33}$$

Hay un primer truco para saber que este sistema va a tener una solución única, pero necesita algo de geometría que aún no hemos discutido.

Olvidaremos que sabemos que hay una solución e intentaremos resolver el sistema utilizando los 3 métodos que usualmente se enseñan en la escuela secundaria.

- **Primer Método:** *Podemos usar la ecuación 8.32 para encontrar x en función de y y z lo que produce*

$$x = 3y + 2z\,, \tag{8.34}$$

ahora sustituimos este valor de x en las ecuaciones 8.31 y 8.33 para obtener

$$\begin{aligned} 2(3y + 2z) - y + 3z &= 9 \\ 3(3y + 2z) + 2y - z &= -1 \end{aligned} \tag{8.35}$$

después de un poco de álgebra terminamos con un sistema más pequeño, de hecho, un sistema de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas

$$5y + 7z = 9 \tag{8.36}$$

$$11y + 5z = -1\,, \tag{8.37}$$

la ecuación 8.37 implica que

$$z = \frac{1}{5}(-11y - 1)\,, \tag{8.38}$$

lo que a su vez implica, después de la sustitución en la ecuación 8.36

$$5y - \frac{1}{5}(11y + 1) = 9\,, \tag{8.39}$$

una ecuación estándar de primer orden de una variable que resulta en

$$\boxed{y = -1} \tag{8.40}$$

Ahora sustituimos este valor de y de nuevo en la ecuación 8.37

$$11(-1) + 5z = -1\,, \tag{8.41}$$

y trivialmente obtenemos

$$\boxed{z = 2} \tag{8.42}$$

Finalmente, vamos a la ecuación 8.31 y sustituimos los valores de y y z que hemos encontrado

$$2x - (-1) + 3(2) = 9\,, \tag{8.43}$$

una ecuación elemental que nos da el valor de x. Al final del día, hemos encontrado que la solución del sistema original es

$$x = 1\,, \quad y = -1\,, \quad z = 2 \tag{8.44}$$

- **Segundo Método:** *Debemos recordar que cada vez que operamos de la misma manera en ambos lados de una ecuación, la ecuación resultante es completamente equivalente a la original. Con esto en mente mostramos el sistema de interés*

$$2x - y + 3z = 9 \tag{8.45}$$

$$x - 3y - 2z = 0 \tag{8.46}$$

$$3x + 2y - z = -1 \tag{8.47}$$

Primero notamos que si multiplicamos la ecuación 8.46 por $-1/3$ en ambos lados obtenemos una ecuación donde y aparece como $+y$. De manera similar, si multiplicamos la ecuación 8.45 por 2 veremos $-2y$ en lugar de y. Esto sugiere lo siguiente:

- *Suma la ec. 8.46 multiplicada por $-1/3$ a la ec. 8.45*

- *Suma el doble de la ec. 8.45 a la ec. 8.47, es decir,*

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - \frac{1}{3}(x - 3y - 2z) &= 9 \\ 2(2x - y + 3z) + 3x + 2y - z &= -1 + 2(9)\,, \end{aligned} \tag{8.48}$$

después de un poco de álgebra obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}z &= 9 \\ 7x + 5z &= 17 \end{aligned} \tag{8.49}$$

Como sucedió con el primer método, hemos encontrado un sistema de 2 por 2. En este punto podríamos encontrar una variable, digamos z en términos de x y repetir lo que hicimos antes, pero en su lugar continuaremos con el proceso de combinar las ecuaciones para deshacernos de una de las dos variables.

Toma la primera ecuación del nuevo sistema y multiplícala por $-7 \times 3/5$ para obtener

$$\begin{aligned} -7 \times 3/5 \times (\frac{5}{3}x + \frac{11}{3}z) &= (-7 \times 3/5) \times 9 \\ 7x + 5z &= 17 \end{aligned} \tag{8.50}$$

o

$$\begin{aligned} -7x - \frac{77}{5}z &= -189/5 \\ 7x + 5z &= 17 \end{aligned} \tag{8.51}$$

ahora suma ambas ecuaciones y obtén

$$\begin{aligned} -\frac{52}{5}z &= -104/5 \quad \textit{así} \\ z &= 2 \end{aligned} \tag{8.52}$$

Desde aquí vamos hacia atrás a la ec. $7x + 5z = 17$ para obtener

$$7x + 5(2) = 17 \tag{8.53}$$

lo que implica $x = 1$.

Finalmente, la sustitución en la ecuación 8.46 del sistema original

$$(1) - 3y - 2(2) = 0 \tag{8.54}$$

da $y = -1$.

- **Tercer Método**

En este método intentamos expresar una variable en términos de las otras dos para las tres ecuaciones.

Comenzando con el sistema con el que hemos estado jugando

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ x - 3y - 2z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= -1 \end{aligned} \tag{8.55}$$

encontramos x *en cada ecuación*

$$\begin{aligned} x &= \frac{9 + y - 3z}{2} \\ x &= 3y + 2z \quad y \\ x &= \frac{-1 - 2y + z}{3} \end{aligned} \tag{8.56}$$

El siguiente paso en este método es usar estas desigualdades para construir un nuevo sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

$$\begin{aligned} 3y + 2z &= \frac{9 + y - 3z}{2} \quad y \\ 3y + 2z &= \frac{-1 - 2y + z}{3} \end{aligned} \tag{8.57}$$

o

$$\begin{aligned} 5y + 7z = 9 \quad y \\ 11y + 5z = -1 \end{aligned} \tag{8.58}$$

el truco se repite de nuevo para obtener

$$\begin{aligned} z = \frac{9-5y}{7} \quad y \\ z = -\frac{1+11y}{5} \end{aligned} \tag{8.59}$$

que al final produce la ecuación lineal

$$\frac{9-5y}{7} = -\frac{1+11y}{5} \tag{8.60}$$

es decir

$$45 - 25y = -7 - 77y \tag{8.61}$$

$$52y = -52\,, \tag{8.62}$$

lo que implica $y = -1$. *Estoy seguro de que el lector sabe lo que sigue. Exactamente: ir hacia atrás.*

$$\begin{aligned} z = \frac{9-5y}{7} \quad \textit{lo que, para } y = 1 \\ z = \frac{9-5(-1)}{7} = 2 \end{aligned} \tag{8.63}$$

y finalmente, pegamos $y = -1$ *y* $z = 2$

en

$$x = \frac{9+y-3z}{2} \tag{8.64}$$

para terminar con

$$x = \frac{9 + (-1) - 3(2)}{2} = \frac{9 - 7}{2} = 1 \tag{8.65}$$

Cada uno de estos tres métodos se presenta en la escuela donde a los estudiantes se les enseña usualmente a seguirlos paso a paso.

Un procedimiento que debe seguirse rigurosamente paso a paso se llama un *Algoritmo*, hasta este punto en estas notas hemos aprendido varios algoritmos pero nunca nos detuvimos a pensar mucho en eso. Los algoritmos son muy buenos para algún tipo de programación de computadoras llamada imperativa. pero eso es para algunas otras notas.

El punto que queremos hacer para finalizar esta sección es que no es necesario seguir estos algoritmos ciegamente, podemos combinarlos siempre y cuando todas nuestras operaciones matemáticas sean legales.

Example 9. *Resuelve el sistema*

$$x + 2y + 3z = 1 \tag{8.66}$$

$$3x + 2y + z = 7 \tag{8.67}$$

$$2x + y + 2z = 1 \tag{8.68}$$

Comenzamos sumando -tres veces la ec8.66 de la ec8.67 y restando el doble de la ec8.66 de la ec8.68 para obtener el nuevo sistema

$$x + 2y + 3z = 1 \tag{8.69}$$

$$-4y - 8z = 4 \tag{8.70}$$

$$-3y - 4z = -1 \tag{8.71}$$

Ahora suma $-3/4$ *de la ec8.70 a la ec8.71 para terminar con el sistema*

$$x + 2y + 3z = 1 \tag{8.72}$$

$$-4y - 8z = 4 \tag{8.73}$$

$$2z = -4 \tag{8.74}$$

este sistema está -por razones obvias- en lo que se conoce como forma triangular superior.

Como siempre debemos recordar que, dado que todas las operaciones que hicimos en el sistema fueron legales, el nuevo sistema triangular superior es equivalente al original en el sentido de que las soluciones de este último son las soluciones del primero.

En su forma triangular superior el sistema se resuelve trivialmente, obtenemos $z = -2$ *que ahora se sustituye en la ec8.74 lo que produce*

$$-4y - 8(-2) = 4$$

así que $y = -5$*, finalmente:*

$$x + 2(-5) + 3(-2) = 1$$

implica

Capítulo 9

Funciones

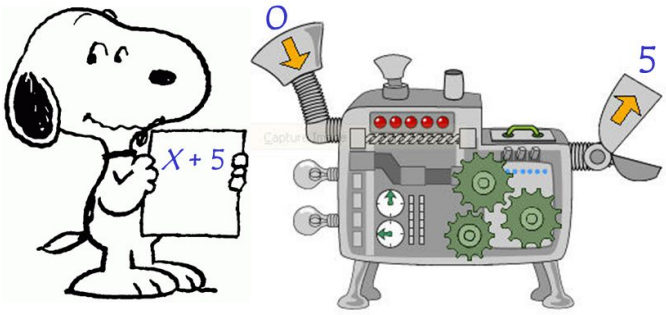

Figura 9.1: Una función representada como una máquina

9.1. Primer Encuentro: Las Funciones Son Máquinas

Una función no es más que una máquina que se come un objeto y lo convierte en otra cosa, pero siempre en una sola y misma cosa.

Las funciones tienen tres elementos, el dominio, la función en sí y el rango.

El dominio y el rango son conjuntos. El dominio es el conjunto de objetos a los que se les permite entrar en la máquina y el rango el conjunto de todas las posibles salidas de la máquina.

Imaginemos un ejemplo muy simple, una función cuya entrada son los nombres de los jugadores de la NFL para la temporada 2024 y la salida es el nombre del equipo al que pertenece el jugador.

En este ejemplo, el dominio es el conjunto de todos los jugadores de la NFL y el rango el conjunto de los nombres de todos los equipos de la NFL para la temporada 2024.

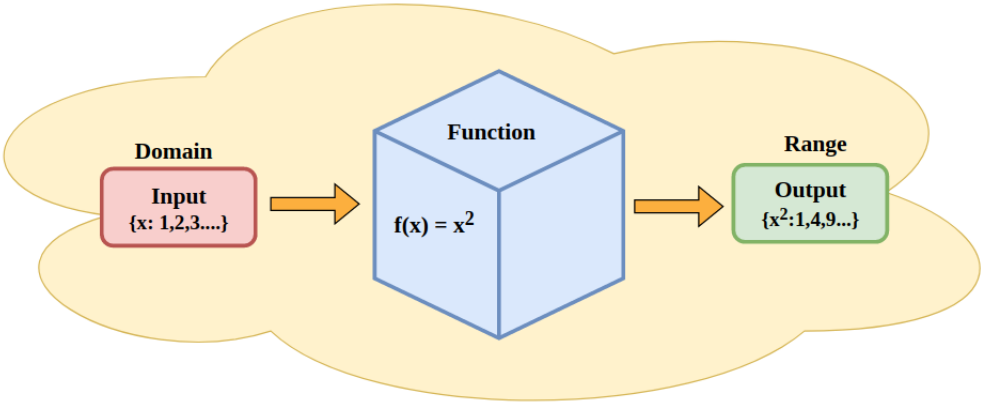

Figura 9.2: La función matemática elemental $f(x) = x^2$

En este punto de nuestros estudios (matemáticas elementales), una función se come un número y produce un nuevo número, y para hablar de funciones escribimos

$$\boxed{f(x) = \text{una fórmula con } x \text{ dentro}}, \tag{9.1}$$

en esta notación, x es el número que se come la máquina y $f(x)$ el producto, llamado imagen. Probemos algunos ejemplos

Example 10. *Como primer ejemplo, pensemos en la figura 9.2 que representa una función que eleva al cuadrado enteros positivos*

Example 11. *A veces las funciones pueden representarse como tablas,*

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
f(x)	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*	*64*	*81*	*100*

Es importante darse cuenta de que al hablar de funciones debemos especificar la entrada, es decir, debemos ser específicos sobre lo que se supone que la función debe comer, esto se llama el **dominio**.

Example 12. *Otra forma de especificar funciones es a través de fórmulas, como*

$$u(x) = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0 \tag{9.2}$$

aquí, la cosa de aspecto extraño "$x \geq 0$" es la especificación del dominio. La fórmula significa, por lo tanto, que u es una función que toma (come) cualquier número mayor o igual a cero y devuelve el valor de su raíz cuadrada.

Example 13. *Las funciones muy a menudo son representadas por gráficos, tal es el caso de la figura 9.3 donde estamos mirando dos funciones muy famosas en el dominio $0 \leq x \leq 2\pi$, quizás debas recordar que pi = 3,141592654... es un número especial relacionado con el círculo.*

¿Qué tal si resolvemos algunos problemas?

Problem 4. *Considera el dominio*

$$x = -6, -5, -4, -3, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

y la fórmula $f(x) = x^2$. Construye una tabla de valores para la función.

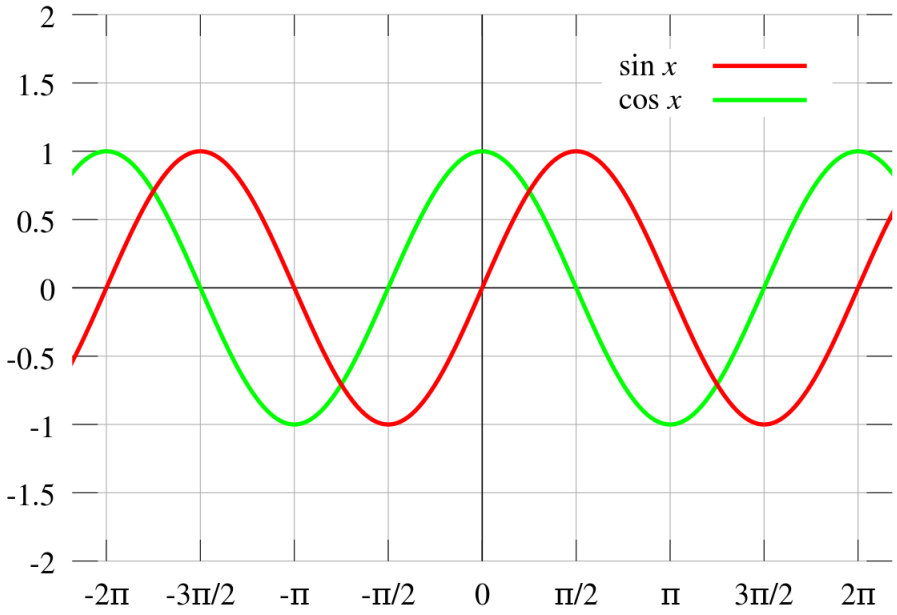

Figura 9.3: Funciones seno y coseno

Problem 5. *Considera el dominio* $-5 \leq x \leq 5$ *y las fórmulas*

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = 2x + 1$$

$$h(x) = -2x + 1$$

Dibuja (o bosqueja) los gráficos correspondientes.

9.2. Monomios y Polinomios

En la sección 6.3 tuvimos algún contacto con lo que entonces llamamos, Polinomio de segundo orden, que no eran más que funciones con la forma general

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La noción anterior se puede generalizar, a lo que se llama monomios y polinomios.

Un monomio no es más que una función definida por una potencia entera de su variable, así, por ejemplo,

$$f : \Re \to \Re \quad f(x) = x^2$$

es un monomio de segundo orden.

Un monomio de cuarto orden de la variable real x sería claramente

$$g : \Re \to \Re \quad f(x) = x^4$$

Dadas las reglas de suma, producto y potencias, los polinomios se definen como funciones construidas como productos de monomios por números y sumas de ellos. El grado de un polinomio es el grado del monomio de mayor grado presente en él.

Por ejemplo

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2$$

es un polinomio de cuarto grado.

El polinomio más general de 5º grado se vería así

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Definition 1. *Un polinomio de grado p es una función de la forma*

$$P_p(x) = a_px^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-3}x^{p-3} + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Hay valores especiales de x llamados raíces donde un polinomio es cero.

El polinomio de segundo orden $P(x) = x^2 - 4$, por ejemplo, tiene dos raíces, a saber $x_1 = -2$ y $x_2 = +2$

Finalizamos la discusión de esta sección, con un teorema, de tal importancia que lleva el nombre *Teorema Fundamental del Álgebra*

Theorem 1. *Un Polinomio de grado p puede tener a lo sumo p raíces*

9.3. Mejorando el concepto de Dominio

Según se expresa en el ejemplo 11, el dominio de una función es una forma de especificar lo que se supone que la función debe comer.

Si damos una función por una fórmula y no especificamos explícitamente su dominio, debemos pensar en la fórmula y decidir qué cosas puede comer la fórmula.

Consideremos

$$f(x) = x^2 \,,$$

si pensamos un poco, nos damos cuenta de que podemos elevar al cuadrado cualquier número, por lo que el dominio *a priori* de $f(x) = x^2$ es simplemente todos los números.

Si ahora pensamos en

$$f(x) = \sqrt{x} \,,$$

encontramos un pequeño problema. No podemos obtener la raíz cuadrada de un número negativo. Así que el dominio de $\sqrt{x}$ es todos los números no negativos, lo que se escribe como $0 \leq x$.

De manera similar, si tomamos $u(x) = 1/x$ rápidamente nos damos cuenta de que casi siempre podemos dividir uno (1) por cualquier número, siendo el cero la única excepción, entonces podemos decir que el dominio de $1/x$ es $x \neq 0$.

¿Qué pasa con esto?

$$y(x) = \frac{1}{x-1}\,.$$

esta función es un cociente, y por lo tanto solo se puede calcular a menos que el denominador sea igual a cero, por lo tanto, el dominio de y es todos los números excepto 1, lo que escribimos $x \neq 1$.

Un ejemplo mucho más interesante es este,

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

ahora tenemos dos condiciones, en primer lugar, el denominador de la fracción no puede ser cero y en segundo lugar, la fracción debe resultar en un número no negativo, estas dos condiciones se pueden escribir como

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 0$$
$$x - 1 \neq 0\,,$$

y deben satisfacerse simultáneamente. Esto resulta ser un lindo ejercicio en lo que se llama *precálculo* y te mostraré una técnica para resolverlo.

La técnica consiste en construir una tabla que considere los signos y valores especiales para ambos $x+1$ y $x-1$,

x	< -1	-1	$-1 < x < 1$	1	> 1
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	not defined	$-$	0	$+$

Por lo tanto, y está definida para $x < -1$ o $1 \leq x$, algo que podemos decir escribiendo

$$Dom(y) = x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

9.4. La necesidad de hablar jerga matemática

Si nos sentamos y respiramos lenta y profundamente, notaremos que cuanto más hablamos matemáticas, más y más difícil se vuelve explicar las cosas en español sencillo, esto no es un problema exclusivamente relacionado con las matemáticas, sucede con todos los campos del conocimiento, siempre necesitamos introducir un lenguaje particular para expresar nuestras ideas o nos perdemos (como hacen muchos *influencers*). El lenguaje es fundamental, piensa en la palabra **gato** y lo que significa o describe si lo deseas. Si no decimos *oye mira, un gato* nos veremos obligados a decir. *oye mira, un animal peludo de cuatro patas que maúlla y come animales más pequeños como ratones*, lo mismo ocurre con casi cualquier cosa que se te ocurra, la palabra *catedral* significa un gran edificio dedicado a ciertas actividades religiosas e incluso eso no es suficiente ya que podemos tener catedrales católicas, protestantes u ortodoxas.

Habiendo establecido definitivamente la necesidad de un nuevo lenguaje, introduzcamos algo de *mate-lenguaje* [1]. Lo haremos introduciendo algunas palabras y símbolos y luego tratando de explicar lo que significan. Y cuanto más caminemos por el paisaje matemático, más precisos y perfectos necesitaremos ser, pero eso es algo que sucederá con el tiempo.

Una lista de palabras: conjunto, conjunto vacío ($\emptyset$), unión ($\cup$) , intersección ($\cap$).

[1] jejeje, mi forma de decir lenguaje matemático

Capítulo 10

Un Vistazo a la Geometría Euclidiana

Pasamos algún tiempo hablando de geometría en el capítulo anterior, es hora de ser un poco más serios al respecto y comenzamos haciéndolo al presentar uno de los libros más reimpresos y traducidos de la historia, solo superado por la Biblia en algunas cuentas. Este prominente libro no es otro que los Elementos de Euclides

Los Elementos de Euclides ($\Sigma\tau o\iota\xi\epsilon\tilde{\iota}\alpha$) son un gran conjunto de libros de matemáticas sobre geometría y números, escritos por el antiguo matemático griego conocido como Euclides (c. 325 a.C.–265 a.C.) en Alejandría (Egipto) alrededor del 300 a.C. Los Elementos fue un libro de texto fundamental enseñado en muchas culturas durante un período de casi 2000 años después de su escritura. Se estima que se han publicado más de 1000 ediciones y traducciones desde la primera edición impresa en 1482; de hecho, fue una de las primeras obras matemáticas en imprimirse después de la invención de la imprenta de tipos móviles en la era del Renacimiento. Existen traducciones en idiomas que van desde el árabe, persa, hebreo y turco hasta el latín, italiano, inglés, francés, alemán y ruso, entre muchos otros.

Hasta el siglo XX, los Elementos se consideraban lectura esencial y eran estudiados por cualquiera que quisiera aprender geometría y matemáticas formalmente. Su longevidad y uso

generalizado se deben a su organización notablemente clara, sus pruebas rigurosas y su papel como modelo para el razonamiento deductivo. La resiliencia de Los Elementos a lo largo de milenios atestigua su importancia histórica en las matemáticas.

Figura 10.1: Primera edición impresa de Los Elementos

Los Elementos es el primer libro en el que las matemáticas se discuten en los términos que las entendemos hoy. Presenta todo con un enfoque que comienza con algunos *conceptos primitivos* y **cinco** declaraciones fundamentales llamadas **AXIOMAS** o **POSTULADOS**.

Los conceptos primitivos están relacionados con ideas, que son tan básicas que nadie ha logrado definirlas más allá de la intuición, así, por ejemplo, un **punto** se concibe como algo realmente, realmente diminuto que podríamos dibujar en una hoja de papel con el lápiz más afilado jamás imaginado.

Otras nociones primitivas son: línea, plano y congruencia[1]

Es extraordinario que toda la geometría de Euclides se base en los siguientes cinco postulados

[1]Digamos que dos dibujos son congruentes si podemos poner una copia de uno de ellos encima del otro y son idénticos en todos los aspectos

1. Hay una y solo una línea recta que se puede dibujar desde cualquier punto a cualquier punto.

2. Hay una y solo una línea que extiende una línea recta finita continuamente en una línea recta.

3. Hay un y solo un círculo con un círculo y radio dados.

4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. [El postulado de las paralelas]: Si una línea recta que cae sobre dos líneas rectas hace que los ángulos interiores del mismo lado sumen menos de dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se encuentran en ese lado en el que los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

El quinto postulado se puede enunciar de una manera más simple, dada una línea recta (A) y un punto (p) que no está en la línea, hay una y solo una línea (B) que es paralela a A y pasa por p (es decir, contiene a p).

Los axiomas permiten a cualquiera enunciar y probar muchas, muchas otras afirmaciones. Probar una afirmación significa asegurarse de que la afirmación es correcta en el sentido de que si los postulados son correctos o verdaderos, si se quiere, la afirmación también es verdadera. Las pruebas se logran utilizando las reglas de la lógica. Los matemáticos y los abogados están capacitados para usar las reglas de la lógica.

10.1. Lógica: Reglas del razonamiento

Las personas tienen una fuerte tendencia a hacer afirmaciones, a veces las afirmaciones son obviamente falsas, como por ejemplo en **un coche rojo es azul**. Otras veces, descubrir si una

afirmación es verdadera o falsa no es tan fácil. La lógica es la herramienta que muestra cuándo un razonamiento es correcto o incorrecto, y ¡qué herramienta es!

Antes de volver a la geometría, hagamos algo de lógica.

- Imagina que nunca, jamás has visto un zorro antes. Vas a Alaska y ves, digamos... 40 o 50 zorros que resultan ser blancos. Podrías sentirte tentado a afirmar: **todos los zorros son blancos**. ¿Sería esa una afirmación verdadera? La respuesta es NO, por las reglas de la lógica, esta afirmación no puede ser correcta. La razón es la siguiente, si ves que algo sucede muchas veces y piensas que la próxima vez será exactamente igual, estás haciendo lo que se llama un **razonamiento inductivo**, y resulta que los expertos en lógica han encontrado que el razonamiento inductivo no conduce a un razonamiento correcto, en el caso de los zorros, podrías encontrar fácilmente zorros rojos, lo que claramente demuestra que no todos los zorros son blancos o, dicho de otra manera, tu inducción sobre el color de los zorros fue simplemente errónea.

- Todos sabemos que los mamíferos tienen cuatro extremidades. ¿Es correcto afirmar que cualquier animal con cuatro extremidades es un mamífero? Bueno, sabemos perfectamente que tal afirmación es completamente falsa, de hecho, los caimanes tienen cuatro extremidades y son reptiles, no mamíferos.

  Aquí nos hemos encontrado con un razonamiento particularmente peligroso. La afirmación **todos los mamíferos tienen cuatro extremidades** o expresada de otra manera, **cualquier mamífero tiene cuatro extremidades** se llama usualmente una afirmación directa, mientras que la afirmación **todo animal con cuatro extremidades es un mamífero** se llama su **recíproca**. Bueno, sucede que SI una afirmación directa es verdadera, la recíproca puede, en general, ser falsa.

10.1.1. La noción de PRUEBA

Imagina que escuchas una afirmación como 40 es un número par

¿Es la afirmación verdadera? Para responder a esta pregunta, apelamos a la definición de números pares: Cualquier número que pueda dividirse exactamente por 2 se denomina número par, dada tal definición, simplemente verificamos si la división de 40 por 2 es exacta o no, $40/2 = 20$, lo cual es de hecho exacto, y concluimos sin dudar que 40 es un número par.

Lo que hemos hecho es dar una PRUEBA de la afirmación. Una prueba es una pieza de razonamiento que convence a CUALQUIERA de que una afirmación es verdadera sin ninguna duda, independientemente de si a la persona que escucha o lee la prueba le gusta o no.

Si una afirmación no es verdadera, es necesaria una prueba de la falsedad de la afirmación. Un ejemplo es útil aquí. Supongamos que alguien afirma que 3 es par, en ese caso, calculas el cociente 3/2 que al ser 1,5 no es exacto, dado que un número es par cuando dividido por dos el resultado es exacto, la conclusión es que 3 no es par.

10.2. Volviendo a la Geometría

Los expertos en lógica han encontrado muchas reglas para la corrección del razonamiento, y la geometría es un gran lugar para aprender algunas de esas reglas, así que volvamos a ella.

Para que el tamaño de estas notas sea razonable, debemos recordar (o quizás aprender) algunos conceptos y algunas afirmaciones verdaderas.

1. Un polígono es un conjunto de segmentos de línea entre puntos dados llamados vértices

2. Dos líneas que se encuentran en un vértice de un polígono se llaman **adyacentes**

3. Un polígono cerrado es un polígono sin extremos libres (un polígono cerrado de tres segmentos es un triángulo, un polígono cerrado de cuatro segmentos es un cuadrilátero.

Un paralelogramo es un cuadrilátero simple con dos pares de lados paralelos, un rectángulo es un paralelogramo cuyos lados forman ángulos rectos. Un rectángulo con todos los lados de igual longitud es un cuadrado).

4. Un teorema es una afirmación que debe ser probada.

Para lo que sigue necesitaremos un par de definiciones

Definition 2. *Dos polígonos son congruentes cuando los segmentos entre sus vértices correspondientes son iguales y los ángulos entre segmentos sucesivos son iguales*

Definition 3. *Dos polígonos son similares cuando los ángulos entre todos los segmentos correspondientes son iguales*

Los triángulos equiláteros tienen todos sus ángulos internos iguales a 60^0, por lo tanto, todos los triángulos equiláteros son similares, sin embargo, no todos los triángulos equiláteros son congruentes, ya que podemos dibujar fácilmente un triángulo equilátero con lados de 20 cm y otro con lados de 7 m que son evidentemente no congruentes.

La siguiente afirmación es un ejemplo de un teorema

Theorem 2. *La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a un ángulo llano*

En estas notas, a veces enunciaremos teoremas sin dar su prueba.

En todos los problemas debes explicar el razonamiento que te llevó a tu respuesta. Solo puedes usar teoremas ya enunciados sin prueba o probados en estas notas

Problem 6. *¿Es posible tener un triángulo con ángulos internos de* 30*,* 30 *y* 10 *grados?.*

Problem 7. *Da una prueba de la siguiente afirmación (Teorema)* **los ángulos internos de un rectángulo suman una rotación completa** (360°)

Hay tres teoremas fundamentales sobre la congruencia de triángulos que enunciaremos sin prueba

Theorem 3. *Dos triángulos que tienen lados correspondientes de la misma longitud son congruentes*

Theorem 4. *Dos triángulos que tienen un lado de la misma longitud y los ángulos correspondientes de la misma medida son congruentes*

Theorem 5. *Dos triángulos que tienen un ángulo de igual medida y sus lados adyacentes de igual longitud son congruentes*

10.2.1. Dos Teoremas Importantes

Aquí comentaremos dos de los teoremas más importantes de la geometría euclidiana

En primer lugar, abordamos el teorema de la intersección, también conocido como teorema de Tales, teorema de proporcionalidad básica o teorema del divisor lateral, es un teorema importante en geometría elemental sobre las razones de varios segmentos de línea que se crean si dos rayos con un punto de partida común son interceptados por un par de paralelas. Es equivalente al teorema sobre razones en triángulos semejantes.

Tradicionalmente atribuido al matemático griego Tales de Mileto.(circa 626/623 – circa 548/545 a.C.) Era conocido por los antiguos babilonios y egipcios, aunque su primera prueba conocida aparece en los Elementos de Euclides.

Theorem 6. *Si dos líneas que se intersecan entre sí y están en el mismo plano son cortadas por líneas paralelas, los segmentos determinados en una línea son proporcionales a los segmentos determinados en la otra línea.*

El otro teorema y mucho más famoso que queremos comentar es el teorema de Pitágoras, establece una relación fundamental en la geometría euclidiana entre los tres lados de un triángulo

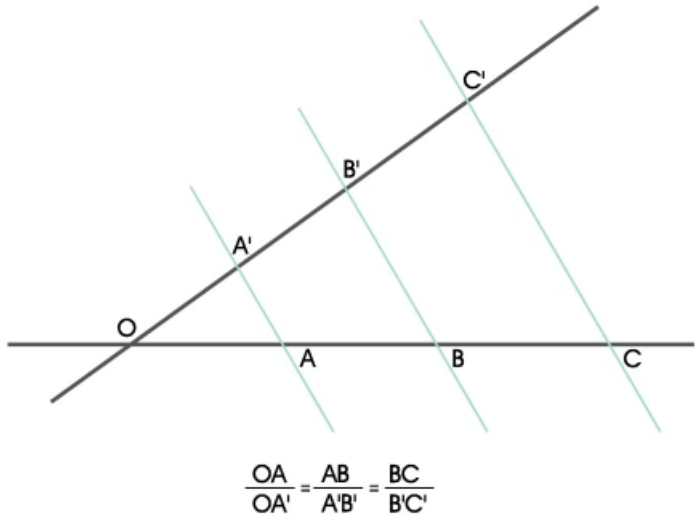

Figura 10.2: Teorema de Tales

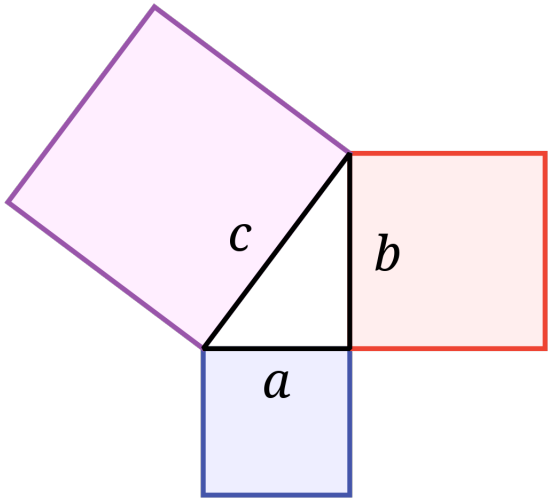

Figura 10.3: Teorema de Pitágoras

rectángulo, a saber

Theorem 7. *el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los otros dos lados.*

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(8, 15, 17)	(7, 24, 25)
(20, 21, 29)	(12, 35, 37)	(9, 40, 41)	(28, 45, 53)
(11, 60, 61)	(16, 63, 65)	(33, 56, 65)	(48, 55, 73)
(13, 84, 85)	(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(65, 72, 97)

Cuadro 10.1: Hay 16 ternas pitagóricas primitivas de números hasta 100

El teorema se puede escribir como la siguiente identidad -a veces llamada la ecuación pitagórica- que relaciona las longitudes de los lados a, b y la hipotenusa c,

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{10.1}$$

El teorema lleva el nombre del filósofo griego Pitágoras, nacido alrededor del 570 a.C. El teorema ha sido probado numerosas veces por muchos métodos diferentes, posiblemente el mayor número para cualquier teorema matemático. Las pruebas son diversas, incluyendo tanto pruebas geométricas como pruebas algebraicas, algunas de las cuales datan de miles de años.

A pesar de que el teorema es evidentemente de contenido geométrico, puede considerarse como un tipo especial de ecuación que pregunta por la existencia de una terna de números enteros (a, b, c) tales que satisfagan la fórmula

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{10.2}$$

Cuando se piensa como una ecuación para ternas, una pregunta obvia viene a la mente de todos.

¿Existen ternas de números enteros que satisfagan la identidad

$$a^n + b^n = c^n. \tag{10.3}$$

para algún número entero n?

Esta es una pregunta de un subcampo de las matemáticas bajo el nombre de teoría de números. Se sabe desde la antigüedad que los casos $n = 1$ y $n = 2$ tienen infinitas soluciones.

Sin embargo, alrededor de 1637, el gran matemático Pierre de Fermat declaró su penúltimo teorema según el cual, no hay soluciones para tales ecuaciones para $n > 2$.

La prueba de este teorema aparentemente inocente siguió siendo un gran misterio matemático durante 385 años hasta 1994, cuando el matemático británico Andrew Wiles logró probar el teorema de Fermat.

Capítulo 11

Midiendo Cosas

11.1. ¿Qué es medir?

Una de las actividades más importantes de cualquier científico o ingeniero (e incluso chefs) es medir cosas.

Medimos longitud, peso, corriente eléctrica, área, volumen y muchas otras cosas.

Medir significa comparar con algo. Por ejemplo, ¿qué pasa si pregunto: ¿Mario es alto o baj sucede que la respuesta no es tan simple como parece, podrías pensar que es alto porque es más alto que Sophie, pero quizás una jirafa pensaría que es más bajo que una jirafa bebé y sucede que, aunque las respuestas son diferentes, ambas son correctas. El objetivo de la medición es tener una respuesta un poco más específica a preguntas como estas mediante el establecimiento de estándares de comparación.

Para desarrollar una respuesta específica necesitamos decidir con qué vamos a comparar la altura de Mario. Podríamos decidir que vamos a comparar su altura con un palo. Podríamos encontrar que Mario es cuatro veces más alto que el palo y Sophie tres veces y media más alta que el palo. En ese caso, diríamos que la estatura de Sophie y Mario son 3,5 y 4 palos cada uno.

Nombre	Tipo	Unidad SI	Unidad Imperial
Distancia	longitud	metro	Pies
Altura	longitud	metro	Pies
Superficie	área	metro^2	Acre
Capacidad del contenedor	volumen	metro^3	galones

Cuadro 11.1: Algunas cantidades y sus unidades

Con el tiempo, la gente comenzó a darse cuenta de que todos debemos ponernos de acuerdo en lo que usamos para medir longitudes (la estatura de una persona es una longitud) y nacieron los estándares de medición.

Hoy en día existe una *organización intergubernamental* llamada *La Oficina Internacional de Pesas y Medidas* o en francés *Bureau international des poids et mesures* que se encarga de definir los estándares para medir diferentes cantidades.

La unidad internacional de longitud, por ejemplo, es el metro, y para la masa, el SI (por sistema internacional) es el kilogramo.

Además del sistema SI, que se utiliza en la mayoría de los países, existe el Sistema Imperial en el que las longitudes, por ejemplo, se miden en pulgadas, pies, yardas y millas.

La altura de Sophie, por ejemplo, es 5 ft 3' (cinco pies y tres pulgadas), que es 1,62 m

11.1.1. Algunas cosas que medimos

Medimos muchas cosas, algunas son cosas de la vida cotidiana, otras no. Algunas medidas como la altura o la distancia son fáciles de entender, otras no son tan fáciles. Algunas cosas se miden con *unidades básicas*, otras con *unidades derivadas*. A veces, las unidades básicas son demasiado pequeñas o demasiado grandes para medir algo y cuando eso sucede, el sistema internacional de unidades utiliza múltiplos o submúltiplos de las unidades y utiliza prefijos para

referirse a estas *unidades reescaladas*, seguramente has oído hablar de centímetros o kilómetros.

Longitud

Uno de los tipos de cantidades más simples que medimos es la longitud. Imagina dos trozos de hilo. Entendemos perfectamente lo que alguien dice que uno es más largo que el otro, la idea de ser más largo o más corto es lo que subyace en el concepto de longitud. Las unidades SI e imperiales de longitud son metros y pies, respectivamente.

Existe un método antiguo para hacerse una idea de qué cosas tienen una longitud cercana a un metro ($\ell \approx 1\ m$) llamado la técnica de la .envergadura.º del "brazo extendido". Coloca las

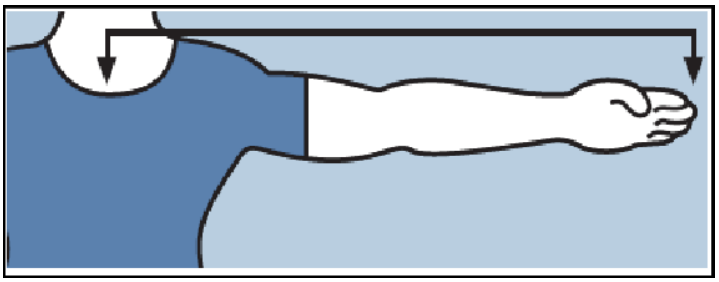

Figura 11.1: Estimación de un metro por la envergadura, la distancia entre las dos puntas de flecha es muy cercana a 1 m para la mayoría de los adultos

puntas de los dedos de cualquiera de tus manos en el centro de tu pecho y extiende (lateralmente) tu otro brazo tan lejos de tu cuerpo como puedas, la distancia entre las puntas de los dedos de tu brazo extendido y las de tu pecho es bastante cercana a un metro. Por favor, busca una cinta métrica y haz el experimento, las cintas suelen tener un lado que mide en centímetros y metros y uno que mide en pulgadas y pies, encontrarás que tu medida está cerca de 1 m o tres pies (y como quizás sepas, tres pies constituyen una yarda).

Las montañas tienen alturas que alcanzan como máximo $8848\,m$, lo cual no es mucho más grande que el tamaño de un ser humano, por eso usamos metros o pies para medirlas. Ahora,

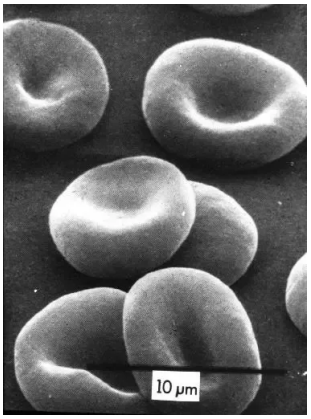

Figura 11.2: Si las distancias son realmente cortas, usar metros es inconveniente. Nuestros glóbulos rojos, por ejemplo, se parecen a pequeños discos con un diámetro cercano a 0,000006 m, que son seis millonésimas de metro, para una distancia tan pequeña preferimos decir que el diámetro del glóbulo rojo es de alrededor de 6 micrómetros (6 μm).

las distancias entre ciudades son bastante grandes en comparación con nuestra altura, medirlas en pies o metros es bastante inconveniente, por eso usamos millas y kilómetros para medirlas. Por ejemplo, la distancia en automóvil entre Miami y Nueva York es de 2054 kilómetros o 1276 millas. Eso sería 2054000 metros, un número grande que para muchos propósitos es incómodo.

La distancia Tierra-Luna (384400 km o $238,900$ mi) es un ejemplo mucho mejor de la conveniencia de usar kilómetros o millas en lugar de metros cuando se habla de grandes distancias (como ejercicio sobre la conveniencia, escribe esa distancia en metros).

Volumen

Otra cantidad muy común que medimos es el *volumen*. La noción más simple de volumen que se me ocurre es la cantidad de agua (o jugo) que llena la jarra de una licuadora. Las jarras de licuadora tienen marcas cuyo significado se puede apreciar en la figura 11.3 (o en la de tu

Figura 11.3: Las marcas de medición de volumen de la jarra de la licuadora

cocina). Cuanto más alto sea el nivel de líquido, más volumen de líquido beberás. La mayoría de las licuadoras tienen marcas para medir el volumen en dos unidades diferentes llamadas tazas y mililitros (ml), que son muy convenientes para cocinar pero no para medir el volumen de agua que llena una piscina.

La unidad SI de volumen (metro cúbico) es bastante grande para el uso diario. Para volúmenes como la cantidad de pintura que necesitamos para decorar nuestras casas o gasolina para llenar nuestros automóviles, usamos litros o galones. Para piscinas comenzamos a usar metros cúbicos.

Una pregunta natural es, qué es exactamente un metro cúbico. Hay dos respuestas precisas pero tontas para esta pregunta, una es: un metro cúbico es la unidad SI para volumen y la otra sería, un metro cúbico es un volumen igual a mil litros. Ninguna de estas respuestas es satisfactoria porque ninguna nos da una idea de lo que es un metro cúbico. Necesitamos una respuesta mejor, intentemos desarrollarla.

La jarra de licuadora estándar puede contener un volumen de casi un litro, eso significa que: **¡para preparar un metro cúbico de jugo de una sola vez necesitaríamos usar mil licuadoras al mismo tiempo!**, wow, un metro cúbico es un volumen bastante grande en comparación con un litro. Una piscina olímpica tiene 50 m de largo, 25 m de ancho y 2 m de profundidad, usando la fórmula para el volumen de una caja $largo \times ancho \times altura$, el volumen resultante es

$$V = 50 \times 25 \times 2 \ m^3 = 2500 \ m^3 \tag{11.1}$$

eso significa

Una piscina olímpica puede contener 2.5 millones de litros de agua

Este es un video bastante ilustrativo.

Área

Esta es otra cantidad habitual. Quizás la noción más primitiva de área tiene que ver con la agricultura. Imagina una agricultora que quiere plantar, digamos, maíz. Necesita saber cuánto espacio tiene para la tarea. ¿El espacio es tan grande como un campo de fútbol?, ¿dos campos de fútbol? o quizás sea del tamaño de un campo de baloncesto. El espacio en el que está pensando es un área.

La unidad SI para el área es el metro cuadrado. Un metro cuadrado es fácil de imaginar, lo único que tienes que hacer es usar un poco de tiza para dibujar un cuadrado en el suelo y asegurarte de que cada lado del cuadrado mida un metro de largo, una vez que termines, el espacio dentro del cuadrado tiene un área de exactamente 1 m^2.

Esta idea de medir el tamaño de un terreno es el origen de la palabra **geometría**. De hecho, la etimología de la palabra se remonta al griego antiguo $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$; geo- "tierra", -metron "medida"). La geometría es, junto con la aritmética, una de las ramas más antiguas de las matemáticas.

Calcular áreas para figuras geométricas simples como un rectángulo es fácil, todo lo que tenemos que hacer es multiplicar la longitud del lado más largo por la longitud del lado más corto, en fórmulas

$$A_{\text{rectángulo}} = \text{longitud del lado más corto} \times \text{longitud del lado más largo} \tag{11.2}$$

11.2. Algo más de Geometría

Piensa en un cuadrado. Acabamos de aprender cómo medir su área, dado que sus lados más largo y más corto son de la misma longitud, llamémosla ℓ el área del cuadrado es

$$A_{cuadrado} = \ell^2 \,, \tag{11.3}$$

ahora imagina que este cuadrado es tan grande como la manzana donde vives. Ciertamente puedes caminar alrededor de esta "manzanaz preguntarte cuánta distancia caminaste en un viaje de ida y vuelta. La respuesta tiene un nombre, el *perímetro* del cuadrado, y es la suma de las longitudes de cada lado por el que caminaste.

11.3. Midiendo ángulos

Tú, el lector, probablemente has escuchado a alguien medir ángulos y usar las palabras grados, minutos y segundos de longitud de arco. Para definir un grado, un círculo se divide en 360 segmentos circulares iguales, el ángulo definido por dos segmentos rectos que comienzan en el centro del círculo y terminan en los dos extremos de uno de esos segmentos circulares iguales define un ángulo de 1°. Este ángulo a su vez se divide en sesenta (60) partes iguales, cada una midiendo un minuto de arco, finalmente, un minuto de arco ($1'$) se divide en sesenta pequeños ángulos iguales, cada uno midiendo un segundo de arco ($1''$). Esta forma de medir ángulos es muy conveniente para varias aplicaciones.

Es sin duda interesante aprender sobre la historia de este sistema. Animamos al lector a investigarlo más a fondo como un proyecto de investigación. Baste decir que este método de medición de ángulos se remonta a la civilización babilónica alrededor del 1500 a.C. en lo que ahora se conoce como Oriente Medio.

Uno puede preguntar: ¿por qué dividir el círculo en 360 segmentos iguales? y hay una respuesta simple: es una decisión arbitraria. Uno podría intentar definir otras formas de dividir el círculo en partes iguales.

11.4. Midiendo Ángulos en Grados

Revisemos brevemente cómo usamos este método de medición hoy en día. Todo comienza con un transportador 11.4, un dispositivo que se asemeja mucho a una regla graduada de medición de longitud. Sin embargo, hay una gran diferencia. La regla estándar se puede hacer tan larga como deseemos, mientras que el transportador solo puede ser tan largo como un círculo, por lo que un ángulo de, digamos 370^0 debe recibir un tratamiento especial, debe dividirse como $370^0 = 360^0 + 10^0$ y tratarse como una cantidad periódica.

Para medir un ángulo con un transportador, procede de la siguiente manera:

1. Alinea la Línea Base.

   Coloca la línea base del transportador a lo largo de uno de los rayos del ángulo, asegurándote de que se alinee con el vértice (el punto donde se encuentran los dos rayos).

2. Identifica la Escala.

   Los transportadores tienen dos conjuntos de escalas, una que comienza en 0° a la izquierda y avanza en sentido horario, y otra que comienza en 0° a la derecha y avanza en sentido antihorario. Elige la escala que te permita leer el ángulo directamente.

3. Lee el Ángulo.

   Sigue el segundo rayo del ángulo hasta la escala del transportador. El punto donde el rayo interseca la escala indica la medida del ángulo. En la Figura 11.5, el ángulo mide 30°.

4. Consejos Adicionales:

   Si el ángulo se abre hacia la izquierda, usa la escala izquierda. Si se abre hacia la derecha, usa la escala derecha. Asegúrate de que la línea base del transportador esté perfectamente

alineada con el rayo para evitar mediciones inexactas. Si el ángulo es mayor a 180°, resta 180° de la lectura en el transportador.

Siguiendo estos pasos, puedes medir con precisión cualquier ángulo usando un transportador. Recuerda, la práctica hace la perfección, así que sigue practicando para mejorar tu precisión.

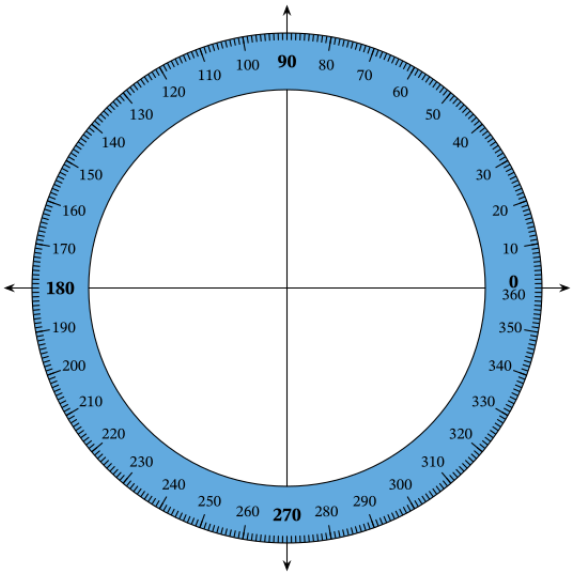

Figura 11.4: Transportador, un dispositivo simple de medición de ángulos

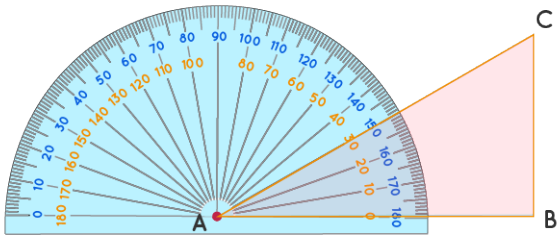

Figura 11.5: Midiendo un ángulo de 30^0

11.5. Un Experimento Curioso e Interesante

Figura 11.6: Midiendo π

Equípate con tres cosas, un trozo de hilo de cometa, una regla graduada y una lata (ver figura 11.6. Usa la cuerda y la regla para medir la longitud de la circunferencia de la lata (ℓ) y su diámetro (D) y calcula el cociente

$$Q = \frac{\ell}{D}\,, \tag{11.4}$$

repite las mismas mediciones con, digamos, el tronco de un árbol, una sartén o cualquier otro objeto de forma algo cilíndrica.

Toma todas las formas circulares que encuentres de los objetos que elijas y repite el experimento, una vez que te canses de medir círculos, diámetros y calcular cocientes, haz una tabla con los pares de números así obtenidos y añade una columna con el cociente ℓ/D. Encontrarás que la nueva columna se llena con una lista de valores todos cercanos a 3,14

Nota Para realizar realmente el experimento, asegúrate de seguir los siguientes pasos:

1. **Midiendo la Circunferencia**

   a) Envuelve el hilo: Envuelve con cuidado el hilo de cometa alrededor del objeto una vez, asegurándote de que esté ajustado pero no demasiado apretado. Asegúrate de que el hilo quede plano contra la superficie del objeto.

   b) Marca la superposición: Usa un bolígrafo o marcador para marcar el punto donde el hilo se superpone.

   c) Mide la longitud: Desenrolla el hilo y colócalo plano sobre una regla. Mide la distancia desde el comienzo del hilo hasta la marca que hiciste. Esta es la circunferencia.

2. **Midiendo el Diámetro**

   a) Encuentra la parte más ancha: Determina el punto más ancho del objeto. Este suele ser el medio, pero es importante asegurarse de que sea realmente la parte más ancha.

   b) Mide a lo ancho: Usando una regla, mide la distancia a lo ancho del objeto en su punto más ancho. Este es el diámetro.

   c) Asegúrate de medir perpendicularmente a la superficie del objeto.

Este pequeño experimento simple ha descubierto una verdad universal eterna,

Para todos los círculos, el cociente entre su circunferencia y su diámetro tiene el mismo valor,

$$\frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}} = 3{,}141592654.... \tag{11.5}$$

los puntos significan que hay muchos más decimales por encontrar en función de cuán perfecto sea el experimento.

El verdadero descubrimiento nos llevó a los humanos miles de años para finalmente comprenderlo por completo. El cociente

$$\frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}}, \tag{11.6}$$

tiene un valor universal, que resulta ser un número irracional, es decir, un número decimal con infinitos decimales que nunca se repiten, a este valor constante se le ha dado un nombre y con nueve (9) decimales es

$$\pi = 3{,}141592654... \tag{11.7}$$

La historia de cómo la humanidad llegó a revelar muchos de los secretos ocultos por este fantástico número no ha terminado, pero seguramente comenzó tan pronto como las matemáticas comenzaron a evolucionar hace miles de años.

11.6. Midiendo Ángulos en Radianes

La sección 11.5 proporciona una forma mucho más práctica de medir ángulos. Comencemos considerando las siguientes preguntas, ¿qué pasaría si en lugar de medir *circunferencia/diámetro* midiéramos *media circunferencia/radio* o *un cuarto de circunferencia/radio*, etc? Para responder, notamos que *radio=r=diámetro/2* así que

$$\begin{aligned}
\text{circunferencia/r} &= \text{circunferencia} \times \frac{2}{\text{diámetro}} = 2\pi\,, \\
\text{media circunferencia}/r &= \frac{\text{circunferencia}}{2} \times \frac{2}{\text{diámetro}} = \pi \\
\text{un cuarto circunferencia/r} &= \frac{\text{circunferencia}}{4} \times \frac{2}{\text{diámetro}} = \frac{\pi}{2} \\
\text{sexto circunferencia/r} &= \frac{\text{circunferencia}}{6} \times \frac{2}{\text{diámetro}} = \frac{\pi}{3} \\
\text{octavo circunferencia/r} &= \frac{\text{circunferencia}}{8} \times \frac{2}{\text{diámetro}} = \frac{\pi}{4} \\
\text{doceavo circunferencia/r} &= \frac{\text{circunferencia}}{12} \times \frac{2}{\text{diámetro}} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned} \tag{11.8}$$

De hecho, cada arco corresponde a uno y solo un ángulo medido en la escala de 360°, podemos construir la siguiente tabla simplificada

Arco	Ángulo °	Ángulo rad
Círculo	360	2π
3/4 Círculo	270	$3\pi/2$
1/2 Círculo	180	π
1/4 Círculo	90	$\pi/2$
1/8 Círculo	45	$\pi/4$
1/12 Círculo	30	$\pi/6$

Hemos encontrado así la siguiente relación simple entre ángulos medidos en grados, sus arcos correspondientes y sus radios,

$$\text{arco/radio=fracción de}\,\pi\,\text{correspondiente a un ángulo en grados} \tag{11.9}$$

Ahora, pensando cuidadosamente, nuestra tabla muestra que, si dibujamos un conjunto de círculos concéntricos, y marcamos ángulos iguales en ellos, todos los círculos mostrarán los mismos arcos pero las longitudes de arco (Δs) en cada círculo serán más grandes o más cortas en proporción a su radio, esto se puede sintetizar en la fórmula

$$\Delta s = r \times \Delta\theta\,, \tag{11.10}$$

que para las mediciones de ángulo se traduce en

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}\,, \tag{11.11}$$

donde la medida del ángulo, está en *radianes*. Así, por ejemplo, un ángulo de 90° corresponde a un arco de un cuarto de círculo, por lo tanto

$$\Delta\theta(90^\circ) = \frac{\Delta s}{r} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{11.12}$$

La conversión de grados a radianes se vuelve "fácil"

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{180} \times \text{ángulo en grados decimales}\,, \tag{11.13}$$

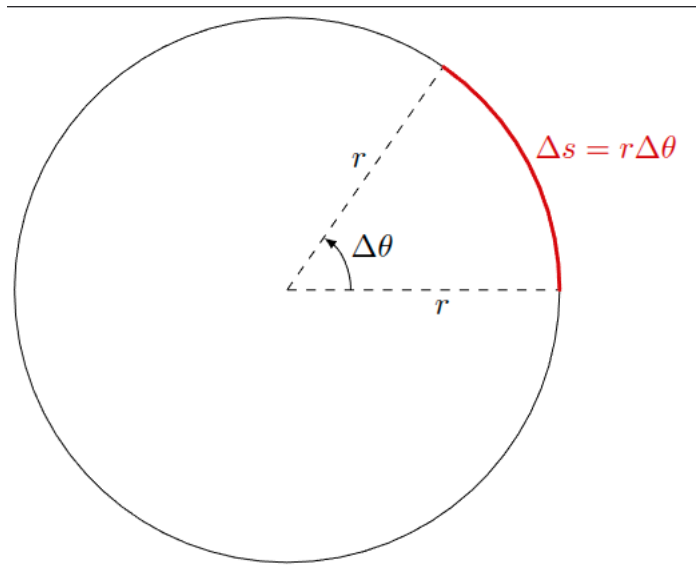

Figura 11.7: Arco circular subtendido por un ángulo $\Delta\theta$

el uso de comillas es intencional ya que, como se expresa claramente en la fórmula 11.13, el ángulo debe convertirse primero de grados-minutos y segundos a grados decimales. Solo como recordatorio de la diferencia entre grados, minutos y segundos de arco y grados decimales, ten en cuenta que un ángulo de $30^\circ\, 30''$ en grados decimales es 30,5

Se dice que los ángulos definidos de acuerdo con la fórmula 11.11 se miden en radianes, y son obviamente adimensionales (cocientes de longitudes). La siguiente tabla muestra varias conversiones

Ángulo en Grados	Ángulo en Radianes
$360°$	2π
$90°$	$\pi/2$
$60°$	$\pi/3$
$45°$	$\pi/4$
$30°$	$\pi/6$

Cuadro 11.2: Equivalencia entre valores angulares notables

Capítulo 12

Introducción a la Trigonometría

La trigonometría es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los triángulos y las relaciones entre sus lados y ángulos. Es un concepto fundamental que tiene aplicaciones en varios campos, incluyendo la física, la ingeniería, la navegación, la topografía e incluso los gráficos por computadora y el desarrollo de juegos.

En esencia, la trigonometría implica el uso de razones llamadas funciones trigonométricas, como el seno, el coseno y la tangente, para determinar las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Estas funciones nos permiten calcular lados o ángulos desconocidos de un triángulo, dada cierta información sobre las otras partes. La trigonometría también explora el comportamiento de estas funciones en un rango de ángulos, lo que lleva al estudio de las funciones periódicas y sus propiedades. Además, la trigonometría introduce conceptos como el círculo unitario, que proporciona una representación geométrica de estas funciones trigonométricas y sus relaciones. Comprender la trigonometría abre la puerta a conceptos matemáticos más avanzados, como el cálculo, el análisis complejo y el análisis vectorial, lo que la convierte en una herramienta esencial para cualquiera interesado en seguir estudios superiores de matemáticas, física o disciplinas científicas y técnicas relacionadas.

12.1. Tres funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente

Aquí definiremos las tres funciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente utilizando el método del **círculo unitario**.

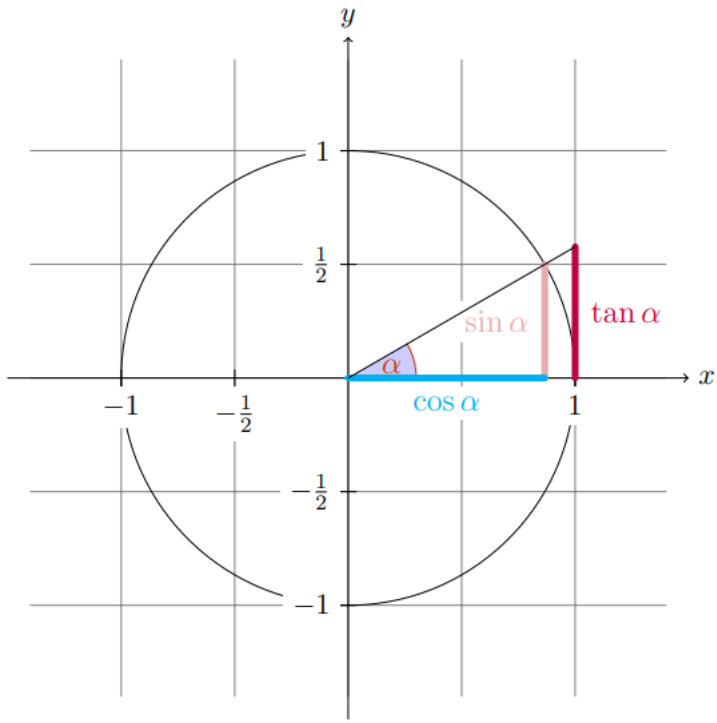

Figura 12.1: El Círculo Unitario y las Funciones Trigonométricas. **Este esquema es lo único que debe memorizarse sobre trigonometría**

Comenzamos considerando un círculo de radio $R = 1$ (por eso se llama unitario) como en la figura 12.1, y dibujamos los ejes x e y. Consideremos adicionalmente un segmento que comienza

en el centro del círculo, este segmento forma un ángulo[1] α con el eje x y termina en el punto donde se encuentra con un segmento vertical de la tangente al círculo que lo toca en el punto $(1, 0)$, y que, por lo tanto, es perpendicular al eje x.

Ahora observamos que esta construcción define naturalmente dos triángulos rectángulos **semejantes**. La hipotenusa del más pequeño de ellos es el radio que define el ángulo α, mientras que sus catetos son el segmento vertical naranja que va desde la intersección del radio con el círculo hasta el eje x y el segmento horizontal azul que corresponde a la proyección de la hipotenusa sobre el eje x. Como se muestra en la figura, el seno y el coseno del ángulo α se definen por la longitud **con signo** de esos catetos.

La tangente, por otro lado, se define como la longitud con signo del cateto vertical del triángulo grande.

Lo primero que sucede cuando usamos estas definiciones es que la fórmula fundamental que relaciona las funciones seno y coseno se vuelve casi obvia, de hecho,

Corollary 1. Identidad Trigonométrica Fundamental *Para cualquier ángulo,*

$$\boxed{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

La prueba de este corolario es extremadamente simple, ya que el seno y el coseno se definen como las longitudes con signo de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es de longitud 1, podemos usar inmediatamente el teorema de Pitágoras y obtener el resultado deseado.

[1] En la convención habitual, los ángulos son positivos en sentido antihorario

12.2. Una conexión con la geometría

Ahora tomamos nota de algo aparentemente tonto, en el triángulo grande, la longitud del cateto horizontal del triángulo es 1, por lo que podemos escribir,

$$tan\alpha = \frac{tan\alpha}{1} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} \tag{12.1}$$

Recordemos ahora el teorema de Tales de la sección 10.2.1, según el teorema de Tales las razones entre lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales.

Si aplicamos la afirmación del teorema de Tales a los dos triángulos de la figura 12.1

$$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha \text{ en el triángulo grande}}{\text{cateto adyacente a } \alpha \text{ en el triángulo grande}} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha \text{ en el triángulo pequeño}}{\text{cateto adyacente a } \alpha \text{ en el triángulo pequeño}} \tag{12.2}$$

lo que en virtud de la figura se traduce en

$$\frac{tan\alpha}{1} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\,. \tag{12.3}$$

así terminamos con

$$\boxed{tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}} \tag{12.4}$$

que es la definición de la tangente de un ángulo.

El teorema de Tales también se puede usar para poner las definiciones habituales de seno y coseno bajo una luz diferente. Imagina un triángulo rectángulo, cualquier triángulo rectángulo, sin ninguna otra característica particular que ser rectángulo, un poco de pensamiento muestra que siempre podemos reescalar los lados de dicho triángulo para construir otro triángulo, similar al que empezamos, pero que tenga una hipotenusa de longitud unitaria. Una vez que hacemos eso, podemos poner el nuevo triángulo en el círculo unitario para obtener algo muy parecido a lo que vemos en la figura 12.1, en este nuevo triángulo, y dado que la longitud de la hipotenusa

es igual a uno, podemos escribir las fórmulas

$$\begin{aligned} sin\alpha &= \frac{sin\alpha}{1} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \\ cos\alpha &= \frac{cos\alpha}{1} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}, \end{aligned} \tag{12.5}$$

pero, en virtud de la semejanza del nuevo triángulo con el original, y el teorema de Tales, obtenemos, que no importa de qué triángulo estemos hablando, siempre y cuando sea un triángulo rectángulo,

$$\boxed{sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}} \tag{12.6}$$

$$\boxed{cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}} \tag{12.7}$$

que son las fórmulas habituales dadas en la escuela.

Es imperativo entender y aprender que los dos conjuntos de definiciones que hemos dado son diferentes pero que definen exactamente las mismas cosas, es decir, no hay nada de qué preocuparse al usar una definición o la otra. De hecho, si continuamos nuestro estudio de las matemáticas a un nivel superior, es decir, el cálculo completo, encontraremos más definiciones de las funciones trigonométricas. Una de ellas es en términos de un campo llamado *ecuaciones diferenciales*, pero no seguiremos este camino en estas notas.

12.3. Algunas Fórmulas“no muy Útiles”

A medida que pasa el tiempo y la ciencia avanza, algunas cosas que pertenecían a lo que deberíamos llamar **conocimiento fundamental** dejan de ser fundamentales.

Las tablas de logaritmos (fig 12.2) son un buen ejemplo, en 1950 era imposible imaginar un ingeniero incapaz de usarlas, eran absolutamente necesarias para cualquier cálculo difícil

LOGARITHM

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6999	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	6	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Figura 12.2: tablas de logaritmos

Lo mismo sucede con muchas otras cosas como las siguientes fórmulas

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{2}}\,, \qquad cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\theta}{2}} \tag{12.8}$$

estas fórmulas eran extremadamente necesarias para crear tablas con los valores de las funciones trigonométricas para muchos ángulos diferentes. Hoy en día, el teléfono móvil más tonto puede calcular funciones trigonométricas, por lo que no hay una necesidad real de estas fórmulas en el entorno de trabajo diario de cualquier científico o ingeniero.

Sin embargo, estas fórmulas encuentran una aplicación importante, son útiles para entrenar las mentes de los jóvenes que desean seguir estudios STEM.

El entrenamiento intelectual es absolutamente fundamental para cualquiera, y si alguien está interesado en seguir una carrera STEM, las matemáticas son una necesidad. Es por eso que sugerimos en los términos más enérgicos posibles estudiar cómo se demuestra que las fórmulas anteriores (o al menos algunas de ellas) son verdaderas. Nos atrevemos a sugerir Proof of angle addition formula for sine — Trigonometry — Khan Academy como un buen punto de partida

12.4. Valores de las funciones trigonométricas básicas para algunos ángulos

Las matemáticas se tratan de encontrar patrones y desarrollar intuición sobre ellos. La trigonometría, al ser una rama de las matemáticas, no es una excepción a esta regla. En esta sección utilizaremos un razonamiento muy simple para calcular los valores de las funciones trigonométricas para algunos ángulos muy particulares. Veamos hasta dónde podemos llegar con ideas simples sin usar nada difícil.

Dado que el seno y el coseno de un ángulo son las longitudes con signo de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud unitaria, los valores de ambas funciones deben pertenecer al intervalo $[-1, 1]$, podemos enunciar esto como un

Theorem 8. *$\forall\theta$,*

$$-1 \leq sin\theta \leq 1\,, \qquad -1 \leq cos\theta \leq 1$$

Ahora, cuando θ está muy cerca de 0, el cateto del triángulo opuesto a θ (el segmento vertical naranja en la figura. 12.1) se vuelve muy, muy corto, mientras que el cateto horizontal azul se vuelve más y más largo, casi llegando al punto $(1, 0)$. De hecho, cuando $\theta = 0$, el triángulo colapsa por completo haciendo que la hipotenusa coincida con el cateto adyacente, esto es solo la afirmación

$$sin(0) = 0\,, \qquad cos(0) = +1\,,$$

un razonamiento similar conduce a

$$sin(\pi) = 0\,, \qquad cos(\pi) = -1\,,$$

Pensemos ahora en lo que sucede cuando el ángulo que nos interesa se acerca mucho a $\pi/2$ (un cuarto de círculo). En este caso, la hipotenusa se vuelve casi vertical, por lo que su

proyección horizontal está a punto de desaparecer, mientras que el cateto naranja casi iguala a la hipotenusa, cuando θ coincide exactamente con $\pi/2$ concluimos

$$sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1\,, \qquad cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,$$

el caso $\theta = 3\pi/2$ se maneja de manera similar, produciendo

$$sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1\,, \qquad cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0\,,$$

El ángulo $\theta = \pi/4$ (es decir, 45°) se trata de manera un poco diferente. Todo lo que debemos hacer es darnos cuenta de que en este caso la hipotenusa del triángulo no es más que la diagonal de un cuadrado, expresado de otra manera, ambos catetos del triángulo rectángulo sobre el círculo unitario son iguales. Esto significa que

$$sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\,,$$

la identidad trigonométrica fundamental para este caso produce

$$\begin{aligned} 1 &= sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= 2\,sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\,, \end{aligned}$$

lo cual no es más que

$$2sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\,,$$

lo que a su vez implica

$$sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

dado que $\pi/4$ está en el primer cuadrante, el signo debe ser $+$, y dado que el coseno de este ángulo es igual a su seno,

$$sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Todavía hay dos ángulos notables $\pi/3$ ($60°$) y $\pi/6 = \frac{1}{2}\pi/3$ (30^0), cuyos senos, cosenos y tangentes pueden calcularse fácilmente a mano. Para este fin, dibujamos un triángulo equilátero[2], llamamos a las longitudes de sus lados $2x$. Luego notamos que cualquiera de las bisectrices de los ángulos divide el lado opuesto en dos segmentos de exactamente la misma longitud (x). Además, la bisección construye dos triángulos rectángulos congruentes que comparten un cateto (el segmento bisector). Las hipotenusas de estos dos triángulos no son más que dos de los lados del triángulo original.

Pensando en cualquiera de los dos pequeños triángulos rectángulos, es fácil ver que el cateto adyacente al ángulo de $60°$ tiene longitud x. Debido al teorema de Pitágoras y si llamamos s a la longitud del otro cateto,

$$s^2 + x^2 = 4x^2\,, \tag{12.9}$$

de lo cual $s = \sqrt{3}x$, dado que este cateto es opuesto al ángulo de $60°$, terminamos con

$$\begin{aligned} sin(\pi/3) &= \frac{\text{cateto opuesto al ángulo de 60 grados}}{hipotenusa} = \frac{s}{2x} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \text{y} \\ cos(\pi/3) &= \frac{\text{cateto adyacente al ángulo de 60 grados}}{hipotenusa} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}\,, \quad \text{finalmente} \\ tan(\pi/3) &= \frac{sin(\pi/3)}{cos(\pi/3) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}2} = \sqrt{3} \end{aligned} \tag{12.10}$$

Example 14. *Dibuja los bocetos necesarios para lograr el razonamiento geométrico dado anteriormente*

Example 15. desafío *Lleva a cabo las modificaciones necesarias para calcular $sin(\pi/3)$, $cos(\pi/3)$ y $tan(\pi/3)$.*

Example 16. *Dado $sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, usa identidades trigonométricas para $cos(\pi/3)$, $sin(\pi/6)$ y $cos(\pi/3)$. Una forma de hacerlo es recordar que 30 y 60 grados son complementarios,*

[2]Los ángulos internos de un triángulo equilátero son todos ángulos de $60°$

Ángulo (°)	Ángulo (rad)	Cuadrante	sen	cos	tan
0	0	I	0	+1	0
30	$\pi/6$	I-IV	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\pi/4$	I	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	I	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	I-II	+1	0	$+\infty$
120	$4\pi/6$	II	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$
135	$3\pi/4$	II	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150	$5\pi/6$	II	1/2	$-\sqrt{3}/2$	-1
180	π	II-III	0	-1	0
210	$7\pi/6$	III	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225	$5\pi/4$	III	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	+1
240	$4\pi/3$	III	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$+\sqrt{3}$
270	$3\pi/2$	III-IV	-1	0	$-\infty$
300	$10\pi/6$	IV	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$
315	$7\pi/4$	IV	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330	$7\pi/4$	IV	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
360	2π	I-IV	0	+1	0

Cuadro 12.1: Valores del seno, coseno y tangente de algunos ángulos especiales. Los ángulos que muestran dos cuadrantes señalan límites entre cuadrantes

Example 17. *Calcula todos los valores mostrados en la tabla 12.1*

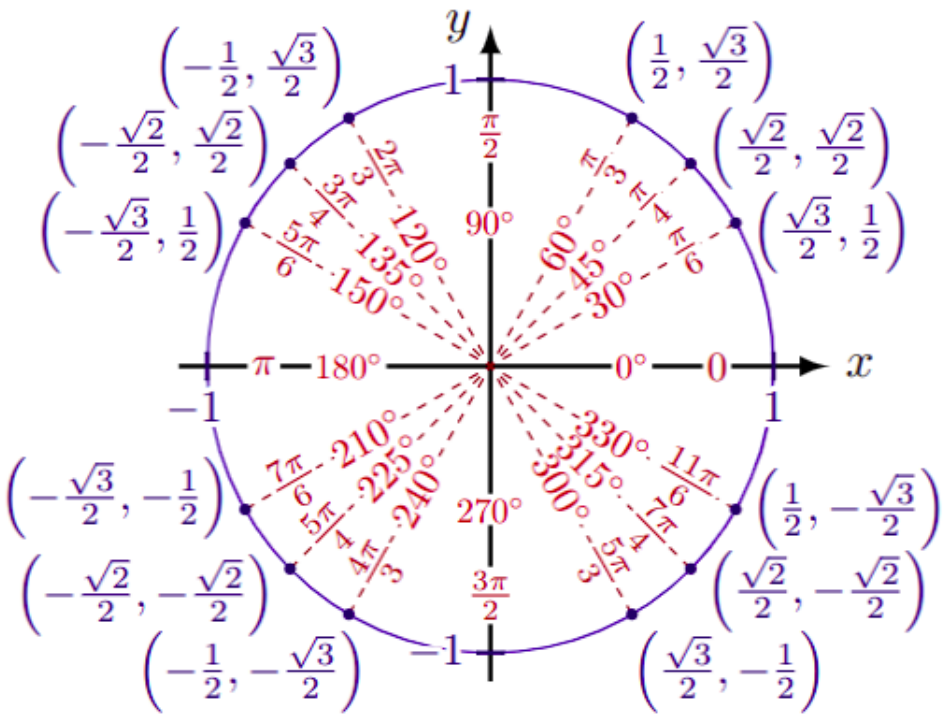

Figura 12.3: El círculo unitario y algunos valores especiales, la primera entrada en cada par es el coseno del ángulo, la segunda entrada es el seno

12.5. Una relación de equivalencia

Los ángulos son **periódicos**, es decir, diferentes valores de ángulos se refieren de hecho al mismo punto en el círculo unitario, cuando esto sucede decimos que los ángulos son **equivalentes** lo cual se expresa con el símbolo: $\approx$. Así, por ejemplo, los ángulos 0 y 2π definen ambos el ángulo que señala el punto $(+1, 0)$ del círculo unitario. En nuestro nuevo lenguaje escribimos $0 \approx 2\pi$, pero, y esto es extremadamente interesante, si damos la vuelta al círculo unitario dos veces el ángulo correspondiente[3] es $2 \times 2\pi$ y volvemos de nuevo al punto $(1, 0)$ así que $0 \approx 2 \times 2\pi$.

[3]El primer 2 corresponde al número de rotaciones alrededor del círculo

De hecho, lo mismo sucede con cualquier número n de rotaciones completas. Después de pensarlo un poco, podemos generalizar la idea y escribir

Definition 4. *Dos ángulos θ_1 y theta$_2$ son equivalentes ($\theta_1 \approx \theta_2$) si y solo si*

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\,k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Un par de ejemplos ayudarán a entender este concepto. Establece un punto en el círculo unitario señalado por un ángulo $\theta_1 = 45°$, si comenzamos en este punto y giramos (en sentido antihorario) el círculo 5 veces terminamos exactamente en el mismo punto, pero el ángulo será $\theta_2 = 45° + 5 \times 360°$. Midiendo los ángulos en radianes, diríamos

$$\theta_1 = \pi/4\,, \quad \theta_2 = \pi/4 + 2(5)\pi\,,$$

por lo tanto

$$\theta_2 - \theta_1 = 2(5)\pi$$

y dado que $5 \in \mathbb{Z}$ podemos afirmar con seguridad

$$\theta_2 \approx \theta_1$$

lo cual -como ya sabemos- es solo una forma elegante de decir que ambos ángulos marcan exactamente el mismo punto en el círculo unitario.

12.6. Las funciones trigonométricas son periódicas

La equivalencia angular que hemos discutido en la sección 12.5 tiene profundas raíces geométricas y da lugar a un concepto: la **periodicidad de las funciones trigonométricas**, para introducir este concepto pensemos cuidadosamente en la función seno a través de su definición de acuerdo con el círculo unitario. Imagina dos ángulos, digamos $\alpha_1 = \pi/6$ y

$\alpha_2 = \pi/6 + 2\pi = 13\pi/6$. Ciertamente $\alpha_1 \approx \alpha_2$ (con giro $n = 1$) pero lo importante aquí es que cuando vamos al círculo unitario ciertamente encontramos que

$$sin(\pi/6) = sin(13\pi/6)\,, \tag{12.11}$$

además, más pensamiento geométrico convencerá sin lugar a dudas de que para cualquier ángulo α y cualquier $k \in \mathbb{Z}$

$$sin(\alpha) = sin(\alpha + n\,L)\,, \tag{12.12}$$

donde $L = 2\pi$ se conoce como el **período**. Este concepto se generaliza a cualquier función con dominio real, y se da como[4]

Definition 5.

$$f : \Re \to \Re\,,$$

se llama periódica de período $L \in \Re$ *si y solo si,* $\forall x \in \Re$

$$f(x) = f(x + L)$$

Según la definición 5, todas las funciones trigonométricas son periódicas con período $L = 2\pi$. Hay un pequeño giro en esta historia, pero no lo abordaremos en estas notas.

12.7. Ecuaciones trigonométricas

Es perfectamente posible que al resolver algún problema matemático lleguemos a una ecuación (es decir, una pregunta) tal que

$$sin(x) = \frac{1}{2}\,, \tag{12.13}$$

donde debemos encontrar x.

[4]Se insta al lector a traducir la definición a español sencillo

Según las secciones anteriores, podríamos sentirnos tentados a responder que x es 30° o 150°, pero tal respuesta es solo parcialmente correcta porque no refleja realmente todo lo que hemos aprendido, en particular el concepto de periodicidad.

Para el ángulo de 30° la respuesta correcta debería ser: 30° *o cualquier otro ángulo obtenido a partir de él dando vueltas completas un número arbitrario de veces.* Algo similar sucede con el ángulo de 150°.

De hecho, la respuesta absolutamente correcta debería ser:

La ecuación ec. 12.13 tiene un número infinito de soluciones, y en radianes se pueden escribir como $x = \pi/6 = 2\,k\pi$ *donde* $k \in \mathbb{Z}$, y $x = 5\pi/6 = 2\,m\pi$ *donde* $m \in \mathbb{Z}$

En español más sencillo lo que estamos diciendo es que el **conjunto** $\mathcal{S}$ de todas las soluciones a la ec. 12.13 viene dado por

$$\mathcal{S} = \{..., -23\pi/6\,, -11\pi/6\,, \pi/6\,, 13\pi/6\,, 25\pi/6\,...\} \cup \{..., -7\pi/6\,, 5\pi/6\,, 17\pi/6\,...\}\,. \tag{12.14}$$

Hay una modificación interesante al problema original que es un problema **completamente diferente**:

Encuentra las soluciones a

$$sin(x) = \frac{1}{2}\,, \tag{12.15}$$

en el intervalo $[0, 2\pi)$. Sucede que la modificación aparentemente inofensiva de pedir que la solución esté en un intervalo especificado, lo cambia todo. De hecho, la solución del nuevo problema (la ecuación junto con el dominio donde se requiere su solución) es un conjunto con solo dos elementos,

$$\mathcal{S} = \{\pi/6\,, 5\pi/6\}\,. \tag{12.16}$$

De hecho, si restringimos el dominio en el que buscar la solución para que sea el conjunto $[0, \pi/2]$, la solución se vuelve **única** e igual a $x = \pi/6$.

En este punto vale la pena comentar que, **en matemáticas, las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones a los problemas son de suma importancia**.

Intentemos lo siguiente

Example 18. *Determina si* $x = 3\pi/8$ *es una solución de la ecuación*

$$tan\, 2x = -1 \tag{12.17}$$

Example 19. *Encuentra* **todas las soluciones** *a la ecuación*

$$4\, sin\theta + 1 = 2\, sin\theta \tag{12.18}$$

Comenzamos reescribiendo la ecuación como

$$sin\theta = -\frac{1}{2} \tag{12.19}$$

Hay dos ángulos en el intervalo $[0, 2\pi)$ *que satisfacen la ecuación, a saber,* $\theta = 7\pi/6$ $(210°)$ *y* $\theta = 11\pi/6$ $(330°)$ *todas las soluciones a la ecuación original se encuentran sumando a este ángulo un número entero de veces* 2π*, es decir, las soluciones son* $\theta = 7\pi/6 + 2\kappa\pi, 11\pi/6 + 2\ell\pi$*,* $\kappa, \ell \in Z$

Example 20. *Resuelve*

$$6\, cos^2 x - 3 = 0 \tag{12.20}$$

en el intervalo $[0, 2\pi)$

La ecuación se puede expresar como

$$cos\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{12.21}$$

Por mera inspección, hay claramente cuatro soluciones en el intervalo, 2 para cada signo. de hecho, $x_1 = \pi/4$ *(primer cuadrante), y,* $x_2 = 3\pi/2 + \pi/4$ *(cuarto cuadrante) satisfacen* $cos\, x_1 = cos\, x_2 = \sqrt{2}/2$*, mientras que* $x_3 = 3\pi/4$ *(segundo cuadrante) y* $x_4 = 5\pi/4$ *(tercer cuadrante), satisfacen* $cos\, x_2 = cos\, x_3 = -\sqrt{2}/2$

Example 21. *Resuelve*

$$4\,sin^2 x = 9\,sin\,x - 5. \tag{12.22}$$

en el intervalo $[0, 2\pi)$

Comenzamos reescribiendo la ecuación como

$$4\,sin^2 x - 9\,sin\,x + 5 = 0\,, \tag{12.23}$$

el hecho de que $sin\,x$ aparece con dos potencias, 1 y 2 sugiere[5] que introduzcamos un cambio de variables nombrando $u = sin\,x$, de esta manera, la ecuación ahora se ve como la ecuación cuadrática ordinaria

$$4\,u^2 - 9\,u + 5 = 0\,, \tag{12.24}$$

con soluciones

$$u = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 4 \times 5}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{8} = \frac{9 \pm 1}{8} = \begin{cases} 10/8 \\ 1 \end{cases}, \tag{12.25}$$

lo que realmente significa

$$sin\,x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 4 \times 5}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{8} = \frac{9 \pm 1}{8} = \begin{cases} 10/8 \\ 1 \end{cases}, \tag{12.26}$$

ahora, la trigonometría nos ha enseñado que $-1 \leq sin\,x \leq +1$, esta condición descarta $sin\,x = 8/10$ dejándonos con $sin\,x = +1$, lo que, junto con la condición $x \in \{0, 2\pi)$ significa que la solución es única, y dada por: $x = \pi/2$

Example 22. *Resuelve*

$$2\,sin^2 x - cos\,x - 1 = 0. \tag{12.27}$$

[5]Este es un truco muy antiguo en la caja de herramientas de cualquiera

en el intervalo $[0, 2\pi)$

Para abordar este ejercicio utilizamos la identidad trigonométrica fundamental para alcanzar una primera transformación del lado izquierdo

$$2\,sin^2 x - cos\,x - 1 = 2\,[1 - cos^2 x] - cos\,x - 1 \tag{12.28}$$

después de lo cual terminamos con la ecuación

$$\begin{aligned} 2\,[1 - cos^2 x] - cos\,x - 1 = \\ -2\,cos^2 x - cos\,x + 1 = 0 \end{aligned} \tag{12.29}$$

estableciendo $z = cos\,x$*, transformamos la ecuación en la ecuación de segundo orden estándar*

$$2\,z^2 + z - 1 = 0 \tag{12.30}$$

con soluciones

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases} . \tag{12.31}$$

Desde aquí

$$cos\,x = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases} . \tag{12.32}$$

En el intervalo bajo consideración hay tres soluciones para esta ecuación. De hecho, $x = \pi$ es el único ángulo con $cos\,x = -1$. Por otro lado, hay dos ángulos para los cuales $cos\,x = 1/2$, uno en el primer cuadrante y uno en el cuarto, a saber, $x = \pi/4\ rad$ y $x = 7\pi/4\ rad$.

Capítulo 13

Números Primos: Las Piezas de LEGO de las Matemáticas

Hemos estado discutiendo temas en los que las matemáticas parecen bastante cercanas a las aplicaciones cotidianas. Pero las matemáticas no siempre son así, hay temas que pueden parecer lejanos de algo que podríamos necesitar, tal es el caso de una rama de las matemáticas llamada *teoría de números*

La teoría de números es la rama de las matemáticas que trata de las propiedades de los números enteros. A menudo se la considera una rama pura de las matemáticas, lo que significa que se centra en comprender las relaciones y patrones entre los números por sí mismos, más que por aplicaciones prácticas inmediatas.

El hoy famoso matemático indio Srinivasa Ramanujan fue un pionero en el campo de la teoría de números. Su trabajo fue innovador e hizo contribuciones significativas a la comprensión de los números enteros y sus propiedades.

Ramanujan era particularmente conocido por su intuición y habilidad para descubrir profundas verdades matemáticas a través de sus propios métodos únicos. Su trabajo tuvo un profundo impacto en el campo de la teoría de números.

Aunque pueda parecer esotérica, la teoría de números tiene profundas conexiones con otras áreas de las matemáticas e incluso ha encontrado aplicaciones sorprendentes en campos como la criptografía y la informática.

13.1. Factores

Imagina dos números enteros, n y m, decimos que m es un factor de n si el cociente $n \div m$ no deja residuo.

Así, por ejemplo,

- 1, 2 y 4 son factores de 4.
- 1, 2, 3 y 6 son factores de 6, mientras que
- 1, 2, 3, 4, 6, y 12 son factores de 12.

13.2. Números Primos

Definition 6. *Un número primo es un número natural mayor que 1 que no tiene divisores positivos (factores) distintos de 1 y de sí mismo. En términos más simples, un número primo es un número que solo puede dividirse exactamente por 1 y por sí mismo.*

Algunos números primos son, por ejemplo:

2, 3, 5, 7, 11 y 13

Los números no primos se llaman números compuestos. Pueden factorizarse en dos números naturales más pequeños. Por ejemplo, 4 es compuesto porque puede factorizarse en 2×2.

Los números primos tienen las siguientes propiedades clave

- Hay infinitos números primos.
- 2 es el único número primo par. Todos los demás números primos son impares
- **Teorema Fundamental de la Aritmética:** Todo número natural mayor que 1 es un número primo o puede factorizarse de manera única en un producto de números primos.

Exploremos brevemente el teorema fundamental de la aritmética estudiando los números 21, 24 y 37.

- Si hacemos una lista de las divisiones de 21 por enteros en orden ascendente, encontramos que 21 es divisible por 1 $21 \div 1 = 21$, el valor del cociente (21) es divisible por 3: $21 \div 3 = 7$ los tres factores 1, 3 y 7 son primos por lo que la descomposición de 21 en factores primos es

  $$21 = 3 \times 7$$

  mostrando que 21 no es un número primo
- Cuando intentamos con 24, obtenemos

  $$24 = 2 \times 2 \times 3$$

- y, cuando se intenta el mismo procedimiento con 37, se encuentra que 37 es divisible sin residuos solo por 1 y 37 mismo, lo que significa que 37 es un número primo

13.2.1. Descomponiendo un entero en sus factores primos

La descomposición es el proceso de desglosar un número en sus componentes de números primos más pequeños. Se realiza siguiendo estos pasos

1. Comienza con el número entero.
2. Divide el número entero por el número primo más pequeño que lo divida exactamente.
3. Repite el paso 2 con el cociente hasta que llegues a 1.
4. Los factores primos son los divisores que usaste en los pasos 2 y 3.

Intentemos algunos ejemplos:

- Comenzamos descomponiendo 8 en sus factores primos. Primer paso $8 \div 2 = 4$, el segundo paso implica dividir el cociente por 2, $4 \div 2 = 2$, intentamos dividir este cociente por dos y dado que el resultado es $2 \div 2 = 1$, el proceso ha terminado con la descomposición

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

- La descomposición del número 24 en sus factores primos es la siguiente: $24 \div 2 = 12$, $12 \div 2 = 6$, $6 \div 2 = 3$. Dado que 3 es un número primo, el proceso se detiene.

  Por lo tanto, la factorización prima de 24 es

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

13.3. Aplicaciones simples

En la escuela, durante nuestro aprendizaje de las matemáticas, es habitual que nuestros profesores nos pidan simplificar la expresión

$$\frac{81 \times 14}{45 \times 7}$$

algo como esto se aborda fácilmente descomponiendo cada factor en sus factores primos y luego cancelando los factores comunes que puedan aparecer en el numerador y el denominador de la fracción.

Trabajemos un par de ejemplos comenzando con algo muy simple.

- Simplifica 30/15. Comenzamos notando que la descomposición en factores primos tanto del numerador como del denominador es $30 = 2 \times 3 \times 5$ y $15 = 3 \times 5$, por lo tanto

$$\frac{30}{15} = \frac{2 \times 3 \times 5}{3 \times 5}$$

así

$$\frac{30}{15} = \frac{2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{3} \times \cancel{5}} = 2\,,$$

- Simplifica la expresión

$$\frac{8^3\,24^2}{4^4}\,. \tag{13.1}$$

Aquí usaremos el poder de todo lo que hemos estado estudiando hasta este punto.

Comenzando con lo siguiente en factores primos $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ y $24 = 3 \times 2^3$, lo cual al sustituir, produce

$$\frac{8^3\,24^2}{4^4} = \frac{(2^3)^3 \times (3 \times 2^3)^2}{((2)^2)^4}\,, \tag{13.2}$$

usando exponentes negativos esto se convierte en

$$\frac{8^3\,24^2}{4^4} = (2^3)^3 \times (3 \times 2^3)^2 \times ((2)^2)^{-4}\,, \tag{13.3}$$

reordenando y operando en todas las potencias finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{8^3\,24^2}{4^4} &= 2^9 \times 2^6 \times 2^{-8} \times 3^2 = 2^{9+6-8} \times 3^2 = \\ &= 2^7 \times 3^2\,, \end{aligned} \tag{13.4}$$

que es una fórmula expresada solo en términos de primos

Capítulo 14

Errores Garrafales Que Comete la Gente

En este capítulo, mostraremos algunos errores locos (mortales) que podemos cometer si usamos las matemáticas sin el cuidado y respeto que merecen.

Leer este artículo podría ser de interés.

14.1. Factorización Defectuosa

Factorizar un término de una expresión es una operación donde la gente comete muchos errores. Abajo tenemos un ejemplo simple

$$\begin{aligned} a + a^2 + b &= a(1 + a + b)\,, \quad \text{incorrecto} \\ a + a^2 + b &= a(1 + a + \frac{b}{a}) \quad \text{correcto.} \end{aligned} \tag{14.1}$$

El error en la primera línea es que a nunca fue un factor en el tercer término, de hecho, si tomamos el lado derecho de la primera igualdad (roja) y distribuimos la a como se debe hacer, obtenemos

$$a(1 + a + b) = a + a^2 + ab\,,$$

lo cual es obviamente diferente al lado izquierdo de la igualdad original.

La lección es simple, al detectar un candidato para un factor común, se debe tener cuidado en encontrar el candidato en todas partes de la expresión de donde queremos factorizarlo.

14.2. Fracciones Destrozadas

14.2.1. División del Denominador

Este es uno de los errores más comunes al operar con fracciones. Y vale la pena explicarlo con un ejemplo específico

Lo que típicamente encuentro es gente haciendo algo como

$$\frac{1}{3+4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,, \tag{14.2}$$

una igualdad que debe horrorizar a cualquiera, por decir lo menos.

¿Por qué está tan mal? Las fracciones representan partes de un todo. El denominador nos dice en cuántas partes se divide el todo, y el numerador nos dice cuántas de esas partes tenemos. En el lado izquierdo de la ecuación 14.2, el todo se ha dividido en $3 + 4 = 7$ partes, y como indica el numerador, estamos hablando de solo una de esas partes. En el lado derecho estamos hablando de dos unidades, una dividida en 4 partes y otra dividida en 3 partes, además estamos hablando de una de las piezas de la división por 4 a una de las piezas de la división en 3.

Para hacer más vívido el error en la supuesta igualdad 14.2, podemos pensar en su lado izquierdo como la representación de una rebanada de una pizza dividida en siete rebanadas iguales, mientras que el lado derecho representa **dos** rebanadas de pizza, una tomada de una pizza dividida en tres partes iguales, la otra tomada de una pizza dividida en cuatro partes iguales.

Otra forma de notar el error es considerar las expresiones decimales de las fracciones en ambos lados,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3+4} &= \frac{1}{7} = 0{,}142857142857.... \\ \frac{1}{3} &= 0{,}333333.... \\ \frac{1}{4} &= 0{,}25 \end{aligned} \tag{14.3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0{,}58333333... > 0{,}142857142857.... \tag{14.4}$$

Es fácil imaginar cómo se comete el error, las fracciones que muestran un numerador expresado como una suma se pueden dividir en fracciones del mismo denominador como en

$$\frac{1+9}{3} = \frac{1}{3} + \frac{9}{3}\,, \tag{14.5}$$

así que una fácil división de la mente sería hacer lo mismo con los denominadores, lo cual es terrible como hemos estado discutiendo.

El punto es que la división del numerador como en la ecuación no es más que la forma en que se suman las fracciones de denominador común.

Sabemos perfectamente que cuando los denominadores son diferentes debemos encontrar un denominador común para que las fracciones se sumen, por cierto, algunas personas (como muchos maestros de escuela) tienden a usar el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores al sumar o restar fracciones porque simplifica la fracción resultante.

¿Cómo evitar este error?

Simple, solo trabaja sistemáticamente y piensa en cada paso, no te apresures a presumir que eres súper inteligente.

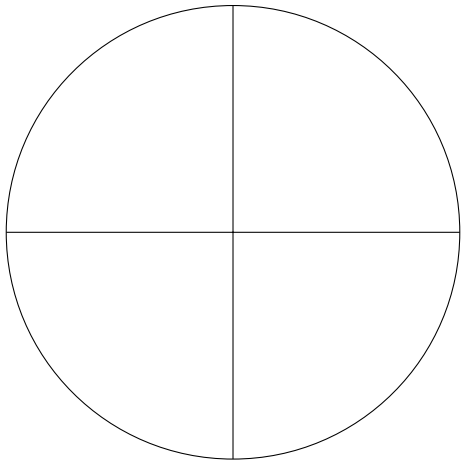

Figura 14.1: Un círculo (Pizza) dividido en cuatro partes iguales

Para terminar esta discusión con un *Coup de grâce* piensa en la igualdad errónea

$$\frac{1}{2+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tag{14.6}$$

en términos de las figuras 14.1 y 14.2 y la forma en que las fracciones se enseñan usualmente a los niños en la escuela primaria.

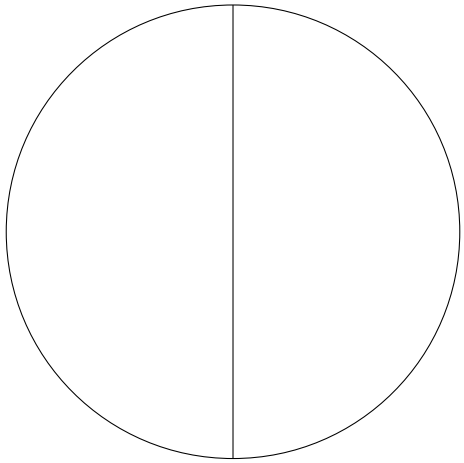

Figura 14.2: Un círculo (Pizza) dividido en mitades.

$1/(2+2)$ es $1/4$ que significa 1 rebanada de una pizza cortada en 4 partes iguales (fig 14.1), $1/2+1/2$ significa tomar dos rebanadas de una pizza cortada en 2 partes iguales, es decir, una pizza entera.

Quien escribe estas notas está seguro de que, a menos que el lector esté en un régimen dietético, preferirá ir por las dos mitades (es decir, 1 pizza completa) que por la primera opción de una rebanada.

Así que, por favor, no olvides

$$\boxed{\frac{1}{2+2} \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

14.3. La Trampa de la Cancelación

Comencemos con un ejemplo sin error. Cuando una fracción contiene un factor común tanto en el numerador como en el denominador, el factor común puede cancelarse tanto del numerador

como del denominador de la siguiente manera.

$$\frac{125}{25} = \frac{25 \times 5}{25} = \frac{\cancel{25} \times 5}{\cancel{25}} = \frac{5}{1} = 5\,, \tag{14.7}$$

otra forma de ver esto es factorizando el factor común de la fracción para construir una fracción con un valor de 1 como

$$\frac{125}{25} = \frac{25 \times 5}{25} = \frac{25}{25} \times 5 = 1 \times 5\,, \tag{14.8}$$

lo cual es el verdadero contenido de la cancelación.

Mostremos ahora el error de cancelación incorrecta en la forma en que se encuentra más usualmente, que es cuando la gente está operando en forma simbólica, o como muchos estudiantes jóvenes dicen, çon letras en lugar de números".

En su forma más común, el problema comienza con una fracción de la forma

$$\frac{a+b}{a+c}\,, \tag{14.9}$$

la cual es terriblemente mal tratada como

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}+c} = \frac{b}{c}\,. \tag{14.10}$$

A veces el error es un poco más provocador como en

$$\frac{a+ba^2}{a+c} = \frac{a(1+ba)}{a+c}\,\frac{\cancel{a}(1+ba)}{\cancel{a}+c} = \frac{1+ba}{c}\,. \tag{14.11}$$

En ambos casos, el error de cancelación defectuosa es similar al mostrado en la sec.14.2.1, es decir, la división del denominador.

La forma de evitar este error es la misma, siendo cuidadoso y pensando en cada paso a lo largo de un cálculo antes de tomarlo.

14.4. Cómo "Demostrar"1=2 (y Por Qué No Deberías)

Sean dos números reales a y b, y supón que: $a = b$.

Multiplica ambos lados de la igualdad por a para obtener:

$$a^2 = ab\,,$$

ahora resta b^2 de ambos lados para obtener:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2\,.$$

Claramente, el lado izquierdo puede factorizarse como

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)\,.$$

En el lado derecho de la identidad podemos factorizar b

$$ab - b^2 = b(a - b)\,,$$

así

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)\,,$$

Como $(a - b)$ aparece en ambos lados, podemos cancelarlo para obtener:

$$a + b = b\,,$$

y como $a = b$, podemos sustituir b por a para obtener: $b + b = 2b$, consecuentemente:

$$2b = b$$

Esto claramente implica

$$2 = 1\,.$$

¡Qué absurdo!, ¿de dónde vino?

Detectar el error en esta deducción es bastante sutil. Si revisamos línea por línea, no hay errores algebraicos en ninguna parte del cálculo. Parece que estamos ante un misterio.

¿Misterio?, no existe tal cosa. Como siempre, debemos ser muy cuidadosos en cada paso de cualquier razonamiento matemático (bueno, es mejor que seamos cuidadosos en cualquier tipo de razonamiento). Observa la línea

$$(a - ba)(a - b) = b(a - b)\,,$$

hasta ese punto todas las operaciones han sido perfectamente legales, por así decirlo. Pero el siguiente paso aparentemente lógico, cancelar $a-b$, es simplemente incorrecto. La razón debería ser obvia para cualquiera que preste atención a cada paso de una línea de razonamiento: Desde el principio, existía la suposición de que $a = b$ y por lo tanto $a - b = 0$, lo que hace que la división por $a - b$ esté mal definida, es decir, el último paso del razonamiento es inconsistente con las reglas del buen razonamiento matemático y, por lo tanto, si se utiliza, obtenemos un resultado inconsistente como $1 = 2$.